第一章：命题逻辑的基本概念

命题逻辑的基本概念

命题：什么是命题

- 命题（proposition）：是一个非真即假的陈述句
  - ✓ 是陈述句，而非命令句、疑问句或感叹句等
  - ✓ 表达的内容可判断真假，而且非真即假
    - 真假的判定：与事实是否相符
    - 不能不真又不假，也不能又真又假

悖论不是命题

- 真值 (truth value)：命题具有两种可能的取值，即真 (true) 和假 (false)
  - 常写做 T 和 F
  - 称为二值逻辑

任何命题的真值都是唯一的

命题逻辑的基本概念

命题：例1

- 4 是素数。 ➢ 是命题，真值为 F
- $\sqrt{5}$ 是无理数。 ➢ 是命题，真值为 T
- x 大于 y。 ➢ 不是命题，真值不确定
- 火星上有水。 ➢ 是命题，真值唯一

命题逻辑的基本概念

命题：例2

- 请不要吸烟！
  - 不是命题，非陈述句
- 我正在说假话。
  - 不是命题，悖论

由真能推出假，又由假能推出真，
从而既不能为真，也不能为假的陈述句

- 1+101=110。
  - 是命题，真值与所讨论问题范围有关

命题：例3

- 张某和李某是同学。
  - ➢ 是命题，真值唯一且需视具体情况确定
- 不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数。
  - ➢ 是命题，真值为 T
- π 大于 $\sqrt{2}$ 吗?
  - ➢ 不是命题，疑问句
- 2050 年的元旦是晴天。
  - ➢ 是命题，真值唯一

命题逻辑的基本概念

命题的符号化表示

- 为了对命题进行逻辑演算，利用数学手段将命题符号化（形式化）

- 用字母表示命题
  - ✓ 命题常项：例如用 P 表示“雪是白的”
  - ✓ 命题变项：例如用 P 表示任意命题

- 命题 *vs* 命题变项 → 常量与变量
  - ✓ 命题指具体的陈述句，有确定的真值
  - ✓ 命题变项不特指某个命题，真值不确定
    - □ 将某个命题代入命题变项时，命题变项方可确定真值

在命题逻辑演算中，两者处理原则是一样的，可不做区分

命题逻辑的基本概念

简单命题和复合命题

- 简单命题：简单句，不包含任何“并且”，“或者”之类的联结词
  - ✓ 例如: 雪是白的;
  - ✓ 又叫原子命题: 不可分割
- 复合命题：简单命题经联结词联结而成
  - ✓ 例如: 张三是教师并且雪是白的
  - ✓ 又叫分子命题: 可以分割
  - ✓ 联结词例子：并且，或者，非，如果…那么…

命题逻辑的基本概念

复合命题的真值

- 复合命题的真值是简单命题的真值的函数
  - ✓ 当简单命题被赋予任一真值组合时，联结词完全决定了复合命题的真值
  - ✓ 例如：“张三学英语且李四学日语”由简单命题“张三学英语”，“李四学日语”经联结词“且”联结而成。
    当这两个简单命题真值均为 T 时，该复合命题真值才为 T。

命题逻辑的基本概念

简单命题和复合命题

- $\sqrt{5}$是无理数是不对的　　非P
- 2 是偶素数　　Q 且 R
- 2 或 4 是素数　　Q 或 T
- 如果 2 是素数，那么 3 也是素数　　如果 Q，那么 S
- 2 是素数当且仅当 3 也是素数　　Q 等价 S

P：$\sqrt{5}$是无理数

Q：2 是素数

R：2 是偶数

S：3 是素数

T：4 是素数

联结词：
并且，或者，非，
如果…那么…，
当且仅当

命题逻辑的基本概念

命题内容 vs 形式

- 形式逻辑并不关心命题内容为真为假的条件和环境等，只关心命题有真假的可能性，及复合命题的真假规律性

- 风马牛不相及的内容也可以组成复合命题
  - ✓ 张三学英语或者熊猫是珍稀动物

命题逻辑的基本概念

命题联结词

- 命题联结词将命题联结起来构成新命题
  - ✓ 将命题视为运算对象，命题联结词视为运算符，从而构成运算表达式
  - ✓ 比较：初等代数中运算对象是 a，b，c 等，运算符有 +、 −、 ×、 ÷ 等
- 常用命题联结词：

$\neg$、 $\wedge$、 $\vee$、 $\rightarrow$、 $\leftrightarrow$

命题逻辑的基本概念

否定词 $\neg$

- 否定 (*negation*)：命题 P 加上否定词就形成一个新命题 $\neg P$，表达的是对命题 P 的否定
  - ✓ 读作：非 P
- $\neg$ 的定义可用真值关系精确给出
  - ✓ $\neg P$ 为真 *iff* P 为假
  - ✓ 这种真值关系常用**真值表** (*truth table*) 来表示
    - ◆ 当命题变项不多时，真值表是研究真值关系的重要工具

否定词 ¬

- ¬ 的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

令 P：张三国庆节去旅游了

$\neg P$：张三国庆节没有去旅游。

令 P：张三学习离散数学

$\neg P$：张三没有学习离散数学。

- 真值表描述了 $\neg P$ 的真值 对 命题 P 的真值的依赖关系

合取词 $\wedge$

- 合取 (conjunction)：联结两个命题 P 和 Q 构成一个新命题 $P \wedge Q$，表达“P 并且 Q”
  - ✓ 读作：<u>P 与 Q</u>，<u>P、 Q 的合取</u>

- $\wedge$ 的定义可用真值关系精确给出
  - ✓ $P \wedge Q$ 为真 *iff* P 和 Q 都为真

合取词 $\wedge$

- $\wedge$ 的真值表描述了 $P \wedge Q$ 的真值如何依赖于 P 和 Q 的真值.

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

命题逻辑的基本概念

合取词 $\wedge$

- 令 P：张三去看球了

  令 Q：李四去看球了

  $\Rightarrow$ $P \wedge Q$：张三和李四都去看球了

- 令 P：张三去看球了

  令 Q：火星上有生物

  $\Rightarrow$ $P \wedge Q$：张三去看球了并且火星上有生物

命题逻辑的基本概念

合取词 ∧ 与日常用语的差异

- 日常用语里的“和”、“与”、“并且”一般表示同类事物的并列
- 形式逻辑中的∧只关心命题与命题之间的真值关系，并不考虑两命题是否有意义上的联系
  - 例如：“张三18岁并且今天天气晴朗”
- 日常用语中的某些意义用∧表达不出来
  - 例如：“这台机器质量很好，但是很贵”用 ∧ 表达时并无“ 转折”的语气

析取词 $\vee$

- 析取 (disjunction)：将两个命题 *P*、*Q* 联结起来，构成一个新的命题 $P \vee Q$，表达“*P* 或者 *Q*”
  - ✓ 读作：<u>*P* 或 *Q*</u>，<u>*P*、*Q*的析取</u>
- $\vee$ 的定义可用真值关系精确给出
  - ✓ $P \vee Q$ 为假 *iff* *P*假 而且 *Q*假

析取词 $\vee$

- $\vee$ 的真值表描述了 $P \vee Q$ 的真值如何依赖于 P 和 Q 的真值.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

命题逻辑的基本概念

析取词 ∨

- 令 P：国庆节刮台风

  Q：国庆节晴天

➡ $P \vee Q$：国庆节刮台风或者晴天

- 令 P：2 小于 3

  Q：太阳上有人

➡ $P \vee Q$：2 小于 3 或者太阳上有人

析取词 ∨ 与日常用语的差异

- 日常用语中的“或”往往具有“不可兼”的涵义，即二选一
  - 例如：你去或者我去

命题逻辑的基本概念

蕴涵词 $\rightarrow$

- 蕴涵 (*implication*)：将两个命题 *P*、*Q* 联结起来，构成一个新的命题 $P \rightarrow Q$，表达“如果 *P* 成立，那么 *Q* 成立”
  - ✓ 读作： <u>*P* 蕴涵 *Q*</u>
  - ✓ *P* 称前件 (*antecedent*)，*Q* 称后件(*consequent*)

- $\rightarrow$ 的定义可用真值关系精确给出
  - ✓ $P \rightarrow Q$ 为假 *iff* *P* 真 而 *Q* 假

命题逻辑的基本概念

蕴涵词 $\rightarrow$

- $\rightarrow$ 的真值表描述了 $P \rightarrow Q$ 的真值如何依赖于 P 和 Q 的真值

P	Q	$P\rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

如果太阳从西边出来，那么我就不姓张

P 是 Q 成立的充分条件

- 验证：$P \rightarrow Q$ 和 $\neg P \vee Q$

怎么验证?

命题逻辑的基本概念

蕴涵词 → 与推理

- → 的最重要用途是进行命题间的推理
- 如果已知 $P \rightarrow Q$ 为真，
  那么只要 P 为真，必能推知 Q 为真
  - 绝不可能 P 真而 Q 假
  - 此即传统逻辑所称 *modus ponens* 推理规则

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

肯定前件式，或称分离规则

$P \rightarrow Q$	若P则Q
P	$\because P$
Q	$\therefore Q$

命题逻辑的基本概念

蕴涵词 → 与日常用语的差异

- → 的称为实质蕴涵 (material implication)，与日常用语“如果…那么…”有异同
  - 同：表示因果关系时
    - P：小明生病了
    - Q：小明没去上课
  - 异：只反映真值间关系，与命题内容无关时
    - P：2<3
    - Q：1+1=2

命题逻辑的基本概念

双条件词 $\leftrightarrow$

- 双条件/等价 (*biconditional /equivalence*)：将两个命题 *P*、*Q* 联结起来，构成一个新的命题 $P \leftrightarrow Q$，表达“等价于”“当且仅当”等
  - ✓ 读作：P 等价 Q，P 当且仅当 Q

- $\leftrightarrow$ 的定义可用真值关系精确给出
  - ✓ $P \leftrightarrow Q$ 为真 *iff* *P* 和 *Q* 真值相同

命题逻辑的基本概念

双条件词 $\leftrightarrow$

- $\leftrightarrow$ 的真值表描述了 $P \leftrightarrow Q$ 的真值如何依赖于 P 和 Q 的真值

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

- 验证：$P \leftrightarrow Q$ 和 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 　　*怎么验证?*

命题逻辑的基本概念

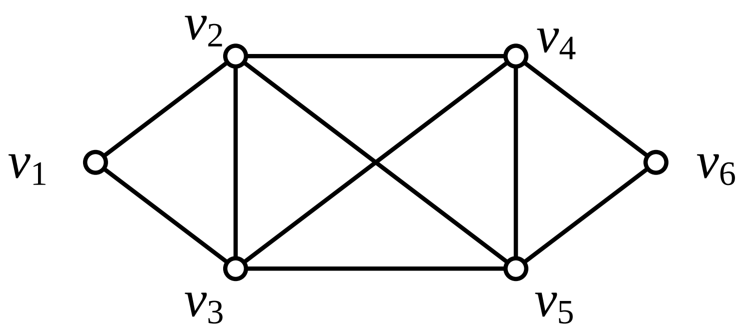
双条件词 $\leftrightarrow$

令 P：无向连通图 G 是欧拉图；

P'：图 G 中各结点的度都是偶数；

Q：无向连通图 G 是哈密顿半图；

Q'：图 G 中任意两结点的度的和不小于结点数 -1；



- $P \leftrightarrow P'$ 表达了无向连通图 G 是欧拉图当且仅当其各结点度为偶数；
- $Q' \rightarrow Q$ 表达了如果无向连通图 G 其任意两结点度的和不小于结点数-1，那么图 G 是哈密顿图。

命题逻辑的基本概念

关于联结词

- 联结词是由命题定义新命题的基本方法

  ✓ $\neg\ \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ 最常用的

  ✓ 还可定义其他联结词，但既不常用，又都可由这 5 个联结词表示出来

  - 事实上，只需两个基本联结词： $\neg\ \wedge$ 或者 $\neg\ \vee$
  - 联结词 $\wedge \vee \neg$ 对应着数字电路的与门，或门和非门电路；
    命题逻辑 (布尔逻辑) 是数字电路分析和设计的理论基础和工具

命题逻辑的基本概念

真值表

- 当命题 A 依赖于命题 $P_1,\cdots,P_n$ 时，从命题 $P_1,\cdots,P_n$ 到 A 的真值表有 2^n 行

与日常用语的差异

- 数理逻辑是采用数学符号化的方法来研究命题间的真值规律
- 不涉及判断单个命题本身的真假
- 抽象地、形式地讨论命题逻辑关系
- 不考虑命题的具体含义及命题间是否有意义上的联系

命题逻辑的基本概念

命题公式

- 是命题逻辑讨论的对象
- 在由命题变项通过联结词构成复杂命题时，如何才是有意义的命题?（合法的命题）

$$\neg P \wedge Q \rightarrow R$$

$$P \wedge \neg \wedge R$$

- 多联结词构成的命题计算次序问题（联结词优先级）

命题逻辑的基本概念

合式公式

- 定义：
  - (1) 命题变项 (简单命题) 是命题公式
  - (2) 如果 P、Q 是命题公式，那么 $(\neg P)$、 $(P\wedge Q)$、$(P \vee Q)$、 $(P\rightarrow Q)$ 和 $(P \leftrightarrow Q)$ 是命题公式
  - (3) 命题公式仅限于此 (当且仅当经过有限次地使用 (2) 中所组成的字符串才是命题公式)
  - 上面这种定义方式是形式系统常用的合式定义，所定义的公式称为合式公式 (*well-formed formula*，简记为 *wff*)
  - 方便起见，合式公式简称为**公式**

命题逻辑的基本概念

合式公式

- 判断符号串是否为合式公式 *wff*
  - 根据公式的合式定义，层层归约，直到简单命题即可判断
    - $\neg(P \wedge Q)$
    - $(\neg\neg P \rightarrow (P \wedge Q))$
    - $(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow R))$
    - $((P \rightarrow Q) \rightarrow (\wedge Q))$
    - $(((P \rightarrow) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (\rightarrow R))$

合式公式　　简写约定

- 为了减少括号的数量，引入优先级的约定
  - 按 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 的次序安排优先级
  - 相同联结词按从左到右的优先次序
- $(P\rightarrow(Q\vee R))$

$\Rightarrow$ $P\rightarrow(Q\vee R)$ $\Rightarrow$ $P\rightarrow Q\vee R$

- $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$

$\Rightarrow$ $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ $\boxed{\Rightarrow\ P\rightarrow Q\rightarrow R}$

合式公式的真值 (语义)

- 命题公式的真值由其成员命题的真值决定，常用真值表方法计算。
- 设公式 α 由简单命题 $P_1, \ldots, P_n$ 联结而成
  - 对 $P_1, \ldots, P_n$ 的真值指派 (*assignment*) 决定了α 的真值，称为α 的解释 (*interpretation*)
  - 可表示为真值表的一行:

$P_1 \ldots P_n$	α
T … F	T

  - α 总共有 2^n 个解释，构成 α 的真值表 (2^n行)。

重言式

- 若命题公式 α 在任一解释 I 下值都为 T，就称 α 为重言式 (或永真式)
  - $P\vee\neg P$ 是重言式
  - 重言式由 $\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 联结所得公式仍是重言式

- 若公式 α 在某个解释 I_0 下值为 T，则称 α 是可满足的 (*satisfiable*)
  - $P\vee Q$ 在 $I_0=(\mathrm{T},\mathrm{F})$ 下值为 T，所以是可满足的

- 若公式 α 在任一解释 I 下值都为 F，就称 α 为矛盾式 (永假式或不可满足式)
  - $P\wedge\neg P$ 是永假式

命题逻辑的基本概念

三类公式间关系（永真公式、永假公式、可满足公式）

- α 永真 *iff* $\neg\alpha$ 永假
- α 可满足 *iff* $\neg\alpha$ 非永真
- α 非永假 *iff* α 可满足
- α 非可满足 *iff* α 永假

命题公式的三种类型

永真、永假、可满足

重言、矛盾、可满足

代入规则

- 代入规则：将公式 α 中所有的命题变项 P 都替换成公式 β，记为 $\alpha[P/\beta]$；
- 针对命题变项代入
- 代入时被替换的是命题变项 (简单命题)，而不能是复合命题
  - 例如：可用 $(R\vee S)$ 来替换 $(P\vee\neg P)$ 中的 P，结果仍是重言式；但若用 Q 替换$(P\vee\neg P)$，则不能保持重言式
- 代入时必须对**同一命题变项处处替换以同一公式**
- 代入规则是重要的推理规则
- **定理**：若 α 是重言式，则 $\alpha[P/\beta]$ 也是重言式

代入规则

- 例：证明 $(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$ 是重言式

- 例：判断 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$ 是否为重言式

自然语句的形式化表示

- 为了进行逻辑演算，需要首先对自然语句用形式化的逻辑语言进行表示
- 方法：
  - 根据自然语句的含义，确定若干简单命题，并用命题符号 *P*、*Q*…表示之
  - 根据自然语句的含义，确定简单命题之间的关系，并用命题联结词将它们联结起来
  - 可能需要仔细考察自然语句的含义，才能抽取出隐含的简单命题和联结词

自然语句的形式化表示

- (1) 张三**不**是学生
  - 令 P：张三是学生，
  - 则 (1): $\neg P$

- (2) 张三**既**聪明**又**用功
  - 令 P：张三聪明，Q：张三用功，
  - 则 (2)：$P \wedge Q$
  - 思考：张三**虽然**聪明**但不**用功

- (3) 张三**和**李四是学生
  - 令 P：张三是学生，Q：李四是学生，
  - 则 (3)：$P \wedge Q$

命题逻辑的基本概念

自然语句的形式化表示

- (4) 张三一感冒就发烧
  - 令 P：张三感冒，Q：张三发烧，
  - 则 (4)：$P \to Q$
- (5) 张三今天去上班，除非他发烧
  - 令 P：张三发烧，Q：张三去上班，
  - 则 (5)：$\neg P \to Q$

命题逻辑的基本概念

自然语句的形式化表示

- (6) 张三**或**李四当班长
  - 令 P：张三当班长，Q：李四当班长，
  - 则 (6)：$P \vee Q$ ？
  - 不可兼或！ 张三和李四中有一个人当了班长，另一人没当班长。
  - (6) 应表示为：$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$， 即 $P \overline{\vee} Q$
  - 思考：张三和李四至少一人是学生　$P \vee Q$

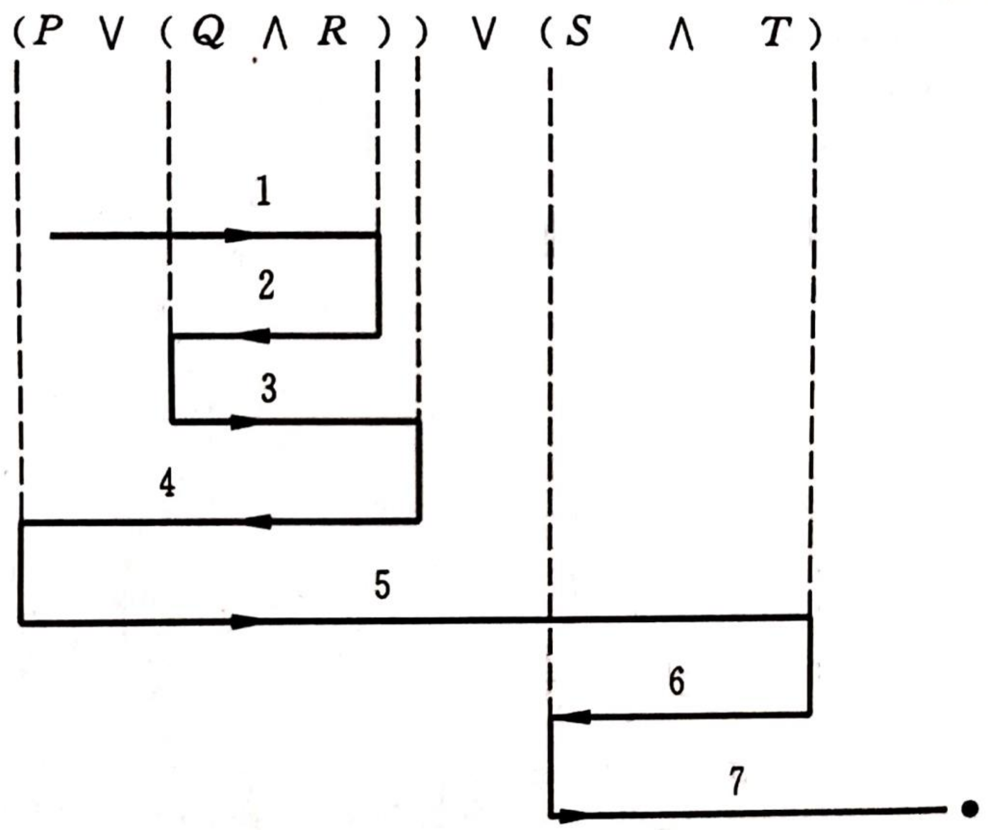
- 可能需要**仔细**考察自然语句的含义，才能抽取出**隐含**的简单命题和联结词

命题逻辑的基本概念

公式计算

- $(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \vee T)$

  的计算过程

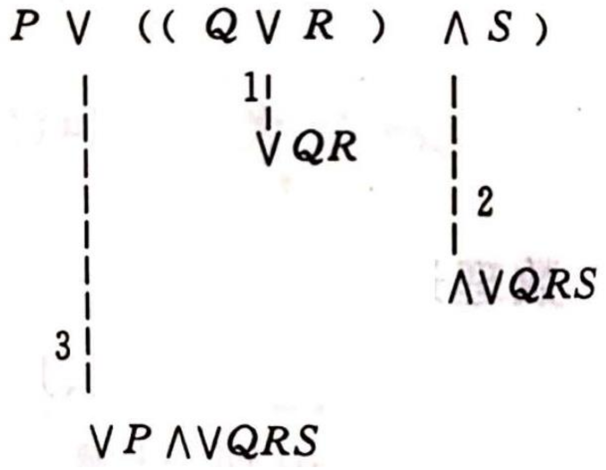


- 这种多次重复扫描，计算效率低

命题逻辑的基本概念

波兰表达式

- 前面公式定义采用联结词中缀表示法，需要用括号区分运算次序
- $Q \vee R$
- 波兰表示法(前缀): $A \vee B$ 表示为 $\vee AB$　　$Q \vee R$ ➡ $\vee QR$
- 逆波兰表示法(后缀): $A \vee B$ 表示为 $AB \vee$　　$Q \vee R$ ➡ $QR \vee$
- $P \vee ((Q \vee R)) \wedge S)$ 的波兰式　$\vee P \wedge \vee QRS$



- 以波兰式表达的公式，用计算机处理，当自右向左扫描时，可一次完成。

练习题

- 求 $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ 的真值表

P	Q	$(P \to Q)$	$(\neg Q \to \neg P)$	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

命题逻辑的基本概念

练习题

- 将下列命题符号化：　　　　P：天下雨，Q：乘班车上班
  - 如果天下雨，他就乘班车上班　　$P \rightarrow Q$
  - 只有天下雨，他才乘班车上班　　$Q \rightarrow P$
  - 除非天下雨，否则他不乘车上班　　$Q \rightarrow P$

练习题

- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  证明： $A \wedge B$ 为永真式当且仅当 A 与 B 都是永真式
- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  判断：已知 $A \wedge B$ 为矛盾式，则 A 和 B 都是矛盾式吗?
- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  证明： $A \vee B$ 为永假式当且仅当 A 与 B 都是永假式
- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  判断：已知 $A \vee B$ 为永真式，则 A 和 B 都是永真式吗?

练习题

- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  证明： $A \wedge B$ 为永真式当且仅当 A 与 B 都是永真式

证明：对于2^n个赋值中的任意赋值 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$（$\boldsymbol{\alpha}_i$为 0 或 1，$\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$），若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$ 的永真赋值，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的永真赋值，也是 $\boldsymbol{B}$ 的永真赋值，反之，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的永真赋值, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$ 的永真赋值。

练习题

- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  已知 $A \wedge B$ 为矛盾式，则 A 和 B 都是矛盾式吗?

解：不能。反例：$P\wedge\neg P$为矛盾式，但是 P 和 $\neg P$ 都不是矛盾式。

练习题

- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的公式，
  证明 $A \vee B$ 为永假式当且仅当 A 与 B 都是永假式

证明：对于2^n个赋值中的任意赋值 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \vee \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots \boldsymbol{\alpha}_n$（$\boldsymbol{\alpha}_i$为 0或1，$\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$），只要其中一个赋值为 1，则整体赋值为 1。因此若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ 的成假赋值，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的成假赋值，也是 $\boldsymbol{B}$ 的成假赋值，反之，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的成假赋值, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ 的成假赋值。

练习题

- 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的公式，
  已知 $A \vee B$ 为永真式，则 A 和 B 都是永真式吗?

解：不能。反例：$P \vee \neg P$为重言式，但是 P 和$\neg P$ 都不是重言式。

练习题 **某岛上只有骑士 (knight) 和无赖 (knave) 两种居民，骑士总说真话，无赖总说假话；假如你去该岛后遇到甲乙两人，**

甲说：“乙是骑士。”　乙说：“我们两人是不同类型的人。”

问甲和乙分别是什么人?

解：用 A, B, C, D 表示甲说真话，乙说真话，甲是骑士，乙是骑士。

用 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 表示甲说谎，乙说谎，甲是无赖，乙是无赖。由题得到 $A \to D$，$\bar{A} \to \bar{D}$。

假设甲和乙都是骑士，和乙说话矛盾，所以不可能。

假设甲是骑士，乙是无赖，则可以得到条件 A，$\bar{B}$，C，$\bar{D}$，但与$A \to D$矛盾，因此该情况不成立。

假设乙是骑士，甲是无赖，则可以得到条件 $\bar{A}$，B，$\bar{C}$，D，但与$\bar{A} \to \bar{D}$矛盾，因此该情况不成立。

假设甲乙都是无赖，则可以得到条件$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$，与题意符合。

练习题

张三说李四说谎，李四说王五说谎，王五说张三李四都说谎。*到底谁说谎?*

解：用 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$表示张三说真话，李四说真话，王五说真话。

用 $\bar{\boldsymbol{A}}, \bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{C}}$表示张三说谎， 李四说谎， 王五说谎。

由题可得条件， $\boldsymbol{A} \rightarrow \bar{\boldsymbol{B}}$, $\bar{\boldsymbol{A}} \rightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \rightarrow \bar{\boldsymbol{C}}, \bar{\boldsymbol{B}} \rightarrow \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \rightarrow \bar{\boldsymbol{A}} \wedge \bar{\boldsymbol{B}}$，$\bar{\boldsymbol{C}} \rightarrow \neg$（$\bar{\boldsymbol{A}} \wedge \bar{\boldsymbol{B}}$）

（逆否命题同样成立）。

假设张三说谎，可得条件$\bar{\boldsymbol{A}}$， $\boldsymbol{B}$， $\bar{\boldsymbol{C}}$， 符合题意。

假设李四说谎，可得条件$\boldsymbol{A}$，$\bar{\boldsymbol{B}}$， $\boldsymbol{C}$，与 $\boldsymbol{C} \rightarrow \bar{\boldsymbol{A}} \wedge \bar{\boldsymbol{B}}$矛盾。

假设王五说谎，可得条件$\bar{\boldsymbol{A}}$， $\boldsymbol{B}$， $\bar{\boldsymbol{C}}$，符合题意。

综上所述，张三和王五说谎。