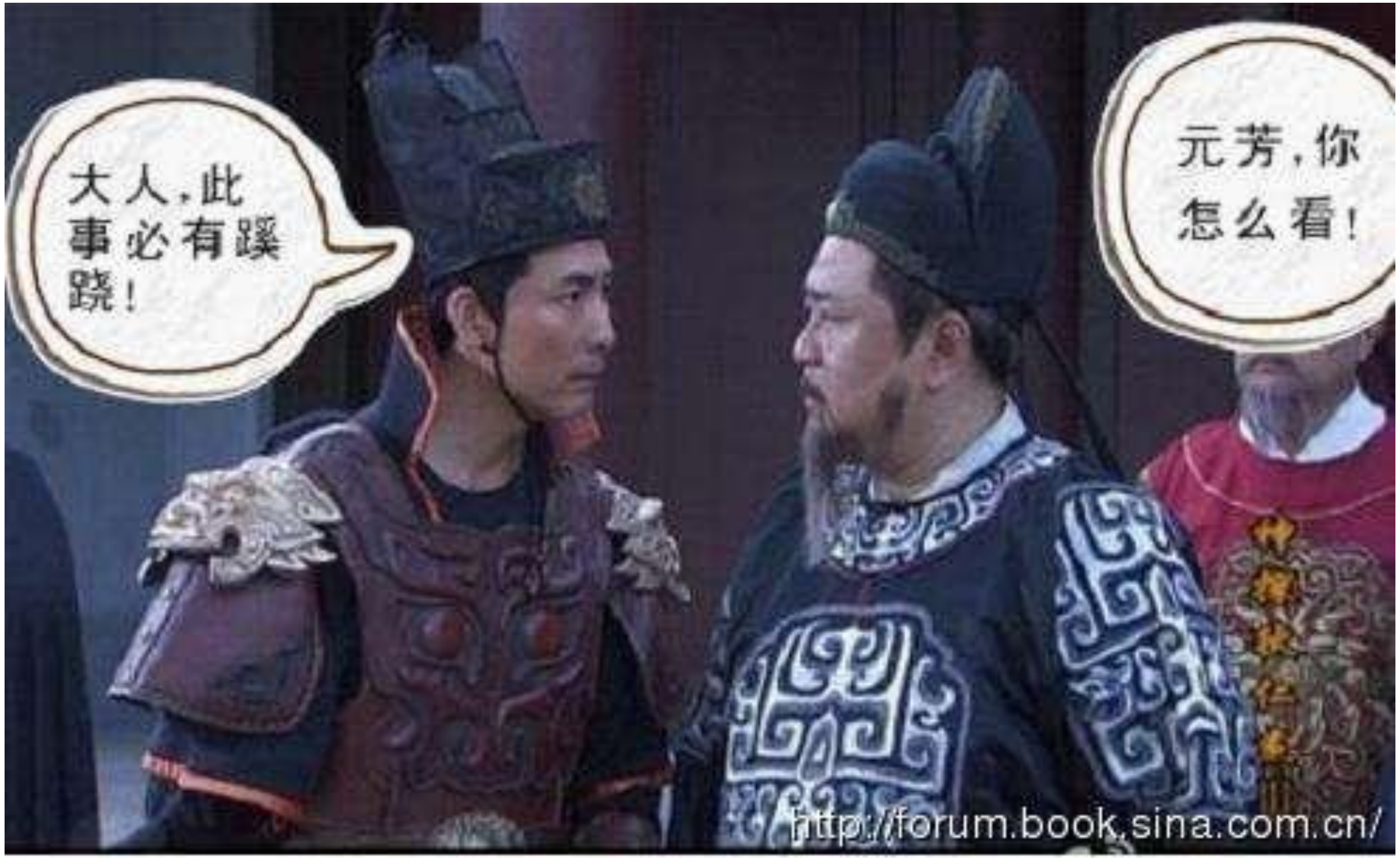
第二章：命题逻辑的等值和推理演算

命题逻辑的等值和推理演算

- 用命题公式来描述在科学和日常生活中进行的推理，称为**推理形式**。



命题逻辑的等值和推理演算

等值关系

- 等值（逻辑等价(logical equivalence)）：给定两个命题公式 α 和 β，设 $P_1,\ldots,P_n$ 是出现在 α 和 β 中的所有命题变项；若在所有解释 (共 2^n个) 下 α 和 β 的真值都相同，就称 α 和 β 等值

  - 记作 $\alpha=\beta$ (或 $\alpha\Leftrightarrow\beta$)；

判断 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$ ？

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P\vee Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

如何证明两公式等值

◆ 真值表法；$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$?

P	Q	$\neg(P\vee Q)$		$\neg P\wedge\neg Q$		
F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	F	F	F

◆ 等值定理；

◆ 利用基本等值式进行推导。

如何证明两公式等值

- 等值定理;
  - 等值定理：对公式 α 和 β，

$$\boxed{\alpha = \beta \text{ iff } \alpha \leftrightarrow \beta \text{是重言式}}$$

证明：

$\Leftarrow$

$\alpha \leftrightarrow \beta$ 是重言式

$\Rightarrow$ 任一解释下真值为 T

$\Rightarrow$ 任一解释下 α 与 β 真值相同

$\Rightarrow$ $\alpha = \beta$

$\Rightarrow$

$\alpha = \beta$

$\Rightarrow$ 任一解释下 α 与 β 真值相同

$\Rightarrow$ 任一解释下 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 真值为 T

$\Rightarrow$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ 是重言式

如何证明两公式等值

$\boxed{\alpha = \beta \text{ 与 } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ 的异同}}$

- 从形式系统角度看
  - $\leftrightarrow$ 是系统内的符号，$\alpha \leftrightarrow \beta$ 是系统内的合式公式 (语法)
  - $=$ 是系统外的符号, $\alpha = \beta$ 不是合式公式!

    $=$ 是在系统外观察系统内两个公式是否等值 (语义)
- 从真假性来看
  - 写下 $\alpha \leftrightarrow \beta$，不代表 α 和 β 等值；只有 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 为真，才能得知 α 和 β 等值，但 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 可为假
  - 写下 $\alpha = \beta$，则肯定了 α 和 β 等值。

如何证明两公式等值

- **等值关系“=”的性质**

自反性: $\alpha=\alpha$

对称性: 若$\alpha=\beta$，则 $\beta=\alpha$

传递性: 若$\alpha=\beta$且 $\beta=\gamma$，则$\alpha=\gamma$

- **利用等值定理证明等值**

证明：$(P \rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$ ？

转化为证明 $(P\rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P\vee Q)$ 是重言式

- **真值表法**
- **等值定理**
- **利用基本等值式进行推导**

如何证明两公式等值

- 真值表法：$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 是重言式？

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

如何证明两公式等值

- ◆ 利用基本等值式进行推导

➢ 基本等值式

➢ 结合(associative)律

$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

$\boxed{(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$

➢ 交换(commutative)律

$P \vee Q = Q \vee P$

$P \wedge Q = Q \wedge P$

$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

$\boxed{P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P}$

没有 $\rightarrow$ 的结合律和交换律

如何证明两公式等值

- 基本等值式

- 分配(*distributive*)律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$\boxed{P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)}$$

- 吸收(*absorption*)律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

证明:

$P \vee (P \wedge Q) = P \wedge (P \vee Q)$?

如何证明两公式等值

- 基本等值式
  - 关于否定词的等值式

$$\neg\neg P = P$$

$$\boxed{\begin{aligned}\neg(P \lor Q) &= \neg P \land \neg Q\\ \neg(P \land Q) &= \neg P \lor \neg Q\end{aligned}}$$ 摩根定律

$$\neg(P \to Q) = P \land \neg Q$$

$$\begin{aligned}\neg(P \leftrightarrow Q) &= \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q\\ &= (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)\end{aligned}$$

如何证明两公式等值

- 基本等值式

- 等幂律

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = \mathrm{T}$$

$$P \leftrightarrow P = \mathrm{T}$$

- 补余律

$$P \vee \neg P = \mathrm{T}$$

$$P \wedge \neg P = \mathrm{F}$$

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = \mathrm{F}$$

如何证明两公式等值

- 基本等值式

- 同一律

$$P \vee \mathrm{F} = P$$

$$P \wedge \mathrm{T} = P$$

$$\mathrm{T} \rightarrow P = P$$

$$P \rightarrow \mathrm{F} = \neg P$$

$$\mathrm{T} \leftrightarrow P = P$$

$$\mathrm{F} \leftrightarrow P = \neg P$$

- 零律

$$P \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$$

$$P \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$$

$$P \rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}$$

$$\mathrm{F} \rightarrow P = \mathrm{T}$$

这两组等值公式的共同特点是“部分指派”

如何证明两公式等值

- 常用的等值公式

$P \to Q = \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q)$	$\to$ 用 $\neg$ $\vee$ 或 $\neg$ $\wedge$ 来表示，失去因果关系
$P \to Q = \neg Q \to \neg P$	正定理与逆否定理
$P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$	合取 P和Q 作为总的前提
$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$	
$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	P和Q 同真或同假
$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$	一真一假

如何证明两公式等值

- 常用等值公式

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$ 充分必要

$P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$ 交换前提

$(P \to R) \land (Q \to R) = (P \lor Q) \to R$ 析取前提

$P \to (Q \land R) = (P \to Q) \land (P \to R)$

$P \to (Q \lor R) = (P \to Q) \lor (P \to R)$

$(P \lor Q) \to R = (P \to R) \land (Q \to R)$

$(P \land Q) \to R = (P \to R) \lor (Q \to R)$

置换规则

- 置换：对公式的子公式用等值公式替换--与代入不同!
- 定理：若对公式 α 的子公式置换后得到公式 β，则有 $\alpha = \beta$.
- 推论：若 α 是重言式，则置换后得到的 β 也是重言式。

等值演算

- 等值演算：利用等值定律及替换规则进行公式推演。一般是为了**简化**公式。
- 例如：证明 $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) = R$

证明：左端 $= (\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee ((Q \vee P) \wedge R)$ (分配律)

$= ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R)$ (结合律)

$= (\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R)$ (摩根律)

$= (\neg(P \vee Q) \vee (Q \vee P)) \wedge R$ (分配律)

$= (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge R$ (交换律)

$= T \wedge R$ (置换)

$= R$ (同一律)

命题公式与真值表的关系

- 给定公式：根据命题变元列出其真值表是容易的；
- 给定真值表 (包括命题变元 $P_1 \dots P_n$ 及相应 α 的真值)，如何写出公式 α?
- 有两种方法:

方法一：利用使 α 为真的解释 (真值指派)

方法二：利用使 α 为假的解释 (假值指派)

方法一：真值指派

- 从每个使 α 为真的解释写出一个各命题变元的**合取**式；然后写出各合取式的**析取**式。

$A = (\ldots) \vee (\ldots) \vee (\ldots)$

例1: A 有三个成真解释.

P	Q	A
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

由 $(P, Q) = (\mathrm{F}, \mathrm{F})$ 可写出合取式: $\neg P \wedge \neg Q$

由 $(P, Q) = (\mathrm{F}, \mathrm{T})$ 可写出合取式: $\neg P \wedge Q$

由 $(P, Q) = (\mathrm{T}, \mathrm{T})$ 可写出合取式: $P \wedge Q$

$\Rightarrow$ $A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

方法二：假值指派

$B = (\ldots) \wedge (\ldots) \wedge (\ldots)$

➢ 从每个使 α 为假的解释写出一个各命题变元的析取式；然后写出各析取式的合取式。

例2: B 有两个成假解释。

P	Q	B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	F

由 $(P, Q) = (\mathrm{T}, \mathrm{F})$ 可写出析取式： $\neg P \vee Q$

由 $(P, Q) = (\mathrm{T}, \mathrm{T})$ 可写出析取式： $\neg P \vee \neg Q$

➡ $B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

若使用真值指派 ➡ $B = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

P	Q	A
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

例1若使用假值指派 ➡ $A = \neg P \vee Q$

$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

真值指派等价于假值指派?

其他联结词

- 除 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 外还可定义其他联结词，

异或: $P \overline{\vee} Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

与非(NAND): $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$

或非(NOR): $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

给定 n 个命题变项 $P_1 \ldots P_n$，可定义出多少种命题联结词？

联结词是真值函数

- 命题联结词可看作是**真值函数**，即以**真值为定义域和值域**的函数。

¬ 是一元真值函数，其真值表给出了这个函数定义；可记为:

$$\neg: \{T, F\} \to \{T, F\}$$

$$T \to F$$

$$F \to T$$

∧ 是二元真值函数

$$\wedge: \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}$$

- 前述问题转化成: n元真值函数有多少个?

一元联结词的数量

- 一元真值函数只有一个自变元 P (命题变项);
- P 只有 T 和 F 两种取值，对每一种取值又有两种可能的函数值 T 和 F;
- 则可定义 $4=2^2$ 种不同的真值函数，即 $f_0 \sim f_3$。

P	$f_0(P)$	$f_1(P)$	$f_2(P)$	$f_3(P)$
F	F	F	T	T
T	F	T	F	T

- 相应地共有 4 种不同的一元联结词;

$f_0(P)=\mathrm{F}$ $f_1(P)=P$ $f_2(P)=\neg P$ $f_3(P)=\mathrm{F}$

二元联结词的数量

- 二元真值函数有两个自变元 P 和 Q，4 种真值组合；
- 对每一种取值组合又有两种可能的函数值 T 和 F；
- 则可定义 $16=2^4=2^{2^2}$ 种不同的真值函数，即 $g_0 \sim g_{15}$

P	Q	$g_0(P,Q)$	$g_1(P,Q)$	$g_2(P,Q)$	…	$g_{15}(P,Q)$
F	F	F	F	F		T
F	T	F	F	F		T
T	F	F	F	T		T
T	T	F	T	F		T

- 即共有 16 种不同的二元联结词；

  g_1 就是我们熟悉的 $\wedge$；

  $g_0 \sim g_{15}$ 中除了 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 之外，也定义了 $\triangledown, \uparrow, \downarrow$ 等。

n 元联结词的个数

- n 元真值函数有 n 个自变元 $P_1 \ldots P_n$；
- 每个 P_i 有两种取值，从而 $P_1 \ldots P_n$ 共有 2^n 种真值组合；
- 对每一种取值组合又有两种可能的函数值 T 和 F；
- 于是可定义2^{2^n}种不同的真值函数，即2^{2^n}个n元联结词；

定义一个三元联结词 #

#(P, Q, R) 为真 *iff* P, Q, R 中至少两个为真

无法用习惯的中缀法表示

联结词数量极大 ➡ 联结词相互表示或独立?

$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$，即$\rightarrow$可用$\neg$和$\vee$表示

联结词的完备集

- 定义: 设 C 是联结词的集合，如果对任一命题公式都有由 C 中联结词表示出来的公式与之等值，就说 C 是完备的 (adequate)联结词集合，或联结词的完备集。

- $\{\vee\}$和$\{\wedge, \vee\}$都不是完备的；
- 全体联结词的集合(无穷集)是完备的；
- 定理：$\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备的联结词集合

P	Q	A
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$$\boxed{A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)}$$

联结词的完备集

- 由 $P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$ 可知: $\wedge$ 可由$\{\neg, \vee\}$表示，故$\{\neg, \vee\}$也是联结词的完备集.
- 类似地 $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$ 等也是完备集

  与非: $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$

  $\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$

  $P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$
- 习惯使用完备集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

对偶式

- 观察下面等值公式:

$$P \boxed{\vee} (Q \boxed{\wedge} R) = (P \boxed{\vee} Q) \boxed{\wedge} (P \boxed{\vee} R)$$

$$P \boxed{\wedge} (Q \boxed{\vee} R) = (P \boxed{\wedge} Q) \boxed{\vee} (P \boxed{\wedge} R)$$

$$P \boxed{\vee} \boxed{\mathrm{F}} = P \qquad P \boxed{\vee} \boxed{\mathrm{T}} = \boxed{\mathrm{T}}$$

$$P \boxed{\wedge} \boxed{\mathrm{T}} = P \qquad P \boxed{\wedge} \boxed{\mathrm{F}} = \boxed{\mathrm{F}}$$

命题逻辑公式存在“对偶”规律

- 对偶式：设公式 α 中只出现 $\neg, \wedge, \vee$， 将α中的 $\vee, \wedge$, T, F 分别以 $\wedge, \vee$, F, T 替换, 所得公式称为 α 的对偶式 α^*。
- 将α 中所有肯定形式出现的变元 P_i 换成 $\neg P_i$, 所有否定形式出现的变元 $\neg P_i$换成 P_i, 所得公式记为 α^-。
- 注意：求 α^* 时 α 不能有 $\rightarrow$，$\leftrightarrow$；求 α^- 时无此限制。

α^* 和 α^- 的性质

$$\alpha = P \vee (Q \wedge \neg R)$$

$$\neg\alpha = \neg P \wedge (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha^* = P \wedge (Q \vee \neg R)$$

$$\alpha^- = \neg P \vee (\neg Q \wedge R)$$

- 定理1： $\neg(\alpha^*) = (\neg\alpha)^*$ $\neg(\alpha^-) = (\neg\alpha)^-$
- 定理2： $\neg\alpha = \alpha^{*-}$ （摩根定律的一般形式）
- 定理3： $(\alpha^*)^* = \alpha$ $(\alpha^-)^- = \alpha$

对偶定理

- 定义

  α和β **同永真**: α永真 *iff* β永真

  α和β **同可满足**: α 可满足 *iff* β 可满足

- 定理4：以下两对公式都是同永真且同可满足的，

  α 与 α^{-}　　$\neg\alpha$ 与 α^{*}。

- 对偶定理：以下两对公式都是同永真且同可满足的，

  $\alpha\rightarrow\beta$ 与 $\beta^{*}\rightarrow\alpha^{*}$,　　$\alpha\leftrightarrow\beta$ 与 $\alpha^{*}\leftrightarrow\beta^{*}$.

- 推论：$\alpha=\beta$ *iff* $\alpha^{*}=\beta^{*}$.

范式(*normal form*)

- 命题公式的数量是无穷多的

  即便只有一个变元 P，也可以写出

  $$P,\ P\wedge P,\ P\wedge P\wedge P,\ P\wedge P\wedge P\wedge P,\ \ldots\ldots$$

- 但若按等值关系对全体公式进行划分, n 个命题变项所能形成的不同公式仅有2^{2^n}个.

- 问题: 与命题公式 α 等值的公式能否都化为某种 $\boxed{\text{标准形式}}$?

  -- 借助于标准形容易判断两个公式是否等值.

  -- 借助于标准形容易判断公式是否重言式或矛盾式.

命题逻辑的等值和推理演算

范式(*normal form*)

- 由命题变元或命题变元的否定利用 $\wedge(\vee)$ 联结而成的公式称为**合(析)取式**.

  合取式 例: $P,\ \neg P,\ P\wedge Q,\ P\wedge\neg Q\wedge\neg P$

  析取式 例: $P,\ \neg P,\ P\vee Q,\ P\vee\neg Q\vee\neg P$

- 由合(析)取式利用∨(∧)联结而成的公式称为**析(合)取范式**.

  析取范式形如: $\alpha_1\vee\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n$(诸$\alpha_i$是<u>合取式</u>)

  合取范式形如: $\alpha_1\wedge\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n$ (诸α_i是<u>析取式</u>)

公式转化为范式

- 范式定理: 任一公式都有与之等值的合取范式和析取范式.
- 根据真值表列写公式就是求范式的一种方法;

P	Q	B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	F

$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ 假值指派（合取范式）

$B = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 真值指派（析取范式）

- 等值变换法求范式

1. 消去 $\rightarrow$，$\leftrightarrow$
2. 否定词深入到变元前
3. 合(析)取词深入 --这时已经是范式.
4. (可选)化简

1. 消去→, ↔

➢ 方法: 利用下列等值式

$$\alpha \to \beta = \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$ [适合求析取范式]

$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$$ [适合求合取范式]

例: 求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

$$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$

2. 否定词深入

- 方法: 利用下列等值式

$$\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

$$\neg\neg\alpha = \alpha$$

例: $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$

3. 合(析)取词深入

- 方法：利用分配律

$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ [用于析取范式]

$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ [用于合取范式]

例： $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$

4. (可选)化简

- 方法：利用下列等值式消去矛盾式

$$\alpha \wedge F = F$$

$$\alpha \vee F = \alpha$$

例： $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

范式的用途

- 判断 α 是否重言式

  求 α 的合取范式，若每个析取式都含有某个变元及其否定 (如 P 和 $\neg P$)，则 α 是重言式；　$\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ (诸α_i是析取式)

- 判断 α 是否矛盾式

  求 α 的析取范式，若每个合取式都含有某个变元及其否定 (如 P 和 $\neg P$)，则 α 是矛盾式；　$\alpha_1 \vee \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ (诸α_i是合取式)

- 判断 $\alpha = \beta$?

  求 α 和 β 的同一种范式，看是否相同；

  问题是: 范式唯一吗?

主范式

假设以下讨论的公式都只涉及 n 个命题变元 $P_1 \dots P_n$.

- 极小项: n 个命题变元都在其中出现一次的合取式.
  - $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$
    其中 $Q_i = m_i = P_i$或$\neg P_i$
  - 极小项有2^n个.
- 主析取范式: 仅由极小项构成的析取式.

定理: 任一公式都有唯一与之等值的主析取范式.

- 极大项: n个命题变元都在其中出现一次的析取式.
  - $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$
    其中$Q_i = M_i = P_i$或$\neg P_i$
  - 极大项有2^n个.
- 主合取范式: 仅由极大项构成的合取式.

定理: 任一公式都有唯一与之等值的主合取范式.

主范式的求法

两个命题变项 P_1 和 P_2，可构成4个极小项

$\neg P_1 \wedge \neg P_2$, $\neg P_1 \wedge P_2$, $P_1 \wedge \neg P_2$, $P_1 \wedge P_2$

将 P_i 和与1对应，将 $\neg P_i$ 和与0对应。

$\neg P_1 \wedge \neg P_2$，与00对应，记为 m_0

$\neg P_1 \wedge P_2$，与01对应，记为 m_1

$P_1 \wedge \neg P_2$，与10对应，记为 m_2

$P_1 \wedge P_2$，与11对应，记为 m_3

两个命题变项 P_1 和 P_2，可构成4个极大项

$\neg P_1 \vee \neg P_2$, $\neg P_1 \vee P_2$, $P_1 \vee \neg P_2$, $P_1 \vee P_2$

将 P_i 和与1对应，将 $\neg P_i$ 和与0对应。

$\neg P_1 \vee \neg P_2$，与00对应，记为 M_0

$\neg P_1 \vee P_2$，与01对应，记为 M_1

$P_1 \vee \neg P_2$，与10对应，记为 M_2

$P_1 \vee P_2$，与11对应，记为 M_3

主范式的求法

求主析取范式

- 方法一: 利用真值表中的成**真指派**列写公式.

例: 根据真值表中的 T 行

$B = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$= m_1 \vee m_0 = \vee_{0,1}$

求主合取范式

- 方法一: 利用真值表中的成**假指派**列写公式.

例: 根据值表中的 F 行

$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$= M_1 \wedge M_0 = \wedge_{0,1}$

P	Q	B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	F

主范式的求法

求主析取范式

- 方法二: 为析取范式中的合取式补足未出现的命题变元.

例: $P\rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$\neg P = \neg P \wedge (Q \vee \neg Q)$

$= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$Q = Q \wedge (P \vee \neg P)$

$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$P\rightarrow Q = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$P\rightarrow Q = \quad \vee_{0,1,3}$

求主合取范式

- 方法二: 为合取范式中的析取式补足未出现的命题变元

例: $\neg(P\rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$

$P = P \vee (Q \wedge \neg Q)$

$= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$\neg Q = \neg Q \vee (P \wedge \neg P)$

$= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\neg(P\rightarrow Q) = (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\ ) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\neg(P\rightarrow Q) = \wedge_{0,2,3}$

极小(大)项的性质

- 极小项与真值指派(解释)一一对应, 都有 2^n 个.
- 每个极小项只在一个解释下为真.
- 极小项两两不等，其合取为假
- 任一含 n 个变项的公式都可用 k(≤2^n) 个极小项的析取表示
- 恰由 2^n 个极小项的析取表示的公式，必为重言式
- 若 α 由 k 个极小项的析取组成, 则其余 2^n-k 个极小项的析取就是 $\neg\alpha$.

- 极大项与假值指派(解释)一一对应, 都有 2^n 个.
- 每个极大项只在一个解释下为假.
- 极大项两两不等，其析取为T
- 任一含 n 个变项的公式都可用 k(≤2^n) 个极大项的合取表示
- 恰由 2^n 个极小项的合取表示的公式，必为矛盾式
- 若 α 由 k 个极大项的合取组成，则其余 2^n-k 个极大项的合取就是 $\neg\alpha$.

主析取范式与主合取范式的转换

- 定义集合 $I=\{0, 1, 2, ..., 2^n-1\}$
- 定义集合 I 的子集 $A\subseteq I$
- 定义集合 A 的补集 $\overline{A}=\{i: i=2^n-1-y, \forall y\in A\}$

- $\alpha=\vee_A$

  $=\wedge_{\overline{I-A}}$

  $=\wedge_{((I-A)_{补})}$

- $\alpha=\wedge_A$

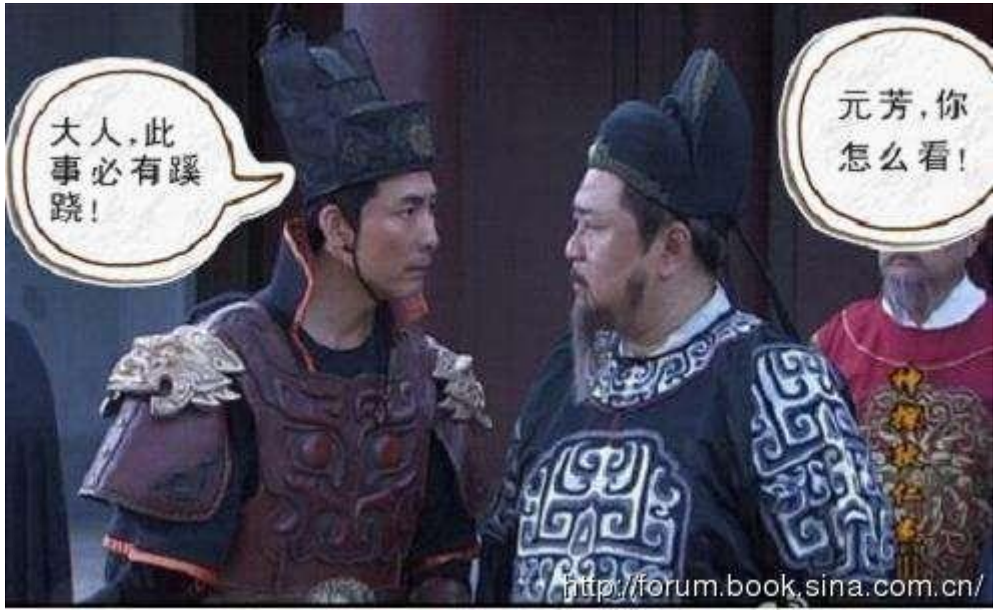
  $=\vee_{\overline{I-A}}$

  $=\vee_{((I-A)_{补})}$

命题逻辑的等值和推理演算

推理形式

➢ 用命题公式来描述在科学和日常生活中进行的推理，称为**推理形式**。



命题逻辑的等值和推理演算

推理形式

P: 今天张三生病了

Q: 张三不会来上课

例：如果今天张三生病了，那么他不会来上课。

今天张三生病了 ➡ 张三不会来上课

真 or 假　　$((P\to Q)\wedge P)\to Q$

$P\to Q$	前提
P	前提
Q	结论

例：如果今天张三生病了，那么他不会来上课。

今天张三没生病了 ➡ 张三会来上课

真 or 假　　$((P\to Q)\wedge\neg P)\to\neg Q$

$P\to Q$	前提
$\neg P$	前提
$\neg Q$	结论

例：如果今天张三生病了，那么他不会来上课。

张三来上课了 ➡ 今天张三没病

真 or 假　　$((P\to Q)\wedge\neg Q)\to\neg P$

$P\to Q$	前提
$\neg Q$	前提
$\neg P$	结论

推理形式

P: 今天张三生病了
Q: 张三不会来上课

$$((P\to Q)\wedge P)\to Q$$

$$((P\to Q)\wedge \neg P)\to \neg Q$$

$$((P\to Q)\wedge \neg Q)\to \neg P$$

推理公式形状都是**蕴涵式**$\alpha\to\beta$.

什么样的推理形式描述了**正确**的推理?

推理形式

P: 今天张三生病了
Q: 张三不会来上课

- 正确的推理形式：前提为真，结论必为真的推理形式。

$((P\to Q)\land P)\to Q$　　生病了 → 缺课

$((P\to Q)\land \neg P)\to \neg Q$　　没生病 → 没缺课

$((P\to Q)\land \neg Q)\to \neg P$　　没缺课 → 没生病

重言蕴涵关系

- 给定两个公式 α 和 β，在任何解释下，若 α 为真则 β 也为真，就称 α **重言蕴涵** β，或称 β 是 α 的**逻辑推论**，记作 $\alpha \Rightarrow \beta$.

- 讨论从前提推出结论的问题：α 是前提，一般形如 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$，也可理解成有 n 个前提。

例如：若 $P \wedge Q$ 为真，显然 P 也为真，所以

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

例如：$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ 是正确的推理，则

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

命题逻辑的等值和推理演算

$\alpha \Rightarrow \beta$ 与 $\alpha \to \beta$ 的异同

- 从形式系统角度看

$\to$ 是系统内的符号, $\alpha \to \beta$ 是系统内的合式公式；(语法)

$\Rightarrow$ 是系统外的符号, $\alpha \Rightarrow \beta$ 不是合式公式! 这是在系统外观察系统内两个公式间的逻辑蕴涵关系。(语义)

- 从表达的意思来看

$\alpha \to \beta$ 只是表达“不能 α 真而 β 假”，因此除了包含“α真则β真”的意思之外，还包含“α假则β可真可假”的意思；

$\alpha \Rightarrow \beta$ 表达且仅表达“α 真则 β 真”的意思.

如何证明 $\alpha \Rightarrow \beta$？

1、利用真值表

列出所有命题变元的所有指派，以及公式 α 和 β 相应的真值；

若使 α 为真的解释也都使 β 为真，则 $\alpha \Rightarrow \beta$ 成立；否则，$\alpha \Rightarrow \beta$ 就不成立。

$((P\to Q)\wedge\neg P)\Rightarrow\neg Q$?

P	Q	$(P\to Q)\wedge\neg P$	$\neg Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	T	F	F

$((P\to Q)\wedge\neg Q)\Rightarrow\neg P$?

P	Q	$(P\to Q)\wedge\neg Q$	β
F	F	T	T
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	F	F

如何证明$\alpha \Rightarrow \beta$？

$\alpha = \beta$ iff $\alpha \leftrightarrow \beta$是重言式

2、利用下面的定理

定理：$\alpha \Rightarrow \beta$ iff $\alpha \rightarrow \beta$是重言式

所以$\alpha \Rightarrow \beta$称为“重言蕴涵式”

$\alpha \Rightarrow \beta$

$\Longleftrightarrow$ 任一解释下α为真必有β为真

$\Longleftrightarrow$ 任一解释下α为真且β必不为假

$\Longleftrightarrow$ 任一解释下$\alpha \rightarrow \beta$ 为真

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \rightarrow \beta$ 是重言式

定理：$\alpha \Rightarrow \beta$ iff $\alpha \wedge \neg \beta$是矛盾式

如何证明$\alpha \Rightarrow \beta$？

3、利用 $\Rightarrow$ 的一些性质

(1) $\alpha \Rightarrow \alpha$ [自反性]

(2) 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$, 则 $\alpha = \beta$ [反对称性]

(3) 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \gamma$, 则 $\alpha \Rightarrow \gamma$ [传递性]

(4) 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\alpha \Rightarrow \gamma$, 则 $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$

(5) 若 $\alpha \Rightarrow \gamma$ 且 $\beta \Rightarrow \gamma$, 则 $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

(6) 若 $\alpha \Rightarrow \beta$, 则 $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

(7) 若 $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$, 则$\alpha \Rightarrow \beta$

基本的重言蕴涵式

- 作为基本的推理定律

(1). $P \wedge Q \Rightarrow P$

(2). $P \Rightarrow P \vee Q$

(3). $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$ [假前提啥都蕴涵]

(4). $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ [啥都不能蕴涵的前提，必真]

(5). $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ [真结论被一切前提蕴涵]

(6). $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ [啥前提都不蕴涵的结论，必假]

(7). $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ [排除法]

(8). $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ [*modus ponens*，或分离规则]

基本的重言蕴涵式

(9). $(P\to Q)\wedge\neg Q\Rightarrow\neg P$

(10). $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$

(11). $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)\Rightarrow P\leftrightarrow R$

(12). $(P\to R)\wedge(Q\to R)\wedge(P\vee Q)\Rightarrow R$

(13). $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee Q)\Rightarrow R\vee S$

(14). $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)\Rightarrow\neg P\vee\neg R$

(15). $(Q\to R)\Rightarrow(P\vee Q)\to(P\vee R)$

(16). $(Q\to R)\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to R)$

命题逻辑的等值和推理演算

例：判断下列推理是否正确

$$(1)\ \ (P \lor Q) \to (P \lor \neg Q) \Rightarrow \neg P \lor Q$$

$$(P \lor Q) \to (P \lor \neg Q) \boxed{\to (\neg P \lor Q)}$$

$$= \neg(\neg(P \lor Q) \lor (P \lor \neg Q)) \lor (\neg P \lor Q)$$

$$= \underline{(P \lor Q) \land (\neg P \land Q)} \lor (\neg P \lor Q)$$

$$= (\neg P \land Q) \lor \neg P \lor Q$$

$$= (\neg P \land Q) \lor (Q \land Q) \lor \neg P$$

$$= (\neg P \lor Q) \land Q \lor \neg P$$

$$= \neg P \lor Q$$

$$\neq \mathrm{T}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P \land (\neg P \land Q) = F \\ Q \land (\neg P \land Q) = \neg P \land Q \end{array}}$$

命题逻辑的等值和推理演算

例：判断下列推理是否正确

$$(2)\ \ (P \to Q) \to (Q \to R) \Rightarrow (R \to P) \to (Q \to P)$$

$$((P \to Q) \to (Q \to R)) \to ((R \to P) \to (Q \to P))$$

$$= (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee R)) \to (\neg(\neg R \vee P) \vee (\neg Q \vee P))$$

$$= (\underline{(P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee R)} \to ((R \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee P)$$

$$= (\neg Q \vee R) \to (\neg Q \vee R \vee P)$$

$= \mathrm{T}$ 正确

命题逻辑的等值和推理演算

例：判断下列推理是否正确

$$(3)\ \ ((P\wedge Q)\to R)\wedge((P\vee Q)\to\neg R)\Rightarrow P\wedge Q\wedge R$$

$$(((P\wedge Q)\to R)\wedge((P\vee Q)\to\neg R))\boxed{\to P\wedge Q\wedge R}$$

$$=\neg((\neg(P\wedge Q)\vee R)\wedge(\neg(P\vee Q)\vee\neg R))\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

$$=(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge R)\vee\underline{(Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)}$$

$$P\vee(P\wedge Q)=P$$

$$=(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$$

$$=P\wedge(Q\vee R)\vee(Q\wedge R)$$

当P=F，Q=F，上式为F，不永真，不正确

例：判断下列推理是否正确

$$(4)\ (P \to Q) \wedge (R \to Q) \wedge (S \to Q) \Rightarrow ((P \wedge R \wedge \neg S) \to Q)$$

$$((P \to Q) \wedge (R \to Q) \wedge (S \to Q)) \to ((P \wedge R \wedge \neg S) \to Q)$$

$$= ((P \vee R \vee S) \to Q) \to ((P \wedge R \wedge \neg S) \to Q)$$

$$= (\neg(P \vee R \vee S) \vee Q) \to (\neg(P \wedge R \wedge \neg S) \vee Q)$$

$$= ((P \vee R \vee S) \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee \neg R \vee S \vee Q$$

$$= (P \vee R \vee S \vee Q) \vee \neg P \vee \neg R \vee S$$

$= \mathrm{T}$ 正确

$\boxed{(P \to R) \wedge (Q \to R) = (P \vee Q) \to R}$ 析取前提

推理演算

- 前面介绍的证明 $\alpha \Rightarrow \beta$ 的方法，都是根据公式的真值来论证的，体现不出证明的层层推进过程，而且变元很多时不方便。

- 推理演算：引入一些推理规则，利用前提和基本推理公式(重言式)，实现逐步推进的推理过程。

从若干前提 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 出发，证明 β？

利用推理规则不断产生中间结论；

直至得出最终结论β。

推理规则

(1) 前提引入规则：推理过程中可随时引入前提；

- α 是前提，一般形如 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$，也可理解成有 n 个前提。

(2) 结论引用规则：推理过程中得到的中间结论，可用作后续推理的前提。

(3) 代入规则：推理过程中对重言式的命题变项可使用代入规则。

(4) 置换规则：推理过程中可对任何子公式用等值公式置换。

命题逻辑的等值和推理演算

推理规则

(5) **分离规则**：推理过程中若已得到 $P \rightarrow Q$ 和 P，则可推得 Q。

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

(6) **条件证明规则**：为证明 $\alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta)$, 可证明 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta$；反之亦然。

$$\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta)$$

$$\Leftrightarrow \neg\alpha_1 \vee (\neg\alpha_2 \vee \beta)$$

$$\Leftrightarrow \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \beta$$

$$\Leftrightarrow \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee \beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \beta$$

α_2 可作为附加条件

(7) **归谬证明法**：将结论的否定式作为附加前提引入并推出矛盾式。

定理：$\alpha \Rightarrow \beta$ *iff* $\alpha \wedge \neg\beta$ 是矛盾式

例：推理演算

- 证明：$P \to Q$，$Q \to R$，$P \vdash R$

(因为左边不是公式，不能用⇒，故用 $\vdash$ 区分；但本质一样，相当于证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge P \Rightarrow R$。)

证明：

(1) P	前提引入
(2) $P \to Q$	前提引入
(3) Q	分离(1)(2)
(4) $Q \to R$	前提引入
(5) R	分离(3)(4)

命题逻辑的等值和推理演算

例：证明 $(P \rightarrow (Q \rightarrow S)) \wedge (\neg R \vee P) \wedge Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明：

(1)	$\neg R \vee P$	前提引入
(2)	$R \longrightarrow P$	(1) 置换
(3)	R	附加前提引入
(4)	P	(2)(3) 分离
(5)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提引入
(6)	$Q \rightarrow S$	(4)(5) 分离
(7)	Q	前提引入
(8)	S	(6)(7) 分离
(9)	$R \longrightarrow S$	条件证明规则

命题逻辑的等值和推理演算

例：证明 $(\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee S)) \wedge ((Q \longrightarrow P) \vee \neg R) \wedge R \Longrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

(1)	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	附加前提（要证公式的否定）引入
(2)	$\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P))$	(1) 置换
(3)	$\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \longrightarrow P)$	(2) 置换
(4)	$(Q \longrightarrow P) \longrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$	(3) 置换
(5)	$\neg(P \rightarrow Q) \longrightarrow \neg(R \vee S)$	前提引入
(6)	$(Q \longrightarrow P) \longrightarrow \neg(R \vee S)$	(4)(5) 三段论
(7)	$(Q \longrightarrow P) \vee \neg R$	前提引入
(8)	$R \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$	(7) 置换
(9)	$R \longrightarrow \neg(R \vee S)$	(6)(8) 三段论
(10)	R	前提引入
(11)	$\neg(R \vee S)$	(9)(10) 分离
(12)	$\neg R \wedge \neg S$	(11) 置换
(13)	$\neg R$	(12)
(14)	$\neg R \wedge R$	(10)(13)
(15)	矛盾	(14)

命题逻辑的等值和推理演算

例：自然推理系统的推理证明

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；
小赵不去看电影或小张去看电影；
小王去看电影；
所以当小赵去看电影时，小李也去。

设简单命题：P：小张去看电影
Q：小王去看电影
R：小李去看电影
S：小赵去看电影

前提：$(P \wedge Q) \longrightarrow R$，$\neg S \vee P$，$Q$

结论：$S \rightarrow R$

命题逻辑的等值和推理演算

例：自然推理系统的推理证明

前提：$(P \land Q) \longrightarrow R$，$\neg S \lor P$，$Q$

结论：$S \rightarrow R$

证明：用附加前提法证明法.

(1)	S	附加前提引入
(2)	$\neg S \lor P$	前提引入
(3)	$S \longrightarrow P$	(2)置换
(4)	P	(1)(3)分离
(5)	$(P \land Q) \rightarrow R$	前提引入
(6)	Q	前提引入
(7)	$P \land Q$	(4)(6)合取引入
(8)	R	(5)(7)分离
(9)	$S \longrightarrow R$	条件证明规则

归结推理法

- 归结法 (resolution，译作消解更准确) 是一种简单而有效的证明方法，是 Prolog(一种逻辑型程序设计语言) 和自动定理证明系统的基础。

  - 简单：只有一条推理规则。
  - 归结法是一种反驳过程，即试图证明给定公式是不可满足的。
  - 归谬法思想。

归结证明过程

定理：$\alpha \Rightarrow \beta$ *iff* $\alpha \wedge \neg\beta$ 是矛盾式

- 原理：为证明 $\alpha \Rightarrow \beta$，只需证明 $\alpha \wedge \neg\beta$ 是矛盾式。

① 将 $\alpha \wedge \neg\beta$ 化为合取范式，并写成所有析取式(称为子句)的集合 S；

② 对子句集合 S 进行一步归结：

若 S 中有两个子句 $C_1 = L \vee C_1'$，$C_2 = \neg L \vee C_2'$，则可以对其进行归结，得到归结式 $C_1' \vee C_2'$，放入 S 中。

③ 重复 (2)，直至得到矛盾式 □ 。

归结推理规则的正确性说明

- 设 $C_1 = L \vee C_1'$，$C_2 = \neg L \vee C_2'$，只要证明：$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow C_1' \vee C_2'$.

证明：设在解释 I 下 C_1 和 C_2 均为真；

若 L 为真，则 $\neg L$ 为假，故 C_2' 为真；

若 L 为假，则 C_1' 为真；

无论是哪种情况，都有 $C_1' \vee C_2'$ 为真。

例1: 归结法证明

$(P\to Q)\wedge P \Rightarrow Q$

① 求 $(P\to Q)\wedge P\wedge\neg Q$的合取范式:

$(\neg P\vee Q)\wedge P\wedge\neg Q$

并写成子句集合$\{\neg P\vee Q$，P，$\neg Q\}$；

② 归结:

$\neg P\vee Q$ 与 P 归结，得到 Q;

Q 与 $\neg Q$ 归结，得到空子句 □ ，即矛盾式。得证。

例2: 归结法证明

前提：$Q \rightarrow P$，$Q \leftrightarrow S$，$S \leftrightarrow T$，$T \wedge R$

结论：$P \wedge Q \wedge S$

解：先求前提中各式和结论否定的合取范式

$$Q \rightarrow P \Leftrightarrow \neg Q \vee P$$

$$Q \leftrightarrow S \Leftrightarrow (\neg Q \vee S) \wedge (\neg S \vee Q)$$

$$S \leftrightarrow T \Leftrightarrow (\neg S \vee T) \wedge (\neg T \vee S)$$

$$\neg(P \wedge Q \wedge S) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg S$$

例3: 归结法证明

前提：$Q \to P$，$Q \leftrightarrow S$，$S \leftrightarrow T$，$T \wedge R$　　结论：$P \wedge Q \wedge S$

$Q \to P \Leftrightarrow \neg Q \vee P$　　$Q \leftrightarrow S \Leftrightarrow (\neg Q \vee S) \wedge (\neg S \vee Q)$

$T \wedge R$　　$S \leftrightarrow T \Leftrightarrow (\neg S \vee T) \wedge (\neg T \vee S)$

$\neg(P \wedge Q \wedge S) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg S$

证明：

(1)	$\neg T \vee S$	前提引入
(2)	T	前提引入
(3)	S	(1)(2)归结
(4)	$\neg S \vee Q$	前提引入
(5)	Q	(3)(4)归结
(6)	$\neg Q \vee P$	前提引入
(7)	P	(5)(6)归结
(8)	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg S$	前提引入
(9)	$\neg Q \vee \neg S$	(7)(8)归结
(10)	$\neg S$	(5)(9)归结
(11)	$\square$	(3)(10)归结

练习题

1、证明$(P \longrightarrow Q) \Rightarrow P \longrightarrow (P \wedge Q)$

$$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow (P \wedge Q))$$

$$\Rightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \big(\neg P \vee (P \wedge Q)\big)$$

$$\Rightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q))$$

分配律

$$\Rightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)$$

$$\Rightarrow T$$

练习题

2、证明 $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$

$$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow Q \longrightarrow (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee Q) \vee (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow \neg\big((P \wedge \neg Q) \vee Q\big) \vee \ (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \ (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee \ (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow \neg\ (P \vee Q) \vee \ (P \vee Q)$$

$$\Rightarrow T$$

练习题

3、真值表法求下列公式所对应的主合取范式和主析取范式。

- $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$
- $Q \wedge (P \vee \neg Q)$
- $(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$

练习题

- $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$

P	Q	$(\neg P \vee \neg Q)$	$(P \leftrightarrow \neg Q)$	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

$$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$$

$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$ ➡ 主析取范式

$$= P \vee Q$$ ➡ 主合取范式

练习题

- $Q \wedge (P \vee \neg Q)$

P	Q	$(P \vee \neg Q)$	$Q \wedge (P \vee \neg Q)$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$Q \wedge (P \vee \neg Q)$$

$$= (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$ ➡ 主合取范式

$$= P \wedge Q$$ ➡ 主析取范式

练习题

- $(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$

$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$

$= (\neg P \vee S \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee R)$ ➡ 主合取范式

$= (\neg P \wedge \neg S \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg S \wedge R) \vee (\neg P \wedge S \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge S \wedge R) \vee (P \wedge \neg S \wedge R) \vee (P \wedge S \wedge R)$ ➡ 主析取范式

P	S	R	$(P \wedge R)$	$(S \wedge R)$	$\neg P$	$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

练习题

4、已知 $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C})$, 问 $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$ 成立吗?

解：不成立，若取 $\boldsymbol{C} = \mathrm{T}$， $\boldsymbol{A} \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$， $\boldsymbol{B} \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$, 有$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \mathrm{T}$。

但是$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$不一定等价，可为任意不等价的公式。

练习题

5、已知$\neg A \Leftrightarrow \neg B$,问 $A \Leftrightarrow B$成立吗?

解：成立，$\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 充要条件 $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow 1$, 即

$$T \Leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \Leftrightarrow (\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$$

所以 $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow 1$，故 $A \Leftrightarrow B$。

练习题

6、用等值推理法推出结论（结论未知型）

- 我跑步就感到累，我不累。
- 若我编的程序通过了，我则很快乐，如果我很快乐，则天气很好，现在是半夜，天气很好。
- 如果我学习，那么我的功课不会不及格。如果我不热衷于玩扑克，则我学习，但是我的功课不及格。

练习题

➢ **我跑步就感到累，我不累。**

解：$\boldsymbol{p}$：我跑步，$\boldsymbol{q}$：我累，由题可得条件：$\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}$，$\neg \boldsymbol{q}$。

$$(\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \neg \boldsymbol{q} = (\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \neg \boldsymbol{q} = \neg \boldsymbol{p}$$

故我没跑步。

练习题

- 若小明考试通过了，则小明很快乐，如果小明很快乐，则天气很好。现在是半夜，天气很好，小明考试通过了吗?

解：p：考试通过，q：小明很快乐，r:天气很好。由题可得条件:

$$p \rightarrow q，q \rightarrow r，r。$$

事实上，r 为真，无法推出 q 的真假，同理，q 为真也无法推出 p 的真假，因此考试可能通过也可能不通过。

练习题

- 如果小 k 学习，那么小 k 的功课不会不及格。如果小 k不热衷于玩扑克，则小 k 学习，但是小 k 的功课不及格。小 k 热衷玩扑克了吗?

解：P：学习，Q：功课及格， R:热衷玩扑克。

由题可得始终为真的条件：$P \longrightarrow Q$，$\neg R \longrightarrow P$，$\neg Q$。

$$\boxed{(P \longrightarrow Q) \land (\neg R \longrightarrow P) \land \neg Q}$$

推理条件与给出的条件始终为真

$$\Rightarrow (\neg P \lor Q) \land (R \lor P) \land \neg Q$$

$$\Rightarrow (\neg P \lor \neg Q) \land (R \lor P)$$

$$\Rightarrow \neg P \land (R \lor P)$$

$$\Rightarrow \boxed{\neg P \land R} \qquad R \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

推出与给出条件同时存在的结论

因此 小 k 热衷玩扑克。

练习题

7、如果厂长拒绝增加工资，那么罢工不会停止，除非罢工超过一年并且工厂撤换了厂长。
问：若厂长拒绝增加工资，而罢工刚刚开始，罢工是否能停止？

解：P：厂长拒绝增加工资，Q：罢工停止， R:罢工超过一年，S：撤换厂长。

由题可得始终为真的条件：$P \to \neg Q$，$Q \to (R \land S)$，$P \land \neg R$。

$$\boxed{(P \to \neg Q) \land \big(Q \to (R \land S)\big) \land (P \land \neg R)} \Rightarrow \mathrm{T}$$

$$\Rightarrow (\neg P \lor \neg Q) \land \big(\neg Q \lor (R \land S)\big) \land P \land \neg R$$

$$\Rightarrow P \land \neg Q \land \big(\neg Q \lor (R \land S)\big) \land \neg R \quad \text{交换律}$$

$$\Rightarrow P \land \neg Q \land \neg R$$

$$\Rightarrow \boxed{(P \land \neg R) \land \neg Q} \Rightarrow \neg Q \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

因此罢工不会停止。

练习题

8、只要小王曾经到过受害者的房间，并且11点前没有离开，小王就犯了谋杀罪。如果小王11点以前离开，看门人会看到他。小王曾经到过受害者房间，且看门人没有看到他，所以小王犯了谋杀罪。请用等值演算证明推理正确。（验证推理正确型）

解：P：小王曾到过受害者房间，Q：小王11点前离开，R:小王犯谋杀罪，S：看门人看到了小王。

由符号化可得推理：$(((P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge P \wedge \neg S) \Rightarrow R$。

$$(((P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge P \wedge \neg S) \rightarrow R$$

$$\Rightarrow \neg((\neg(P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge P \wedge \neg S) \vee R$$

$$\Rightarrow \neg((\neg(P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg S) \vee R$$

$$\Rightarrow \neg((\neg P \vee Q \vee R) \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg S) \vee R$$

$$\Rightarrow \boxed{(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee Q} \vee \neg P \vee S \vee R$$

$$\Rightarrow (P \wedge \neg R) \vee Q \vee \neg P \vee S \vee R$$

$$\Rightarrow \boxed{\neg R} \vee Q \vee \neg P \vee S \vee \boxed{R} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee Q$$
$$\Rightarrow (P \wedge \neg R) \vee Q$$

分配律可得

练习题

9、小赵、小钱、小李、小孙参加建模比赛，根据下列情况，推出谁获奖，谁没获奖?

1）只要小赵或小钱中一人没有得奖，小孙和小李就都得奖；

2）小孙没得奖或小李没得奖，这不是真的；

3）小钱得奖了；

解：A：小赵得奖，B：小钱得奖， C:小孙得奖，D：小李得奖。

1)符号化可得$((\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B))\rightarrow(C\wedge D)$；2)符号化可得 $\neg(\neg C\vee\neg D)$；3)符号化可 B；

$$(((\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B))\rightarrow(C\wedge D))\wedge(\neg(\neg C\vee\neg D))\wedge B$$

$$\Rightarrow\boxed{(((A\vee\neg B)\wedge(\neg A\vee B))\vee(C\wedge D))\wedge(C\wedge D)}\wedge B$$

$$\Rightarrow(C\wedge D)\wedge B\Rightarrow 1$$

即小孙、小李、小钱都得奖了，只有小赵没得奖

$$(((A\vee\neg B)\wedge(\neg A\vee B))\vee(C\wedge D))\wedge(C\wedge D)=(C\wedge D)$$

练习题

10、甲乙丙丁4个人有且仅有两个人参加围棋优胜赛。下列4种判断都是正确的；

1）甲和乙只有一个人参加； 2）丙参加，丁必参加； 3）乙或丁至多参加一人；

4）丁不参加，甲也不会参加。 请推出哪两个人参加了比赛。

解：A：甲参加了比赛，B：乙参加了比赛， C:丙参加了比赛，D ：丁参加了比赛。

1)符号化：$(\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)$；2)符号化：$C \to D$；3)符号化： $\neg(B \land D)$；4)符号化： $\neg D \to \neg A$

$$((\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)) \land (C \to D) \land (\neg(B \land D)) \land (\neg D \to \neg A)$$

$$\Rightarrow ((\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)) \land (\neg C \lor D) \land (\neg B \lor \neg D)) \land (D \lor \neg A)$$

$$\Rightarrow ((\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land D) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land D)) \land ((\neg B \land D) \lor (\neg B \land \neg A) \lor (\neg D \land \neg A)$$

$$\Rightarrow (A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (A \land \neg B \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land \neg D) \Rightarrow 1$$

由于只有两个人参加比赛，所以 $(\neg A \land B \land \neg C \land \neg D) \Rightarrow 0$

所以 $(A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (A \land \neg B \land D) \Rightarrow 1$，即甲和丁参加了比赛。

命题逻辑的基本概念

练习题 ★如果P则Q：条件P成立，Q一定发生，但Q发生，P不一定是唯一条件，$P \rightarrow Q$

- **如果天下雨，他就乘班车上班**　　**P：天下雨，Q：乘班车上班**

解:题意表示天下雨则可以推出乘车上班的结论，即天下雨的条件成立的情况下，乘车上班一定发生，但是乘车上班的结果发生了，不代表天一定是下雨了（其他情况也可能乘车上班），$P \rightarrow Q$。

P	Q	$P \rightarrow Q$	解释
T	T	T	天下雨了，他一定选择乘车上班，命题真
T	F	F	天下雨了，他不乘车上班，命题假（必须乘车）
F	T	T	天不下雨，但他可以选择乘车上班，命题真
F	F	T	天不下雨，他也不乘车上班，命题真

命题逻辑的基本概念

练习题

★只有P 才Q：条件 P 成立，不代表结果 Q 一定发生，
结果 Q 发生则前提条件P 必须成立， $Q \longrightarrow P$。

➢ 只有天下雨，他才乘班车上班　P：天下雨，Q：乘班车上班

解：题意表示，只要他乘车上班了，便可以得出天下雨了的结论，即乘车上班的前提条件是天下雨了，但是天下雨了，不代表他一定会乘车上班，$Q \longrightarrow P$。

理解举例：只有好好学习，才能有好成绩。
好成绩的前提是好好学习，但好好学习了不代表一定有好成绩。

	P	Q	$Q \longrightarrow P$	解释
(1)	T	T	T	他乘车上班，表示天下雨了，命题真
(2)	T	F	T	虽然他没有乘车上班，但天下雨了，命题真
(3)	F	T	F	他乘车上班了，但天没下雨，命题假（必下雨）
(4)	F	F	T	他不乘车上班，天也没下雨，命题真

（2）（4）为真，表示天下雨只是提供了一个可以乘车上班的选择，实际上，无论是否下雨，他都可以选择不乘车上班，因此不乘车上班无法推出天气情况。

命题逻辑的基本概念

练习题 ★除非P 否$\neg Q$：条件P 成立，不代表结果Q 一定发生，
结果Q 发生则前提条件P 必须成立，$Q \rightarrow P$（$\neg P \rightarrow \neg Q$）。
★除非P 否Q：条件P 成立，Q 可能不发生（但是P 不成立的条件下Q 必然发生），
Q 不发生了表示 P 必定发生，$\neg Q \rightarrow P$（$\neg P \rightarrow Q$）

➢ **除非天下雨，否则他不乘车上班**　　**P：天下雨，Q：乘班车上班**

解：题意表示天如果不下雨，他就不乘车上班（乘车上班表示天下雨），$\neg P \rightarrow \neg Q$（或者 $Q \rightarrow P$，逆否命题）。

同题（2），该命题与题（2）等价。天下雨是乘车上班的前提条件，说明只有该条件成立的情况下，结果才可能发生（即可以不发生），结果发生了则表示条件必定成立。

	P	Q	$Q \rightarrow P$	解释
(1)	T	T	T	他乘车上班，表示天下雨了，命题真
(2)	T	F	T	虽然他没有乘车上班，但天下雨了，命题真
(3)	F	T	F	他乘车上班了，但天没下雨，命题假（必下雨）
(4)	F	F	T	他不乘车上班，天也没下雨，命题真

命题逻辑的基本概念

总结：

★如果P则Q：条件P成立，Q一定发生，但Q发生，P不一定是唯一条件，$P \to Q$。

★只有P才Q：条件 P 成立，不代表结果 Q 一定发生，
结果 Q 发生则前提条件 P 必须成立，$Q \to P$。

★除非P否¬Q：条件P成立，不代表结果Q一定发生，结果Q发生则前提条件P必须成立，$Q \to P$（$\neg P \to \neg Q$）。

★除非P否Q：条件P成立， Q可能不发生（但是P不成立的条件下Q必然发生），Q不发生了表示P必定发生，$\neg Q \to P$（$\neg P \to Q$）

除 $\boxed{\text{非A}}$ 否则 $\boxed{\text{不B}}$

$\neg A \longrightarrow \neg B$

除 $\boxed{\text{非A}}$ 否则 $\boxed{\text{B}}$

$\neg A \longrightarrow B$

- 命题：是一个非真即假的陈述句。真值：命题具有两种可能的取值，即真 (true) 和假 (false)。
- 简单命题：简单句，不可分割。复合命题：简单命题经联结词联结而成。
- 联结词例子：**并且，或者，非，如果…那么…**。
- 常用命题联结词：¬、∧、∨、→、↔。
- 否定词¬：$\neg P$，表达的是对命题 P 的否定。$\neg P$ 为真 iff P 为假。
- 合取词∧：$P \wedge Q$，表达"P 并且 Q"。$P \wedge Q$ 为真 iff P 和 Q 都为真。
- 析取词∨：$P \vee Q$，表达"P 或者 Q"。$P \vee Q$ 为假 iff P 假 而且 Q 假。
- 蕴涵词→：$P \rightarrow Q$，表达"如果 P 成立，那么 Q 成立"。$P \rightarrow Q$ 为假 iff P 真 而 Q 假。
- 双条件词↔：$P \leftrightarrow Q$，表达"等价于""当且仅当"等。$P \leftrightarrow Q$ 为真 iff P 和 Q 真值相同。
- 真值表：当命题 A 依赖于命题 $P_1,\cdots,P_n$ 时，从命题 $P_1,\cdots,P_n$ 到 A 的真值表有 2^n 行。
- 对 $P_1, \ldots, P_n$ 的真值指派决定了 A 的真值，并称为 A 的解释，A总共有 2^n 个解释，构成真值表 (2^n行)。
- 若命题公式 α 在**任一**解释 I 下值都为 T，就称 α 为**重言式** (或永真式)。
- 若公式 α 在**某个**解释 I_0 下值为 T，则称 α 是**可满足的** (*satisfiable*)。
- 若公式 α 在**任一**解释 I 下值都为 F，就称 α 为**矛盾式** (**永假式**或不可满足式)。
- 代入规则：将公式 α 中所有的原子命题变项 P 都替换成公式 β，记为 $\alpha[P/\beta]$；
- **定理**：若 α 是重言式，则 $\alpha[P/\beta]$ 也是重言式

- 等值定理：对公式 α 和 β, $\alpha = \beta$ iff $\alpha \leftrightarrow \beta$ 是重言式
- $\alpha = \beta$ 与 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 的异同

- 结合(associative)律

$(P \lor Q) \lor R = P \lor (Q \lor R)$

$(P \land Q) \land R = P \land (Q \land R)$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

- 交换(commutative)律

$P \lor Q = Q \lor P$

$P \land Q = Q \land P$

$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

- 分配(distributive)律

$P \lor (Q \land R) = (P \lor Q) \land (P \lor R)$

$P \land (Q \lor R) = (P \land Q) \lor (P \land R)$

$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$

$\boxed{(P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R) \qquad P \to Q \neq Q \to P \qquad P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)}$

- 关于否定词的等值式

$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$

$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$

$\neg(P \to Q) = P \land \neg Q$

$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$

$= (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

- 常用的等值公式

$P \to Q = \neg P \lor Q = \neg(P \land \neg Q)$

$P \to Q = \neg Q \to \neg P$

$P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$

$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$

$P \leftrightarrow Q = (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

$P \leftrightarrow Q = (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$

- 常用等值公式

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$ 充分必要

$P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$ 交换前提

$(P \to R) \land (Q \to R) = (P \lor Q) \to R$ 析取前提

$P \to (Q \land R) = (P \to Q) \land (P \to R)$

$P \to (Q \lor R) = (P \to Q) \lor (P \to R)$

$(P \lor Q) \to R = (P \to R) \land (Q \to R)$

$(P \land Q) \to R = (P \to R) \lor (Q \to R)$

命题逻辑的等值和推理演算

- 定理：若对公式 α 的子公式置换后得到公式 β，则有 $\alpha = \beta$.
- 推论：若 α 是重言式，则置换后得到的 β 也是重言式。
- 等值演算：利用等值定律及替换规则进行公式推演。
- 给定真值表 (包括命题变元 $P_1 \dots P_n$ 及相应 α 的真值)，如何写出公式 α?　真值指派&假值指派
- 真值指派：从每个使 α 为真的解释写出一个各命题变元的合取式；然后写出各合取式的析取式。
- 假值指派：从每个使 α 为假的解释写出一个各命题变元的析取式；然后写出各析取式的合取式。
- 由命题变元或命题变元的否定利用 $\wedge(\vee)$ 联结而成的公式称为合(析)取式.
- 由合(析)取式利用$\vee(\wedge)$联结而成的公式称为析(合)取范式.　　假值指派（合取范式）
- 范式定理: 任一公式都有与之等值的合取范式和析取范式.　　真值指派（析取范式）
- 极小项: n 个命题变元都在其中出现一次的合取式. 主析取范式: 仅由极小项构成的析取式.
- 极大项: n个命题变元都在其中出现一次的析取式. 主合取范式: 仅由极大项构成的合取式.
- 定理: 任一公式都有唯一与之等值的主析取范式.
- 定理: 任一公式都有唯一与之等值的主合取范式.