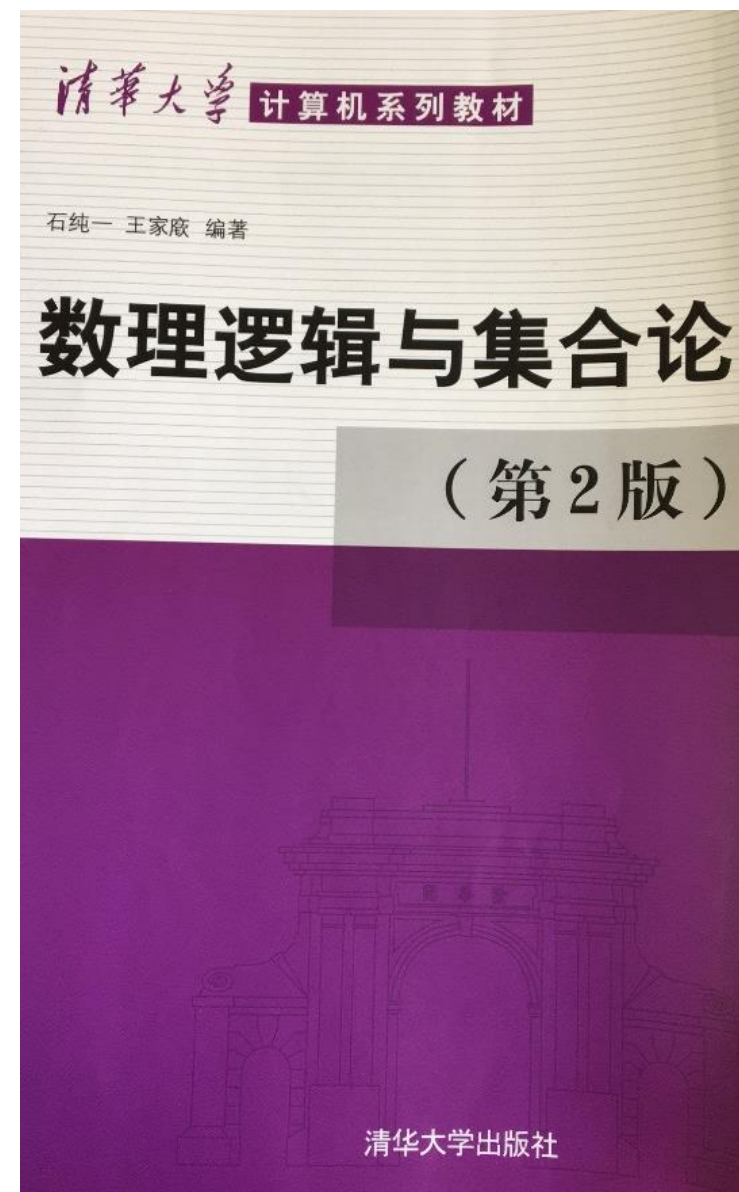


# 第〇章：数理逻辑绪论

## 教材

石纯一 王家廐  
《数理逻辑与集合论》

第1章  
第2章  
第4章  
第5章  
第9章  
第10章  
第11章 (11.1&11.2)



什么是逻辑？

由一个或几个已知的判断（前提）推出  
新判断（结论）的过程

□ 逻辑是研究 推理 (reasoning) 的科学

➤ 英文 *logic* 源自希腊文 *logos* (理念, 思想等等)

➤ 中文“逻辑”一词由严复首先译用

✓ 1902年严复译《穆勒名学》，将其意译为“名学”，  
音译为“逻辑”；

✓ 又称名理学、名学、论理学、理则学、辩学等

## 逻辑起源

### □ 西方逻辑起源可追溯到古希腊

- 亚里士多德 (Aristotle)
- 斯多葛学派 (The Stoics)

以名举实，以辞抒意，以说出故  
《墨辩》

### □ 古代东方逻辑

- 中国的名辩之学 (名墨儒道各家)
  - ✓ 发源可以追溯到名家和法家的奠基人邓析、儒家创始人孔子和墨家创始人墨子
- 古印度的因明

## 逻辑的作用

### □ 如何获得知识（真理）？

- 观察、阅读、讨论、顿悟、……
- 从“旧知”经“推理”得出“新知”
  - ✓ 若“旧知”和“推理”都正确，则“新知”正确；
  - ✓ 若“新知”错而“推理”正确，则抛弃“旧知”；
  - ✓ 逻辑研究怎样的推理是可靠的；
  - ✓ 逻辑还研究一组知识是否协调（一致，相容）

### □ 逻辑思维能力是学习工作乃至日常生活中的重要能力

## 形式逻辑

- ✓ 形式逻辑 (formal logic) 研究推理的形式，推理有效性由形式而非内容决定
  - 亚里士多德的三段论和现代符号逻辑都是形式逻辑的例子
- ✓ 非形式逻辑 (informal logic) 是自然语言论证
  - 兴起于 20 世纪 70 年代的北美，泛指能够用于分析、评估和改进出现于人际交流、广告、政治辩论、法庭辩论等环境中的非形式推理和论证的逻辑理论。

## 数理逻辑

- ✓ 符号逻辑 (symbolic logic): 对逻辑推理的形式特征进行符号抽象
  - 使用人工符号语言
  - 分为命题逻辑和谓词逻辑
  
- ✓ 数理逻辑 (mathematical logic): 是符号逻辑在数学领域的扩展
  - 四论：集合论、模型论、递归论、证明论

## 数理逻辑发展简史

### ✓ 逻辑发展中的里程碑式的人物

➤ 亚里士多德

➤ 莱布尼茨

➤ 布尔

➤ 弗雷格

➤ 希尔伯特

➤ 罗素

➤ 哥德尔

## 古典逻辑

### ✓ 亚里士多德的三段论 (syllogism)

#### ➤ 从两个前提推出一个结论的逻辑论证形式

1. 大前提 (major premise)

人都是两足动物

2. 小前提 (major premise)

希腊人都是人

3. 结论 (conclusion)

希腊人都是两足动物

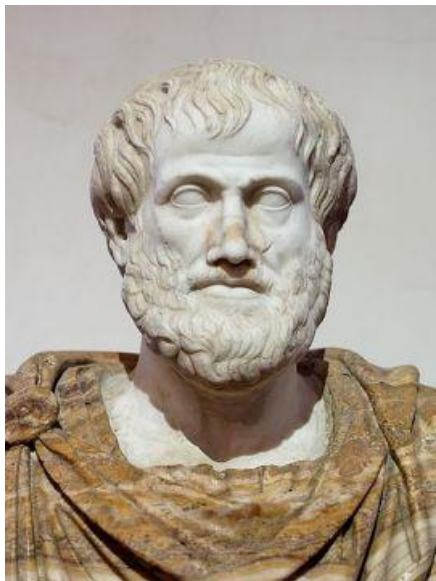
### ✓ 斯多葛学派 (The Stoics) 的命题逻辑

#### ➤ 芝诺 Zeno 在公元前 300左右创立的哲学派别

#### ➤ 克利西波斯 Chrysippus 发展了 Stoic logic



## 亚里士多德 (384BC-322BC)



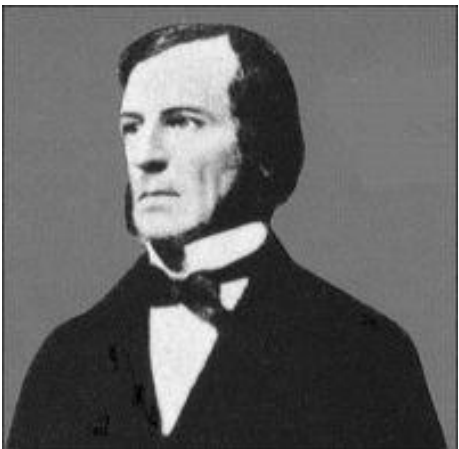
- ✓ 形式逻辑的奠基人
- ✓ 第一个逻辑学家
- ✓ 三段论: 第一个形式演绎逻辑系统
- ✓ 三段论是传统演绎推理的核心，在西方逻辑中一直处于统治地位，直至 19 世纪被数理逻辑（一阶谓词逻辑）所取代

## 莱布尼茨 (1646-1716)



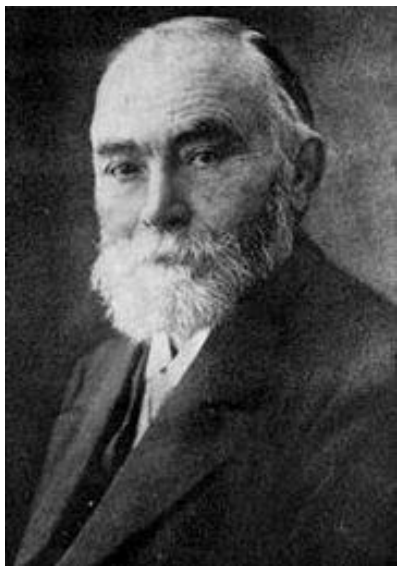
- ✓ 数理逻辑的先驱
- ✓ 首先使用“数理逻辑”这个术语
- ✓ Leibniz' s Dream: 推理归结为符号计算
  - “普遍语言”和“思维演算”的思想正是数理逻辑的主导思想
  - “发生争论时我们可以简单地说：让我们计算一下吧，看谁正确。”
- ✓ 罗素说：Leibniz 未发表手稿中发展的逻辑的水平只在 200 年后才重新达到

## 布尔 (1815-1864)



- ✓ 数理逻辑创始人之一
  - 如 1847 年的论文：  
逻辑的数学分析 - 论演绎推理的演算法
- ✓ 首次应用数学 (代数) 方法研究逻辑，发明了布尔代数 (逻辑代数、命题代数、布尔逻辑)
  - 初步实现了 Leibniz 梦想
  - 亦可解释成集合代数、开关代数
  - 是计算机数字逻辑的基础

## 弗雷格 (1848-1925)



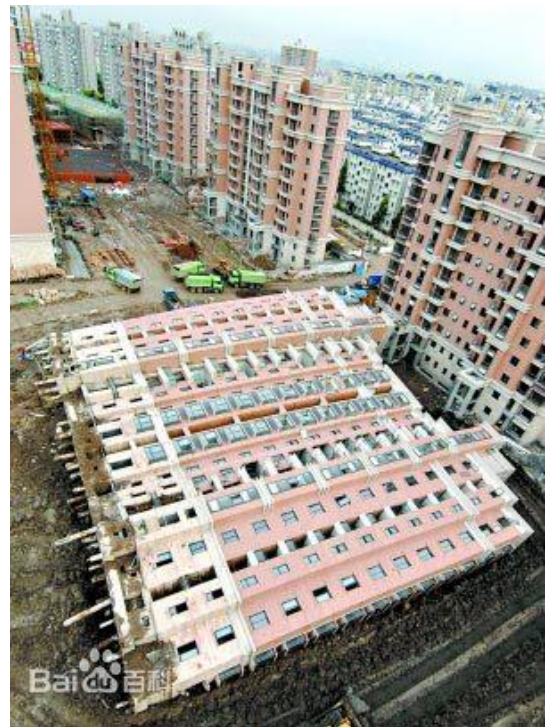
- ✓ 数理逻辑和分析哲学的奠基人
- ✓ 重要著作：Begriffsschrift (1879)
  - 《概念文字 — 模仿算术语言构造的纯思维的形式语言》
  - 《算术的基础 — 对数概念的逻辑数学研究》
  - 第一个公理化谓词逻辑系统
  - 自亚里士多德以来逻辑的最重要进展
  - 基本实现了 Leibniz 梦想

## 数学基础危机

- ✓ 19 世纪早期发现数学一直存在缺陷，如：
  - 非欧几何 (Lobachevsky, Riemann)
  - 分析 (微积分及其扩展) 的基础
- ✓ 19 世纪后期的公理化运动：去除基于直觉或经验的朴素概念的模糊之处，使数学严密化，如：
  - 算术公理化 (Dedekind 1888, Peano 1889)
  - 几何公理化 (Hilbert 1899)

## 数学基础危机

- ✓ 1900年国际数学大会
  - 庞加莱：“借助集合论…可以建造数学大厦…  
今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了!”
  - Hilbert则认为还有漏洞，如初等算术的协调性
- ✓ 随后发现了 Cantor 集合论中的一些悖论：  
如1901年的罗素悖论。
- ✓ 弗雷格：一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础垮掉了。当《算术的基本法则》等待印出的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地。于是终结了近 12 年的刻苦钻研。



## 解决危机的四大派别

- ✓ Russell: 逻辑主义, 主张从逻辑推出数学;
- ✓ Hilbert: 形式主义, 对全部数学进行形式化, 并证明其协调性;
- ✓ Brouwer (布劳威尔): 直觉主义派, 其根本观点是关于数学概念和方法的可构造性, 认为数学的理论基础不是集合论, 而是自然数论。
- ✓ 策梅洛-弗兰克尔集合论: 公理化集合论, 用公理化方法重建集合论的研究

## 罗素 (1872-1970)



- ✓ 逻辑主义和分析哲学的创始人之一；
- ✓ 主张从逻辑推出全部数学；
- ✓ 重要论著：《数学原理》
  - ✓ 与 怀特海 Whitehead 合著
  - ✓ 公认为是现代数理逻辑的基础
  - ✓ “罗素悖论” 推动了 20 世纪逻辑学的发展

所有不自己刮胡子的男士都由我  
给他们刮，我也只给这些人理发



## 希尔伯特 (1862-1943)



- ✓ 领导了著名的哥廷根学派
- ✓ 证明论创始人之一
- ✓ 在 1900 年的巴黎国际数学家大会上，提出数学家应当努力解决的 23 个数学问题，被认为是 20 世纪数学的至高点，对这些问题的研究有力推动了 20 世纪数学的发展
- ✓ Hilbert' s program: 将理论至于逻辑演算中加以形式化，重点研究系统中证明的逻辑性质，希望得出系统的协调性；强调证明要使用有穷方法

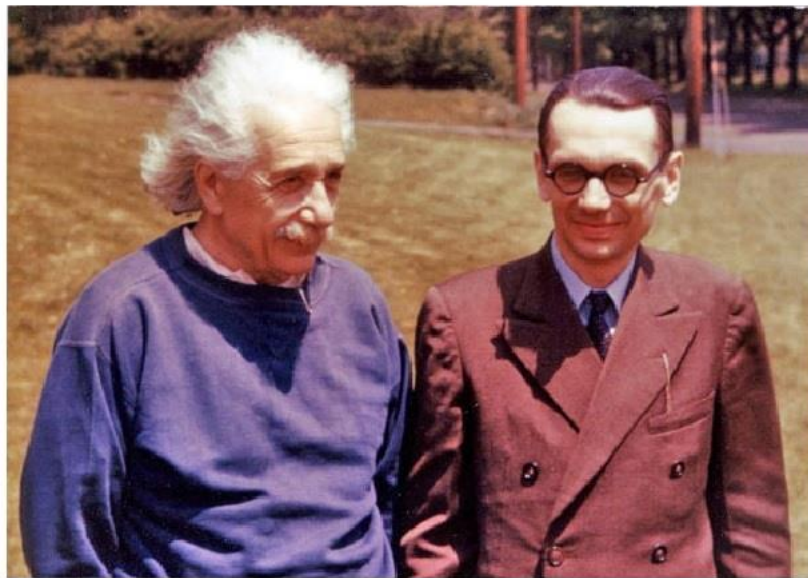
## 哥德尔 (1906-1978)



- ✓ 证明了一阶谓词演算的完备性
  - 实现了 Leibniz 梦想.
- ✓ 证明了更加重要的成果：不完备性定理
  - 不完备性定理是对 Hilbert' s program 的致命一击
  - 大意：任何足够强的形式系统都有无法证明的真命题，且系统自己不能证明自己无矛盾
  - 显示了形式化方法的本质局限
  - 20 世纪数理逻辑的顶峰，有评论说是 20 世纪最重要的数学定理

## 哥德尔 (1906-1978)

- ✓ Einstein: 晚年时表示，他自己的研究已经没有太大意义，而他之所以每天还到普林斯顿高等研究院来，只是为了与哥德尔一起走路回家



## 数理逻辑的分支

- ✓ 基础的逻辑演算
- ✓ 公理集合论
- ✓ 模型论
- ✓ 递归论
- ✓ 证明论

## 公理集合论

- ✓ 研究公理集合论是整个数学的基础
- ✓ Cantor的朴素集合论有缺陷
  - Burali-Forti悖论，罗素悖论，Richard悖论，...
- ✓ 策梅洛：第一个公理化集合论 (1908)
  - 经 Fraenkel (弗兰克尔, 1922) 改进成为经典的 ZF 集合论
  - 避免了罗素悖论
- ✓ 哥德尔和 Paul Cohen(保罗·寇恩, 1963)在 CH 方面的工作
  - CH(连续统假设) 在 ZF 系统中不可判定
  - 寇恩的新方法(力迫法) 让人们证明了许多不可判定的问题；数学绝不是“非真即假”那么单纯！



## 模型论

- ✓ 建立形式理论的模型，研究模型之间的关系等
  - 模型是对形式理论进行具体解释的一种结构
  - 语法与语义的关系
- ✓ Alfred Tarski (塔尔斯基) 奠定了模型论的基础

## 递归论

- ✓ 研究解决问题可行的计算方法和计算的复杂程度的一门学科，尤其是研究递归函数及其推广。
- ✓ 亦称可计算性理论，它是研究关于可计算性与可定义性的数学理论，主要关注于事物的可计算性，可定义性及其分层。
- ✓ 代表人物
  - Gödel: 递归函数
  - Alonzo Church (丘奇):  $\lambda$  演算
  - Alan Turing (图灵): 图灵计算机
    - 现代计算机设计思想的创始人之一

## 证明论

- ✓ 以证明为研究对象，用数学方法进行分析；
- ✓ 将数学证明表达为形式化的数学客体，通过数学技术来简化对他们的分析
- ✓ 证明通常用归纳式定义的数据结构来表达，根据逻辑系统的公理和推理规则构造。
  
- ✓ 代表人物
  - Hilbert 首先提出
  - Gerhard Gentzen(甘岑): 发展了证明论的重要成果
    - 证明了算术形式系统的协调性



## 数理逻辑与计算机科学

- ✓ 计算机 ← 图灵机
- ✓ 计算机能做什么，算法是什么 ← 可计算性理论
- ✓ 计算机不能做什么 ← 算法不可解问题
- ✓ 逻辑程序设计 (Prolog) ← 谓词逻辑
- ✓ 程序设计语言的语义学 ← 模型论
- ✓ 形式规格说明与程序验证 ← 模型论
- ✓ AI, 知识表示, 自动定理证明 ← 逻辑演算
- ✓ 从形式证明产生程序 ← 证明论

## 艾兹赫尔·戴克斯特拉 (1930-2002)



- ✓ 结构程序设计之父
- ✓ “搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻二十岁的话，就要回去学逻辑。”