# 第十一章：函数

# 函数

## 函数和选择公理

例：集合$A$={1，2，3}上的两个关系

$g=\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>\}$ $h=\{<1, 2>, <2, 3>\}$

- 函数定义

函数的逆关系不一定是函数

- 对集合$A$到集合$B$的关系 $f$，若满足下列条件：

单值性 (1) 对任意的 $x\in \mathrm{dom}(f)$，存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}(f)$，使$xfy$成立；

全部性 (2) $\mathrm{dom}(f)=A$

则称 $f$ 为从$A$到$B$的函数，或称 $f$ 把$A$映射到$B$

(也称$f$为全函数、映射变换)

✓ 一个从$A$到$B$的函数$f$，可以写成$f$：$A\to B$；
若$xfy$，则可记作$f$：$x\mapsto y$或 $f(x)=y$

✓ 若$A$到$B$的关系$f$只满足条件(1)，且有$\mathrm{dom}(f)\subset A$，
则称 $f$为从$A$到$B$的部分函数(有的书上称$f$为函数)

# 函数

## 函数和选择公理

- 对集合$A$和$B$，从$A$到$B$的所有函数的集合记为$A_B$(或记为$B^A$)．则 $A_B=\{f \mid f:\ A\to B\}$.
  - 若$A$和$B$是有限集合，且$|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A_B|=n^m$.
  - 从$\emptyset$到$\emptyset$的函数只有$f=\emptyset$，从$\emptyset$到$B$的函数只有$f=\emptyset$
  - 若$A\neq\emptyset$，从$A$到$\emptyset$的函数不存在

$$\boxed{\emptyset_{\emptyset}=\emptyset_B=\{\emptyset\},\ A_{\emptyset}=\emptyset\ (\text{对}A\neq\emptyset)}$$

# 函数

## 函数和选择公理

- 设 $f$：$A\to B$，$A_1\subseteq A$，定义$A_1$在 $f$ 下的象 $f[A_1]$为

$$f[A_1]=\{y|(\exists x)(x\in A_1\wedge y=f(x))\}$$

表示逆关系，不是逆函数

把 $f[A]$称为函数的象。

- 设$B_1\subseteq B$，定义$B_1$在$f$下的完全原象$\boxed{f^{-1}}[B_1]$为

$$f^{-1}[B_1]=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$$

例：$f: Z\to Z$定义为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{当}x\text{为偶数}\\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{当}x\text{为奇数}\end{cases}$$

$$f[N]=N$$

$$f[\{-1,0,1\}]=\{-1,0\}$$

$$f^{-1}[\{2,3\}]=\{4,5,6,7\}$$

$$f[\emptyset]=f^{-1}[\emptyset]=\emptyset$$

# 函数

## 函数和选择公理

- 设$f$：$A \to B$

  (1) 若$\mathrm{ran}(f)=B$，则称$f$是**满射**的，或称$f$是$A$到$B$上的

  (2) 若对任意的$x_1$，$x_2 \in A$， $x_1 \neq x_2$，都有$f(x_1) \neq f(x_2)$，
  则称$f$是**单射**的，或内射的，或—对一的

  (3) 若$f$是满射的又是单射的，则称$f$是**双射**的，或一对一$A$到$B$上的

- 怎样构造从$A$到$B$的双射函数? $A=N \times N$，$B=N$

$$f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$$

# 函数

## 函数和选择公理

- 设$f$：$A\to B$，如果存在一个$y\in B$，使得对所有的$x\in A$，有$f(x)=y$，即有$f[A]=\{y\}$，则称 $f$：$A\to B$为常函数
- $A$上的恒等关系$I_A$：$A\to A$称为恒等函数, 即对任意的$x\in A$，有$I_A(x)=x$.
- 对实数集$R$，设$f$：$R\to R$，如果$(x\le y)\to(f(x)\le f(y))$，则称$f$为单调递增的；如果$(x<y)\to(f(x)<f(y))$，则称$f$为严格单调递增的（单凋递减和严格单调递减）
- 对集合$A$，$n\in N$，把函数 $f$：$A^n\to A$称为$A$上的$n$元运算

# 函数

## 函数和选择公理

把$A$的元素映射到从$B$到$C$的函数 $f: B\rightarrow C$

- 设$A$，$B$，$C$是集合，$B_C$为从$B$到$C$的所有函数的集合，则 $F$：$A\rightarrow B_C$称为一个泛函

泛函$F$：$R\rightarrow R_R$，$F(a)=(f(x)=x+a)$

$F(2)$对应函数 $x|\rightarrow x+2$ ➡ $F(2)(3)=3+2=5$

- 设$E$是全集，对任意的$A\subseteq E$，$A$的特征函数$\chi_A$定义为：

$$\chi_A:\ E\rightarrow\{0, 1\},\ \chi_A(a)=\begin{cases}1, & a\in A\\ 0, & a\notin A\end{cases}$$

设$E=\{a, b, c\}$, $A=\{a, c\}$, 则$\chi_A(a)=1$, $\chi_A(b)=0$, $\chi_A(c)=1$.

## 函数和选择公理

- 设$R$是$A$上的等价关系，令$g$：$A\rightarrow A/R$，$g(a)=[a]_R$，则称$g$为从$A$到商集$A/R$的**典型映射或自然映射**.

设$A=\{1, 2, 3\}$，$R$是$A$上的等价关系，它诱导的等价类是$\{1, 2\}$，$\{3\}$

则从$A$到$A/R$的自然映射$g$为

$$g：\{1, 2, 3\}\rightarrow\{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

$$g(1)=\{1, 2\}，g(2)=\{1, 2\}，g(3)=\{3\}$$

- 选择公理(形式1)：对任意的关系$R$，存在函数$f$，使得$f\subseteq R$且$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(R)$.

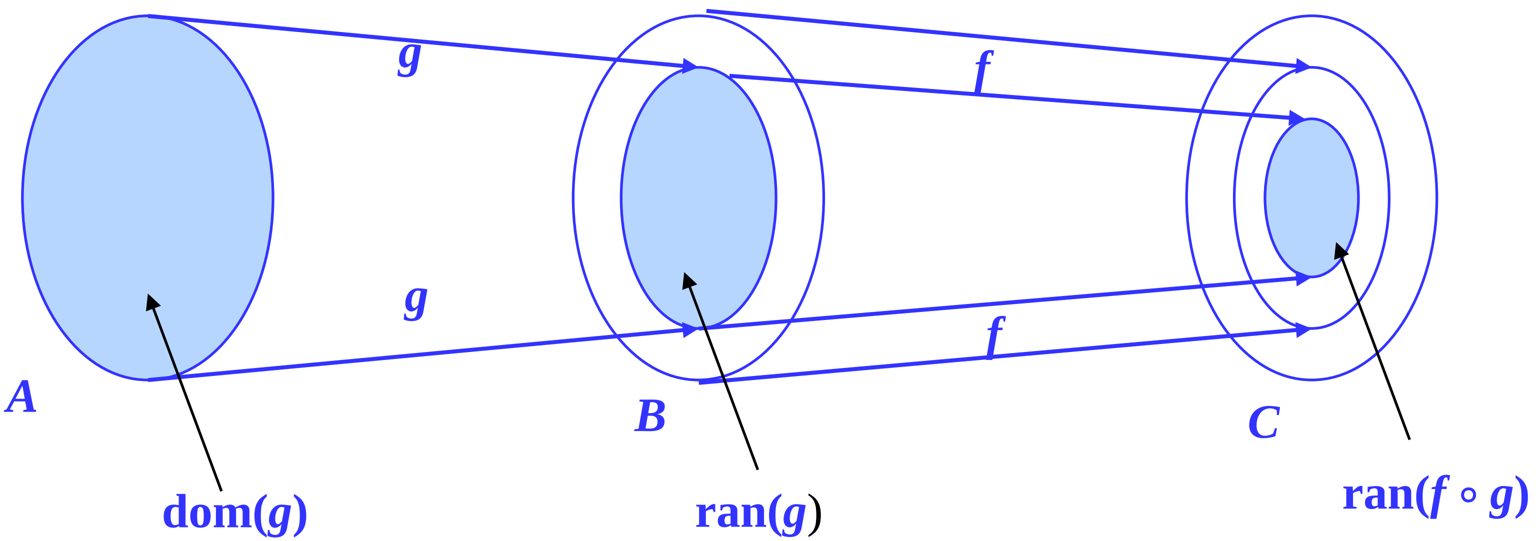
# 函数

## 函数的合成

- 设 $g$：$A\to B$，$f$：$B\to C$，则

  (1) $f\circ g$是函数 $f\circ g$：$A\to C$，

  (2) 对任意的$x\in A$，有$(f\circ g)(x)=f(g(x))$




$\mathrm{dom}(g)=A$, $\mathrm{ran}(g)\subseteq B=\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f)\subseteq C$, 而$\mathrm{dom}(f\circ g)=A$, $\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq C$

## 函数的合成

- 设 $g$：$A\to B$，$f$：$B\to C$，则有

  (1) 若$f$，$g$是满射的，则$f\circ g$是满射的

  (2) 若$f$，$g$是单射的，则$f\circ g$是单射的

  (3) 若$f$，$g$是双射的，则$f\circ g$是双射的

- 设 $g$：$A\to B$，$f$：$B\to C$，则有

  (1) 若$f\circ g$是满射的，则 $f$ 是满射的

  (2) 若$f\circ g$是单射的，则 $g$ 是单射的

  (3) 若$f\circ g$是双射的，则 $f$ 是满射的, $g$ 是单射的

- 设$f$：$A\to B$，则$f=f\circ I_A=I_B\circ f$

## 函数的合成

- 例 设$g$：$A\to B$，$f$：$B\to C$，$A=\{a\}$，$B=\{b, d\}$，$C=\{c\}$

  $g=\{\langle a, b\rangle\}$，$f=\{\langle b, c\rangle, \langle d, c\rangle\}$

  则 $f\circ g=\{\langle a, c\rangle\}$.

  $f\circ g$是满射的，但是$g$不是满射的.

  $f\circ g$是单射的，但是$f$不是单射的.

# 函数

## 函数的逆

- 一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数

例: 对$A=\{a, b, c\}$, $A$上的关系$R$为$R = \{<a, b>, <a, c>, <a, a>\}$

从$A$到$A$的函数 $f$ 为 $f=\{<a, c>, <b, c>, <c, a>\}$

$R^{-1}=\{<b, a>, <c, a>, <a, a>\}$是$A$到$A$的函数

$f^{-1}=\{<c, a>, <c, b>, <a, c>\}$不是$A$到$A$的函数

- 若 $f$：$A\rightarrow B$是双射的，则$f^{-1}$是函数$f^{-1}$：$B\rightarrow A$

① 对任意的$y\in B$，存在$x\in A$使$<x, y>\in f$，$<y, x>\in f^{-1}$，故$\mathrm{dom}(f^{-1})=B$

② 对任意的$y\in B$，若存在$x_1, x_2\in A$，使得$<y, x_1>\in f^{-1}$且$<y, x_2>\in f^{-1}$，则$<x_1, y>\in f$且$<x_2, y>\in f$，故$x_1=x_2$，即$f^{-1}$是函数$f^{-1}$：$B\rightarrow A$.

## 函数的逆

- 设$f$：$A \to B$是双射的，则称$f^{-1}$：$B \to A$为$f$的**反函数**
- 若$f$：$A \to B$是双射的，则$f^{-1}$：$B \to A$是双射的.
- 若$f$：$A \to B$是双射的，则对任意的$x \in A$，有 $f^{-1}(f(x)) = x$，对任意的$y \in B$，有$f(f^{-1}(y))=y$。
  - 对任意的$x \in A$，$f^{-1}(f(x)) = x$，则$(f^{-1} \circ f)(x) = x$，于是$f^{-1} \circ f = I_A$.
  - 同理也有，$f \circ f^{-1} = I_B$.
  - 对非双射的函数$f: A \to B$，是否存在函数$g$：$B \to A$使$g \circ f = I_A$呢? 是否存在函数$h$：$B \to A$使$f \circ h = I_B$呢?

# 函数

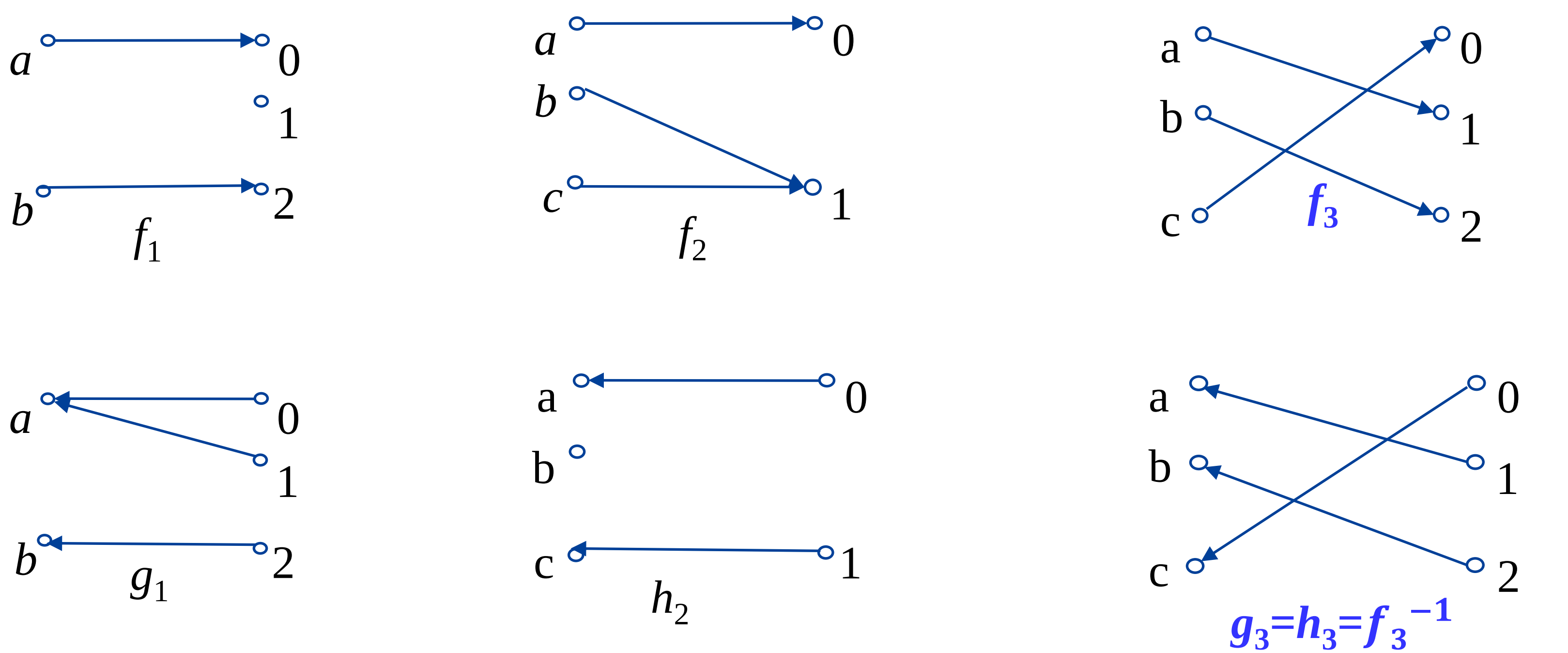
## 函数的逆

$f_1$存在左逆$g_1$，不存在右逆；
$f_2$存在右逆$h_2$，不存在左逆
$f_3$存在左逆$g_3$，又存在右逆$h_3$，且 $g_3=h_3=f_3^{-1}$

- 设$f$：$A \to B$，$g$：$B \to A$，如果$g \circ f = I_A$，则称$g$为$f$的**左**逆；

  如果$f \circ g = I_B$，则称$g$为$f$的**右**逆

例 $f_1$：$\{a, b\} \to \{0, 1, 2\}$　　$f_2$：$\{a, b, c\} \to \{0, 1\}$　　$f_3$：$\{a, b, c\} \to \{0, 1, 2\}$



## 函数的逆

- 设$f$：$A \to B$，$A \neq \emptyset$，则

  (1) $f$存在左逆，当且仅当$f$是单射的；

  (2) $f$存在右逆，当且仅当$f$是满射的；

  (3) $f$存在左逆又存在右逆，当且仅当$f$是双射的；

  (4) 若$f$是双射的，则$f$的左逆等于右逆.

---

(4) 设$f$的左逆为$g$：$B \to A$, 右逆为$h$：$B \to A$, 则$g \circ f = I_A$, $f \circ h = I_B$,

$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$

所以，$g = h$.

## 函数的逆

(1) $f$存在左逆，当且仅当$f$是单射的；

证明：(1) 必要性．设存在$x_1, x_2 \in A$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$

设$g$为$f$的左逆，则

$$x_1=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=x_2$$

故 $f$ 是单射的

(2) 充分性．因为$f$是单射的，所以$f$：$A\to \mathrm{ran}(f)$是双射的

则$f^{-1}$：$\mathrm{ran}(f)\to A$也是双射的．

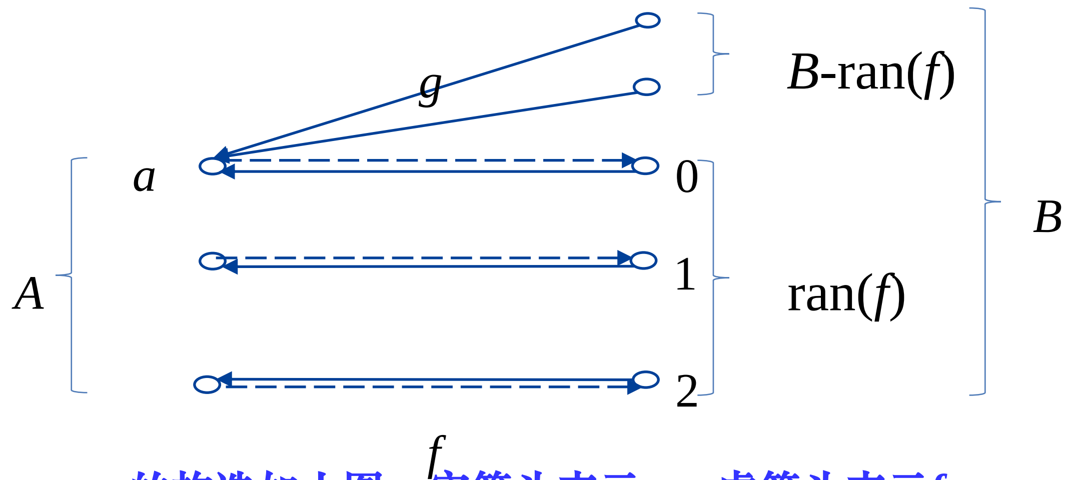
已知$A\neq\emptyset$，则$\exists a\in A$，构造$g$：$B\to A$为

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & 当y\in \mathrm{ran}(f) \\ a, & 当y\in B-\mathrm{ran}(f) \end{cases}$$

# 函数

## 函数的逆

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & 当y\in \mathrm{ran}(f) \\ a, & 当y\in B-\mathrm{ran}(f) \end{cases}$$




$g$的构造如上图，实箭头表示$g$，虚箭头表示$f$

$g$是函数$g$： $B\to A$

对任一$x\in A$，有$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x$

故$g\circ f=I_A$