第三章：树



定理 1：若简单图 G $(n\geq 3)$ 的任意两结点 v_i 与 v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$，则简单图 G 中存在 H 道路。

推论1：若简单图 G $(n\geq 3)$ 的任意两结点 v_i 与 v_j 都满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则图 G 中存在 H 回路。

推论2：若简单图 G $(n\geq 3)$ 的任一结点的度大于等于 $n/2$, 则 G 中存在 H 回路。

引理1：若简单图 G $(n\geq 3)$ 有不相邻结点 v_i 与 v_j 满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则 G 存在 H 回路当且仅当 $G+(v_i, v_j)$ 有 H 回路。

闭合图：若 v_i 和 v_j 是简单图 G 的不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则令 $G'=G+(v_i, v_j)$，对 G' 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 G 的闭合图，记作 $C(G)$。

引理 2：简单图 G 的闭合图是唯一的。

引理3：若简单图有 H 回路当且仅当 $C(G)$ 有 H 回路。

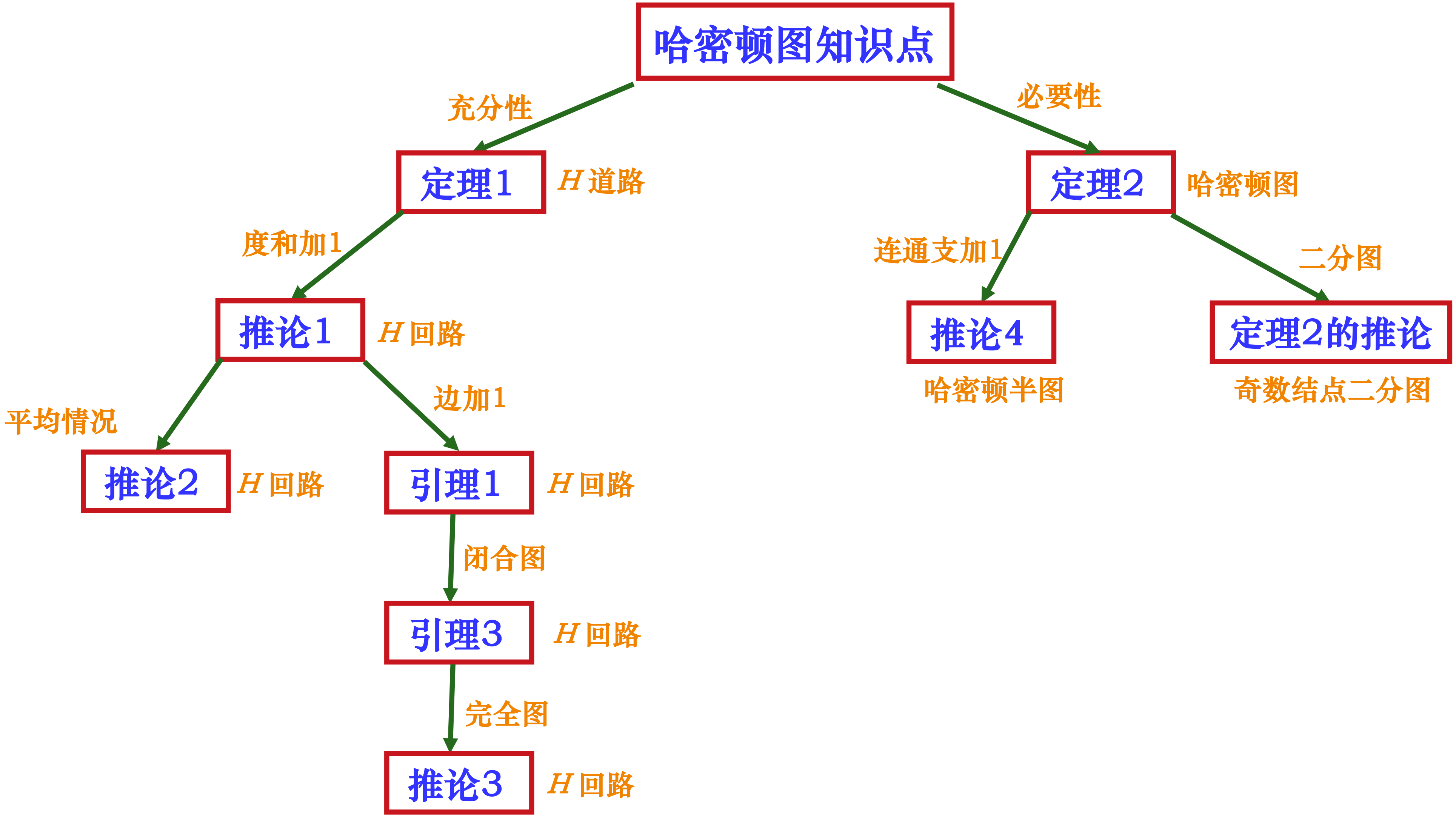
推论3：若 $C(G)=K_n$, 则 G 有 H 回路。

定理2：设 G 是哈密顿图，则对任意的非空点集 $V_1\subset V(G)$，图 G-V_1 中的连通支数不大于 $|V_1|$。

定理2推论： 奇数个结点构成的二分不是哈密顿图。

推论4. 设 G 是哈密顿半图，则对任意的非空点集 $V_1\subset V(G)$，图 G-V_1 中的连通支数不大于 $|V_1|+1$。

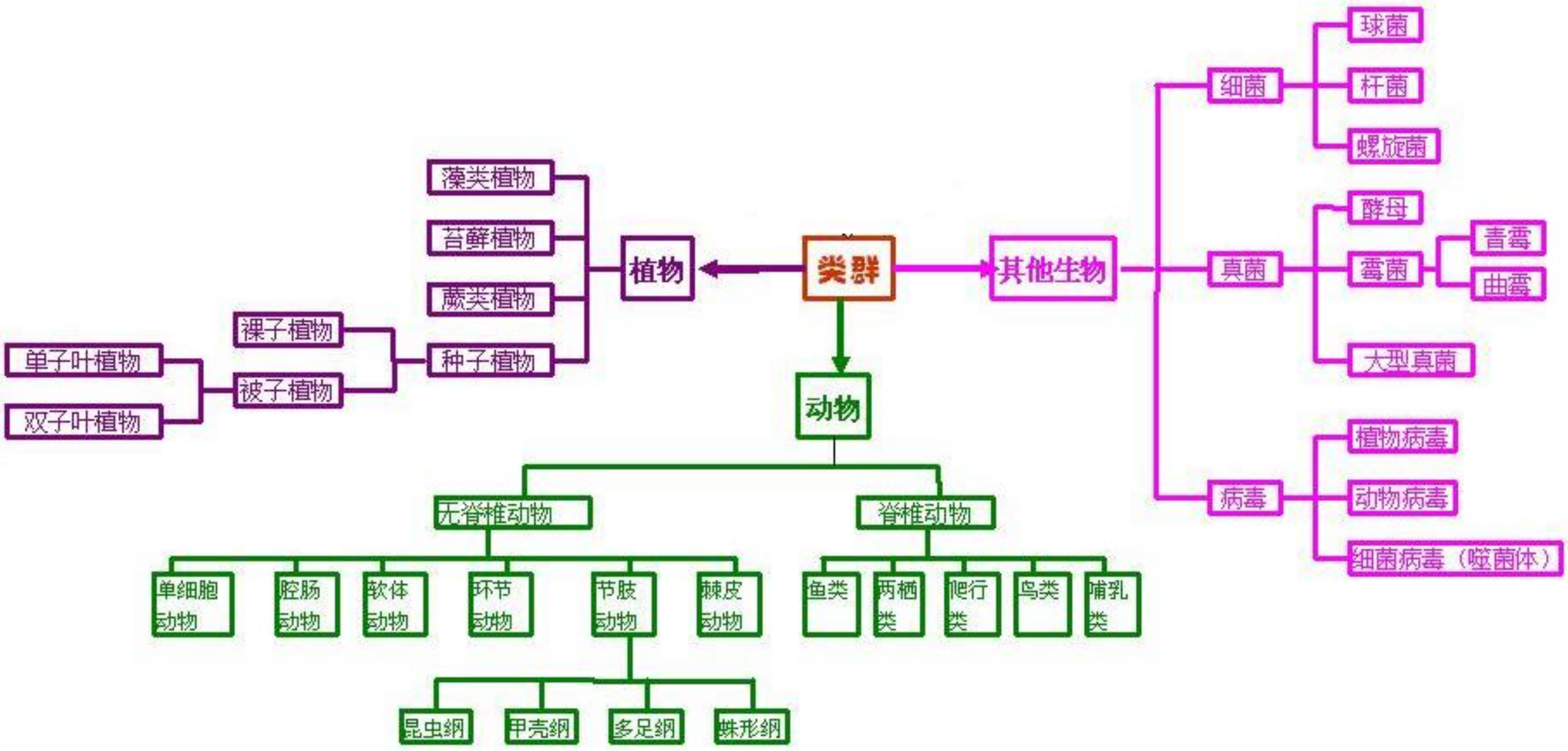
图论：树　哈密顿图知识点


哈密顿图知识点
充分性
必要性
定理1
H 道路
定理2
哈密顿图
度和加1
连通支加1
二分图
推论1
H 回路
推论4
哈密顿半图
定理2的推论
奇数结点二分图
平均情况
边加1
推论2
H 回路
引理1
H 回路
闭合图
引理3
H 回路
完全图
推论3
H 回路

图论：树　世界杯16强对阵表

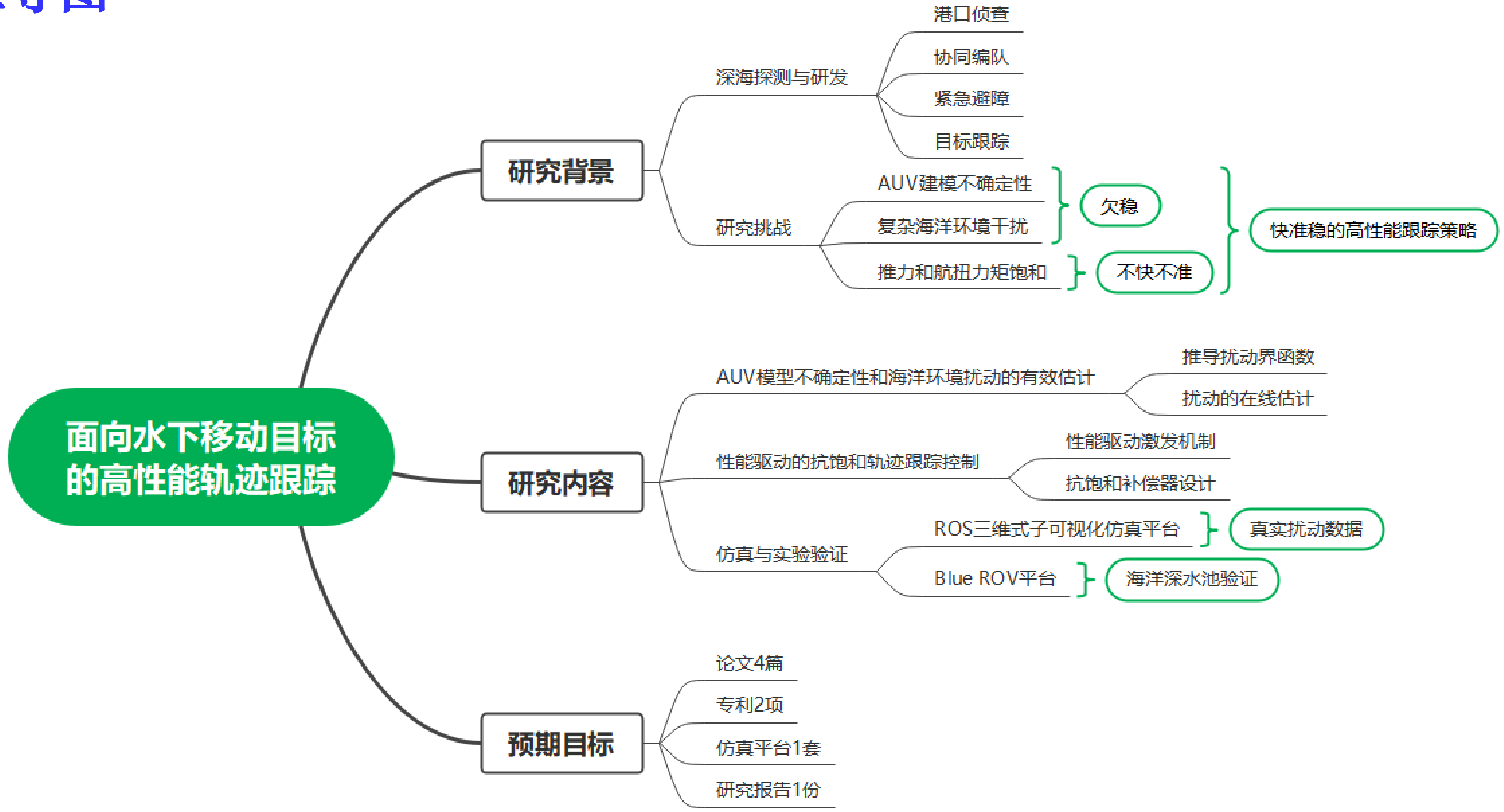
图论：树

生物类群关系图

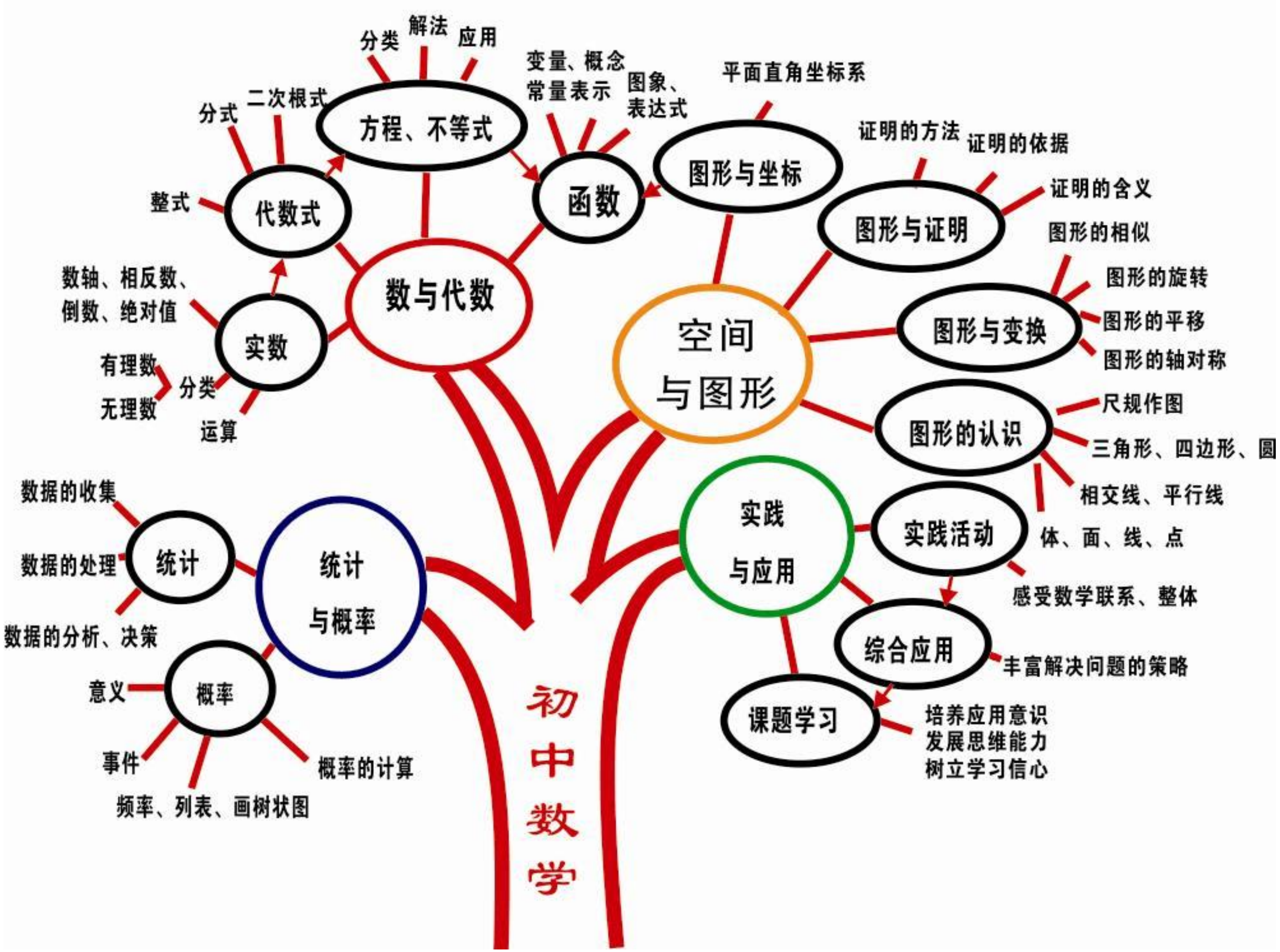

类群
植物
藻类植物
苔藓植物
蕨类植物
种子植物
裸子植物
被子植物
单子叶植物
双子叶植物
动物
无脊椎动物
脊椎动物
单细胞动物
腔肠动物
软体动物
环节动物
节肢动物
棘皮动物
昆虫纲
甲壳纲
多足纲
蛛形纲
鱼类
两栖类
爬行类
鸟类
哺乳类
其他生物
细菌
球菌
杆菌
螺旋菌
真菌
酵母
霉菌
青霉
曲霉
大型真菌
病毒
植物病毒
动物病毒
细菌病毒（噬菌体）

图论：树

思维导图


面向水下移动目标的高性能轨迹跟踪
研究背景
深海探测与研发
港口侦查
协同编队
紧急避障
目标跟踪
研究挑战
AUV建模不确定性
复杂海洋环境干扰
推力和航扭力矩饱和
欠稳
不快不准
快准稳的高性能跟踪策略
研究内容
AUV模型不确定性和海洋环境扰动的有效估计
推导扰动界函数
扰动的在线估计
性能驱动的抗饱和轨迹跟踪控制
性能驱动激发机制
抗饱和补偿器设计
仿真与实验验证
ROS三维式子可视化仿真平台
真实扰动数据
Blue ROV平台
海洋深水池验证
预期目标
论文4篇
专利2项
仿真平台1套
研究报告1份

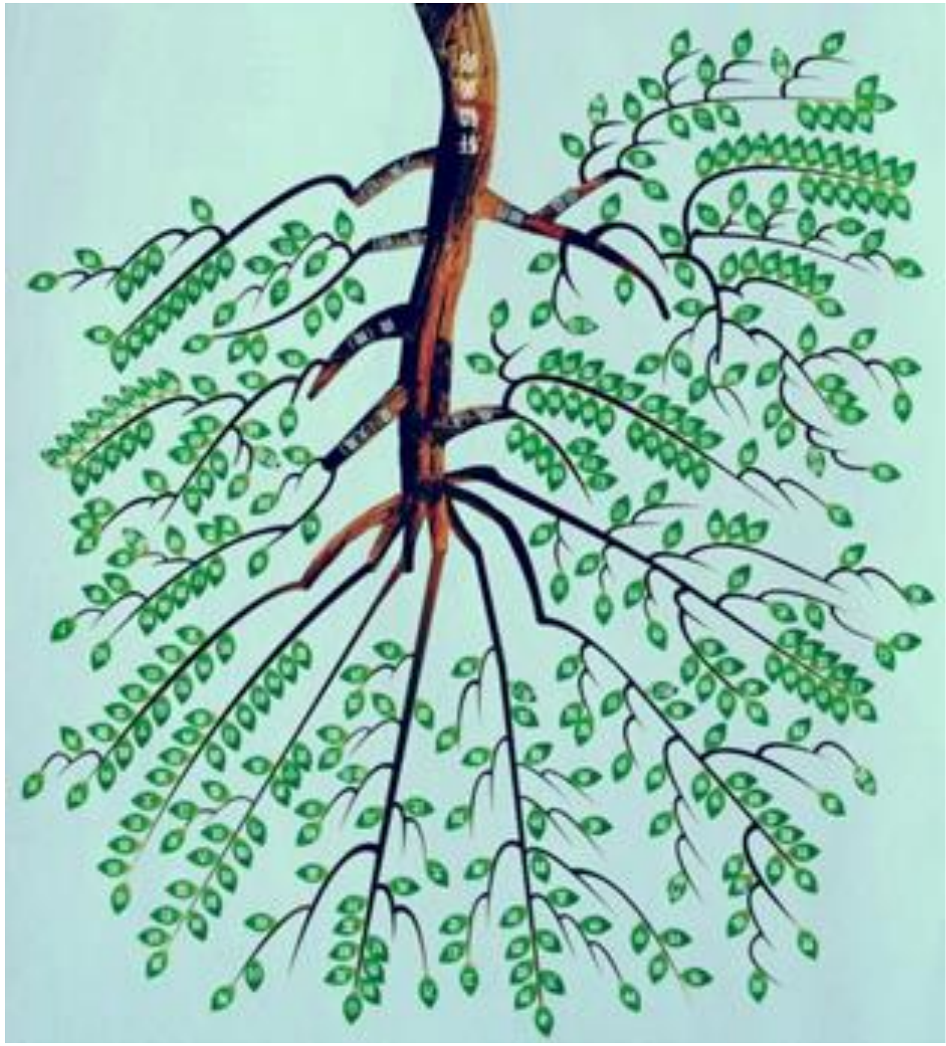
图论：树



初中数学
数与代数
方程、不等式
分类
解法
应用
代数式
分式
二次根式
整式
函数
变量、概念
常量表示
图象、
表达式
实数
数轴、相反数、
倒数、绝对值
有理数
无理数
分类
运算
空间
与图形
图形与坐标
平面直角坐标系
图形与证明
证明的方法
证明的依据
证明的含义
图形与变换
图形的相似
图形的旋转
图形的平移
图形的轴对称
图形的认识
尺规作图
三角形、四边形、圆
相交线、平行线
体、面、线、点
统计
与概率
统计
数据的收集
数据的处理
数据的分析、决策
概率
意义
事件
频率、列表、画树状图
概率的计算
实践
与应用
实践活动
感受数学联系、整体
综合应用
丰富解决问题的策略
课题学习
培养应用意识
发展思维能力
树立学习信心

图论：树

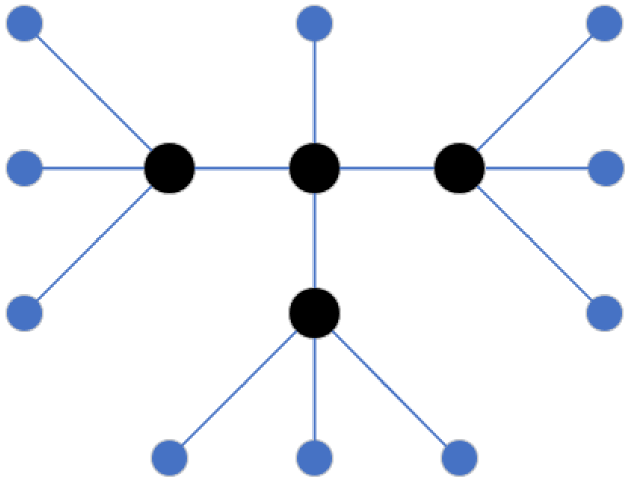
图论研究的树



图论：树

图论研究的树

- ✓ **树状图**是一种数据结构，它是由 n（$n \geq 1$）个结点组成一个具有层次关系的集合。
- ✓ 树状图被称为树（tree）是因为图形的通常画法像一棵树，一般是倒过来的（即树根在上，树叶在下）。
- ✓ 树结构例子
  - ☐ 化学：化合物结构
  - ☐ 计算机科学技术：二叉搜索树等
  - ☐ 生物学：进化树等
  - ☐ 信息管理：目录系统

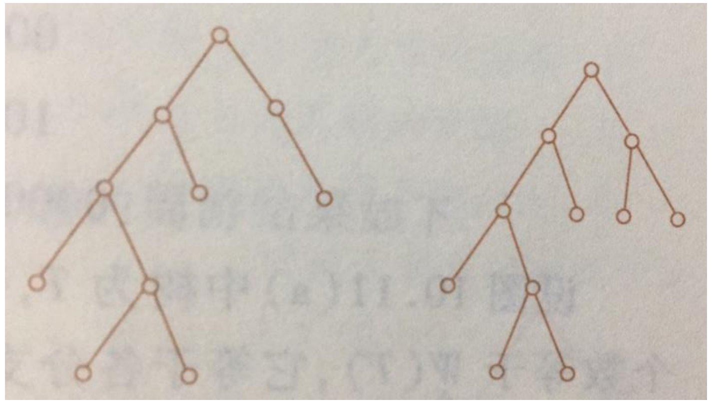


图论：树

树的定义

✓ 树：不含回路的连通图，用 T 表示

- 树必不含多重边和自环，故是简单图
- 边称为**树枝**
- 度为 1 的结点称为**树叶**(*leaf*)或悬挂点
- 度大于等于 2 的结点称为**分叉点**



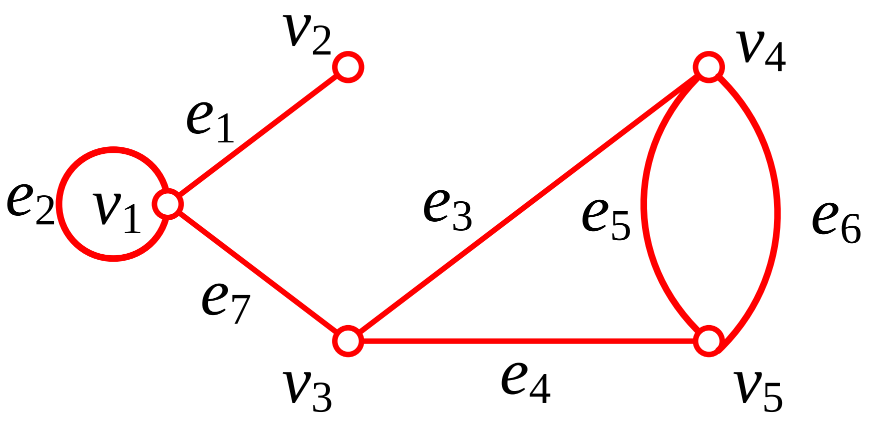
✓ 林：不含回路的图

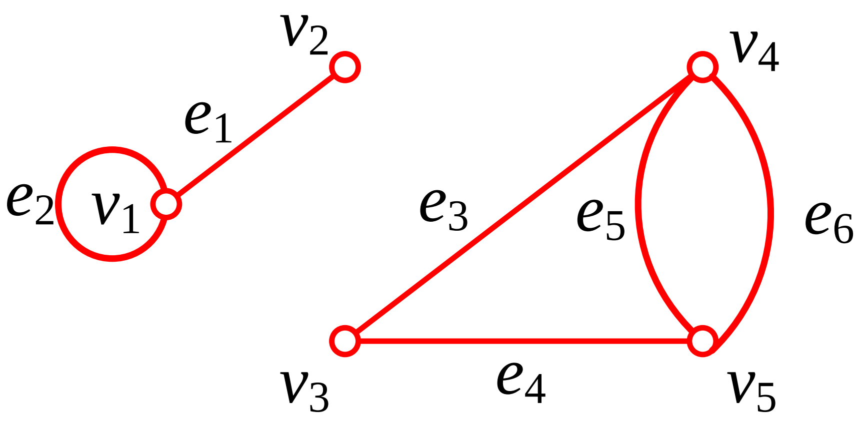
- 林可能不是连通的
- 林的每个连通支都是树

割边

✓ 定义：若 $G' = G-e$ 比 G 的连通支数多，则称 e 是 G 的割边.

□ 删去 $e=(u,v)$，则 u, v 分属于不同的连通支





割边

- ✓ 定理 1: 在图 G 中， $e = (u,v)$ 是割边当且仅当 e 不属于任何回路

证明： 若 e 属于某回路，则 $G' = G-e$ 中仍有从 u 到 v 的道路，故 u, v 属于同一连通支，与 e 是割边矛盾

若 $e =(u,v)$ 不是割边，则 $G' = G-e$ 中与的连通支数一样，故 u, v 属于同一连通支，有从 u 到 v 的道路，连通 e 即构成回路，矛盾

- ✓ 显然，树中的边都是割边

树的等价定义

✓ 定理 2: 设 T 是结点数 $n \geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价

(1) T 连通且无回路

(2) T 的任意两结点间有唯一道路

(3) T 有 $n-1$ 条边且无回路

(4) T 连通且有 $n-1$ 条边

(5) T 连通且每条边都是割边（极小连通）

(6) T 无回路，但任意增加一边后恰有一个回路（极大无回）

- 树是边数最少的连通图，也是边数最多的无回路图
- 满足连通, 无回路, 有 $n-1$条边之任意两条者是树

证明： （1）➡（2）➡（3）➡（4）➡（5）➡（6）➡（1）

树的等价定义

✓ **定理 2: 设 T 是结点数 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价**

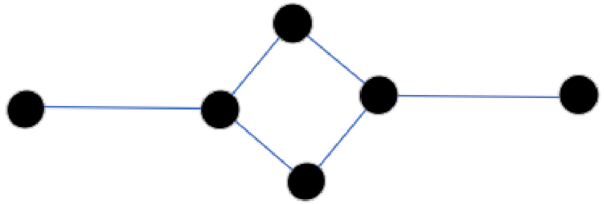
(1) T 连通且无回路;

(2) T 的任意两结点间有唯一道路。

证明：（1）➡（2） *证明?*

树 T 是连通的， T 中任意两结点 u 和 v 间存在路径。

如果两结点 u 和 v 间有存在的路径不唯一，则树 T 中必然会有回路。



树的等价定义

✓ 定理 2: 设 T 是结点数 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价

(2) T 的任意两结点间有唯一道路。

(3) T 有 $n-1$ 条边且无回路;

证明： （2）➡（3） *证明?*

任意两结点间存在唯一道路，可知图 T 中无回路。

证明 T 中边数 $m=n-1$。

当 $n=2$ 时，命题成立。

设当 $n\leq k$ 时，命题成立，即 T 中的边数为 $m=k-1$。

当 $n=k+1$ 时，任选 T 中的一条边 e，T-e 有两个连通分支，其中结点数为 n_1 和 n_2。其中的边数分别为 n_1-1 和 n_2-1。

所以当 $n=k+1$ 时， $m= n_1-1 + n_2-1+1= n-1$。

树的等价定义

✓ **定理 2: 设 T 是结点数 $n \geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价**

(3) T 有 $n-1$ 条边且无回路;

(4) T 连通且有 $n-1$ 条边;

证明： (3) ➡ (4) *证明?*

证明 T 连通：假设 T 中存在 s 个连通分支，每个连通分支都是树，所以 T 中的边 m 有

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$$

$$= n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_s - 1$$

$$= n - s$$

所以可知 $s=1$，即 T 是连通的。

树的等价定义

✓ **定理 2: 设 T 是结点数 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价**

(4) T 连通且有 $n-1$ 条边;

(5) T 连通且每条边都是割边（极小连通）；

证明：（4）➡（5） *证明?*

证明极小连通，即 T 中任何一条边都是割边。

任选 T 中的一条边 e，T-e 中有 $n-2$ 条边，肯定不连通，因此 e 是割边。

树的等价定义

✓ **定理 2: 设 T 是结点数 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价**

(5) T 连通且每条边都是割边（极小连通）；

(6) T 无回路，但任意增加一边后恰有一个回路（极大无回）；

证明：（5）➡（6） *证明?*

T 是极小连通，T 中不存在回路，且任意两结点 u 和 v 间存在唯一路径 Γ。 则有 $\Gamma+(u,v)$ 是唯一回路。

树的等价定义

✓ **定理 2: 设 T 是结点数 $n \geq 2$ 的树, 则下列性质互相等价**

(6) T 无回路，但任意增加一边后恰有一个回路（极大无回）；

(1) T 连通且无回路;

证明：（6）➡（1） *证明?*

证明 T 连通。

T 中任意两结点 u 和 v， $\Gamma+(u,v)$ 有唯一回路 C。

令 $C-(u,v)=\Gamma$，则有 Γ 是两结点 u 和 v 间存在唯一路径。

所以可知 T 连通。

树的其它性质

✓ 设树 T 的结点数 $n\geq 2$，则 T 中必有树叶

(1) 证法 1: 若各结点度都 ≥ 2，则总度数 $\geq 2n \neq 2m = 2(n-1)$，矛盾;

(2) 证法 2: 考虑从任一结点 v 出发沿边前进，走过的边不重复，

则必止步于某树叶。

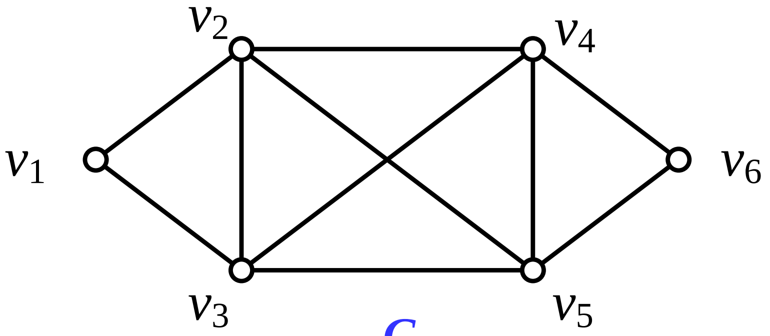
✓ 设树 T 的结点数 $n\geq 2$，则 T 中至少有两个树叶

同上面证法 2，考虑从一树叶出发前进，必止步于另一个树叶。

✓ 若林 F 有 n 个结点和 k 个连通支, 则 F 有 $\underline{n-k}$ 条边。

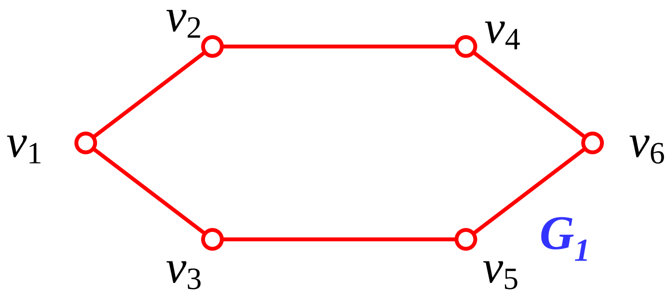
支撑树

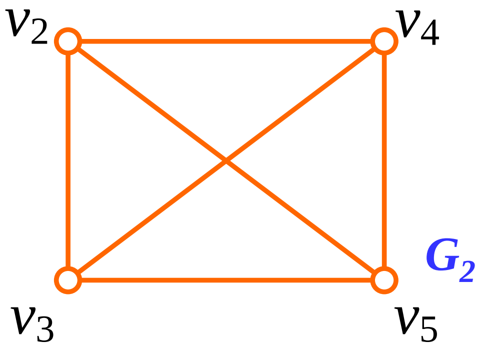
✓ 定义: 如果 T 是图 G 的支撑子图，而且是树，则称 T 是 G 的支撑树或生成树

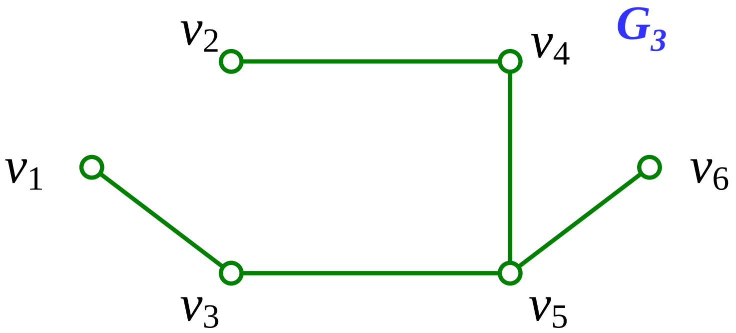


G

图 G 的支撑树?







图论：树

支撑树

- ✓ **图 G 有支撑树当且仅当 G 是连通的**

  推论：图 G 为 n 结点 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$

- ✓ **若图 G 本身不是树，则其支撑树不唯一**

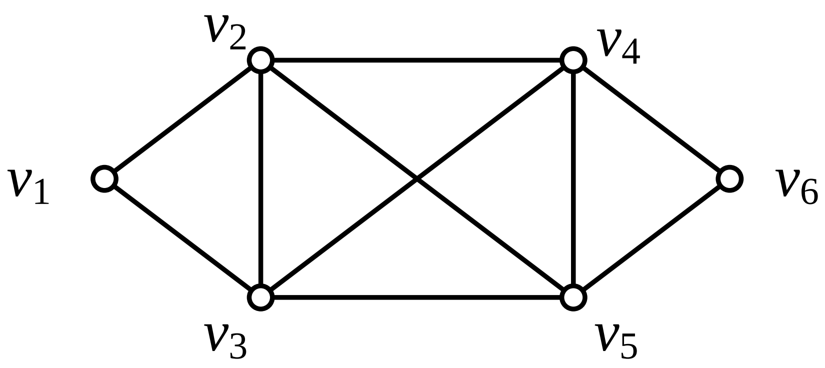
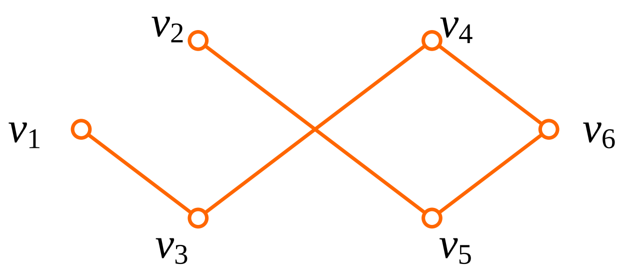
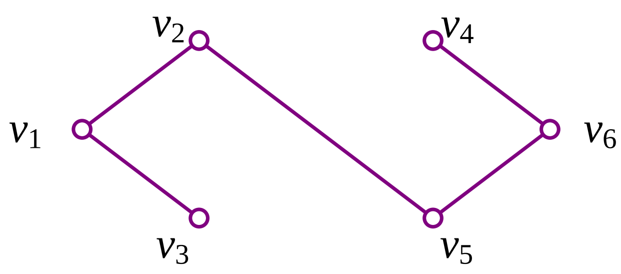
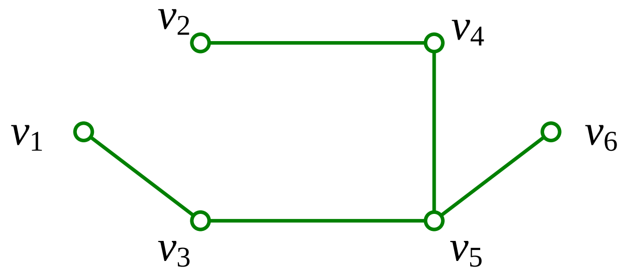


图 G 的支撑树?





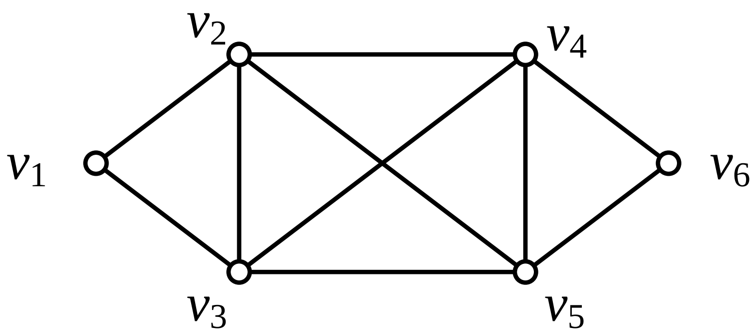


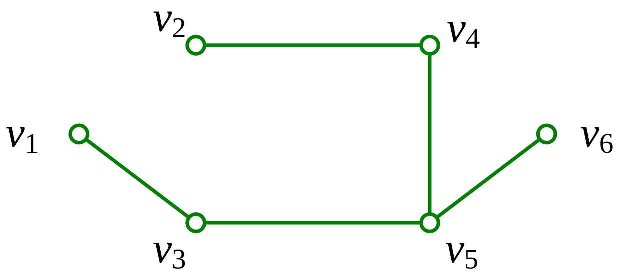
图论：树

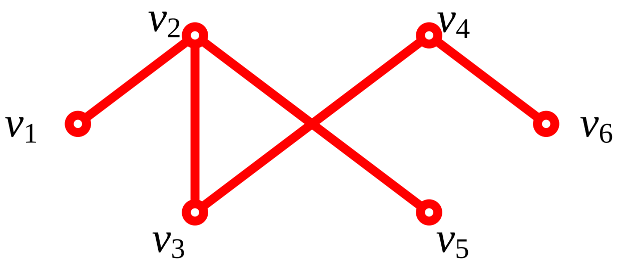
支撑树

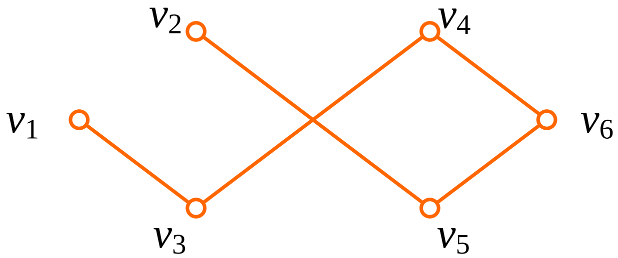
- ✓ 余树：图 G 删掉 T 中各边后的子图
- ✓ 记为 $\overline{T} = G - T$

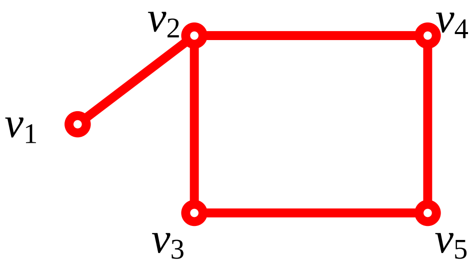
余树不一定是树







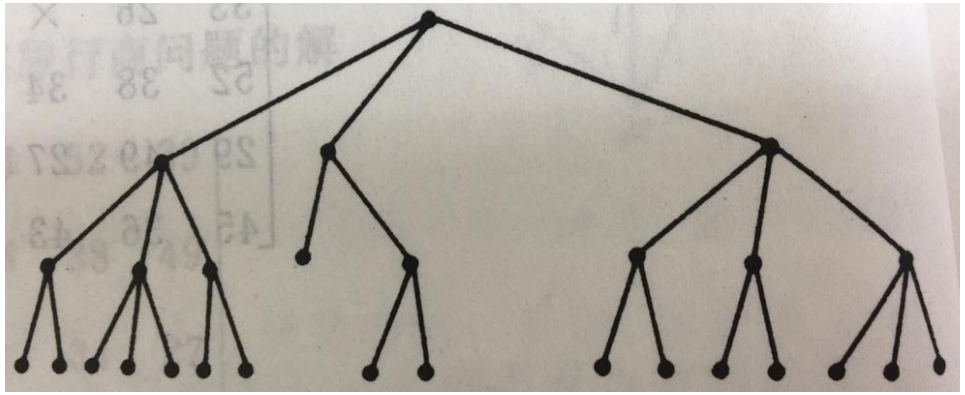


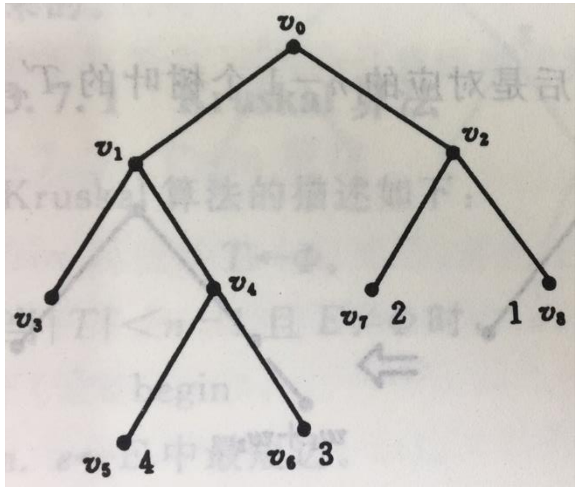


图论：树

二叉树

- ✓ 设 T 是有向树，若 T 中存在负度为 0 的结点 v_0, 其余结点负度为 1，则称 T 是以 v_0 为根的外向树, 或称根树
- ✓ 除树叶外，其余结点的正度最多为 2 的外向树称为二叉树；如果它们的正度都是 2，称为完全二叉树。



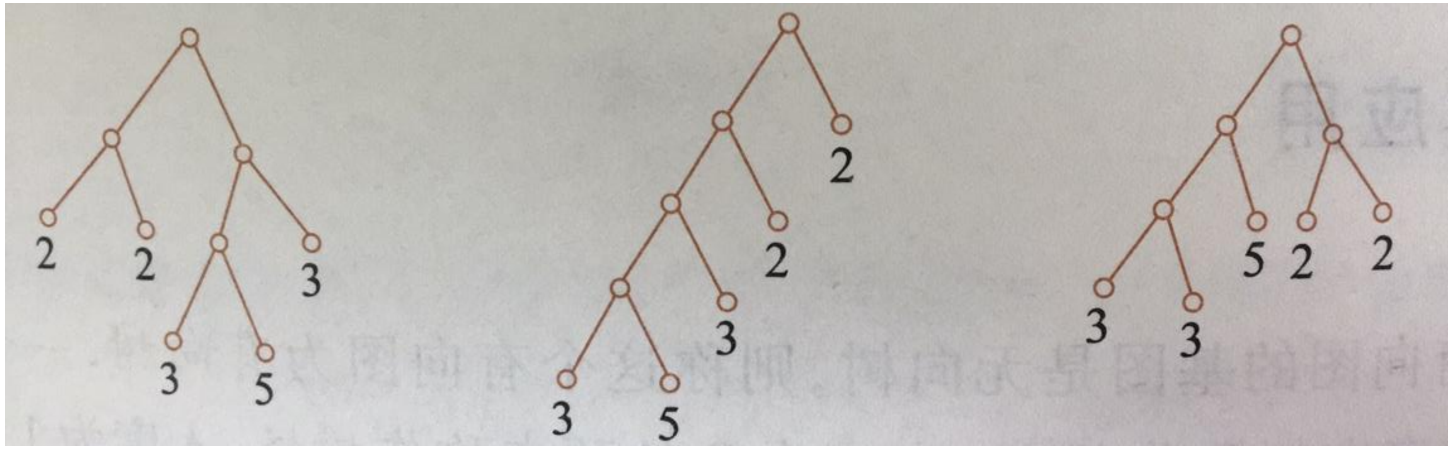


二叉树?
完全二叉树?

二叉树

✓ 赋权二叉树: 赋予树叶 v_i 一个正实数 w_i

- 从根 v_0 到树叶 v_i 的路径 $P(v_0,v_i)$ 的长度 l_i : 即该路径所含边数
- T 的加权路径总长度 WPL: $\Sigma_i\, l_i w_i$

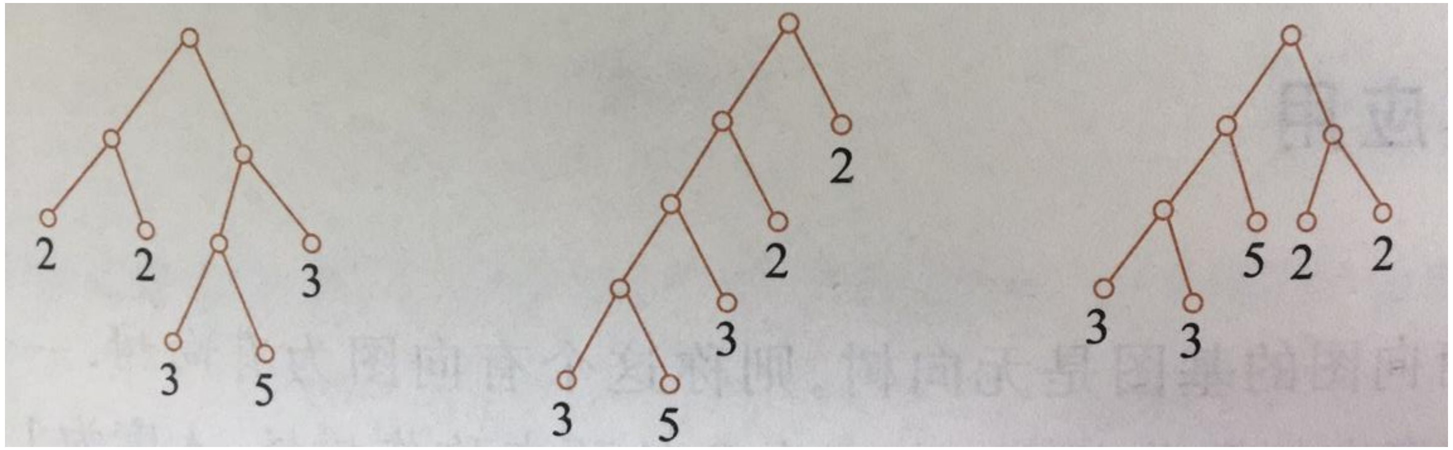


WPL?

38
47
36

二叉树

✓ 最小二叉树：若给定树叶数目及其权值，可以构造许多赋权二叉树，其中必存在 WPL 最小的二叉树，这样的树称为**最优二叉树**（最小二叉树）



最优二叉树?

38
47
36

二叉树

✓ Huffman 算法: 给定 n 个带权树叶，构造最优二叉树 (称为 Huffman 树)

(1) 对 n 个权值排序，得到 $w_{i_1} \le w_{i_2} \le \ldots \le w_{i_n}$.

(2) 计算 $w_i = w_{i_1} + w_{i_2}$

作为中间结点 v_i 的权；v_i 的左子结点是 v_{i_1}，右子结点是 v_{i_2} 。

在权序列中删去 w_{i_1} 和 w_{i_2} ，加入 w_i

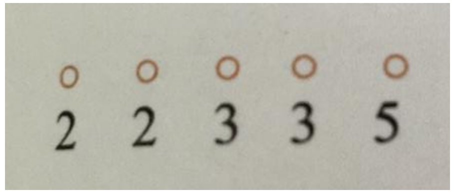
$n \leftarrow n-1$，若 $n=1$，结束；否则转 (1)

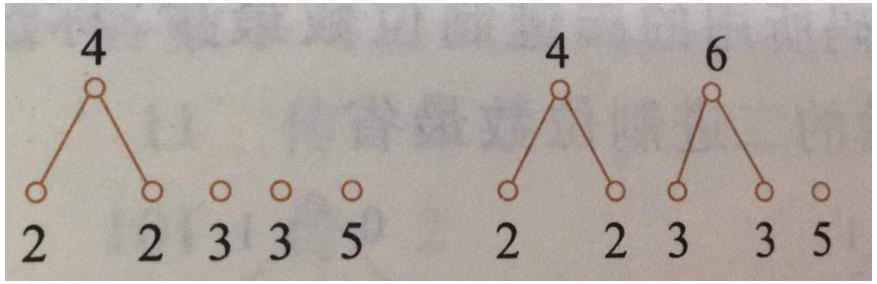
算法的计算复杂度主要取决于步骤 (1)，n 个权值的第一次排序需要进行 $n\log n$)次比较。总共进行 n-2次迭代，算法的计算复杂性性是 $O(n\log n)$ 。

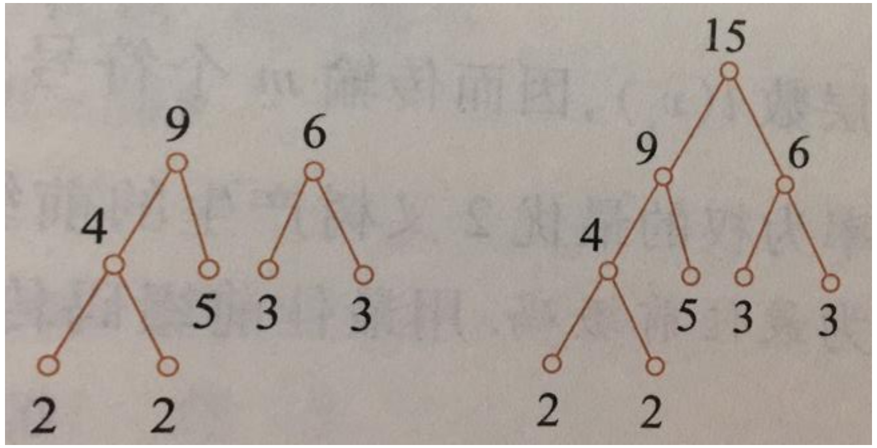
图论：树

二叉树

✓ **Huffman算法:**







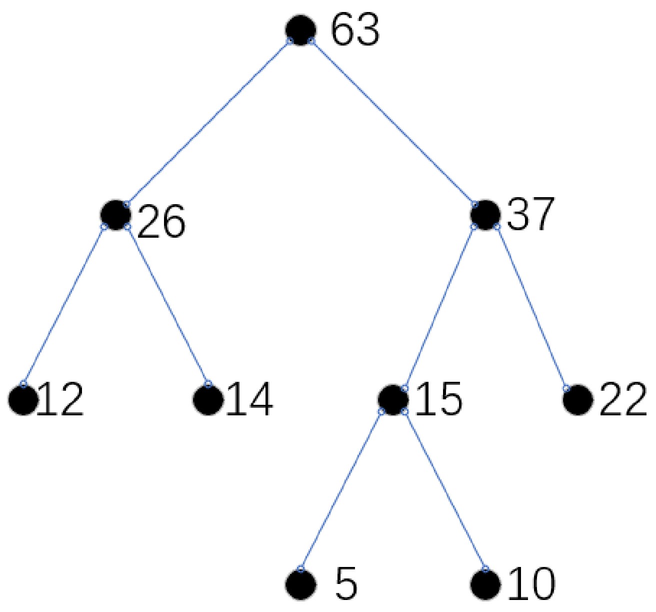
Huffman算法:
自底向上构造

WPL?

34

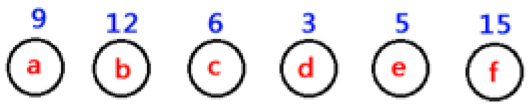
二叉树

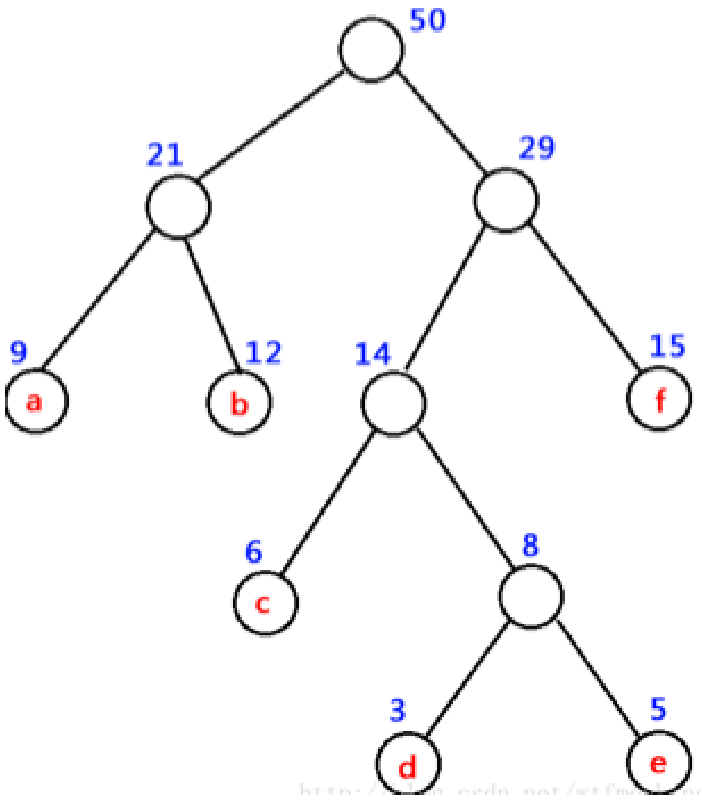
✓ **例1：权序列为（5,14,22,12,10）的Huffman数**



二叉树

✓ 例2：Huffman编码





a 的编码为：00

b 的编码为：01

c 的编码为：100

d 的编码为：1010

e 的编码为：1011

f 的编码为：11

图论：树

二叉树

- ✓ **定理: 由 Huffman 算法得到的二叉树是最优二叉树**

书58页

- **权最小的树叶离根最远**
- **权最小的树叶必有兄弟**