No.

Date

4-1

(2). 证明：由 $f: A\to B$, $(C\subseteq A)$.

得对 $y\in f(A)-f(C)$ 若 $\exists x\in A$, $f(x)=y$

但对 $\forall z\in C$, $y\neq f(z)$. 有 $x\in A-C$.

因此 $y\in f(A-C)$ $\Rightarrow$ 故 $f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$.

4-2.

(3) 证明：设 $g: X\to Y$ $f: Y\to Z$.

a) $\forall z\in Z$, $\because$ $f\circ g$ 是满射，故必有 $x\in X$，使 $f\circ g(x)=z$.

$\because$ $f\circ g(x)=f(g(x))$ $g(x)=y\in Y$.

$\therefore$ $\forall y\in Y$, 有 $z\in Z$, 使 $z=f(y)$.

但每个 z 在 f 作用下都是 Y 中一个映象，可知 f 是满射的.

b) 设 $f\circ g$ 入射. 若 g 不是入射，则必有 $x_1\neq x_2$ 时 $g(x_1)=g(x_2)$

$=y\in Y$.

$\therefore f\circ g(x_1)=f(g(x_1))=f(g(x_2))=f\circ g(x_2)$ 得出 $f\circ g$ 不是入射，矛盾.

c) $f\circ g$ 是双射的，故 $f\circ g$ 是满射和入射的.

$\therefore$ f 是满射的，g 是入射的.

No.

Date

4-4.

(1) 证明：1) 设 $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{n}\}$ 作 $f:(0,1)\to[0,1)$.

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2})=0. \\ f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n-1},\quad x\in A\wedge x>2. \\ f(x)=x,\quad x\in(0,1)-A. \end{cases}$$

2) 设 $A=\{0,\frac{1}{2}\cdots,\frac{1}{n}\}$ 作 $f:[0,1)\to[0,1]$.

$$\begin{cases} f(0)=0. \\ f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n-1}\quad n>1,\ \frac{1}{n}\in A. \\ f(x)=x,\quad x\in[0,1)-A. \end{cases}$$

4-5.

(1) 证明：$\because A_1, A_2$ 可数.

$\therefore$ 设 $A_1=\{a_0, a_1, a_2\cdots a_m\}$.

$A_2=\{b_0, b_1, b_2\cdots b_n\}$.

作 $f: A_1\times A_2\to N\times N$:

$f\langle a_m, b_n\rangle=\langle m,n\rangle$. $\Rightarrow$ f 是双射

$\because$ $g: N\times N\to N$ 为双射. $g(\langle m,n\rangle)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$

$\therefore$ $A_1\times A_2$ 可数.