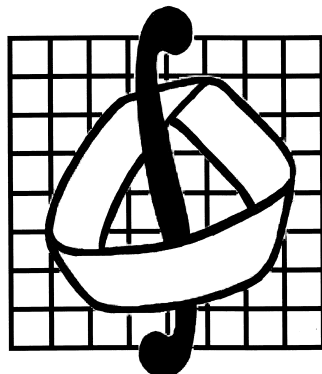


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет



Численное решение двумерного уравнения Навье-Стокса с использованием схемы с центральными разностями Плотность-Скорость (последовательный вариант).

Ковальков Максим, 404 группа

Содержание

1. Постановка задачи	2
2. Описание схемы.	2
3. Таблицы ошибок.	3
3.1. $\mu = 0.1$	3
3.2. $\mu = 0.01$	4
3.3. $\mu = 0.001$	5
4. Случай с набеганием и вытеканием.	6

1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в области Ω , выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p = L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Или в дивергентном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \end{cases}$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор. В нашем случае берем $L \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla(\mu \operatorname{div} \mathbf{u})$

Приведем развернутую запись уравнений для двумерного случая :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1 \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho f_2 \end{cases}$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, которую будем считать известной неотрицательной величиной ($\mu = 0.1, 0.01, 0.001$). Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости \bar{u} являющиеся функциями переменных Эйлера $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. В уравнения также входят две известные функции: давление газа $p = C\rho$ и вектор внешних сил \mathbf{f} , являющейся функцией переменных Эйлера.

2. Описание схемы.

Для поиска численного решения задачи можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности H и скоростей V_1, V_2 ищутся в узлах сетки Ω_h

$$\begin{cases} H_t + 0.5 \sum_{k=1}^s (V_k \hat{H}_{x_k} + (V_k \hat{H})_{x_k}^\circ + H(\hat{V}_k)_{x_k}^\circ) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_h \\ H_t + 0.5((V_k \hat{H})_{x_k} + H(\hat{V}_k)_{x_k}) = 0, & \mathbf{x} \in \gamma_k^- \\ H_t + 0.5((V_k \hat{H})_{\bar{x}_k} + H(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k}) = 0, & \mathbf{x} \in \gamma_k^+ \\ (V_k)_t + \frac{1}{3}(V_k(\hat{V}_k)_{x_k}^\circ + (V_k \hat{V}_k)_{x_k}^\circ) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_m(\hat{V}_k)_{x_k}^\circ + (V_m \hat{V}_k)_{x_k}^\circ - V_k(V_m)_{x_k}^\circ) + \frac{p'_\rho(H)}{H} \hat{H}_{x_k}^\circ = \\ = \tilde{\mu}(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m}) - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_k)_{x_m \bar{x}_m}) + \\ + \frac{\mu}{3H} \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_m)_{x_k, x_m}^\circ + f_k, & \mathbf{x} \in \Omega_h \\ \hat{V}_k = 0, & \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2 \end{cases}$$

3. Таблицы ошибок.

3.1. $\mu = 0.1$

Table for H in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	2.119264e-01	2.244937e-01	2.432936e-01
40	1.556927e-01	1.632566e-01	1.449694e-01
80	1.245299e-01	1.028954e-01	8.583144e-02

Table for H in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	7.960317e-01	6.984756e-01	8.350843e-01
40	4.159086e-01	4.483944e-01	4.457728e-01
80	2.438668e-01	2.361752e-01	2.059500e-01

Table for H in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	9.914825e-01	9.542974e-01	9.044845e-01
40	9.322386e-01	7.009247e-01	5.338537e-01
80	8.023375e-01	6.376466e-01	4.206129e-01

Table for V1 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	3.490151e-01	3.481725e-01	3.438588e-01
40	2.182725e-01	2.242968e-01	2.316573e-01
80	1.266325e-01	1.304546e-01	1.254176e-01

Table for V1 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.147608e+00	1.072740e+00	1.053143e+00
40	6.317741e-01	6.742165e-01	6.886450e-01
80	3.219885e-01	3.601378e-01	3.542157e-01

Table for V1 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	3.371840e+00	2.238684e+00	1.840045e+00
40	3.425209e+00	2.173418e+00	1.758465e+00
80	3.127839e+00	2.376216e+00	1.796877e+00

Table for V2 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.270917e-01	1.488103e-01	1.424088e-01
40	9.100088e-02	7.778334e-02	8.624692e-02
80	4.608960e-01	4.436222e-02	4.200588e-02

Table for V2 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	4.090814e-01	4.382719e-01	4.641564e-01
40	2.556554e-01	2.255813e-01	2.582047e-01
80	1.503232e-01	1.272572e-01	1.260206e-01

Table for V2 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	7.274000e-01	5.516204e-01	4.766699e-01
40	6.342910e-01	4.661118e-01	3.330324e-01
80	4.689820e-01	3.548305e-01	2.548886e-01

3.2. $\mu = 0.01$

Table for H in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	2.272866e-01	2.249396e-01	2.744850e-01
40	1.711320e-01	1.601257e-01	1.765804e-01
80	1.129292e-01	9.595093e-02	1.138504e-01

Table for H in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	8.614482e-01	7.722036e-01	8.575079e-01
40	4.534375e-01	5.094813e-01	4.117091e-01
80	3.060240e-01	2.668916e-01	2.126439e-01

Table for H in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.079349e+00	1.031622e+00	1.062424e+00
40	9.429952e-01	8.162313e-01	5.766082e-01
80	9.551239e-01	7.220589e-01	4.816178e-01

Table for V1 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	3.787872e-01	4.453037e-01	4.005741e-01
40	2.247250e-01	2.223312e-01	2.556666e-01
80	1.358048e-01	1.410218e-01	1.239392e-01

Table for V1 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.128330e+00	1.342920e+00	1.242549e+00
40	6.202055e-01	6.883295e-01	7.264404e-01
80	3.955356e-01	4.138486e-01	3.902202e-01

Table for V1 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	3.952400e+00	2.857428e+00	2.010595e+00
40	3.936872e+00	2.834286e+00	1.625943e+00
80	3.910621e+00	2.482752e+00	2.022516e+00

Table for V2 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.355919e-01	1.393642e-01	1.667592e-01
40	9.473723e-02	9.097656e-02	9.810688e-02
80	4.868214e-01	5.284192e-02	4.590516e-02

Table for V2 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	5.474924e-01	4.210679e-01	4.103040e-01
40	2.691916e-01	2.481152e-01	2.842884e-01
80	1.751324e-01	1.367324e-01	1.362766e-01

Table for V2 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	8.219620e-01	5.699290e-01	5.213096e-01
40	5.951228e-01	5.354580e-01	4.352607e-01
80	6.099865e-01	4.331506e-01	2.619840e-01

3.3. $\mu = 0.001$

Table for H in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	2.344102e-01	3.114377e-01	3.081273e-01
40	2.436152e-01	1.389545e-01	1.876075e-01
80	1.180193e-01	1.490614e-01	1.355184e-01

Table for H in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.108139e+00	9.382856e-01	1.108806e+00
40	5.770622e-01	6.375939e-01	5.862333e-01
80	2.789555e-01	2.514197e-01	3.362586e-01

Table for H in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.665127e+00	1.087258e+00	1.102125e+00
40	1.337404e+00	6.415243e-01	5.841191e-01
80	8.649548e-01	6.959457e-01	4.995064e-01

Table for V1 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	4.828102e-01	4.670868e-01	3.631206e-01
40	3.524400e-01	3.190824e-01	3.279108e-01
80	1.872792e-01	1.712138e-01	1.232000e-01

Table for V1 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.356264e+00	1.037400e+00	1.054284e+00
40	6.729069e-01	9.090055e-01	8.878716e-01
80	5.563539e-01	4.393268e-01	4.941189e-01

Table for V1 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	4.510000e+00	3.629640e+00	1.792670e+00
40	4.676665e+00	3.315975e+00	2.295349e+00
80	3.657368e+00	3.404520e+00	2.505087e+00

Table for V2 in C-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	1.886496e-01	1.240314e-01	1.459656e-01
40	1.299420e-01	1.094309e-01	1.190030e-01
80	4.719383e-01	6.640944e-02	5.919816e-02

Table for V2 in L2-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	4.618094e-01	6.055808e-01	5.338226e-01
40	2.939654e-01	2.432692e-01	3.378916e-01
80	1.949504e-01	1.514716e-01	1.575578e-01

Table for V2 in W-norma

$N \setminus M$	20	40	80
20	9.208884e-01	7.583304e-01	5.423467e-01
40	6.471522e-01	4.652340e-01	3.326811e-01
80	6.740325e-01	3.849819e-01	2.524325e-01

4. Случай с набеганием и вытеканием.

```
set output "1/5.png" plot [-0.5:3.5] [-0.5:2.5] 'out5.txt' using 1:2:3:4 with vectors lt rgb
'red', "shab.txt" with lines lw 1 lt rgb 'black'
```

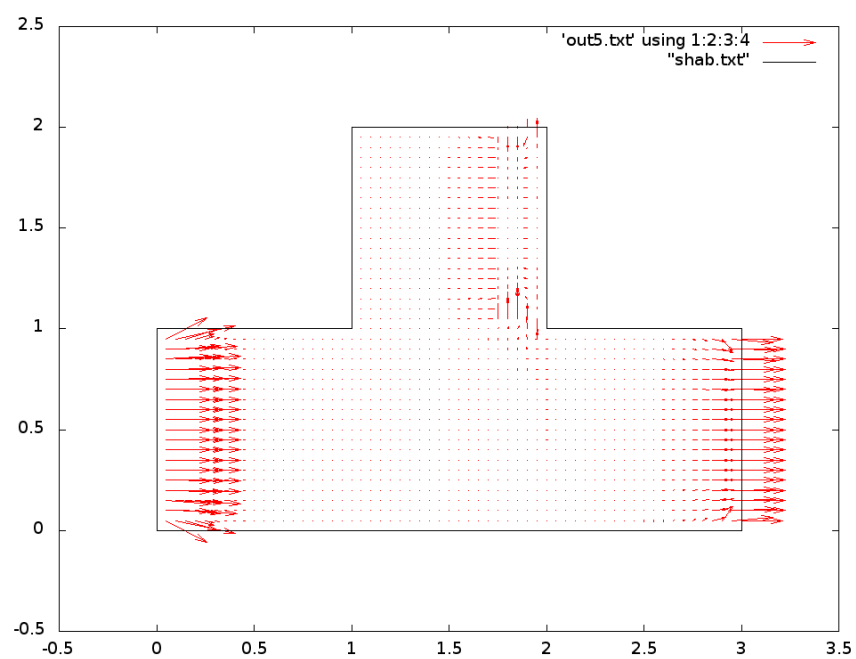


Рис. 1. $\mu = 0.01$, Время=0,25

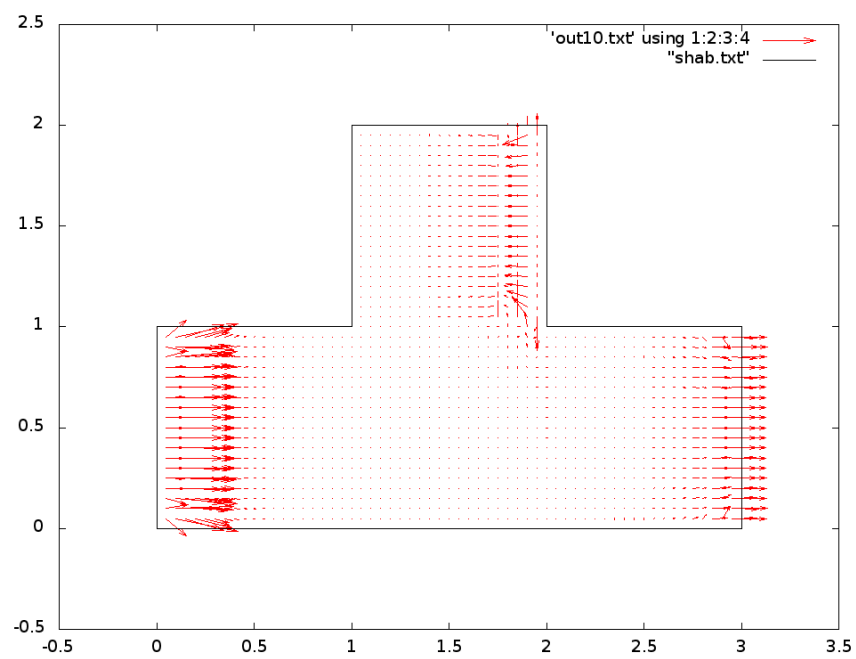


Рис. 2. $\mu = 0.01$, Время=0,5

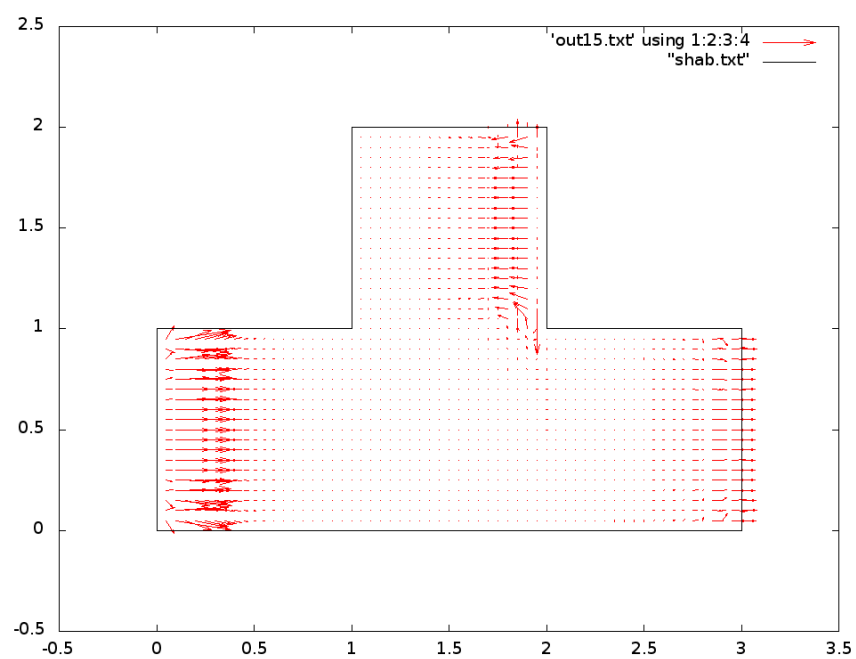


Рис. 3. $\mu = 0.01$, Время=0,75

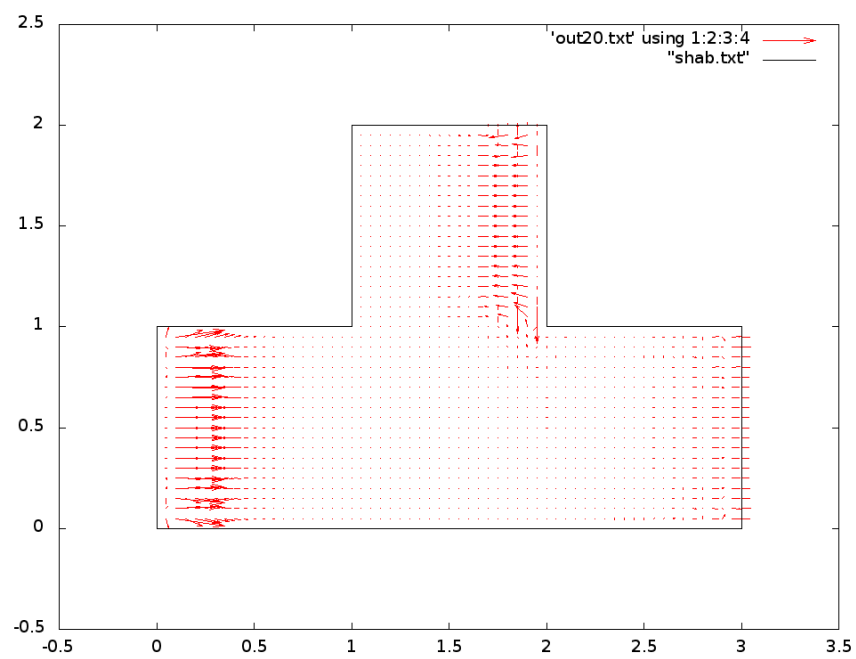


Рис. 4. $\mu = 0.01$, Время=1

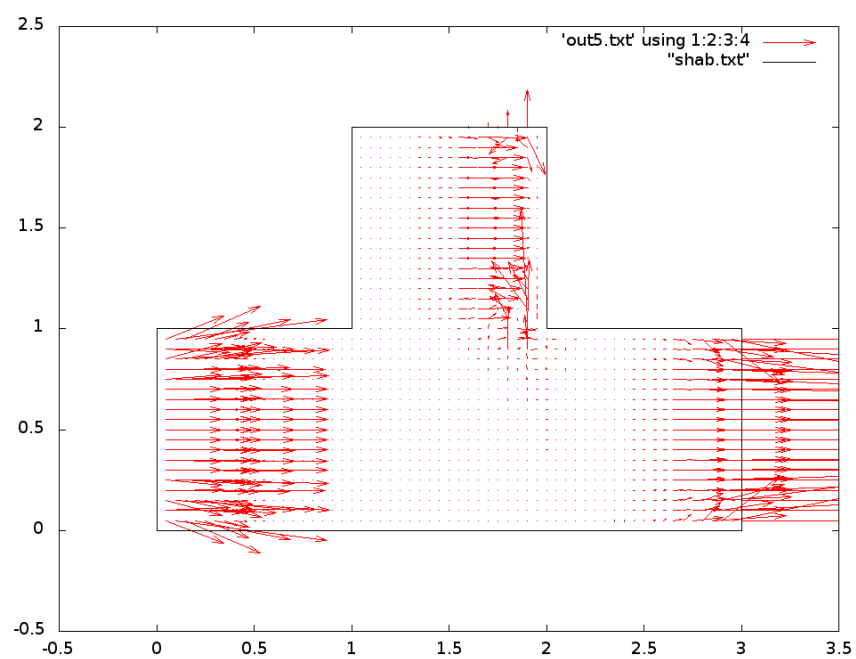


Рис. 5. $\mu = 0.001$, Время=0,25

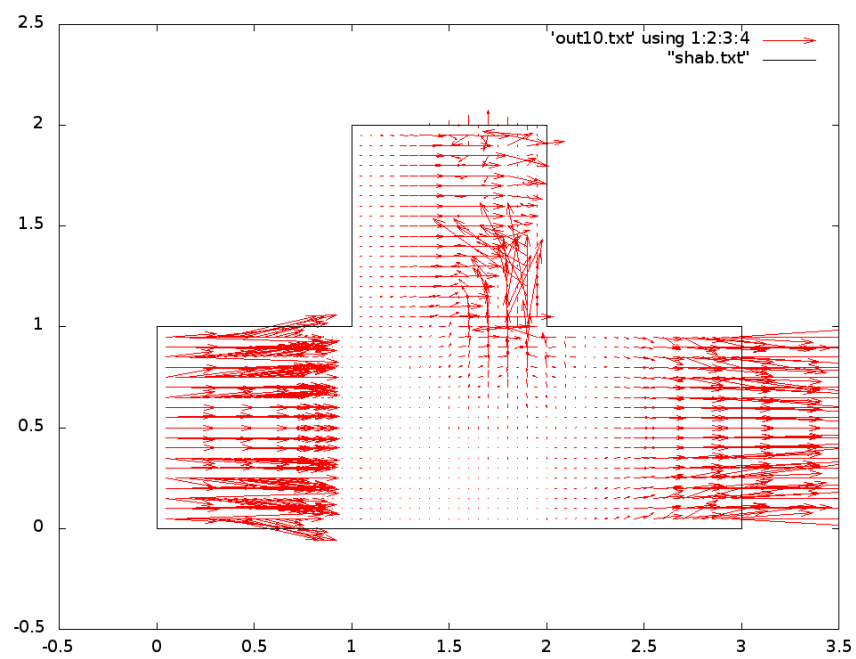


Рис. 6. $\mu = 0.001$, Время=0,5

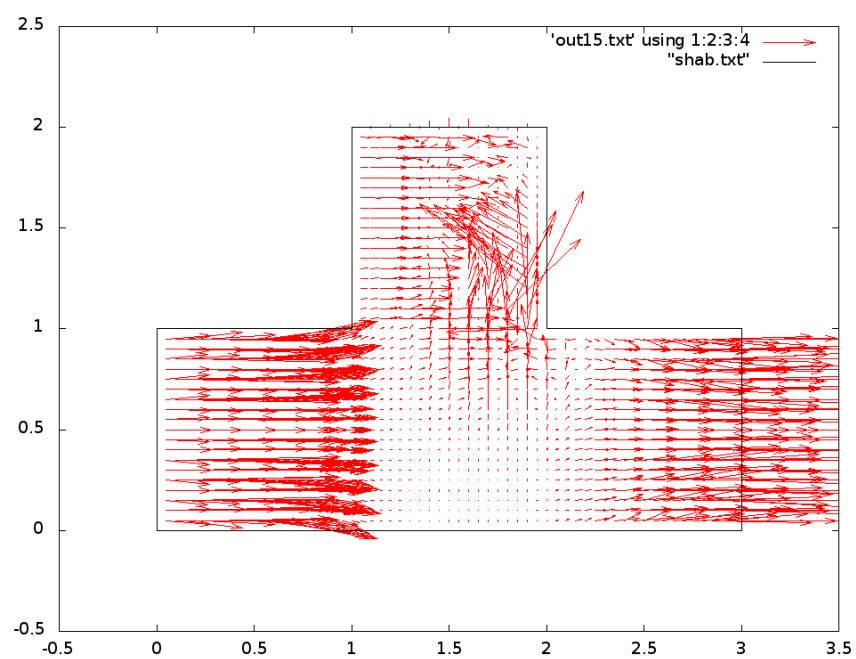


Рис. 7. $\mu = 0.001$, Время=0,75

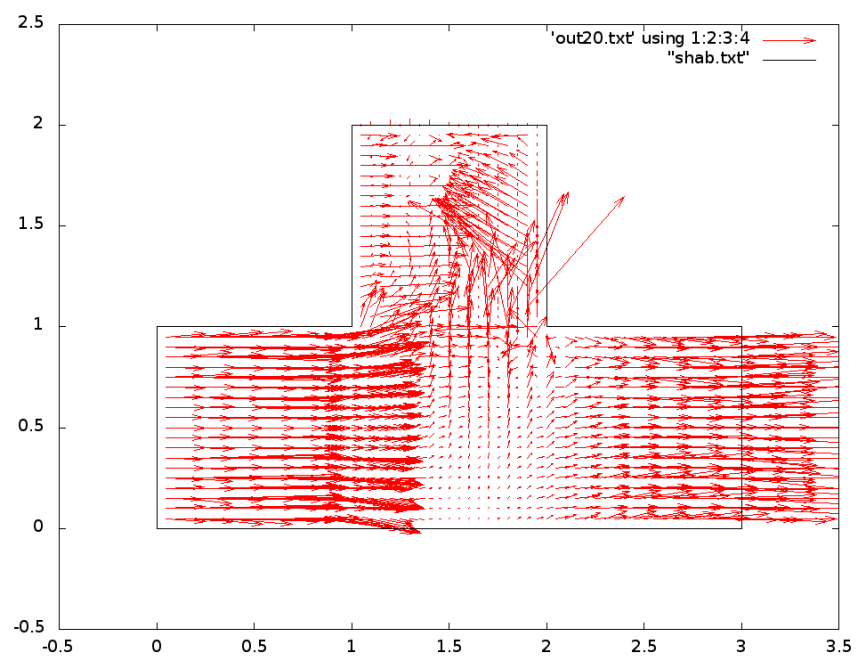


Рис. 8. $\mu = 0.001$, Время=1