第二章：道路与回路

图论：基本概念回顾

- 图论中的图是互连结点的集合，用来描述某些事物之间的某种特定关系，结点代表事物，连接两结点的边表示相应两个事物间具有的某种关系。
- 图 G 用一个二元组表示：$G=(V,E)$
- 无限图：结点集或边集是无穷集合；有限图：结点集和边集均是有限集合。
- 无向图(undirected graph)：所有的边是无向边，无向边 e_k 可记为无序的结点对，$e_k=(v_i,v_j)$ 结点 v_i, v_j 称为边 e_k 的端点。
- 有向图(directed graph)：所有的边是有向边，有向边 e_k 可记为有序的结点对，$e_k=(v_i,v_j)$ 结点 v_i 为边 e_k 的始点，v_j 称为边 e_k 的终点，结点 v_i 为 v_j 的直接前趋，v_j 为 v_i 的直接后继。
- 多重图(multigraph)：有重边的图，即两结点间的多条边。
- 自环(loop)：两结点重合的边，即 $e_k=(v_i,v_i)$
- 简单图(simple graph)：无重边无自环的无向图
- 完全图(complete graph)：任意两结点都有边的简单图，记作 K_n
- 结点的度定义：与结点 v 关联的边数，作 $d(v)$
- 图的子图：如果 $V'=V$，则称 G' 是 G 的支撑(spanning)子图或生成子图。
- 若 G' 是 G 的导出(induced)子图，即 E' 包含了 G 在结点子集 V' 之间的所有边。

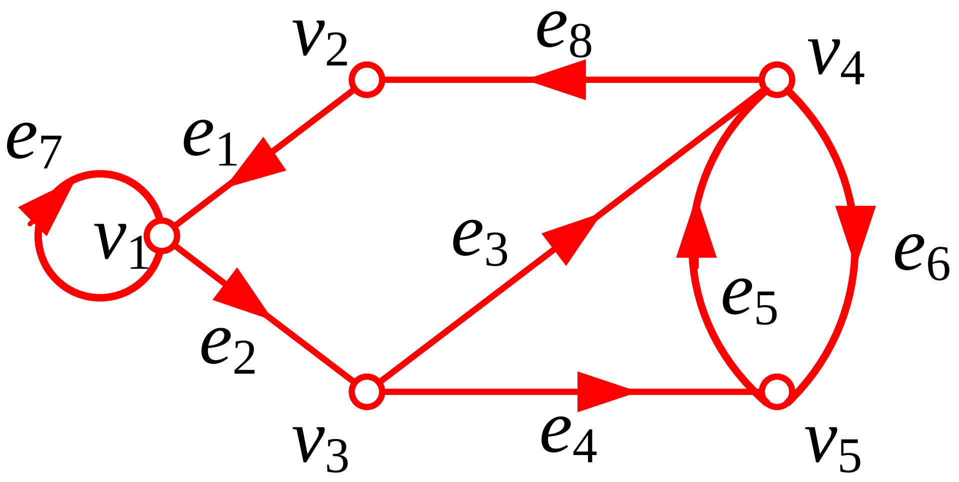
图论：道路与回路

定义：有向道路与有向回路

- ✓ 有向道路：有向图 G 中边序列 $P=(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iq})$,
  其中 $e_{ik} = (v_l, v_j)$ 满足：v_l 是 $e_{i(k-1)}$ 的终点，v_j 是 $e_{i(k+1)}$ 的始点，
  称边序列 P 是图 G 中的一条有向道路。

- ✓ 有向回路：e_{iq} 的终点也是 e_{i1} 的始点，则称边序列 P 是图 G 中的一条有向回路。

有向道路及有向回路判断？



$P_1 = (e_2, e_4, e_5)$ ？ 有向道路

$P_2 = (e_7, e_2, e_3, e_5)$ ？ 否

$P_3 = (e_1, e_7, e_2, e_3, e_6, e_5, e_8)$ ？ 有向回路

$P_4 = (e_2, e_4, e_5, e_6, e_5, e_8, e_1)$ ？ 有向回路

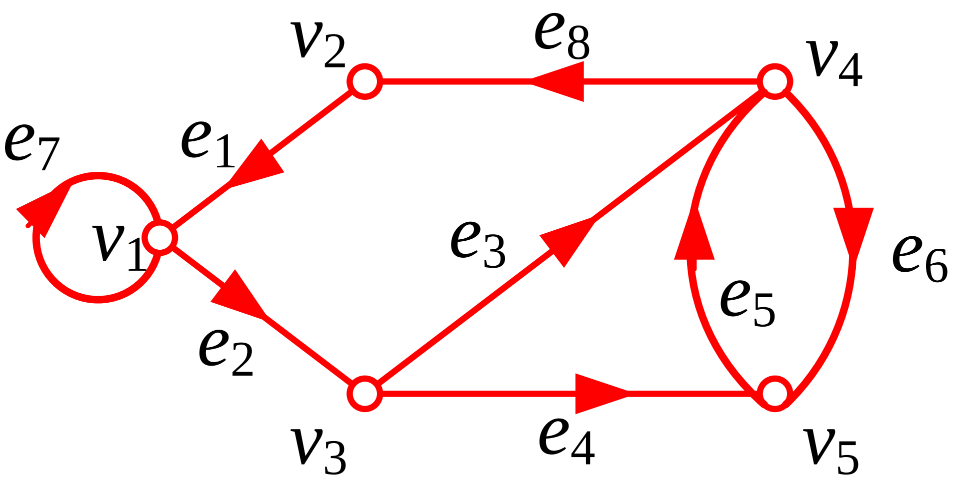
图论：道路与回路

定义：有向道路与有向回路

- ✓ 简单有向道路/回路：P 中**边**不重复出现
- ✓ 初级有向道路/回路：P 中**结点**不重复出现

<u>初级有向道路/回路 一定是 简单有向道路/回路</u>

简单（初级）有向道路/回路判断？



$P_1 = (e_2, e_4, e_5)$ 初级有向道路

$P_2 = (e_1, e_7, e_2, e_3, e_8)$ 简单有向回路

$P_3 = (e_2, e_4, e_5, e_8, e_1)$ 初级有向回路

图论：道路与回路

定义：道路与回路

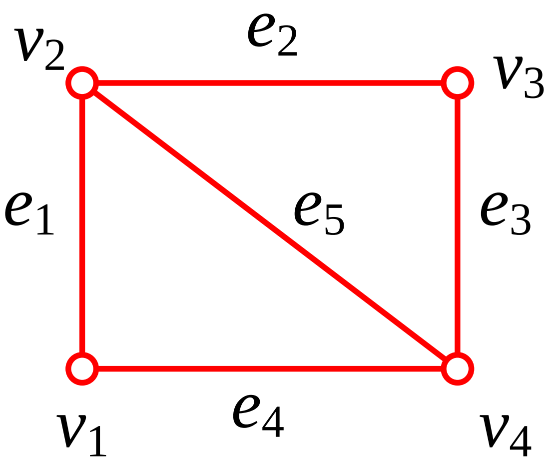
- ✓ 道路/链：无向图 G 中 点边交替序列 $P=(v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{q-1}}, v_{i_q})$

  满足: v_{i_j} 和 $v_{i_{j+1}}$ 是 e_{i_j} 的两个端点,

  称序列 P 是图 G 中的一条链或道路 (*path*)。

- ✓ 回路/圈：如果 $v_{i_q}=v_{i_1}$, 则称序列 P 是 G 中的一个圈或回路 (*circuit*)。

道路/回路判断?



$P_1=(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1)$ 道路

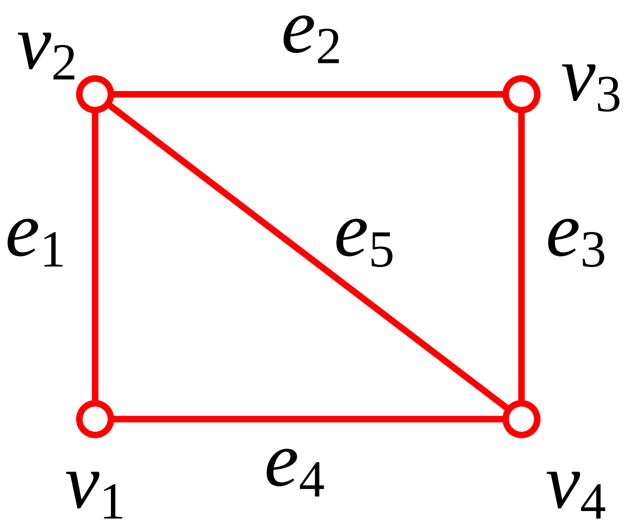
$P_2=(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2)$ 回路

图论：道路与回路

定义：道路与回路

- ✓ 简单道路/回路：P 中边不重复出现
- ✓ 初级道路/回路：P 中结点不重复出现

简单（初级）道路/回路判断?



$P_1 = (v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1)$ 初级道路

$P_2 = (v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2)$ 初级回路

图论：道路与回路

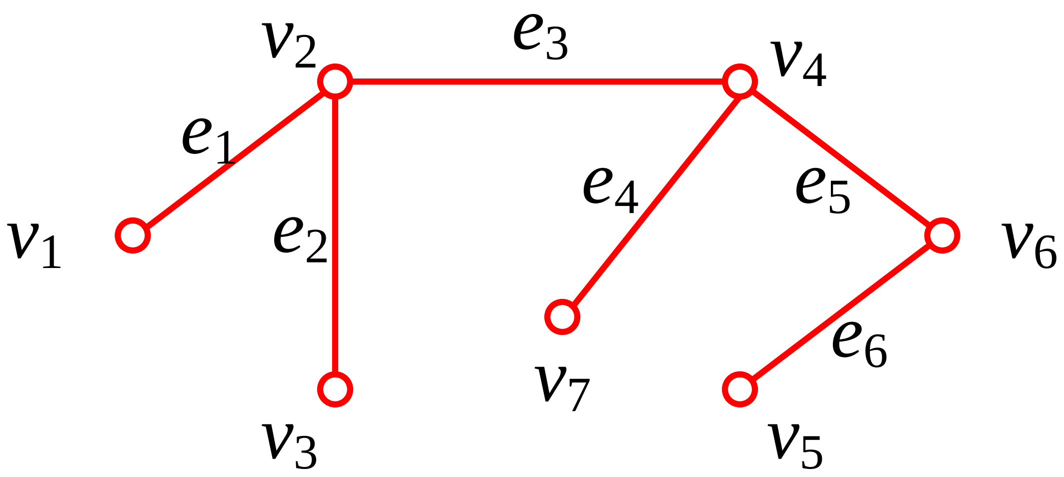
定义：道路与回路

✓ **极大路径**：*P* 为一条初级道路，其始点与终点都不与 *P* 外的顶点相邻

路径：初级道路

简单图的道路可用结点来表示

极大路径判断？



$P_0 = (v_1, v_2, v_3)$ 是

$P_1 = (v_2, v_4, v_6)$ 否

$P_3 = (v_1, v_2, v_4, v_7)$ 是

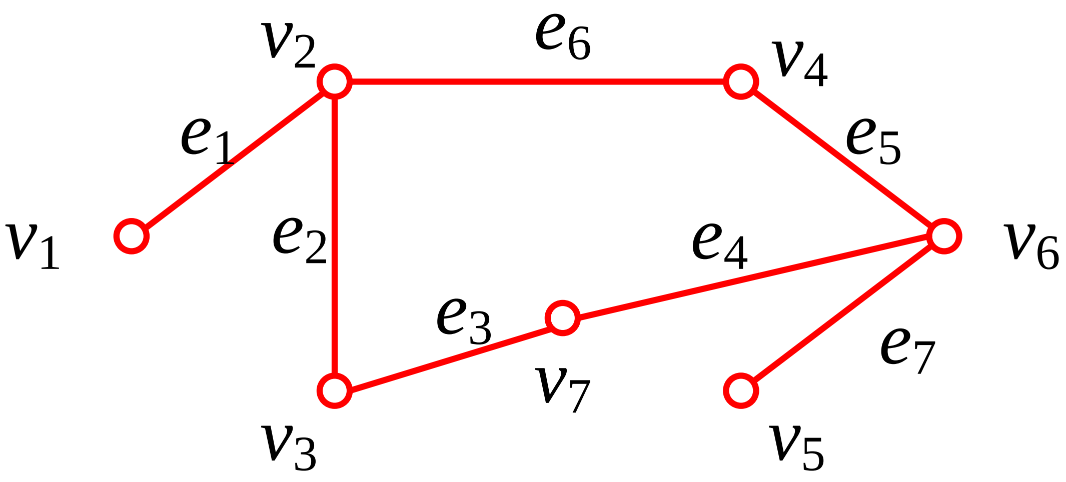
$P_4 = (v_1, v_2, v_4, v_6)$ 否

$P_5 = (v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ 是

定义：道路与回路

- ✓ **短程线**：两结点间长度最短的道路
- ✓ **距离**：短程线的长度 $d(v_1, v_2)$

短程线判断？



$P_1 = (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5)$ 否

$P_2 = (v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ 是

$d(v_1, v_5) = ?$ 4

图论：道路与回路

定义：道路与回路

图 G 中含有 n 个结点:

- 在图 G 中，若从结点 u 到 v $(u \neq v)$ 存在道路，则从结点 u 到 v 存在长度小于等于 $\underline{\ n-1\ }$ 的道路;
- 在图 G 中，若从结点 u 到 v $(u \neq v)$ 存在道路，则从结点 u 到 v 存在长度小于等于 $\underline{\ n-1\ }$ 的初级道路;
- 在图 G 中，若从结点 u 到 v $(u \neq v)$ 存在回路，则从结点 u 到 v 存在长度小于等于 $\underline{\ n\ }$ 的回路;
- 在图 G 中，若从结点 u 到 v $(u \neq v)$ 存在简单回路，则从结点 u 到 v 存在其长度小于等于 $\underline{\ n\ }$ 的初级回路;

定义：**道路与回路**

- ✓ 弦：设 C 为简单图 G 中含结点数大于 3 的一个初级回路，如果结点 v_i 和 v_j 在 C 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则称 (v_i, v_j) 是 C 的一条弦。

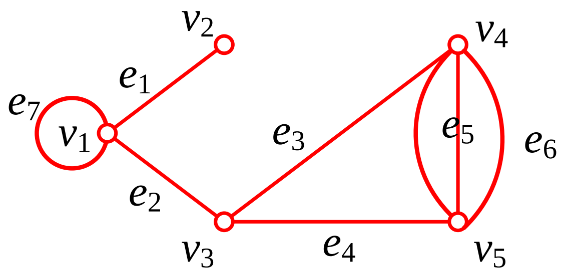
若对每一个 $v_k \in V(G)$，都有 $d(v_k) \geq 3$，则 G 中必含有带弦的回路。

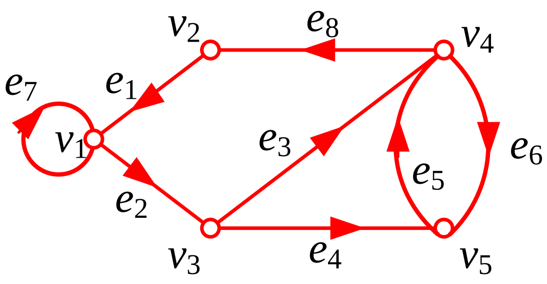
证明过程P11?

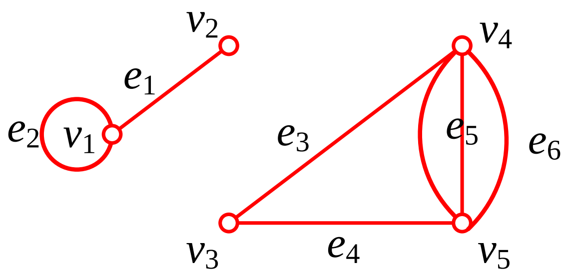
连通性

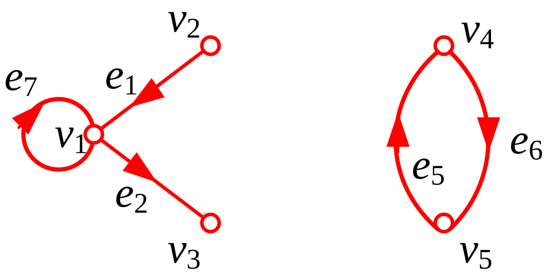
- ✓ 若无向图 *G* 的任意两个结点之间都存在道路, 称 *G* 是连通的
- ✓ 对有向图 *G*, 若不考虑边的方向时是连通的, 则称 *G* 是(弱)连通的

连通性判断







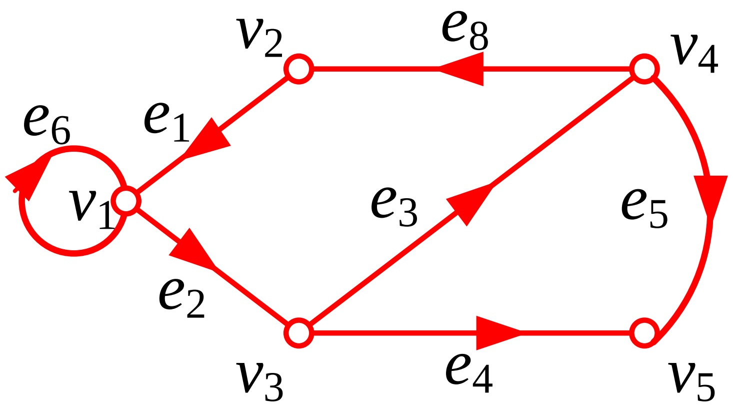


图论：道路与回路

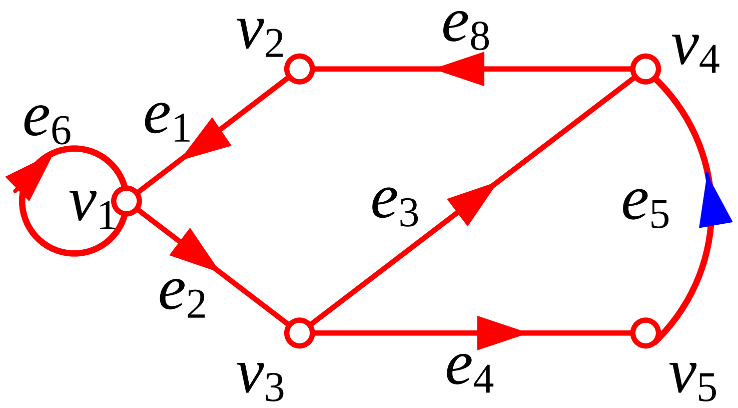
连通性

- ✓ 对有向图 G, 对任意 $v_i, v_j \in V$，$v_i \to v_j$ 与 $v_j \to v_i$ 至少成立其一，则称 G 为单向连通图
- ✓ 对有向图 G, 对任意 $v_i, v_j \in V$，$v_i \to v_j$ 与 $v_j \to v_i$ 均成立，则称 G 为强连通图
- ✓ 有向图 G 是强连通图当且仅当在 G 中存在经过每个顶点至少一次的回路。

连通性判断？



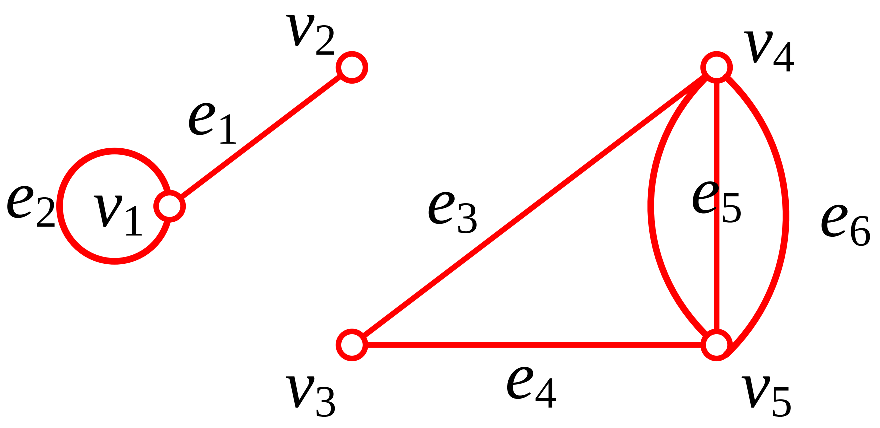
单向连通图



强连通图

连通性

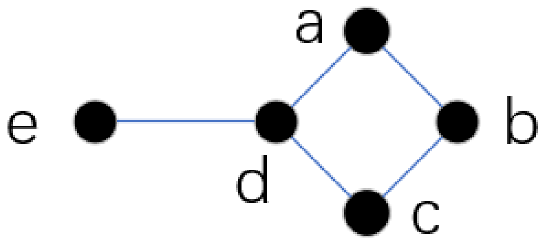
- ✓ 若 G 的连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图, 称 H 是 G 的极大连通子图, 或称连通支
- ✓ G 的每个连通支都是它的导出子图
- ✓ 任何非连通图都是 2 个以上连通支的并

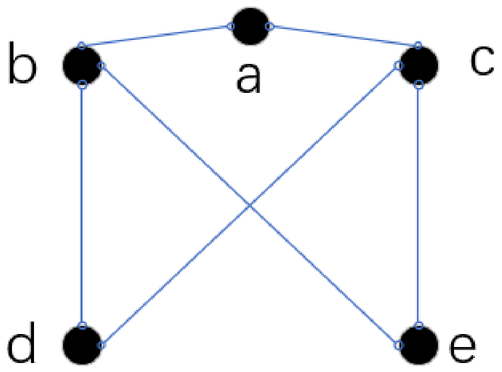


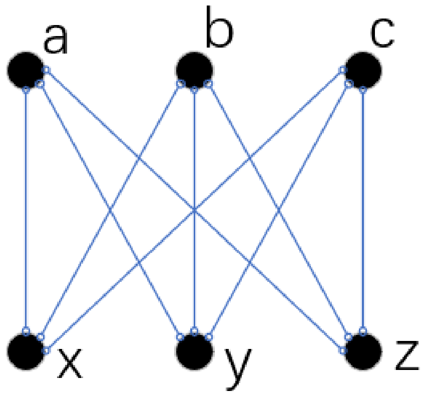
连通性：二分图

✓ 若 $G=(V, E)$ 为无向图，如果 $V(G)$ 可划分成子集 V_1 和 V_2，使得 G 中每条边的两个结点一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 是二分图。

二分图 判断?







连通性：二分图

- ✓ 若 $G=(V, E)$ 为简单二分图，如果 V_1 中的每个结点均与 V_2 中的所有结点相邻，则称 G 是完全二分图，记为$K_{s,t}$，其中 $s=|V_1|$, $t=|V_2|$

- ➢ 证明：如果二分图 G中存在回路，则它们都是由偶数条边组成的。

  证明过程P12

图论：道路与回路

连通性：二分图

二分图判别定理

- **证明题：无向图 G 为二分图的充分必要条件是 G 中无奇数条边组成的回路。**

证明： 必要性： G 为二分图 => 无奇数条边的回路

a）若 G 中无回路 ，显然 G 无奇数条边的回路
b）若 G 中有回路，记为 C，令 $C = v_{i1}\ v_{i2} \ldots\ v_{il}\ v_{i1}$，$l \geq 2$。不妨设 $v_{i1} \in V_1$ ，因为G为二分图，故$v_{i2} \in V_2$ ， $v_{i3} \in V_1$ ，依次最后$v_{il} \in V_2$， 故 l 必为偶数 $\Longrightarrow$ 无奇数条边构成的回路

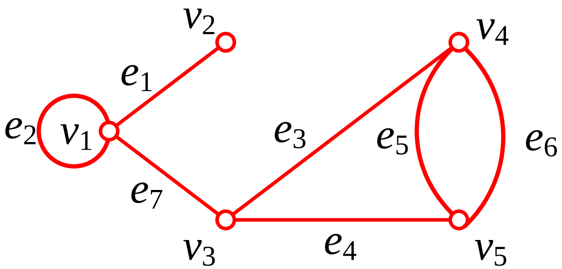
充分性：无奇数条边构成的回路 $\Longrightarrow$ 二分图

不妨设 G 为连通图：v_0 为 G 中任意一点。定义两个集合：
V_1={$v|v\epsilon V(G)$且与 v_0 的距离为偶数}
V_2={$v|v\epsilon V(G)$且与 v_0 的距离为奇数}
显然： $V_1 \neq \emptyset$， $V_2 \neq \emptyset$ ， $V_1 \cap V_2$=$\emptyset$， $V_1 \cup V_2$=$V(G)$
只需证明 V_1 中任意两点不相邻且V_2中任意两点也不相邻
反证法：若存在 $v_i\ ,v_j \in V_1$且相邻，令 $e = (\ v_i\ ,\ v_j)$
令 v_0 到 $v_i\ ,v_j$的短程线分别为 P_i, P_j
$\Rightarrow P_i$ 与 P_j 与 e 构成长度为奇数的回路，与条件矛盾，得证

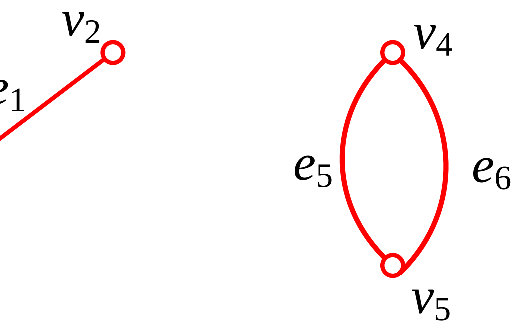
图论：道路与回路

连通性：割点、割边

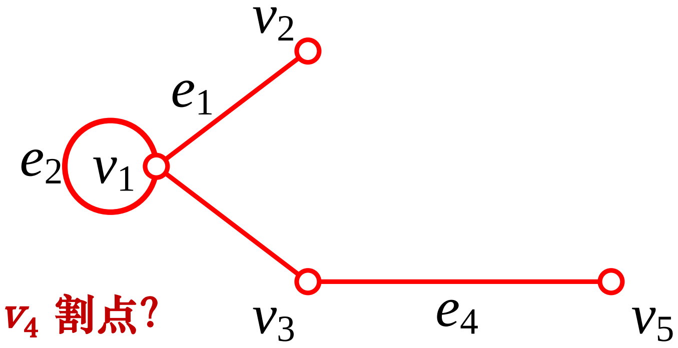
- ✓ 设 v 是 G 的一个结点，若 $G-v$ 的连通支数比 G 多，则称 v 是 G 的一个 **割点**；
- ✓ 设 e 是 G 的一条边，若 $G-e$ 的连通支数比 G 多，则称 e 是 G 的一个**割边**（也称作**桥**）；



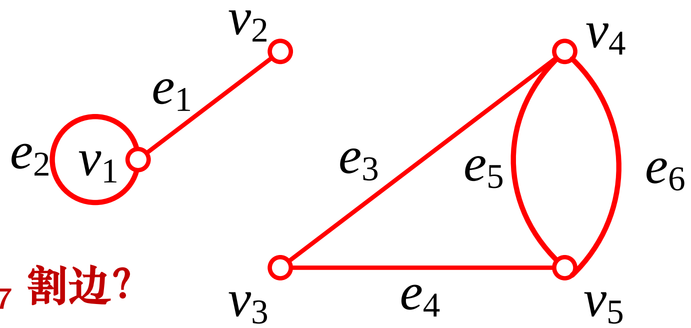
割点及割边判断



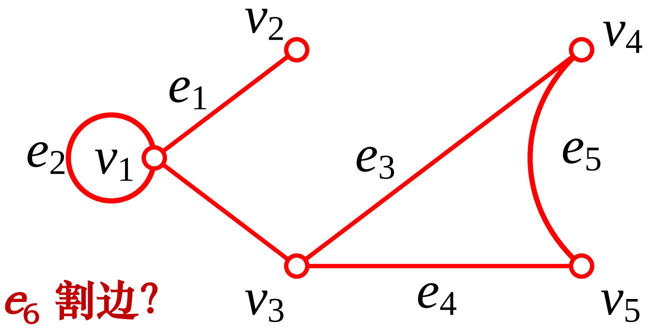
v_3 割点?



v_4 割点?



e_7 割边?



e_6 割边?

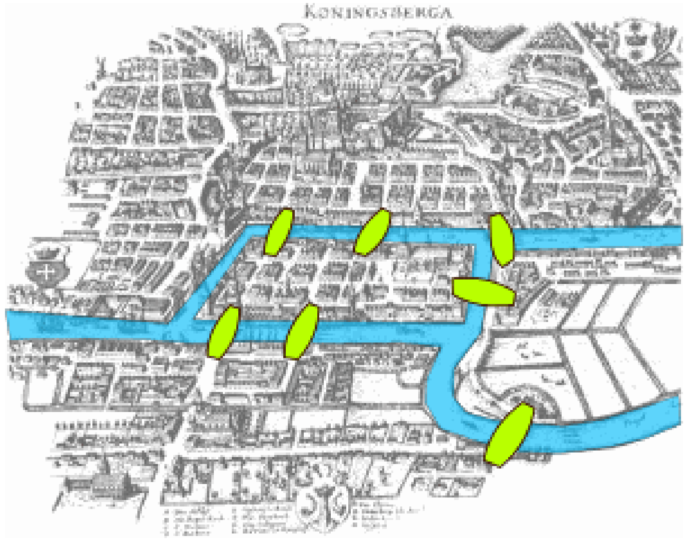
图论：道路与回路

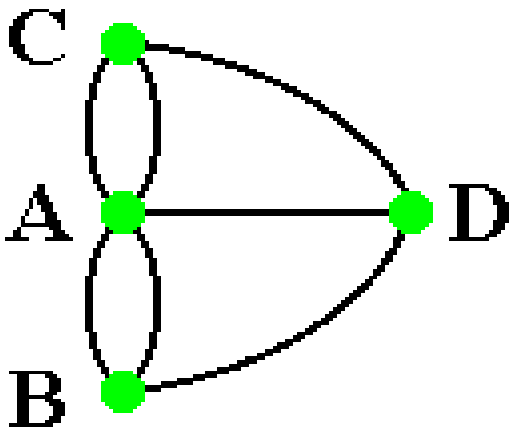
欧拉道路与回路

✓ 哥尼斯堡七桥问题

哥尼斯堡城位于普雷格尔河畔，河中有两座小岛，七座桥将岛跟岛及两岸连接起来。

问题：游人从任一地出发，能否做到穿过每座桥一次且仅一次后回到出发点?





经过每条边一次且仅一次的回路

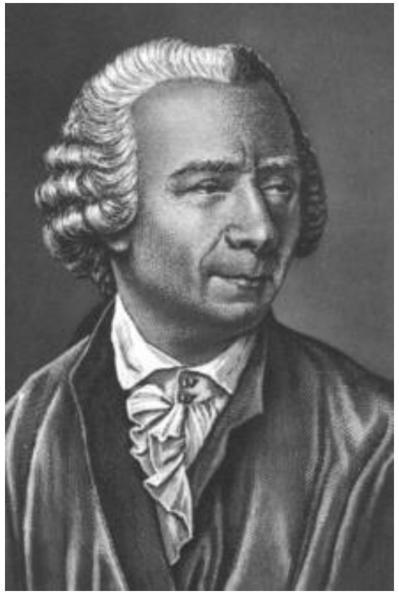
图中边的遍历问题

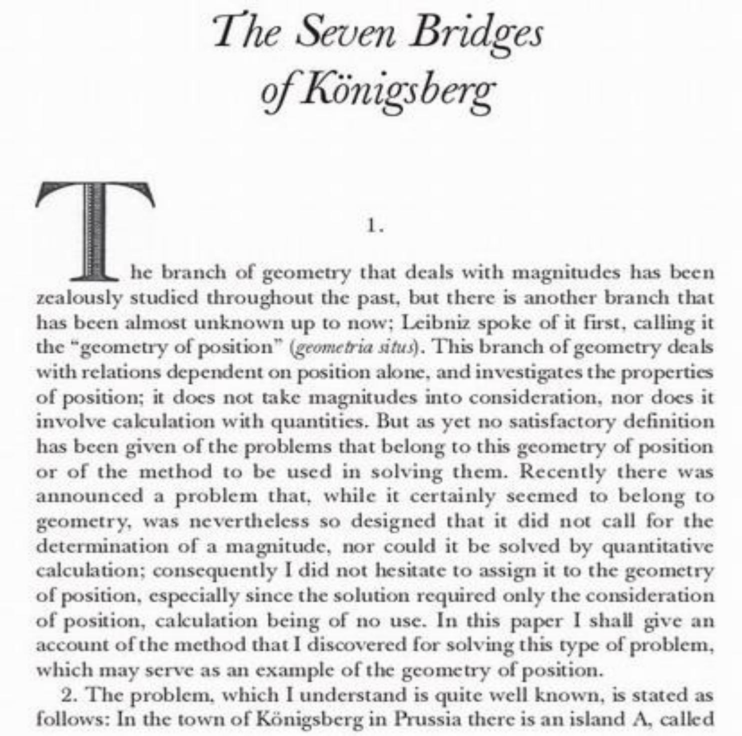
图论：道路与回路

欧拉道路与回路

✓ 哥尼斯堡七桥问题

1736年, Euler发表论文“哥尼斯堡的七座桥”, 解决了是否存在经过每条边一次且仅一次的回路的问题





The Seven Bridges of Königsberg

1.

The branch of geometry that deals with magnitudes has been zealously studied throughout the past, but there is another branch that has been almost unknown up to now; Leibniz spoke of it first, calling it the “geometry of position” (*geometria situs*). This branch of geometry deals with relations dependent on position alone, and investigates the properties of position; it does not take magnitudes into consideration, nor does it involve calculation with quantities. But as yet no satisfactory definition has been given of the problems that belong to this geometry of position or of the method to be used in solving them. Recently there was announced a problem that, while it certainly seemed to belong to geometry, was nevertheless so designed that it did not call for the determination of a magnitude, nor could it be solved by quantitative calculation; consequently I did not hesitate to assign it to the geometry of position, especially since the solution required only the consideration of position, calculation being of no use. In this paper I shall give an account of the method that I discovered for solving this type of problem, which may serve as an example of the geometry of position.

2. The problem, which I understand is quite well known, is stated as follows: In the town of Königsberg in Prussia there is an island A, called

图论：道路与回路

欧拉道路与回路

欧拉图及欧拉半图判断？

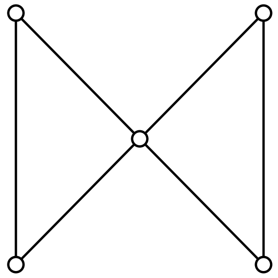
- ✓ 欧拉回路：连通图 G 中一条经过所有边的简单回路

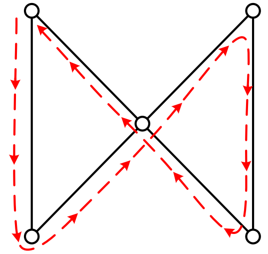
  七桥问题：判断图中是否存在欧拉回路

- ✓ 欧拉道路：连通图 G 中一条经过所有边的简单道路

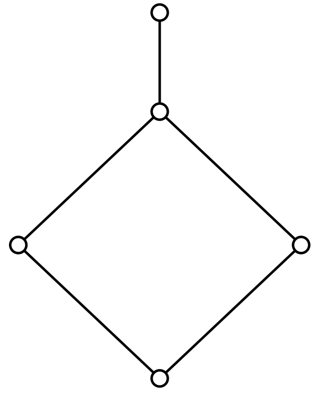
- ✓ 欧拉图：具有欧拉回路的图

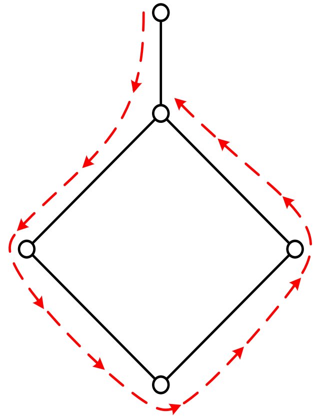
- ✓ 欧拉半图：具有欧拉道路但无欧拉回路的图





欧拉图

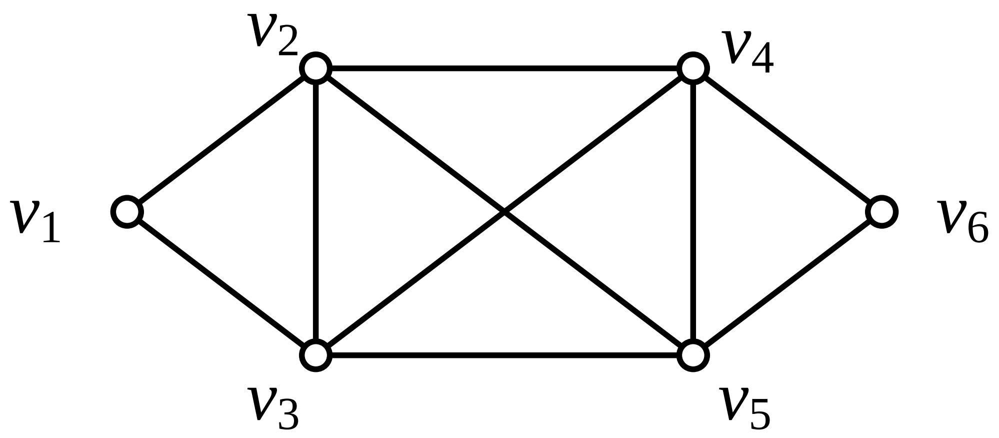


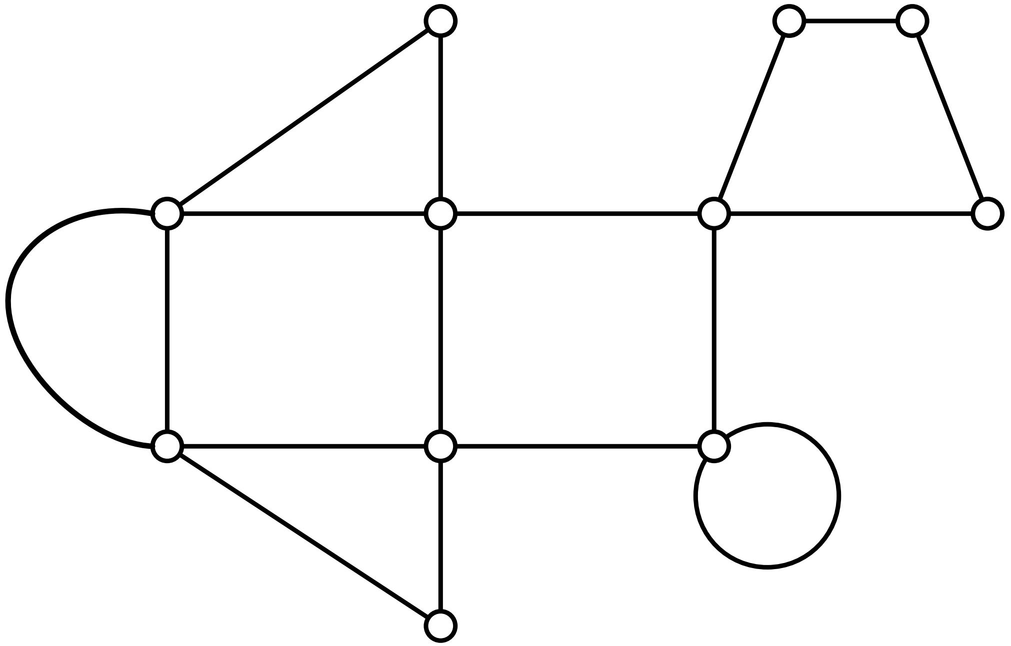


欧拉半图

欧拉道路与回路

如何判断 及 寻找欧拉回路?





欧拉道路与回路

定理 1: 无向连通图 *G* 中存在欧拉回路的充要条件是 *G* 中各结点的度都是偶数。

欧拉回路判定

证明： 必要性：令 *P* 是欧拉图 *G* 的欧拉回路。

当 *P* 经过任意一顶点时，该点总有进出两个方向的边；每条边仅经过一次，所以每个顶点必是偶数度数。

定理 1: 无向连通图 G 中存在欧拉回路的**充要条件**是 G 中各结点的度都是偶数 **欧拉图判定**

充分性：对图 G 的边数 m 进行归纳证明。

当 $m=1$ 时，图 G 只能是个环，因此图 G 总是欧拉图。

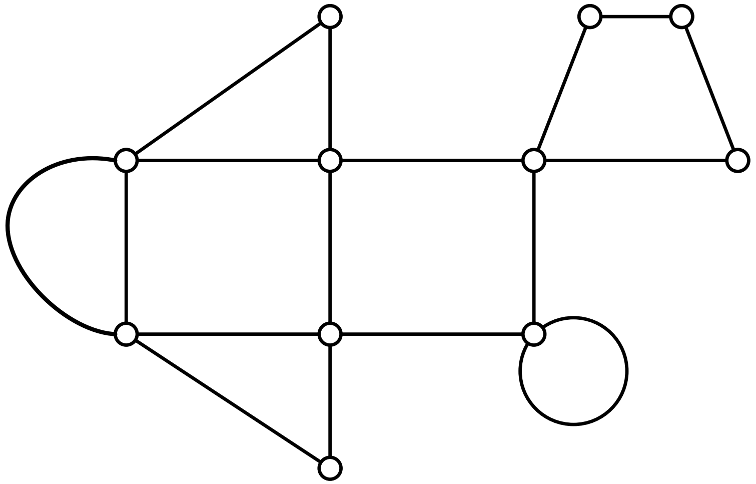
假设当 $m \leq k$ 时结论成立，证明 $m=k+1$ 时结论也成立。

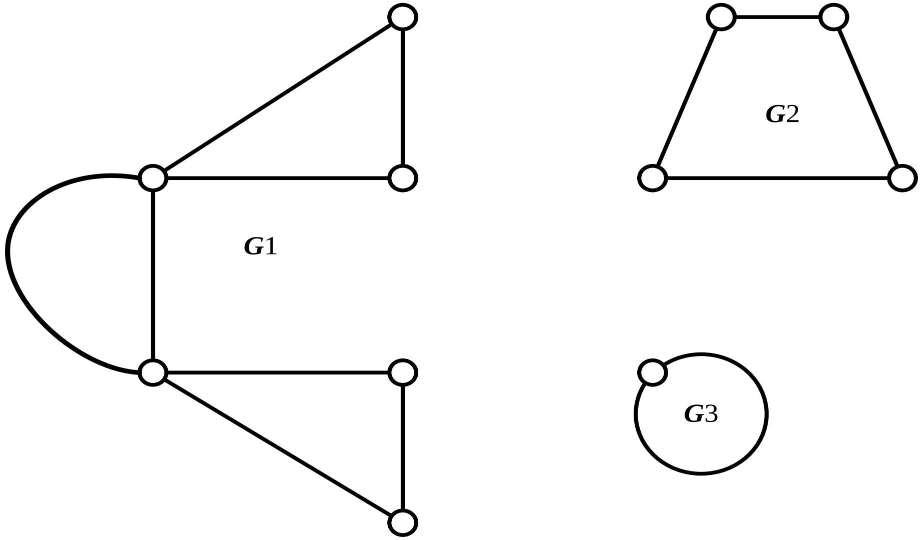
1）. 连通图 G 顶点度数为偶数 ⟶ 图 G 中含有一条简单回路 C;

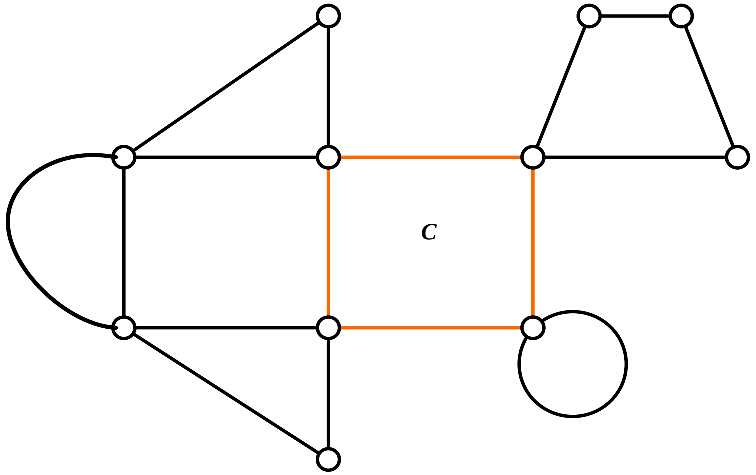
2）. 去掉简单回路 C 的边，生成 p 个连通分支 G_i, $i=1,2,\ldots,p$，连通分支 G_i 边小于等于 k 且顶点度数为偶数 ⟶ 欧拉图

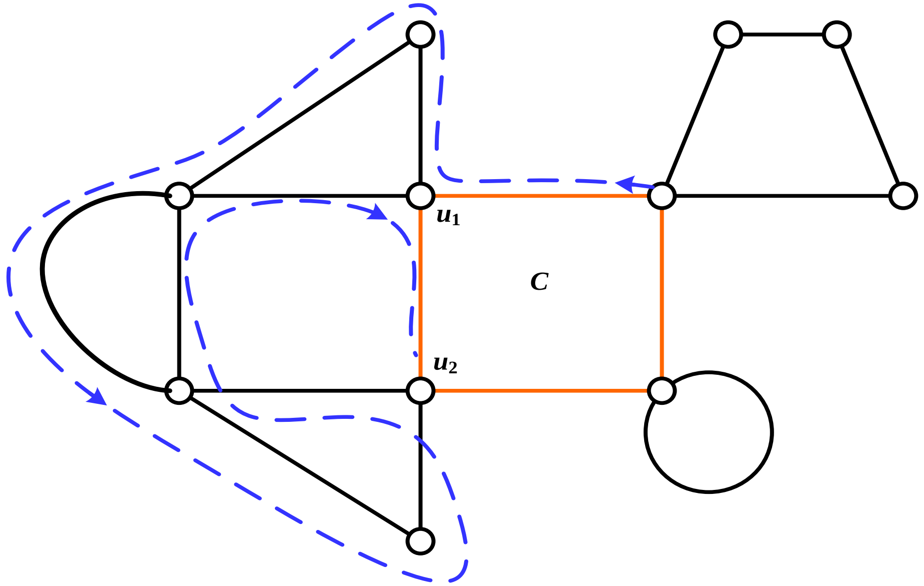
3）. 从 C 中任意一点出发，沿边走到与连通分支 G_i 的公共点 u_i, 然后通过 G_i 的欧拉回路回到 u_i；依次继续进行到另一个连通分支，最后到达出发点，得到 G 的欧拉回路。

欧拉道路与回路 定理证明的说明图



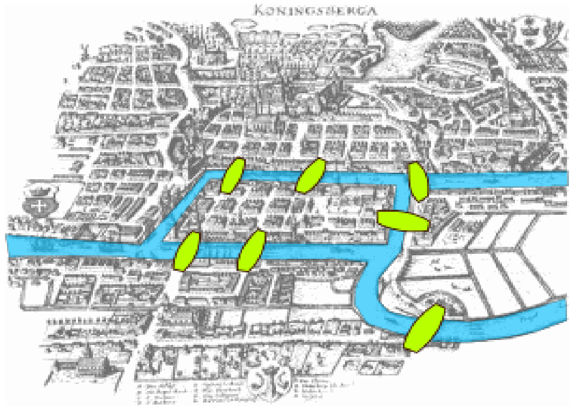


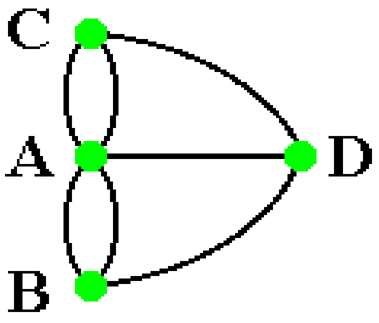




图论：道路与回路

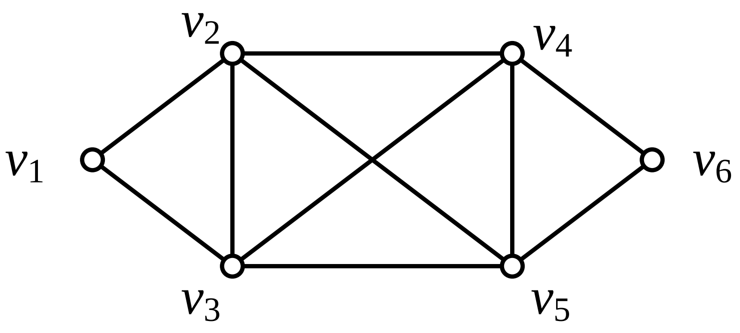
欧拉道路与回路　哥尼斯堡七桥问题



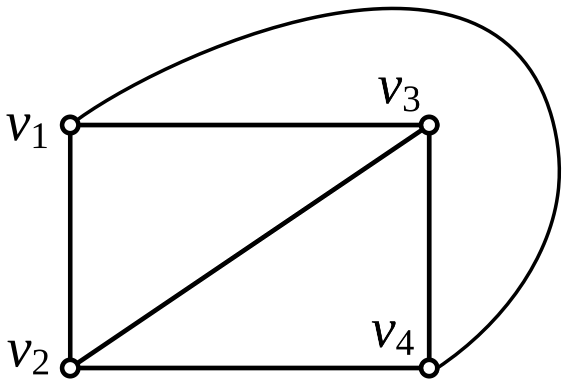


无向连通图 *G* 中存在欧拉回路的充要条件是 *G* 中各结点的度都是偶数

欧拉图判断?



是



否

图论：道路与回路

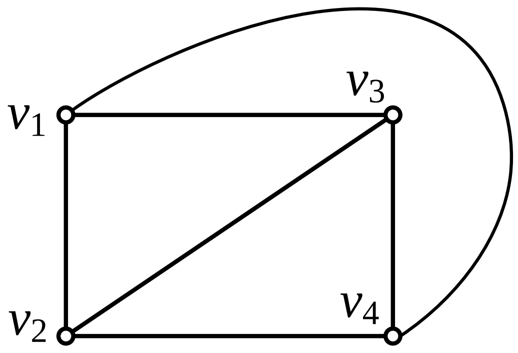
欧拉道路与回路

定理 2: 无向连通图 *G* 中存在欧拉道路(欧拉半图)的充要条件是 *G* 中只有两个度为奇数的结点。

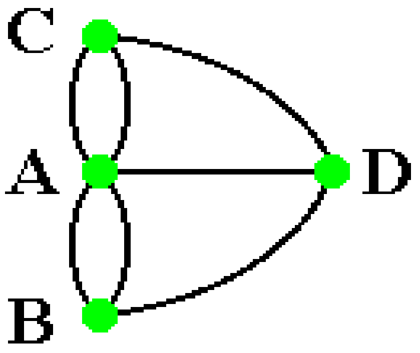
欧拉半图判定

证明： 连接这两顶点，则有回路；再删去这条边。

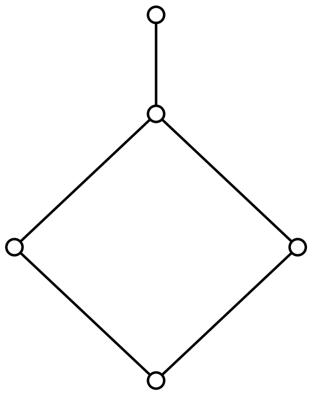
欧拉半图判断?



否



否



是

欧拉道路的始终点必须选在奇数度点

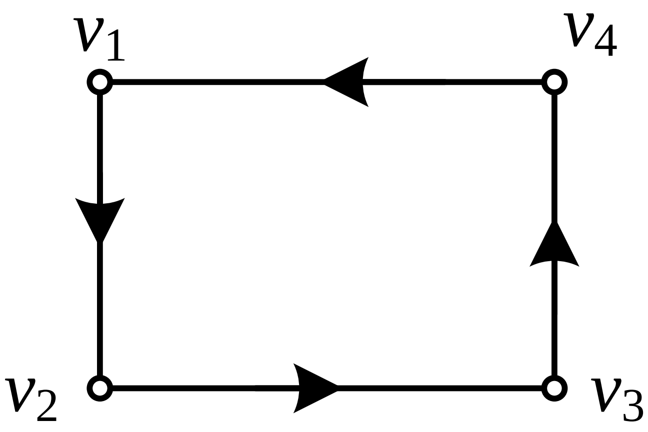
图论：道路与回路

欧拉道路与回路

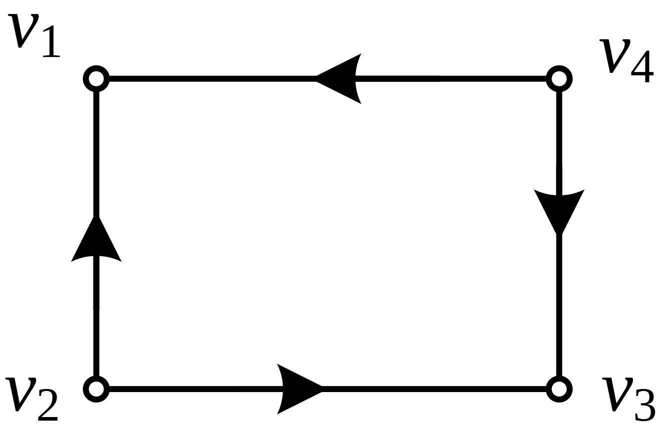
定理3：　有向连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是图中各点的入度和出度相等。

欧拉图判定

欧拉图判断?



是



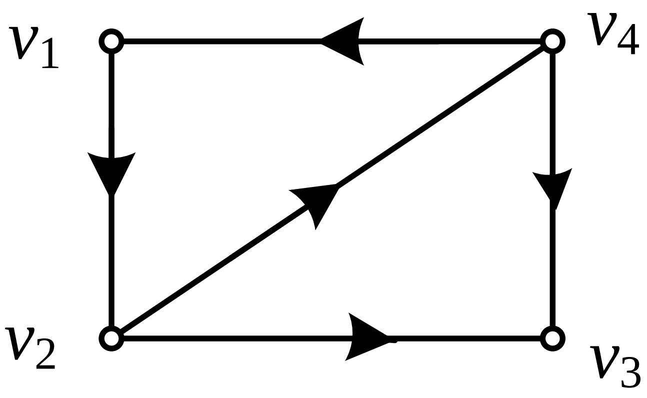
否

欧拉道路与回路

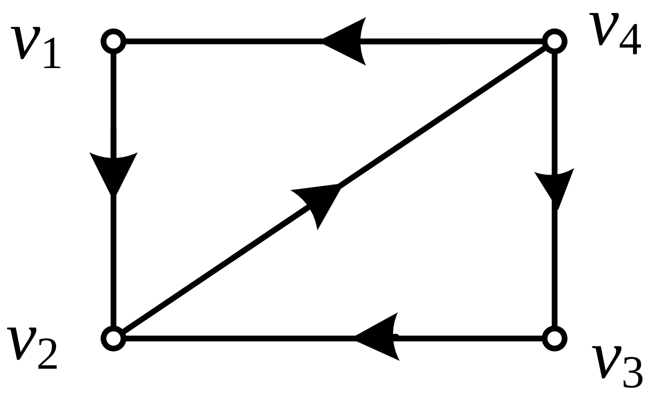
定理4: 有向连通图 G 是欧拉半图的充分必要条件是图中至多有两个顶点，其中一个顶点的入度比出度多1，另一个顶点的出度比入度多1，其它顶点入度和出度相等。

欧拉半图判定

欧拉半图判断？



否



是

欧拉道路与回路

寻找欧拉回路

- 逐步插入回路：根据定理 1中 证明过程
- Fleury 算法

欧拉道路与回路 Fleury 算法

Fleury 算法基本思想：
能不走桥就不走桥

输入：欧拉图 G

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0, i = 0$;

(2) 令 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_i \boxed{v_i}$;

如果 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边，计算停止；

否则按下述条件从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}:

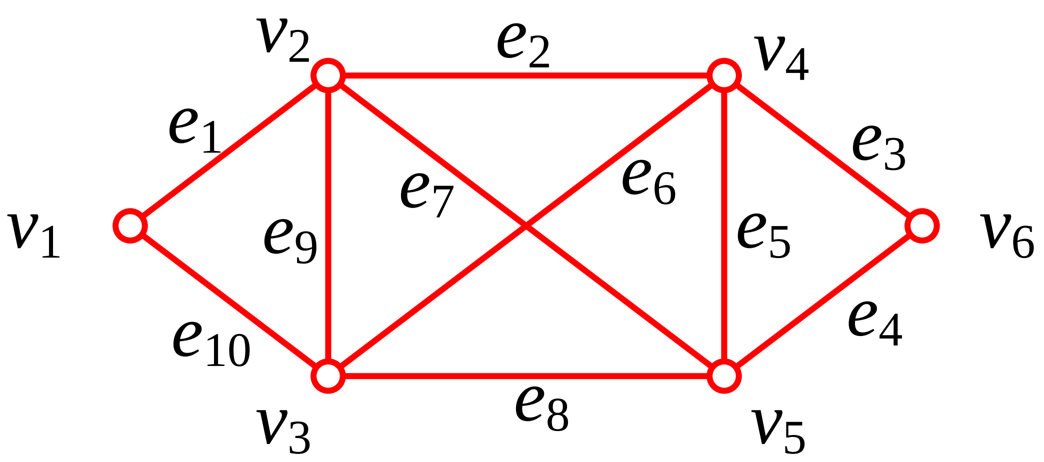
(a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

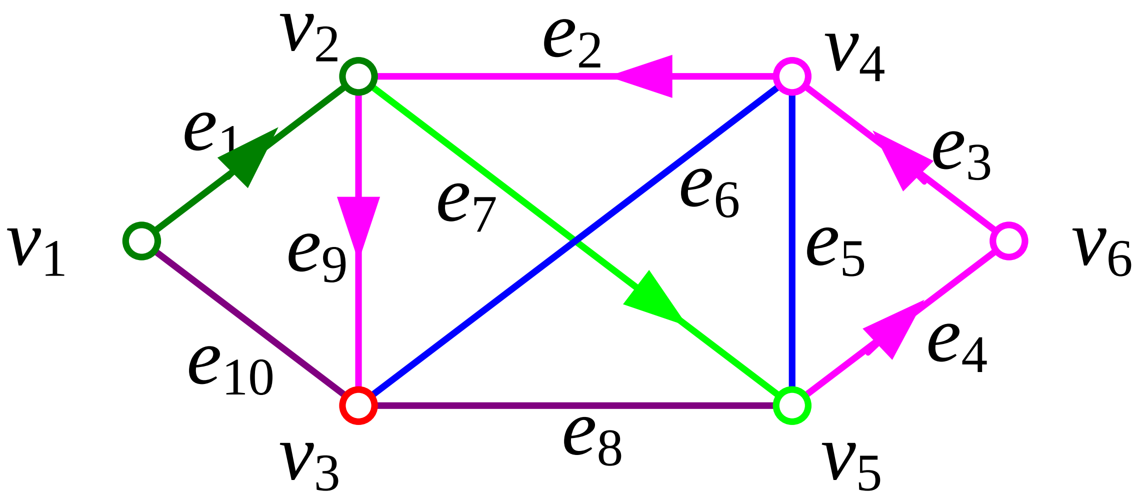
(b) 除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应该选 $G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的桥

设 $P_{i+1} \leftarrow v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_i\, v_i \boxed{e_{i+1} v_{i+1}}$;

(3) 令 $i = i + 1$, 返回(2).

欧拉道路与回路　Fleury算法



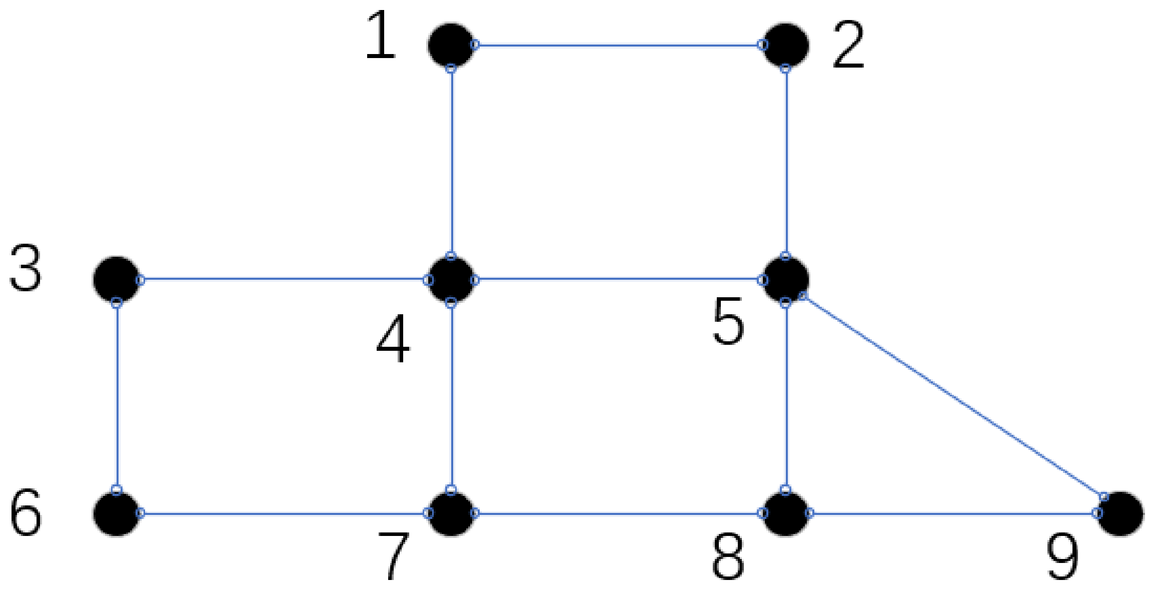


$e_1e_7e_4e_3e_2e_9e_6e_5e_8e_{10}$

欧拉道路与回路　Fleury算法

寻找欧拉道路

起点如何选？



欧拉道路的始终点必须选在**奇数度点**

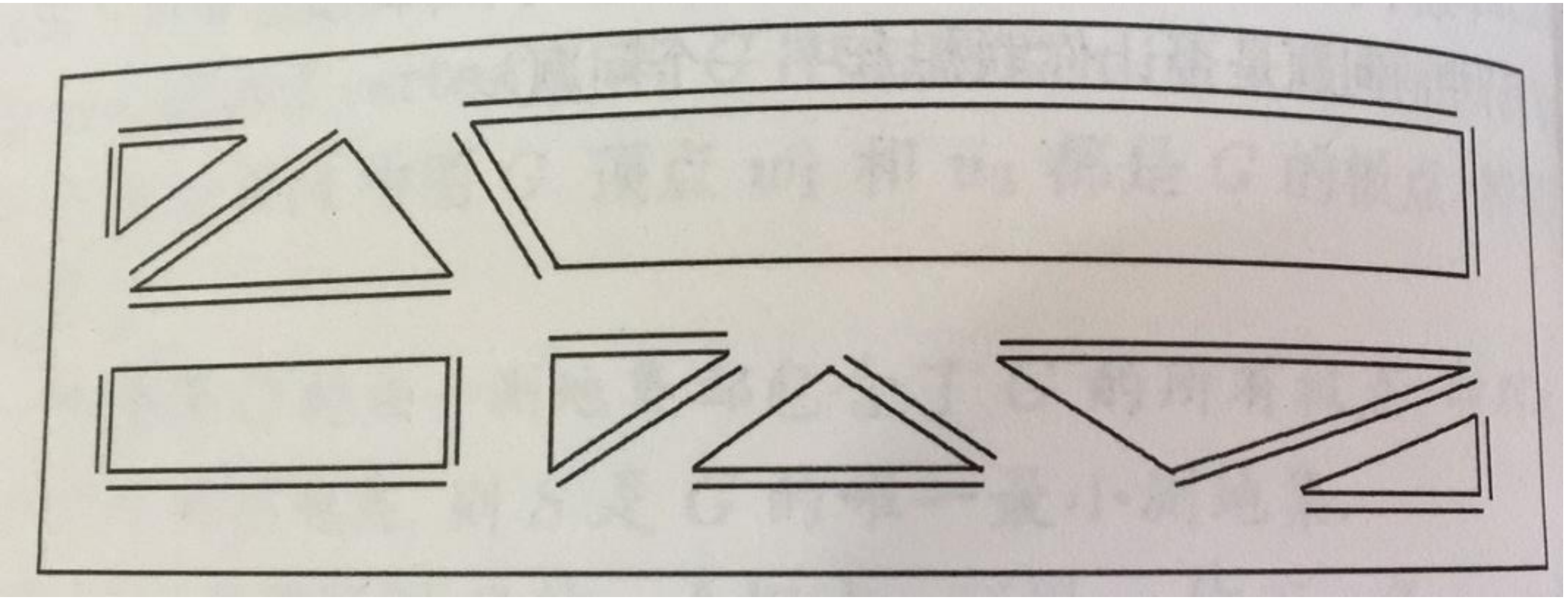
7 8 5 4 → (4,1)是桥

7 8 5 4 7 6 3 4 1 2 5 9 8

8 5 4 1 2 5 9 8 7 4 3 6 7

欧拉道路与回路

例1　下图为一个社区的规划图，每个街道的旁边放置一个邮箱（双线标出）。一个邮递员能否恰好经过每个邮箱一次就可对该社区进行一次环游?



如何建模?

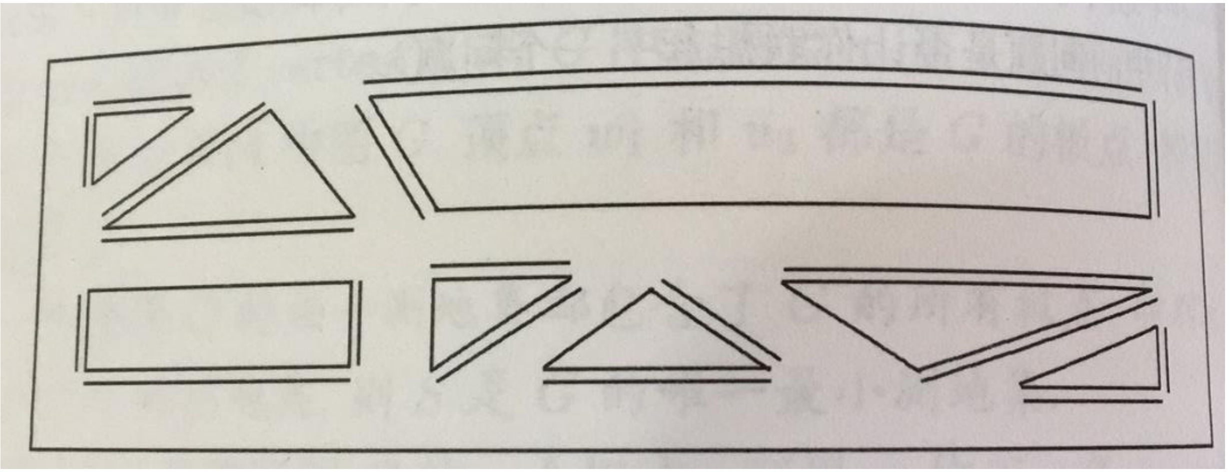
结点?

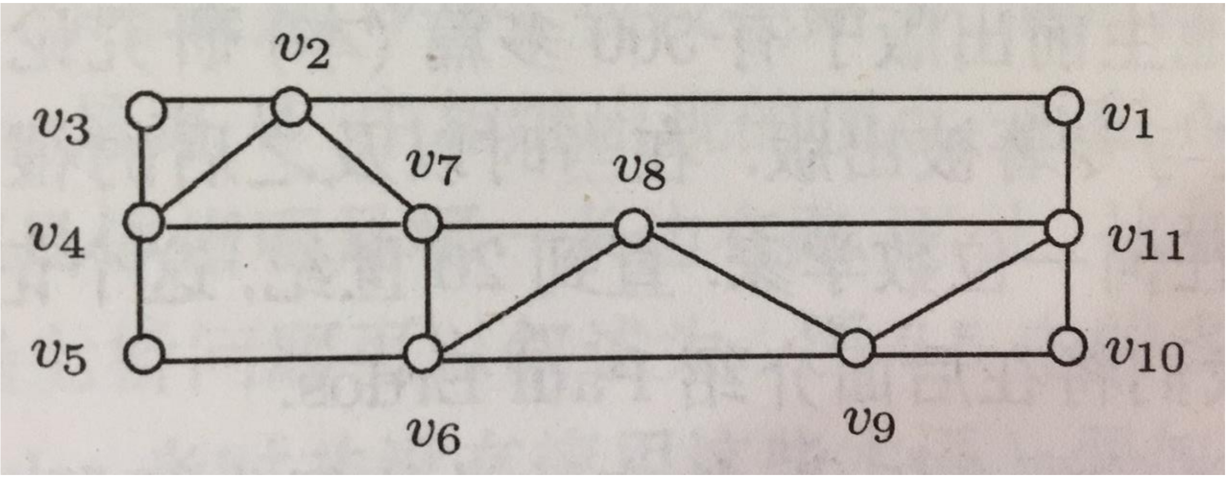
边?

图论：道路与回路

欧拉道路与回路

例1

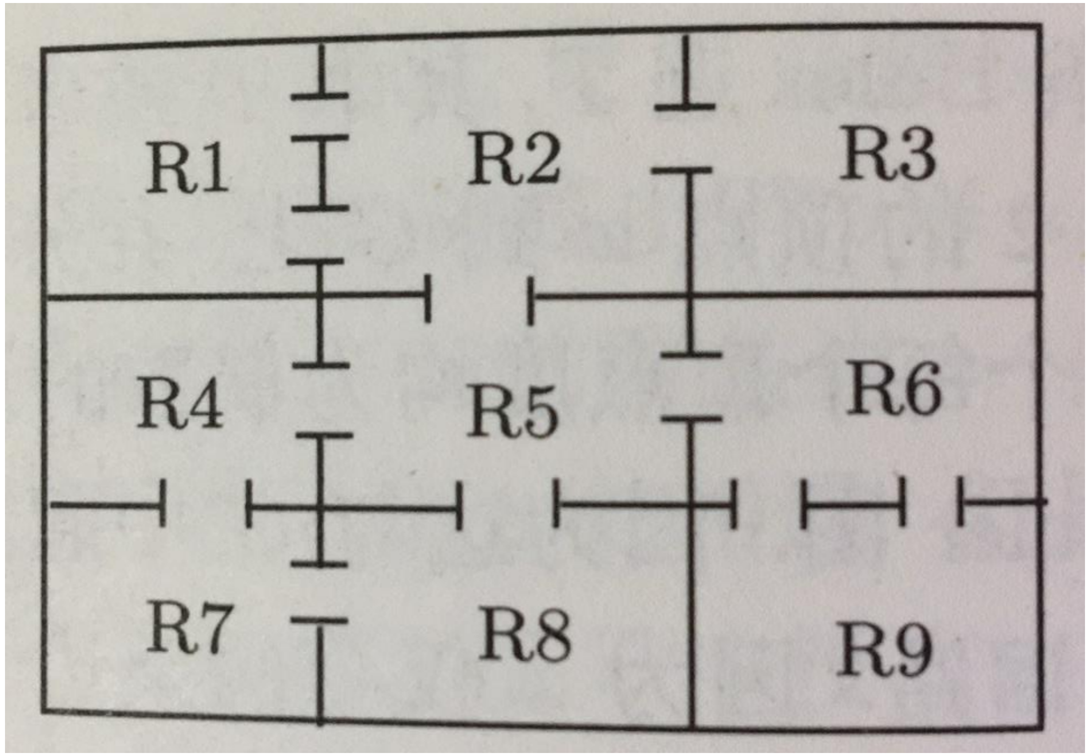




图论：道路与回路

欧拉道路与回路

例2　下图为某大房子二楼的九间小屋子布局，其中屋门两个屋子共有。
问能否从某间屋子开始作一次散步，使得经过每个屋门恰好一次?



如何建模?

结点?

边?

图论：道路与回路

欧拉道路与回路