第十章：关系

关系

二元关系 ⟶ 关系

- 定义 二元关系是笛卡儿积的子集 ➡ 有序对的集合

□ 对集合A和B，$A\times B$的**任一子集**称为A到B的一个二元关系，一般记作R;

二元关系是集合A和B元素之间的联系

□ 若$<x, y>\in R$，可记作 xRy; 若$<x, y>\notin R$，可记作 $x\not R\, y$

□ 在$A=B$时，$A\times A$的任一子集称为A上的一个二元关系

关系

二元关系

- n元组的集合定义n元关系：

  若$n \in N$且$n>1$，A_1，A_2，…，A_n是n个集合，则

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的任一子集称为从$A_1$到$A_n$上的一个$n$元关系。

- 特殊的关系

  (1) A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A=\{<x, x> \mid x \in A\}$

  (2) A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为 $E_A=\{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in A\}$

  (3) $\emptyset$是A上的**空关系**

设$A=\{1, 2\}$，则

$I_A=\{<1, 1>, <2, 2>\}$

$E_A=\{<1, 1>, <2, 1>, <1, 2>, <2, 2>\}$

关系

二元关系

- **定义域和值域**

对A到B的一个关系R，可以定义

(1) R的定义域 dom(R)为

$$\mathrm{dom}(R)=\{x \mid (\exists y)(<x, y>\in R)\}$$

(2) R的值域ran(R)为

$$\mathrm{ran}(R)=\{y \mid (\exists x)(<x, y>\in R)\}$$

$$=\{x \mid (\exists y)(<y, x>\in R)\}$$

(3) R的域fld(R)为

$$\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R)$$

设$A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, c, d\}$, $R=\{<a, b>, <b, c>, <b, d>\}$，则

$$\mathrm{dom}(R)=\{a，b\}$$

$$\mathrm{ran}(R)=\{b，c，d\}$$

$$\mathrm{fld}(R)=\{a，b，c，d\}$$

$$\cup R =$$

$$\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\}\}$$

$$\cup\cup R = \{a,b,c,d\}$$

$$\begin{array}{|c|c|}
\hline
<a, & b> \\
<b, & c> \\
<b, & d> \\
\hline
\end{array}$$

关系

二元关系

- 对A到B的关系R如果$<x, y>\in R$，则$x\in\cup\cup R$，$y\in\cup\cup R$

证明：　已知$<x, y>\in R$，即$\{\{x\}, \{x, y\}\}\in R$.

$\Rightarrow$ $\{x, y\}\in\cup R$　$\Rightarrow$ $x\in\cup\cup R, y\in\cup\cup R$

- 对A到B的关系R，则 $\mathrm{fld}(R) = \cup\cup R$

证明　对任意的x，若 $x\in\mathrm{fld}(R)$　则 $x\in\mathrm{dom}(R)$或 $x\in\mathrm{ran}(R)$

则存在y，使$<x, y>\in R$或$<y, x>\in R$　$\Rightarrow$　$x\in\cup\cup R$

对任意的 t，若 $t\in\cup\cup R$,　R的元素的形式是$\{\{x\},\{x, y\}\}$

必存在u，使$\{\{t\},\{t, u\}\}\in R$ 或$\{\{u\},\{u, t\}\}\in R$　$\Rightarrow$　$t\in\mathrm{fld}(R)$

关系矩阵和关系图

- 关系矩阵

设集合$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,

若R是X到Y的一个关系，则R的关系矩阵是$m\times n$矩阵(m行, n列的矩阵)

$$M(R)=(r_{ij})_{m\times n}$$

R是X上的一个关系，则R的关系矩阵是m×m方阵

矩阵元素是r_{ij}且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\langle x_i, y_j\rangle \in R \\ 0, & 当\langle x_i, y_j\rangle \notin R\end{cases}$$

其中$1\le i\le m, 1\le j\le n$

关系矩阵和关系图

➢ 关系矩阵

例：设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},Y=\{y_1,y_2,y_3\}$， X到Y的关系R为

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\}$$

则R的关系矩阵是

$$M(R)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \end{array}$$

关系

关系矩阵和关系图

- 关系图

设集合$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,

若R是X到Y的一个关系，则R的关系图是

✓ 有向图$G(R)=<V, E>$

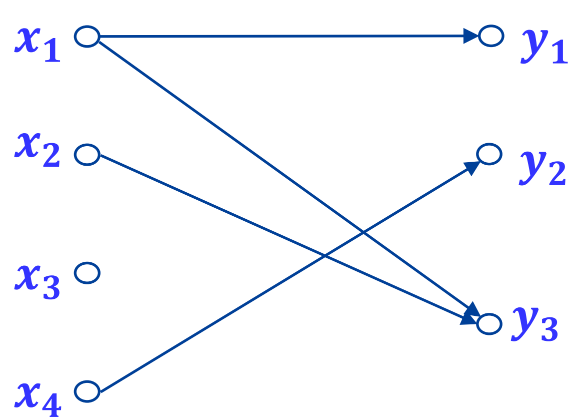
✓ 顶点集是$V=X\cup Y$

✓ 边集是E，从x_i到y_j的有向边$e_{ij}\in E$，当且仅当$<x_i, y_j>\in R$

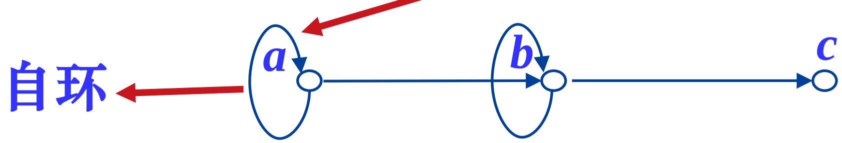
关系矩阵和关系图

➢ 关系图　　$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\}$

$$M(R)=\begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \end{array}$$



对$A=\{a, b, c\}$上的关系$R=\{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <b, c>\}$



关系

关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义

(1) R的逆R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1}=\{<x, y>|<y, x>\in R\}$$

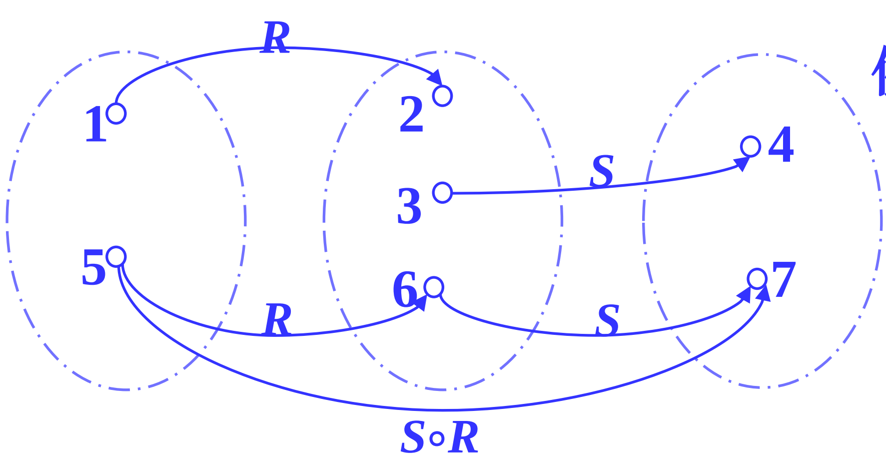
(2) R与S的合成$S\circ R$为X到Z的关系

$$S\circ R=\{<x, y>|(\exists z)(<x, z>\in R\wedge<z, y>\in S)\}$$

颠倒有序对就是R^{-1}

关系图每条有向边的方向颠倒得到R^{-1}的关系图

求$S\circ R$需把R中每个有序对与S中每个有序对一一配合



例：$R=\{<1, 2>, <5, 6>\}$，

$S=\{<3, 4>, <6, 7>\}$

$\Rightarrow$ $S\circ R=\{<5, 7>\}$

关系

关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义

(3) R在A上的限制$R\restriction A$为A到Y的关系

$$R\restriction A=\{<x,y>|(<x,y>\in R\wedge x\in A)\}$$

(4) A在R下的象$R[A]$为集合

$$R[A]=\{y|(\exists x)(x\in A\wedge <x,y>\in R)\}$$

$R\restriction A$是关系R的子集，每个有序对$<x,y>$满足$x\in A$

$R\restriction A$是A到Y的关系

当$\mathrm{dom}(R)\subseteq A$时，$R\restriction A=R$

R[A]是一个集合，实质上是R↾A的值域

设集合$A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$上的关系R为$R=\{<a,\{a\}>,<\{a\},\{\{a\}\}>\}$

$R^{-1}=\{<\{a\},a>,<\{\{a\}\},\{a\}>\}$　$R\circ R=\{<a,\{\{a\}\}>\}$　$R\restriction\{a\}=\{<a,\{a\}>\}$

$R\restriction\{\{a\}\}=\{<\{a\},\{\{a\}\}>\}$　$R[\{a\}]=\{\{a\}\}$　$R[\{\{a\}\}]=\{\{\{a\}\}\}$

关系

关系的逆、合成、限制和象

$$M(S\circ R)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- $S\circ R$的关系矩阵
  - □ R^{-1}的关系矩阵$M(R^{-1})$就是R的关系矩阵的**转置**矩阵
  - □ 如果A是有限集合，$|A|=n$．关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$M(R)=(r_{ij})$和$M(S)=(s_{ij})$都是$n\times n$的方阵，则

$$S\circ R\text{的关系矩阵}M(S\circ R)=M(R)M(S)$$

设集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的关系$R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$

$S=\{<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>\}$

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M(S)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad M(R\circ S)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

关系的逆、合成、限制和象

- **性质** 对X到Y的关系R和Y到Z的关系S，则

(1) $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$

(2) $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$

(3) $(R^{-1})^{-1} = R$

(4) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

证明 (4) 对任意的$\langle x, y\rangle$，有

$$\langle x, y\rangle \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in S \circ R$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle y, z\rangle \in R \wedge \langle z, x\rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in S^{-1} \wedge \langle z, y\rangle \in R^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

关系的逆、合成、限制和象

➢ 对X到Y的关系Q，Y到Z的关系S，Z到W的关系R，则

$$(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q)$$

满足结合律, 但不满足交换律，一般$S\circ R\neq R\circ S$

证明　对任意的$\langle x,y\rangle$，有

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in(R\circ S)\circ Q\\&\quad\Leftrightarrow(\exists u)(\langle x,u\rangle\in Q\wedge\langle u,y\rangle\in(R\circ S))\\&\quad\Leftrightarrow(\exists u)(\langle x,u\rangle\in Q\wedge(\exists v)(\langle u,v\rangle\in S\wedge\langle v,y\rangle\in R))\\&\quad\Leftrightarrow(\exists v)(\langle x,v\rangle\in(S\circ Q)\wedge\langle v,y\rangle\in R)\\&\quad\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\circ(S\circ Q)\end{aligned}$$

关系

关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R_2和R_3，Y到Z的关系R_1，有

  (1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$

  (2) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$

- 对X到Y的关系R_3，Y到Z的关系R_1、R_2，有

  (3) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$

  (4) $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$

(关系合成符优先于集合运算符)

关系

二元关系

设$A=\{0, 1\}$，$B=\{a, b\}$，则

$R_1=\{<0, a>\}$

$R_2=\{<0, a>, <0, b>, <1, a>\}$

A到B的两个二元关系

$R_3=\{<0, 1>, <1, 0>\}$

$R_4=\{<0, 1>, <0, 0>, <1, 0>\}$

A上的两个二元关系

关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R和集合A、B有

（1）$R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$

（2）$R[\cup \mathcal{A}]=\cup\{R[B]|B\in \mathcal{A}\}$

（3）$R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$

（4）$R[\cap \mathcal{A}]\subseteq\cap\{R[B]|B\in \mathcal{A}\}, \mathcal{A}\neq\emptyset$

（5）$R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$

证明 (3)对任意的y，可得

$$
\begin{aligned}
y\in R[A\cap B] &\Leftrightarrow (\exists x)(x\in A\cap B\wedge\langle x,y\rangle\in R)\\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x\in A\wedge x\in B\wedge\langle x,y\rangle\in R)\\
&\Rightarrow (\exists x)(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\exists x)(x\in B\wedge\langle x,y\rangle\in R)\\
&\Leftrightarrow y\in R[A]\wedge y\in R[B]\ \Leftrightarrow y\in R[A]\cap R[B]
\end{aligned}
$$

关系

关系的性质

如果R是A上自反的，则$M(R)$的主对角元素都是1，$G(R)$的每个顶点都有自环

- 对A上的关系R，若对任意的$x \in A$都有 xRx，则称R为A上自反的

$$R\text{是}A\text{上自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow xRx)$$

- 若对任意的$x \in A$都有$x\not{R}x$，则称R为A上非自反的

$$R\text{是}A\text{上非自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x\not{R}x)$$

如果R是A上非自反的，则$M(R)$的主对角元素都是0，$G(R)$的每个顶点都没有自圈

- 在非空集合A上的恒等关系I_A和全关系E_A都是自反的
- 在非空集合A上的空关系$\emptyset$是非自反的.
- 在非空集合A上存在不是自反的也不是非自反的关系，不存在既自反又非自反的关系

关系

关系的性质

$M(R)$是对称矩阵

$G(R)$中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者互有有向边e_{ij}和e_{ji}

- R为A上的关系，对任意的x，$y \in A$，若$xRy \rightarrow yRx$，则称R为A上对称的关系

$$R\text{是}A\text{上对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$$

- 若$(xRy \wedge yRx) \rightarrow (x = y)$，则称$R$为$A$上反对称的关系

$$R\text{是}A\text{上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$$

$$R\text{是}A\text{上反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge x \neq y) \rightarrow y \not{R} x)$$

$M(R)$是反对称矩阵

$G(R)$中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者仅有一条有向边

- 存在既是对称的又是反对称的关系，也存在既不是对称又不是反对称的关系

关系

关系的性质

- R为A上的关系，对任意的x，y，$z \in A$，若$(xRy \wedge yRz) \to xRz$，则称R为A上传递的关系.

R是A上传递的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \to xRz)$

- 在集合A上的全关系、恒等关系、空关系都是传递的
- 在集合$A=\{1, 2, 3\}$上的关系$R=\{<1, 2>, <2, 3>\}$不是传递的关系

关系的性质

- R_1, R_2是A上自反的关系，则$R_1{}^{-1}, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$也是$A$上自反的关系

- R_1, R_2是A上对称的关系，则$R_1{}^{-1}, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$也是$A$上对称的关系

证明 对任意的$<x, y>$，有

$$
\begin{aligned}
<x, y> \in R_1 \cup R_2 &\Leftrightarrow <x, y> \in R_1 \vee <x, y> \in R_2 \\
&\Leftrightarrow <y, x> \in R_1 \vee <x, y> \in R_2 \\
&\Leftrightarrow <y, x> \in R_1 \cup R_2
\end{aligned}
$$

- R_1, R_2是A上反对称的关系，则$R_1{}^{-1}$，$R_1 \cap R_2$也是A上反对称的关系

关系的性质

- R_1, R_2是A上反对称的关系，则${R_1}^{-1}$，$R_1 \cap R_2$ 也是A上反对称的关系

证明 反对称性的充要条件等价改写为

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \to (\langle x, y\rangle \notin R \vee \langle y, x\rangle \notin R))$$

对任意的$x, y \in A$有

$$x \neq y \to (\langle x, y\rangle \notin R_1 \vee \langle y, x\rangle \notin R_1)$$

$$\Leftrightarrow x \neq y \to \left(\langle y, x\rangle \notin {R_1}^{-1} \vee \langle x, y\rangle \notin {R_1}^{-1}\right)$$

- $R_1 \cup R_2$不一定是反对称的

在$A=\{1, 2, 3\}$上的关系 $R_1=\{<1, 2>\}, R_2=\{<2, 1>\}$

$R_1 \cup R_2=\{<1, 2>, <2, 1>\}$不是$A$上反对称的

关系的性质

- R_1, R_2是A上传递的关系，则$R_1^{-1}, R_1 \cap R_2$ 也是A上传递的关系

证明 对任意的$<x, y>, <y, z>$，有

$$<x, y> \in R_1 \cap R_2 \wedge <y, z> \in R_1 \cap R_2$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in R_1 \wedge <x, y> \in R_2 \wedge <y, z> \in R_1 \wedge <y, z> \in R_2$$

$$\Rightarrow <x, z> \in R_1 \wedge <x, z> \in R_2$$

$$\Leftrightarrow <x, z> \in R_1 \cap R_2$$

- $R_1 \cup R_2$不一定是传递的

在$A=\{1, 2, 3\}$上的关系$R_1 = \{<1, 2>\}, R_2 = \{<2, 3>\}$

$R_1 \cup R_2 = \{<1, 2>, <2, 3>\}$不是$A$上传递的

关系

关系的性质

- 对A上的关系R，则

  (1) R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$，

  (2) R是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

设R是反对称的，对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y>\in R\cap R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\wedge<x, y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \wedge <y, x>\in R$

$\Rightarrow x=y$

$\Rightarrow <x, y>\in I_A$

设$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y>\in R \wedge <y, x>\in R$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \wedge <x, y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y> I_A$

$\Rightarrow x=y$

关系的闭包

- 对非空集合A上的关系R，如果有A上另一个关系R'，满足：

  (1) R'是自反的(对称的，传递的)

  (2) $R \subseteq R'$

  (3) 对A上任何自反的(对称的，传递的)关系R''，有

$$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$$

  则称关系R'为R的自反(对称，传递)闭包，记作$r(R)(s(R), t(R))$

- 三个闭包：自反闭包$r(R)$，对称闭包$s(R)$，传递闭包$t(R)$

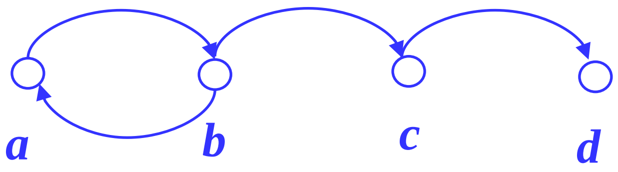
  $r(R)$是有自反性的R的“最小”超集合，

  $s(R)$是有对称性的R的“最小”超集合，

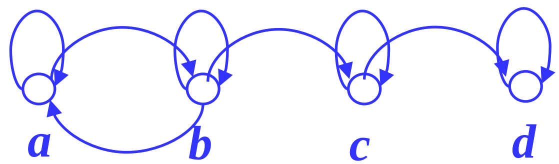
  $t(R)$是有传递性的R的“最小”超集合。

关系的闭包

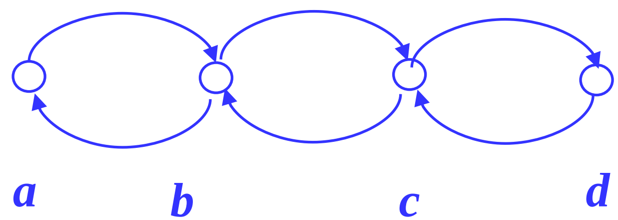
在R的关系图中加入**最少的边**使之成为自反(对称，传递)的，即是自反(对称，传递)闭包



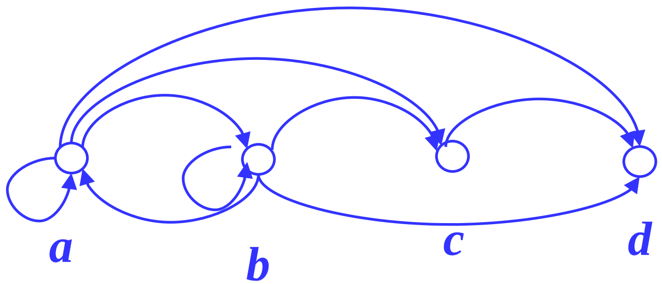
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

关系的闭包

- **闭包的性质**

对非空集合A上的关系R，有

(1) R是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$

(2) R是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$

(3) R是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$

证明　(2) 设R是对称的，由于$R \subseteq R$，

且任何包含R的对称关系R''，有$R \subseteq R''$

即R满足$s(R)$的定义，$s(R) = R$。

再设$s(R) = R$；由$s(R)$的定义，R是对称的

关系的闭包

- **闭包的性质**

  - 对非空集合A上的关系R_1，R_2，若$R_1 \subseteq R_2$，则

    (1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

    (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

    (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

  - 对非空集合A上的关系R_1，R_2则

    (1) $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

    (2) $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

    (3) $\boxed{t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)}$

关系的闭包

集合$A=\{a, b, c\}$上的关系R_1和R_2为 $R_1=\{<a, b>\}$, $R_2=\{<b, c>\}$.

则 $t(R_1)=R_1=\{<a, b>\}$， $t(R_2)=R_2=\{<b, c>\}$.

$t(R_1)\cup t(R_2)=\{<a, b>, <b, c>\}$

$t(R_1\cup R_2)=\{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

显然 $t(R_1)\cup t(R_2)\subset t(R_1\cup R_2)$

$R^0 = \{<x, x> | x \in A\} = I_A$

关系的闭包

构造R的自反闭包，只要把所有的$x \in A$构成的$<x, x>$加入R中

- 闭包的构造方法

对非空集合A上的关系R，有 $r(R)=R\cup R^0$.

证明 对任意的$x \in A$，$<x, x> \in R^0$，有$<x, x> \in R \cup R^0$，

① 故$R \cup R^0$是A上自反的

② $R \subseteq R \cup R^0$

③ 对A上任意的自反关系R''，如果$R \subseteq R''$，则对任意的$<x, y>$

若$<x, y> \in R \cup R^0$，即$<x, y> \in R$，或者$<x, y> \in R^0$

当$<x, y> \in R$，由$R \subseteq R''$有$<x, y> \in R''$.

若$<x, y> \in R^0$，则 $x=y$，即有$<x, y> \in R''$

因此$r(R)=R\cup R^0$

关系的闭包

➢ 闭包的构造方法

构造R的对称闭包，只要对任何$<x, y>\in R$且$<y, x>\notin R$把$<y, x>$加入R中.

对非空集合A上的关系R，有 $s(R)=R\cup R^{-1}$

证明 对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y>\in R\cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \vee <x, y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x>\in R^{-1} \vee <y, x>\in R$

$\Leftrightarrow <y, x>\in R\cup R^{-1}$

① $R\cup R^{-1}$是A上对称关系

② $R\subseteq R\cup R^{-1}$

③ 对A上任意的包含R的对称关系R''，对任意的$<x, y>$

若$<x, y>\subseteq R\cup R^{-1}$，则$<x, y>\in R$或$<x, y>\in R^{-1}$

当$<x, y>\in R$，由$R\subseteq R''$有$<x, y>\in R''$

当$<x, y>\in R^{-1}$，则$<y, x>\in R$，$<y, x>\in R''$，故$<x, y>\in R''$

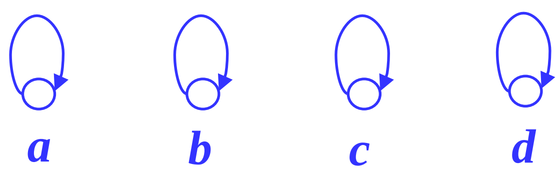
关系的闭包

- 对A上的关系R，$n\in N$，关系R的n次幂R^n定义如下：

  (1) $R^0 = \{<x, x> | x\in A\} = I_A$

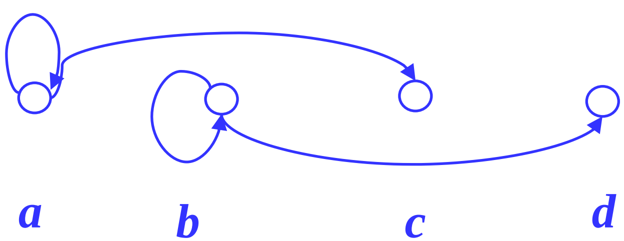
  (2) $R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n\geq 0)$

例：集合$A=\{a, b, c, d\}$上的关系R为$R=\{<a, b>,<b, a>,<b, c>,<c, b>\}$

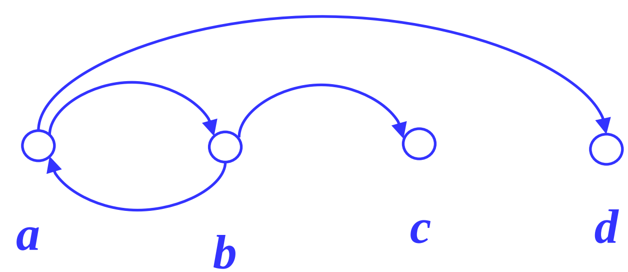


R^0

R^1



$R^2 = R^4$



$R^3 = R^5$

关系的闭包

- 设A是有限集合，$|A|=n$，R是A上的关系，则存在自然数s和t，$s \neq t$，使得$R^s = R^t$
- 设A是有限集合，R是A上的关系，m和n是非零自然数，则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证明 (1) 对任意的m，施归纳于n

当$n=1$时，$R^m \circ R^1 = R^{m+1}$

假设$n=k(k \geq 1)$时结论成立，即有$R^m \circ R^k$

令$n=k+1$，则 $R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R$

$= R^{m+k} \circ R$

$= R^{m+k+1}$

关系的闭包

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t，$s<t$，使得$R^s = R^t$，则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$，其中k为自然数

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，k和i为自然数，$p=t-s$

(3) 令$B=\{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的自然数$q$，有$R^q \in B$.

证明 (3) 若$q\geq t$，则$q-s>0$．一定存在自然数k和i，使得$q=s+kp+i$，其中$0\leq i\leq p-1$, 于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

此外，$s+i\leq s+p-1=t-1$ $\Rightarrow$ $R^q = R^{s+i} \in B$

关系的闭包

- **闭包的构造方法**

对非空集合A上的关系R，有 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\ldots$

证明 先证$R\cup R^2\cup R^3\ldots\subseteq t(R)$.

需要证明对任意的$n\geq 1$，$n\in N$, 有$R^n\subseteq t(R)$

① 当$n=1$时， $R\subseteq t(R)$.

② 假设$n=k$时有$R^k\subseteq t(R)$.令$n=k+1$，对任意的$<x, y>$有

$$
\begin{aligned}
<x, y>\in R^{k+1} &\Leftrightarrow <x, y>\in R^k\circ R \\
&\Leftrightarrow (\exists z)(<x, z>\in R\wedge <z, y>\in R^k) \\
&\Rightarrow (\exists z)(<x, z>\in t(R)\wedge <z, y>\in t(R)) \\
&\Rightarrow <x, y>\in t(R)
\end{aligned}
$$

故$R^{k+1}\subseteq t(R)$, 则有$R\cup R^2\cup R^3\ldots\subseteq t(R)$.

关系的闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

➢ 闭包的构造方法

再证$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$. 对任意的$<x, y>$和$<y, z>$,

可得$<x, y> \in R \cup R^2 \cup R^3 \ldots \wedge <y, z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

$\Leftrightarrow (\exists s)(<x, y> \in R^s) \wedge (\exists t)(<y, z> \in R^t)$ 其中s和t是非零自然数

$\Rightarrow (\exists s)(\exists t)(<x, z> \in R^t \circ R^s)$

$\Leftrightarrow (\exists s)(\exists t)(<x, z> \in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x, z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

故$R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$是传递的，且包含$R$

则$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

关系的闭包

- 闭包的构造方法

  - $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

  - A为非空有限集合, $|A| = n$, R是A上的关系，则存在一个正整$k \leq n$，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots \cup R^k$$

  - 或

$$\boxed{t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots \cup R^n}$$

关系的闭包

例：集合$A=\{a, b, c\}$上的关系R为$R=\{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

则 $r(R)=R\cup R^0=\{<a, b>, <b, c>, <c, a>, <a, a>, <b, b>, <c, c>\}$

而 $s(R)= R\cup R^{-1}=\{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, b>, <c, a>, <a, c>\}$

$$M(R)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad M(R^2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad M(R^3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3$

$=\{<a, b>, <a, c>, <b, c>, <b, a>, <c, a>, <c, b>,<a, a>, <b, b>, <c, c>\}$

- Warshall算法

关系的闭包

- 对非空集合A上的关系R，有

(1) 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$是自反的

(2) 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$是对称的

(3) 若R是传递的，则$r(R)$是传递的

- 对非空集合A上的关系R，有

(1) $rs(R) = sr(R)$

(2) $rt(R) = tr(R)$

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$

其中$rs(R) = r(s(R))$，

其他类似

证明 (1) $sr(R) = s(R \cup R^0)$

$= (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^{-1}$

$= R \cup R^0 \cup R^{-1} \cup (R^0)^{-1}$

$= R \cup R^{-1} \cup R^0$

$= (R \cup R^{-1}) \cup (R \cup R^{-1})^0$

$= rs(R)$

关系的闭包 (2) $rt(R) = tr(R)$ $tr(R)=t(R \cup R^0)$

(2) 先证$(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^n$

当$n=1$时，$(R \cup R^0)^1 = R \cup R^0 = R^0 \cup R^1$

假设$n=k(k\geq 1)$时有$(R \cup R^0)^k = R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k$，令$n=k+1$，则有

$$(R \cup R^0)^{k+1} = (R \cup R^0)^k \circ (R \cup R^0)$$

$$= (R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k) \circ (R \cup R^0)$$

$$= ((R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k) \circ R) \cup ((R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k) \circ R^0)$$

$$= (R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^{k+1}) \cup (R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k)$$

$$= R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^{k+1}$$

$$t(R \cup R^0) = (R \cup R^0)^1 \cup (R \cup R^0)^2 \cup (R \cup R^0)^3 \cup \ldots$$

$$= (R^0 \cup R^1) \cup (R^0 \cup R^1 \cup R^2) \cup \ldots$$

$$= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = R^0 \cup t(R) = t(R) \cup (t(R))^0 = rt(R)$$

关系的闭包

(3) 因为$R \subseteq s(R)$ ⇒ $t(R) \subseteq ts(R)$ ⇒ $st(R) \subseteq sts(R)$

因为$ts(R)$是对称的 ⇒ $sts(R)=ts(R)$

则$st(R) \subseteq ts(R)$.

若要求出R的自反、对称且传递的闭包

⇒ 先求$r(R)$，再求$sr(R)$，最后求$tsr(R)$.

⇒ 先求$tr(R)$，再求$str(R)$，则$str(R)$不一定是传递的

关系

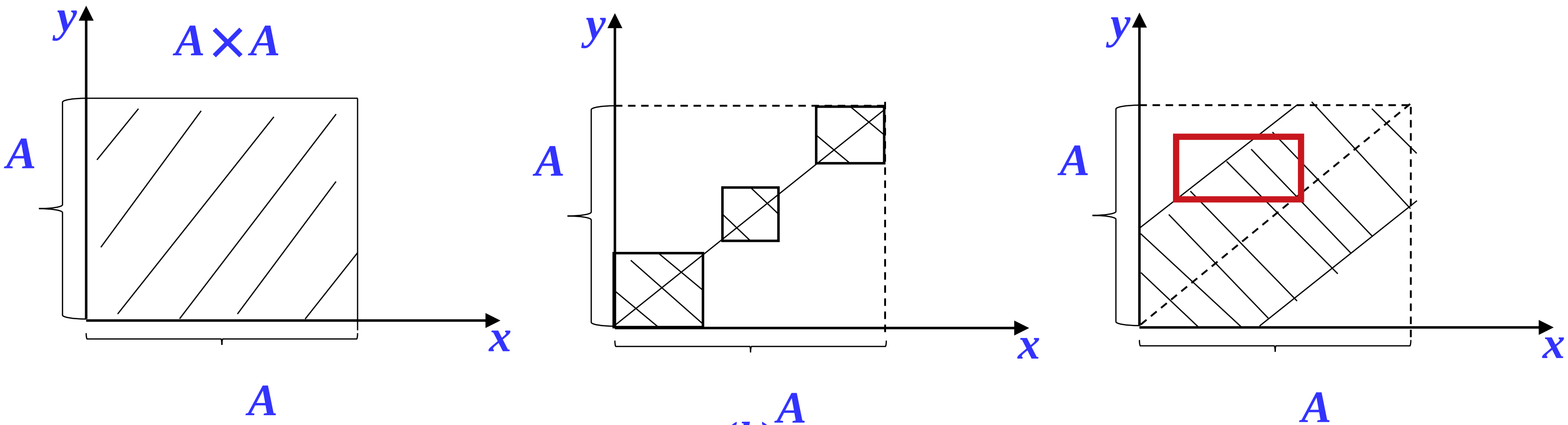
等价关系和划分

- 等价关系

对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系

- ✓ 非空集合A上的恒等关系I_A和全关系E_A都是等价关系
- ✓ 在所有谓词公式的集合上的等值关系$\Leftrightarrow$是等价关系
- ✓ 已知集合$A = P(X), C \subseteq X, A$上的关系$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \oplus y \subseteq C\}$

等价关系和划分



(a) (b) (c)

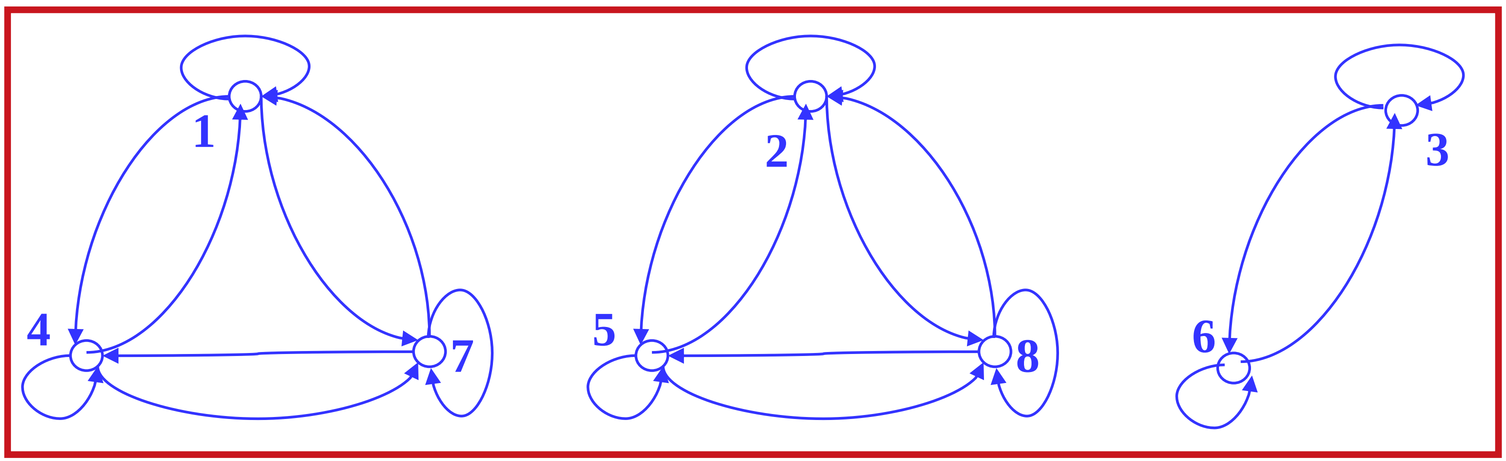
关系

等价关系和划分

- R是非空集合A上的等价关系，对任意的$x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$$

则称集合$[x]_R$为x关于R的等价类，简称x的等价类，也可记作$[x]$



$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$

$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$

$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$

各元素均有一个等价类

等价类间或相等或不相交

所有等价类的并集是A

等价关系和划分

- R是非空集合A上的等价关系，对任意的x，$y\in A$，有

  (1) $[x]_R \neq \emptyset$ 且$[x]_R \subseteq A$

  (2) 若xRy, 则$[x]_R = [y]_R$

  (3) 若$x\not{R}y$，则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

  (4) $\cup\{[x]_R \mid x\in A\} = A$

证明 (4) 对任意的$x\in A$， $[x]_R \subseteq A$，有$\cup\{[x]_R \mid x\in A\} \subseteq A$

对任意的$x\in A$，$x\in [x]_R$，有$x\in \cup\{[x]_R \mid x\in A\}$

则$A\subseteq \cup\{[x]_R \mid x\in A\}$

$\Rightarrow$ $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$

等价关系和划分

- 对非空集合A上的关系R，以R的不相交的等价类为元素的集合称为A的商集，记作A/R

$$A/R = \{y \mid (\exists x)(x \in A \wedge y = [x]_R)\}$$

$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$

$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$

$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$

$\Rightarrow$ $A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

$= \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$

等价关系和划分

- 划分：对非空集合A，若存在集合π，满足下列条件：

(1) $(\forall x)(x \in \pi \rightarrow x \subseteq A)$

(2) $\emptyset \notin \pi$

(3) $\cup\pi = A$

(4) $(\forall x)(\forall y)((x \in \pi \wedge y \in \pi \wedge x \neq y) \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

则称π为A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

- A的一个划分π，是A的非空子集的集合(即$\pi \subseteq P(A)$且$\emptyset \notin \pi$)
- A的这些子集互不相交，且并集为A.

对集合$A=\{a, b, c, d\}$　　$\pi_4 = \{\{a, b, d\}\}$

$\pi_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$　$\pi_3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$

关系

等价关系和划分

- 对非空集合A上的等价关系R，A的商集A/R就是A的划分
  - 称为由等价关系R诱导出来的A的划分，记作π_R
- 对非空集合A的一个划分π，令A上的关系R_π为

$$R_\pi = \{<x, y> | (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

则R_π为A上的等价关系

  - 称R_π为划分π诱导出的A上的等价关系
- 对非空集合A的一个划分π和A上的等价关系R，π诱导R当且仅当R诱导π

划分与等价一一对应

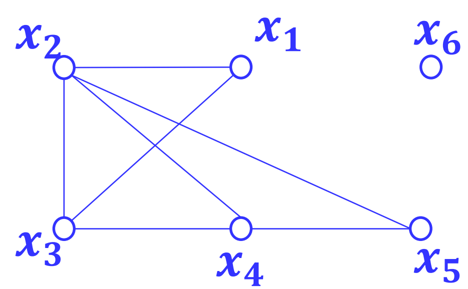
相容关系和覆盖

不必是传递的

- 对非空集合A上的关系R，如果R是**自反的**、**对称的**，则称R为A上的相容关系.

  - 相容关系的关系图中，每个顶点都有自圈，且若一对顶点间有边则有向边成对出现.

  - 简化关系图：不画自圈,并用无向边代替一对来回的有向边.



- 对非空集合A上的相容关系R，若$C\subseteq A$，且C中任意两个元素x和y有xRy，则称C是由相容关系R产生的相容类，简称相容类.

$$C=\{x \mid x\in A\wedge(\forall y)(y\in C\rightarrow xRy)\}$$

$\{x_1, x_2\}$

$\{x_3, x_4\}$

$\boxed{\{x_6\}}$

$\boxed{\{x_2, x_4, x_5\}}$

关系

相容关系和覆盖

- 对非空集合A上的相容关系R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作C_R
  - 对最大相容类C_R有下列性质：

    $$(\forall x)(\forall y)((x\in C_R \wedge y\in C_R)\rightarrow xRy)$$

    $$(\forall x)(x\in A - C_R \rightarrow(\exists y)(y\in C_R \wedge x\not R y))$$

  - 在简化图中最大完全多边形的顶点集合才是最大相容类
  - 一个孤立点的集合也是最大相容类
  - 如果两点连线不是最大完全多边形的边，这两个顶点的集合也是最大相容类

在相容关系的简化图中，最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形

相容关系和覆盖

- 对非空集合A，若存在集合Ω满足下列条件：

  (1) $(\forall x)(x\in\Omega\rightarrow x\subseteq A)$

  (2) $\emptyset\notin\Omega$

  (3) $\cup\Omega=A$

  则称Ω为A的一个覆盖，称Ω中的元素为Ω的覆盖块

  - 一个划分是一个覆盖，但一个覆盖不一定是一个划分，因为划分中各元素不相交，覆盖中各元素可能相交。

- 对非空集合A上的相容关系R，最大相容类的集合是A的一个覆盖，称为A的完全覆盖，记作$C_R(A)$，而且$C_R(A)$是唯一的。

- 对非空集合A的一个覆盖$\Omega=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由$\Omega$确定的关系$R = A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\ldots\cup A_n\times A_n$是$A$上的相容关系。

一个相容关系R，可确定一个$C_R(A)$；一个覆盖，也可确定一个相容关系；不同的覆盖，可能确定同一个相容关系

关系

一个相容关系R，可确定一个$C_R(A)$；一个覆盖，也可确定一个相容关系；不同的覆盖，可能确定同一个相容关系

相容关系和覆盖

集合$A=\{1, 2, 3, 4\}$的两个覆盖

$$\Omega_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

$$\Omega_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}\}$$

可以确定相同的相容关系

$$R = \{<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 4>, <4, 3>, <1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>\}$$

关系

偏序关系

对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系

- 偏序关系和拟序关系
  - 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系
    - ✓ 偏序关系R通常记作≤，当xRy时，可记作 $x \leq y$，读作x"小于等于" y.
  - 对非空集合A上的关系R，如果R是非自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系
    - ✓ 拟序关系R通常记作<，当xRy时，可记作$x<y$，读作x"小于" y

偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系，拟序关系又称强偏序关系

关系

偏序关系

拟序关系和偏序关系的区别只是自反性

- R为A上的拟序关系，则R是反对称的.

  证明：假设R不是反对称的.

  则存在$x \in A, y \in A, x \neq y$, 使$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, x\rangle \in R$

  由传递性，$\langle x, x\rangle \in R$; 与非自反性矛盾。

- 对A上的拟序关系R，$R \cup R^0$是A上的偏序关系.

- 对A上的偏序关系R，$R - R^0$是A上的拟序关系，

- 集合A与A上的关系R一起称为一个结构；集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作$\langle A, R\rangle$.

  - $\langle N, \leq\rangle$和$\langle P(A), \subseteq\rangle$都是偏序集

偏序关系

- 哈斯图

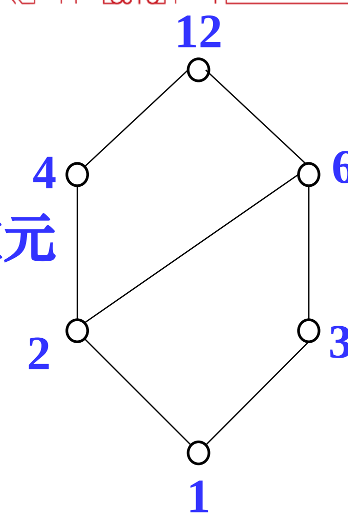
利用偏序关系的性质，其关系图可简化为**哈斯图**

首先，由于自反性，每个顶点都有自圈，则可不画自圈

其次，由于反对称性，两个顶点之间至多一条有向边，则可约定箭头指向上方或斜上方并适当安排顶点位置，以便用无向边代替有向边.

最后，由于传递性，依传递可得到的有向边可以不画.

偏序关系



- 对偏序集$<A, \leq>$，如果x，$y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且不存在元素$z \in A$使得$x \leq z$且$z \leq y$，则称y盖住x.

A上的盖住关系cov$A$定义为

$$\mathrm{cov}A = \{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y\text{盖住}x\}$$

- 集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系 D_A 是A上的偏序关系，则A上的盖住关系cov$A$为

$\mathrm{cov}A = \{<1,2>, <1,3>, <2, 4>, <2, 6>, <3, 6>, <4, 12>, <6, 12>\}$

- 对偏序集$<A, \leq>$，A上的盖住关系cov$A$是唯一的

- 作图规则为：

(1) 每个顶点代表A的一个元素

(2) 若$x \leq y$且$x \neq y$, 则顶点y在顶点x上方

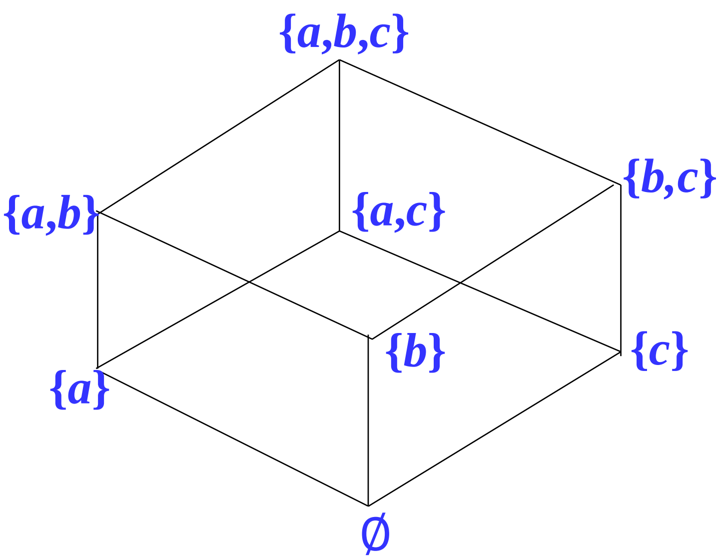
(3) 若$<x, y> \in \mathrm{cov}A$, 则x, y间连无向边

偏序的关系图简化 ➡ 哈斯图

关系

偏序关系

对$A=\{a, b, c\}$，$<P(A), \subseteq>$是偏序集，它的哈斯图为



- 对偏序集$<A, \leq>$，且$B \subseteq A$，

(1) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$，
则称y为B的**最小元**

(2) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$，
则称y为B的**最大元**

(3) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge x \leq y) \rightarrow x = y))$，
则称y为B的**极小元**

(4) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge y \leq x) \rightarrow x = y))$，
则称y为B的**极大元**

$B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

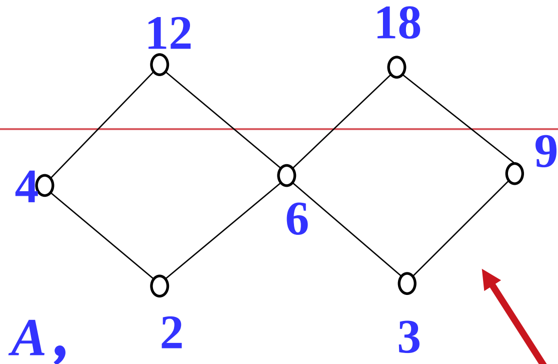
$B = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

最小元(最大元)不一定存在，若存在必唯一.

在非空有限集合B中，极小元(极大元)必存在，不一定唯一.

关系

偏序关系



- 对偏序集$<A, \leq>$，且$B \subseteq A$，

(1) 若$(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$，则称$y$为$B$的上界

(2) 若$(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$，则称$y$为$B$的下界

(3) 若集合$C = \{y | y$是B的上界$\}$，则C的最小元称为B的上确界或最小上界

(4) 若集合$C = \{y | y$是B的下界$\}$，则C的最大元称为B的下确界或最大下界

集合$A=\{2,3,4,6,9,12,18\}$，A上的整除关系D_A是偏序关系, 偏序集$<A, D_A>$

$B_1 = \{2, 4\}$ ➡ 上界是4和12, 上确界是4, 下界和下确界是2.

$B_2 = \{4, 6, 9\}$ ➡ 没有上下界, 没有上下确界.

$B_3 = \{2, 3\}$ ➡ 上界是6, 12, 18, 上确界是6, 没有下界和下确界.

> B的上下界和上下确界可能在B中，可能不在B中，但一定在A中．上界(下界)不一定存在，不一定唯一．上确界(下确界)不一定存在，若存在必唯一．

对全序集<A,≤ >，A是链且A的任何子集都是链

N上的小于等于关系是全序关系，
对非空集合A，P(A)上的包含关系不是全序关系

全序关系和链

- 对偏序集$<A, \leq>$，对任意的$x, y \in A$，若有$x \leq y$或$y \leq x$，则称x和y是可比的
- 对偏序集$<A, \leq>$，如果对任意的$x, y \in A$，x和y都可比，则称$\leq$为A上的全序关系，或称线序关系，并称$<A, \leq>$为全序集.
- 对偏序集$<A, \leq>$，且$B \subseteq A$，

  (1) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都是可比的，则称B为A上的链，B中元素个数称为链的长度

  (2) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都不是可比的，则称B为A上的反链，B中元素个数称为反链的长度.

集合$A=\{2,3,4,6,9,12,18\}$，A上的整除关系D_A是偏序关系.

$\{3,6,18\}, \{3,9\}, \{18\}$都是链；$\{4,6,9\}, \{12,18\}, \{4,9\}$都是反链

全序关系和链

- 对偏序集$<A, \leq>$，设A中最长链的长度是n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n.
- 对偏序集$<A, \leq>$，若A中元素为$mn+1$个，则A中或者存在一条长度为，$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链.

良序关系

- 对偏序集$<A, \leq>$，如果A的任何非空子集都有最小元，则称$\leq$为良序关系，称$<A, \leq>$为良序集
  - $<N, \leq>$是全序集，也是良序集
  - $<Z, \leq>$是全序集，不是良序集

    因为$Z \subseteq Z$，但是Z没有最小元.
- 一个良序集一定是全序集.
- 一个有限的全序集一定是良序集.

良序关系

对一个非良序的集合，可定义集合上的一个全序关系，使该集合成为良序集

- $<Z, \le>$不是良序集.
- 在Z上定义全序关系R为：

定义R的过程称为**良序化**

对$a, b \in Z$, 若 $|a| \le |b|$, 则aRb; 若$a>0$，则 $-aRa$

➡ $0R{-1}$，$-1R1$，$1R{-2}$，$-2R2$，…

➡ Z的最小元是0, Z的子集都有最小元，$<Z, R>$是良序集

- (良序定理) 任意的集合都是可以良序化的.