5-2.

(5) 证明：I_+ 上二元运算 $\begin{cases} a \times b = a^b \\ a \triangle b = a \cdot b \end{cases}$，$a, b \in I_+$.

假定 $\times$ 对 $\triangle$ 是可分配的.

则对于 $a, b, c \in I_+$.

有 $a \times (b \triangle c) = (a \times b) \triangle (a \times c)$.

又 $a \times (b \triangle c) = a^{bc}$

$(a \times b) \triangle (a \times c) = a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

故 $a^{bc} \neq a^{b+c}$ $\Rightarrow$ $\times$ 对 $\triangle$ 不可分配.

5-3.

(2). 证明：$\langle S, \times \rangle$ 是一个半群. $a \in S$.

S 上二元运算 $\square$ 有：$x \square y = x \times a \times y$.

则对 S 中任意元素 x, y, z,

$x \square (y \square z) = x \square (y \times a \times z) = x \times a \times y \times a \times z = xyza^2$

$(x \square y) \square z = (x \times a \times y) \square z = x \times a \times y \times a \times z = xyza^2$

又 $x \square (y \square z) = (x \square y) \square z$

故二元运算 $\square$ 可结合.

No
Date

(3) 证明：<R, ×> 是代数系统.

有 $a \times b = a + b + a \cdot b$.

对任意 $x \in R$，有 $0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x$

$x * 0 = x + 0 + x \cdot 0 = x$.

∴ 0是R的左右幺元，故0是幺元.

下面证 <R, ×> 是半群：

对任意 $a, b \in R$，$a \times b = a + b + a \cdot b \in R$.

故R是可封闭的

对任意 $a, b, c \in R$，$a \times (b \times c) = a \times (b + c + b \times c)$

$= a + b + c + b \times c + a \times b + a \times c + a \times b \times c$

$= (a \times b) \times c$ ⇒ 故R是可结合的.

故代数系统 <R, ×> 是半群.

又R有幺元0 ⇒ 综上：<R, ×> 是独异点.

(5) 证明：∵ <A, ×> 是一个半群.

故对A中任意元素a，有 $(a \times a) \times a = a \times (a \times a)$.

∵ $a \times b = b \times a$ 当且仅当 $a = b$.

∴ $a \times a = a$.

∴ $a \times a = a \times a = a$.

b). 对任意 $a, b \in A$,

有 $a\times(a\times b\times a) = (a\times a)\times b\times a = a\times b\times(a\times a)$

$= (a\times b\times a)\times a$.

$\therefore\ a\times b\times a = a$.

c). 对 $a, b, c \in A$.

有 ~~$a\times b\times c\times a$~~ ~~$a\times c = a\times b\times a\times c$~~

~~$a\times c = a\times a\times c = a\times b$~~

$(a\times c)\times(a\times b\times c) = (a\times c\times a)\times(b\times c) = a\times b\times c$

$= a\times b\times(c\times c) = (a\times b\times c)\times c$

$= (a\times b\times c)\times(c\times a\times c) = a\times b\times(c\times c)\times(a\times c)$

$= (a\times b\times c)\times(a\times c)$.

$\therefore\ a\times b\times c = a\times c$.

(b). $\langle S, \times\rangle$ 是半群. $\times$ 是可交换的.

证明: $a\times a = a$, $b\times b = b$.

$\therefore\ a\times b = b\times a$.

$\therefore\ (a\times b)\times(a\times b) = a\times(b\times a)\times b = (a\times a)\times(b\times b)$

$= a\times b$.

J-4、

(2) a) 证明：存在 $\hat{a}$，使得 $\hat{a}\times a=e$.

∴ 若 $a\times b=a\times c$ ⇒ 则 $\hat{a}\times a\times b=\hat{a}\times a\times c$.

∴ $e\times b=e\times c$.

∴ $b=c$.

b) 证明：∵ 对每一个 $x\in A$，有 $\hat{x}\in A$，使得 $\hat{x}\times x=e$.

∴ ~~$e\times x=$~~ $x\times e=x\times\hat{x}\times x$

~~$x_1\times e=x_1\times\hat{x}\times x$~~

∵ e 是左幺元 ⇒ ∴ $e\times x=x=\hat{x}\times x\times x$

∴ $\hat{x}\times x=1$. ⇒ $x\times e=x$

∴ e 是右幺元 ⇒ e 是幺元.

(3) $\langle G,*\rangle$ 是群. $H=\{y\mid y*a=a*y,\ y\in G\}$.

证明：$H\subseteq G$.

∵ G 可结合 ⇒ ∴ H 可结合.

对任意 $x,y\in H$，有 $(x*y)*a=x*(y*a)$

$=x*(a*y)=(x*a)*y=a*(x*y)$.

∴ $x*y\in H$ ⇒ H 可封闭.

$\because e*a = a*e \Rightarrow \therefore e \in H$.

又 $\because x*a = a*x$

$\therefore x^{-1}*x*a$ 是 $x^{-1}*a*x*x^{-1}$

$\therefore \cancel{e*(a*}(e*a)*x^{-1} = x^{-1}*(a*e)$

$\therefore x^{-1} \in H$.

$\therefore$ 逆元存在.

$\therefore \langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群.

(4). $\langle H,\cdot\rangle$ 和 $\langle K,\cdot\rangle$ 是群 $\langle G,\cdot\rangle$ 的子群

$HK = \{h\cdot k \mid h \in H, k \in K\}$.

证明: ①充分性: 已知 $HK = KH$.

$\therefore$ 有 $h_1 \cdot k_1 \cdot k_2^{-1} \cdot h_2^{-1}$.

$\therefore k_1 \cdot k_2^{-1} \cdot h_2^{-1} \in KH$.

又 $KH = HK \Rightarrow k_1 \cdot k_2^{-1} \cdot h_2^{-1} \in HK$.

$\therefore HK$ 是 G 的子群.

②必要性: 已知 $\langle HK,\cdot\rangle$ 是 $\langle G,\cdot\rangle$ 的子群.

对任意 $h, k \in H, K$, $(h\cdot k)^{-1} \in HK$.

$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \Rightarrow HK \subseteq KH$.

No

Date

同理：$KH \subseteq HK$.

综上：$HK = KH$.

∴满足充分必要条件.

5-5.

(1). $\langle G, * \rangle$ 是独异点.

对于$\forall x \in G$，有 $x * x = e$ (幺元).

证明：~~对于 $x, y \in G$~~

可知 G中每个元素的逆元为其本身，

故 $\langle G, * \rangle$ 是群.

对任意 $x, y \in G$，有 $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

∴ 可交换，$\langle G, * \rangle$ 是阿贝尔群

5-7.

(8) 证明：设 p^m 阶群为 $\langle G, * \rangle$.

对任意$a \in G$，有 $a^n = e$. 则 $n \mid p^m$.

$n = p^t$, $t \geq 1$.

若 $t=1$，则 a的阶为p，由 a 生成的循环群是一个 p阶子群

No

Date

若$t>1$，令 $b=a^{p^{t-1}}$　$b^p=a^{p^t}=a^n=e$.

∴由b生成的循环群是G的一个p阶子群.

5-8.

(6) 证明：设循环群为$\langle G, *\rangle$，同态映射为f.

$\langle f(G), \Delta\rangle$为同态象.　$a\in G$.

即证$f(a)$是$f(G)$的生成元.

对任意$x\in G$，$f(x)\in f(G)$.

设$x=a^n \Rightarrow f(x)=f(a^n)=f(a^{n-1}\cdot a)$

$=f(a^{n-1})\Delta f(a)=\cdots=f(a)^n$

故$f(a)$是生成元，即同态象$\langle f(G),\Delta\rangle$是循环群.