МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВ
Механико-математический факультет

Курсовая работа.

Аппроксимация пространственных отрезков по их проекциям на плоскости.

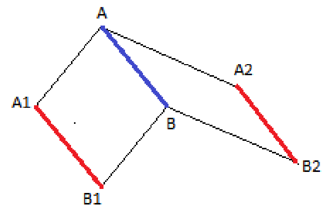
Научный руководитель: Валединский В.Д.

Студент: Ковальков М.Н.

Содержание

1. Постановка задачи

Имеется пространственный отрезок (ребро многогранника), известны проекции этого отрезка на некоторый набор плоскостей. Требуется восстановить ребро: предъявить координаты его начала и конца, опираясь на имеющиеся данные. Если бы проекции были получены абсолютно точно, что было бы достаточно только две проекции на пересекающиеся плоскости, чтобы построить требуемое ребро. Однако в реальности проекции не вполне точны. Поэтому ставится задача построения наиболее соответствующего ребра (наименее удаленного от совокупности плоскостей).



Итак, входными данными являются:

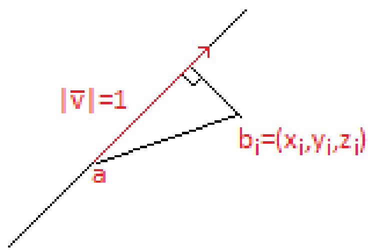
- Число проекций.
- Вектора нормали каждой плоскости на которые проектируем.
- Координаты начала и конца отрезка проекции.

В другой вариации данной задачи вместо отрезка проекции имеется некоторый набор точек задающий эту проекцию (случай когда имеется фотографии с низким разрешением и проекция отрезка представляет собой набор пикселей) По этим данным строим соответствующую структуру для каждой проекции.

```
struct contourEdge
{
  int n;//число точек
  vector norm;//вектор нормали
  vector *points;//набор точек
};
```

2. Построение отрезка по набору точек

Заметим, что по множеству точек проекции можно построить наименее удаленный отрезок. Этим построением можно свети задачу к первоначальной (когда на каждом ребре имеется отрезок проекции). Рассмотрим алгоритм построения такого наименее удаленного отрезка.



Шаг 1
Для начала заметим, что центр масс данного набора будет лежать на требуемом отрезке (следствие теоремы Пифагора).
Шаг 2
Теперь ищем направление, наименее удаленное от совокупности точек. В качестве нормы удаленности используем сумму квадратов расстояний от точек до прямой с направляющим вектором (v_x, v_y, v_z) и

проходящей через точку, найденную на предыдущем шаге.
Проекция вектора $(b_i - a)$ на вектор v равна $\frac{(b_i - a, v)}{(v,v)} v$. Пользуясь теоремой Пифагора и тем, что $|v| = 1$. Получаем, что квадрат расстояния от точки b_i до нашей прямой равен $(b_i - a, b_i - a) - (b_i - a, v)^2$.
В итоге получаем целевую функцию:

$$\Gamma = \sum_i ((x_i - a_x)^2 + (y_i - a_y)^2 + (z_i - a_z)^2 - ((x_i - a_x)v_x + (y_i - a_y)v_y + (z_i - a_z)v_z)^2) - \lambda(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 1) \to min$$

Для этого находим частные производные по v_x, v_y, v_z и приравниваем их к нулю.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial v_x} = (\sum_i \alpha_i^2)v_x + (\sum_i \alpha_i \beta_i)v_y + (\sum_i \alpha_i \gamma_i)v_z - \lambda v_x = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial v_y} = (\sum_i \alpha_i \beta_i)v_x + (\sum_i \beta_i^2)v_y + (\sum_i \beta_i \gamma_i)v_z - \lambda v_y = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial v_z} = (\sum_i \alpha_i \gamma_i)v_x + (\sum_i \beta_i \gamma_i)v_y + (\sum_i \gamma_i^2)v_z - \lambda v_z = 0$$

Где $\alpha_i = x_i - a_x, \beta_i = y_i - a_y, \gamma = z_i - a_z$ соответсвтенно. Запишем эти выражения в матричном виде:

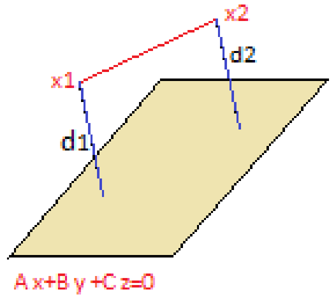
$$\begin{pmatrix} (\sum_i \alpha_i^2) - \lambda & (\sum_i \alpha_i \beta_i) & (\sum_i \alpha_i \gamma_i) \\ (\sum_i \alpha_i \beta_i) & (\sum_i \beta_i^2) - \lambda & (\sum_i \beta_i \gamma_i) \\ (\sum_i \alpha_i \gamma_i) & (\sum_i \beta_i \gamma_i) & (\sum_i \gamma_i^2) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к задаче поиска собственных векторов для симметрической матрицы. Если два собственных значения совпадают, то решением задачи будет собственный вектор третьего собственного значения. Если же все собственные значения различны, то выбираем тот вектор, прямая заданная которым будет наименее удалена от совокупности точек.
Шаг 3
По полученной прямой строим отрезок. Для этого находим скалярные произведения векторов v и $(b_i - a)$ выбирая при этом его наименьшее и наибольшее значения, проекции соответствующих векторов на вектор v дадут начало и конец отрезка.

3. Построение ребра по отрезкам проекций

Теперь опишем алгоритм построения объемного отрезка по его проекциям на набор плоскостей.
Предварительные замечания:

1) Считаем, что по аппликате проекции точны. Поэтому $z1, z2$ определены.



2) Нормой удаленности отрезка и плоскости считаем сумму квадратов расстояний между концами отрезка и плоскостью.$d_1^2 + d_2^2$

3) Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется с помощью формулы

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Шаг 1

Строим плоскости по отрезку проекции и направляющему вектору. Предварительно обозначим $a_1 = x_2 - x_1, b_1 = y_2 - y_1, c_1 = z_2 - z_1$, где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)-координаты начала и конца отрезка проекции; (a, b, c)-направляющий вектор для плоскости. Запишем уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_1)bc_1 + (y - y_1)ca_1 + (z - z_1)ab_1 - (z - z_1)ba_1 - (x - x_1)cb_1 - (y - y_1)ac_1 = 0$$

Получаем коэффициенты для уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = bc_1 - cb_1$

$B = ca_1 - ac_1$

$C = ab_1 - ba_1$

$D = -x_1(bc_1 - cb_1) - y_1(ca_1 - ac_1) - z_1(ab_1 - ba_1)$

Осталось нормировать коэффициенты A, B, C чтобы $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, для этого поделим их и коэффициент D на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Шаг 2

Вычислим сумму расстояний от отрезка с концами $(x1, y1, z1), (x2, y2, z2)$ и минимизируем ее:

$$S = \sum_i (a_i x_1 + b_i y_1 + c_i z_1 + d_i)^2 + (a_i x_2 + b_i y_2 + c_i z_2 + d_i)^2 \to min$$

Для этого дифференцируем S по x_1, x_2, y_1, y_2 и приравниваем частные производные к нулю.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} = (\sum_i a_i^2)x_1 + (\sum_i a_i b_i)y_1 + \sum_i a_i(c_i z_1 + d_i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y_1} = (\sum_i a_i b_i)x_1 + (\sum_i b_i^2)y_1 + \sum_i b_i(c_i z_1 + d_i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2} = (\sum_i a_i^2)x_2 + (\sum_i a_i b_i)y_2 + \sum_i a_i(c_i z_2 + d_i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y_2} = (\sum_i a_i b_i)x_2 + (\sum_i b_i^2)y_2 + \sum_i b_i(c_i z_2 + d_i) = 0$$

Теперь осталось решить 2 системы 2×2, чтобы найти x_1, y_1, x_2, y_2. Тем самым мы нашли требуемое ребро.

4. Возможные улучшения алгоритма

Наиболее интересной идеей по улучшению алгоритма являетс приписка весов каждой проекции. Так, например, очевидно что если имеется несколько проекций на "переднюю плоскость"и одна на "заднюю плоскость то эта одна проекция имеет больший вес.
Другой способ улучшения связан со случаем, когда проекции могут распадаться на точки. В этом случаи мы, как и раньше, строим отрезки проекций, затем по ним строим ребро, однако следующим шагом мы маленькими сдвигами и поворотами ребра достигаем минимума суммы расстояний до всех точек.

5. Приложение данного алгоритма

Построение объемного ребра по проекциям на плоскости является первым этапом построения 3D модели многогранника (например, кристалла). В этом случае проекциями на плоскости являются снимки на фотокамеру, расположенную в различных ракурсах.