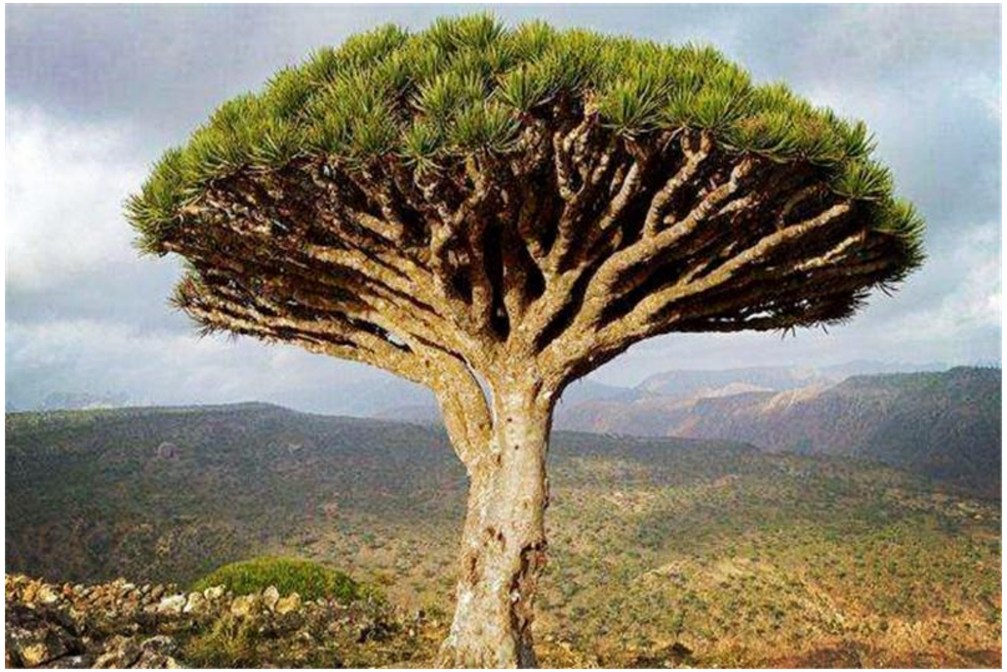
第三章：树



图论：树

定义：树：不含回路的连通图，用 T 表示。树中不含多重边和自环，是简单图。
边称为**树枝**。度为 1 的结点称为**树叶**。度大于等于 2 的结点称为**分叉点**。
林：不含回路的图。

定理 1：在图 G 中， $e=(u,v)$ 是割边当且仅当 e 不属于任何回路。

定理 2：设 T 是结点数 $n\geq 2$ 的树，则下列性质互相等价。
(1) T 连通且无回路。(2) T 的任意两结点间有唯一道路。(3) T 有 $n-1$ 条边且无回路
(4) T 连通且有 $n-1$ 条边。(5) T 连通且每条边都是割边（极小连通）。
(6) T 无回路，但任意增加一边后恰有一个回路（极大无回）。

- 满足**连通，无回路，有 $n-1$条边**之任意两条者是树。
- 树是边数最少的连通图，也是边数最多的无回路图。
- 若林 F 有 n 个结点和 k 个连通支，则 F 有 $\underline{n-k}$ 条边。

定义：如果 T 是图 G 的支撑子图，而且是树，则称 T 是 G 的支撑树或生成树。

定义：除树叶外，其余结点的正度最多为 2 的外向树称为二叉树；
如果它们的正度都是 2，称为完全二叉树。

定义：最小二叉树：若给定树叶数目及其权值，可以构造许多赋权二叉树，其中必存在 WPL 最小的二叉树，这样的树称为最小二叉树。

图论：树

东北油气能源
进口通道
西北油气能源
进口通道
西南油气能源
进口通道
海上油气能源
进口通道
中俄原油管道漠大线
大庆
哈尔滨
哈沈线
长春
沈阳
秦沈线
大沈线
大连
秦皇岛
永唐线
北京
陕京一线
陕京二线
陕京三线
榆林
太原
冀宁联络线
西气东输三线
西气东输二线
西气东输一线
乌鲁木齐
塔里木气区
中卫—靖边联络线
中卫
石兰线
西宁
兰州
涩宁兰管道
青海气区
西安
兰成原油管道
长庆气区
西南气区
成都
中贵线
重庆
忠武线
武汉
南昌
杭州
上海
南昌—上海支干线
长沙
兰成渝成品油管道
中缅原油管道
贵阳
昆明
中缅天然气管道
南宁
广州—南宁支干线
广州
深圳
香港
广州—深圳支干线
厦门
台湾

图论：树

最短树 问题

- ✓ 加油站建设问题: 在若干加油站之间铺设输油管道, 在确保各加油站供应的条件下, 要使建设费用最小

- ✓ 煤气管道铺设: 上海西南某高校新建宿舍楼群铺设煤气管道，已知每一幢楼的接入位置和距离，求最短的铺设方案

最短树

✓ 最短树问题: 求赋权连通图的总长 $w(T)$ 最小的支撑树

- ☐ Kruskal 算法
- ☐ Prim 算法

权被赋在边上

最短树: Kruskal 算法

- ✓ Kruskal算法：$\boxed{\text{不断加入最短边，并保持无回路}}$
- ✓ 算法描述：

$T \leftarrow \varnothing$;

WHILE $|T| < n-1 \wedge E \neq \varnothing$ DO

BEGIN

$e \leftarrow E$ 中最短边;

$E \leftarrow E - e$;

若 $T + e$ 无回路, 则 $T \leftarrow T + e$;

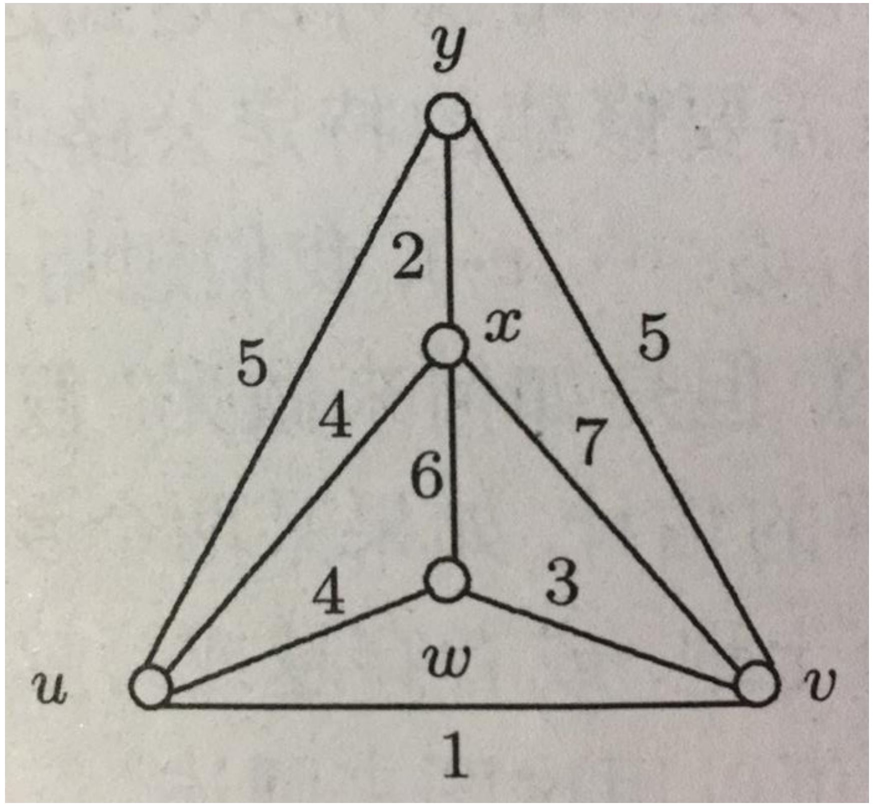
END

IF $|T| < n-1$ THEN 打印“非连通”

ELSE 输出最短树 T

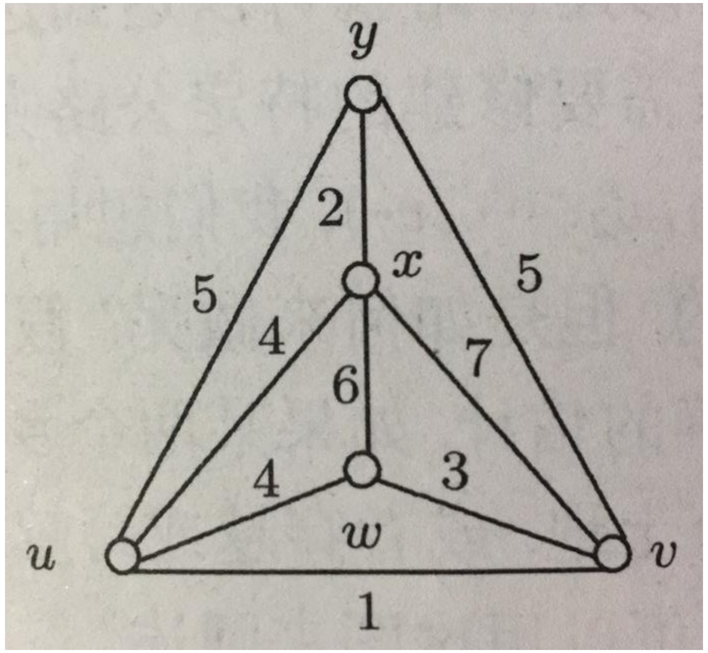
最短树: Kruskal算法 – 例题

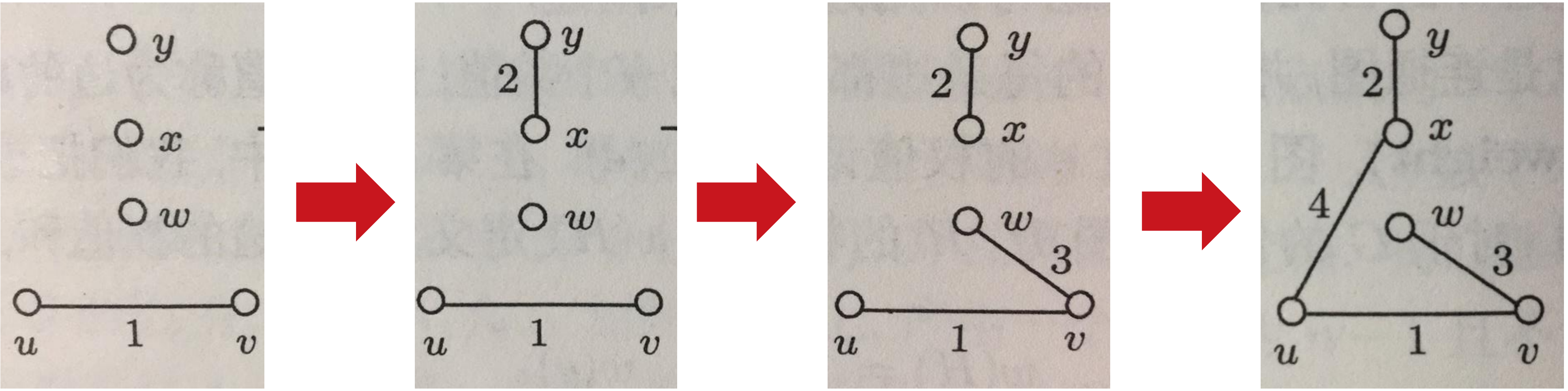
最短树问题: 求赋权连通图的总长最小的支撑树



图论：树

最短树: Kruskal算法 – 例题





最短树: Kruskal算法

- 定理 1: $T=(V, E')$ 是赋权连通图 $G=(V, E)$ 的最短树，**当且仅当**对任意余树边 $e\in E-E'$, $E'+e$ 中的回路 C^e 满足

$$w(e)\geq w(a)，对\ \forall a\in C^e，a\neq e.$$

证明:

必要性 $\Rightarrow$ 若有余树边 e 满足 $w(e)<w(a)$，$\exists\, a\in C^e$，则以 e 换 a 得到的树 T' 比 T 更短，与 T 是最短树矛盾.

充分性 $\Leftarrow$ 对不同于 T 的支撑树 T'，有 $T'-T\neq\varnothing$，$\forall e\in T'-T$，
$T+e$ 中有回路C^e；
据已知条件，对 $\forall a\in C^e\cap T$ 有 $w(e)\geq w(a)$,
则易证 $w(T')\geq w(T)$。

最短树: Prim算法

- ✓ Prim算法: 初始任选一结点, 然后不断加入距离最近的结点
- ✓ 算法描述:

$T \leftarrow \varnothing$; $t \leftarrow v_1$; $U \leftarrow \{t\}$;

WHILE $U \neq V$ DO

BEGIN

$w(t,u) = \min_{v \in V-U}\{w(t,v)\}$;

$T \leftarrow T + e(t, u)$;

$U \leftarrow U + u$;

FOR $v \in V-U$ DO

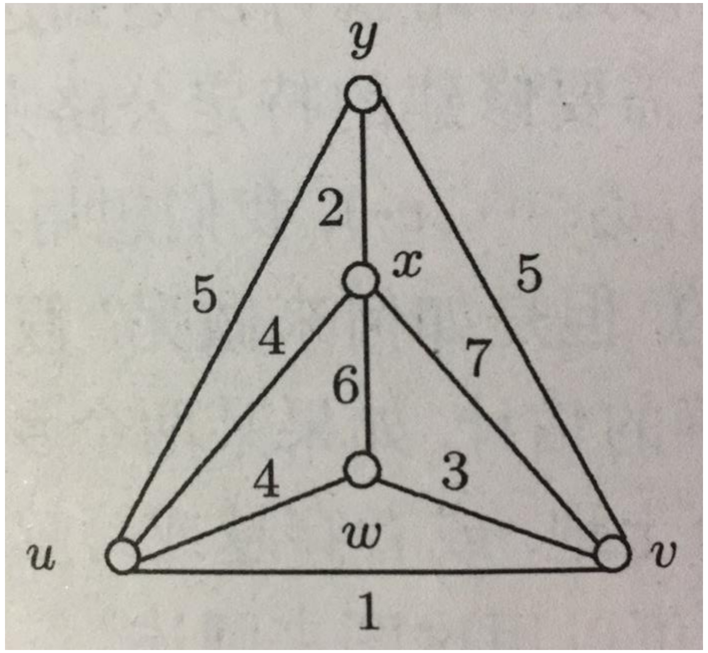
$w(t,v) \leftarrow \min\{w(t, v), w(u, v)\}$

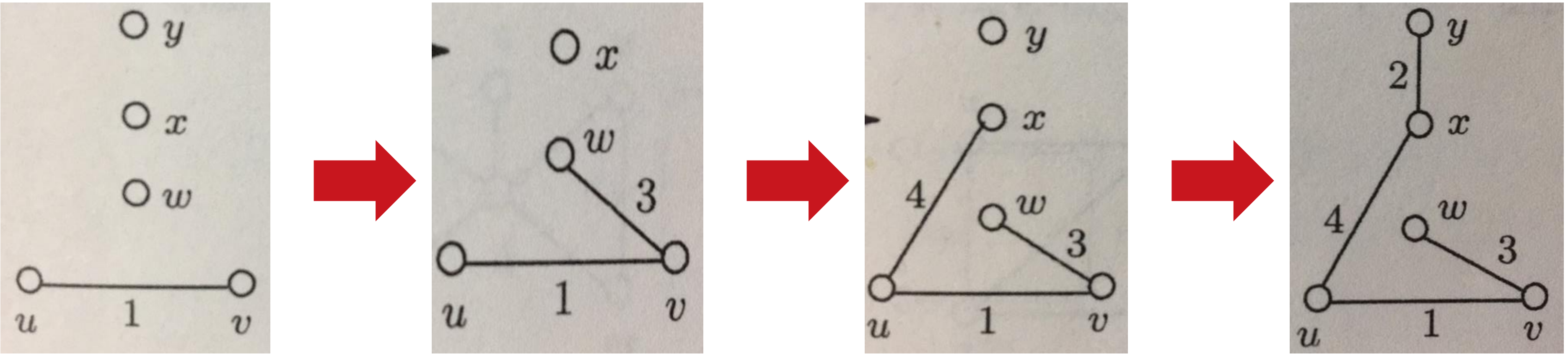
END

图论：树

最短树: Prim算法 – 例题

✓ Prim算法例子





最短树: Prim算法

定理 3: 设 V' 是赋权连通图 $G=(V,E)$ 的结点真子集， e 是端点分别属于 V' 和 $V-V'$ 的最短边，则 G 中一定存在包含 e 的最短树。

最短树不唯一
最小权和唯一

证明: 令 T_0 为一最短树

假设 $e \notin T_0$ ⟶ T_0+e 构成唯一回路

⟶ 回路包含 e 和 $e'=(u,v)\in T_0$，其中 $u\in V'$，$v\in V-V'$

由已知，$w(e)\le w(e')$

⟶ $T_0 \oplus (e,e')$ 为最短树

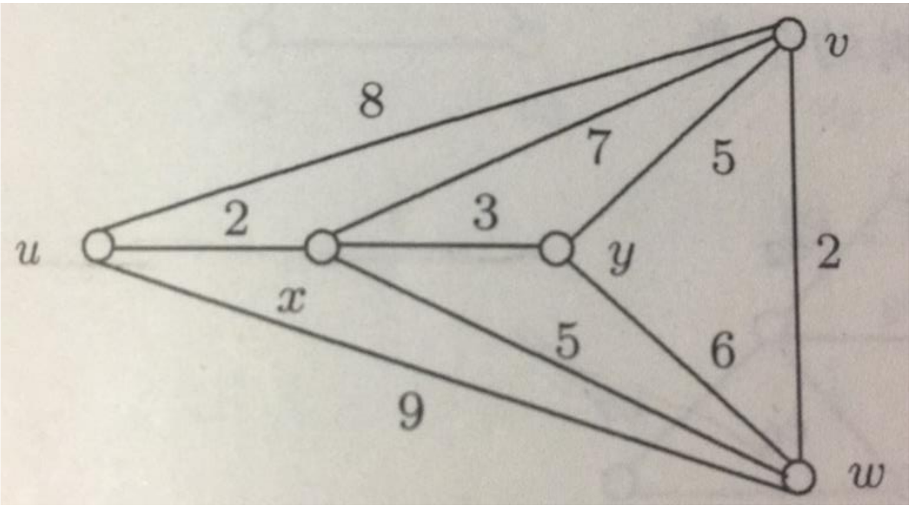
最短树: Prim算法

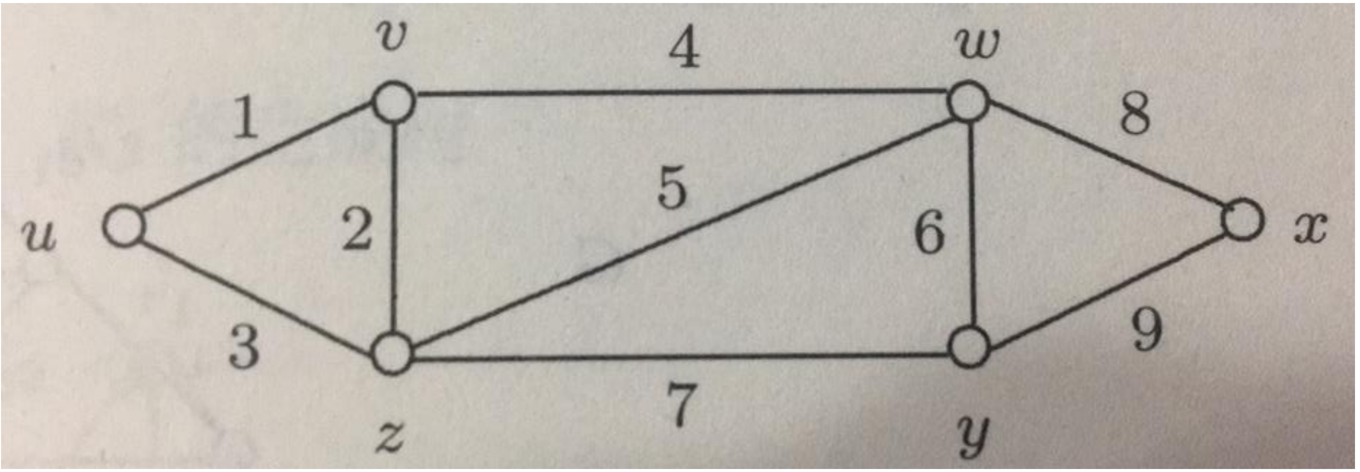
定理 4: Prim算法可得到赋权连通图G的一棵最短树

- **Kruskal 算法复杂性是 O(m+$p$log$m$)，其中 p 为迭代次数.**
- **Kruskal 算法的复杂性与迭代次数有关；**
  图稠密时，迭代次数可能接近边数；
- **Prim 算法复杂度O(n^2)；**
- **Prim 算法只与结点有关，与图的稠密度无关；**
- **Prim 算法适用于稠密图，Kruskal 算法更适用于稀疏图。**
- **最长树问题：最短改最长。**

最短树

分别采用 Kruskal 和 Prim 算法得到赋权连通图 *G* 的一棵最短树





最短树

分别采用 Kruskal 和 Prim 算法得到赋权连通图*G*的一棵最短树