第九章：集合

- 集合论的基本概念和结论，包含集合、运算、关系、函数和基数.
- 集合论公理系统，又称公理集合论

集合

集合的概念

- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体；
- 集合是集合论中唯一无精确定义的概念；
- 组成集合的每个事物称为该集合的一个元素，或简称—个元；

如果a是集合A的一个元素，就说a属于A，或者说a在A中，记作$a\in A$，

如果b不是集合A的—个元素，就说b不属于A，或者说b不在A中,记作$b\notin A$

集合

集合元素的特点：

- 任意性：集合的元素可以是任何事物，也可以是另外的集合
- 相异性：一个集合的各个元素是可以互相区分开的，即：一个集合中不会重复出现相同的元素；
- 无序性：组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的；
- 确定性：任—事物是否属于一个集合，必须是确定的。

集合

集合的表示方法

- 一般用不同的大写字母表示不同的集合，并用不同的小写字母表示集合中不同的元素；

- 用几个特定的字母表示几个常用的集合，约定

  N表示全体自然数组成的集合

  Z表示全体整数组成的集合

  Q表示全体有理数组成的集合

  R表示全体实数组成的集合

  C表示全体复数组成的集合

集合

集合的表示方法

- 外延表示法：这种方法一一列举出集合的全体元素；

枚举法

$A=\{7，8，9\}$

$N=\{0，1，2，3，…\}$

$E=\{a，b，c,…，y，z\}$

- 内涵表示法：这种方法用谓词来描述集合中元素的性质；

谓词法

$A=\{x \mid x$是整数且$6<x<10\}$

$N=\{x \mid x$是自然数$\}$

$\{x \mid P(x)\}$是使$P(x)$为真的所有元素组成的集合。

集合

集合的实例

- 元素层次性（树型结构）

  F={7，{8，{9}}}.

- *Rusell*悖论

  $H = \{x \mid x\text{是一个集合} \wedge x \notin x\}$

  集合H不存在

  集合论不能研究“所有集合组成的集合”

集合

集合间的关系

- 集合间可以定义关系＝、⊆、⊂、⊇、⊃。
- 两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的元素；若两个集合A和B相等，则记作$A=B$；若A和B不相等，则记作$A\neq B$

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A\neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

- 对集合A和B，若A的每个元素都是B的元素，就称A为B的子集合，或称B包含A，或称B是A的超集合，记作$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \rightarrow x\in B)$$

- 注意区分⊆和∈ $\{a\}\in\{\{a\}, b\}$

$\{a, b\}\subseteq\{a, b, \{a\}\}$ 但 $\{a, b\}\notin\{a, b, \{a\}\}$.

集合相等

- 两个集合相等的充要条件是它们互为子集，即

$$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge B\subseteq A)。$$

证明　$A=B$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in A)$$

$$\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

证明两个集合相等，判定两个集合互为子集

集合相等

- 对任意的集合A,B和C

(1) $A\subseteq A$　　自反性

(2) $(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)\Rightarrow A=B$　　反对称性

(3) $(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$　　传递性

集合间的关系

- 对任意两个集合A和B，若$A\subseteq B$且$A\neq B$，称A为B的真子集，或称B真包含A，或称B是A的**真超集合**，记作$A\subset B$或$B\supset A$

$$A\subset B \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge A\neq B)$$

- 若两个集合A和B没有公共元素，就称A和B是不相交的

$$A\text{和}B\text{不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x\in A\wedge x\in B)$$

集合

特殊集合

- 空集和全集是两个特殊集合

- 不含任何元素的集合称为空集，记作$\emptyset$.

  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

  显然，$(\forall x)(x \notin \emptyset)$为真

- 对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$.

- 空集是唯一的

- 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记作E

  $E = \{x \mid x = x\}$

- 全集的概念相当于谓词逻辑的论域

集合的基本运算

- 对集合A和B

(1) 并集$A\cup B$定义为$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

(2) 交集$A\cap B$定义为$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

(3) 差集(又称B对A的相对补集，补集) $A-B$定义为

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

(4) 余集(又称A的绝对补集) $-A$定义为 $-A=E-A=\{x\mid x\notin A\}$

(其中E为全集；A的余集就是A对E的相对补集)

(5)对称差$A\oplus B$定义为

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{x\mid x\in A\,\overline{\vee}\,x\in B\}$$

集合

广义并和广义交

规定$\cup\varnothing=\varnothing$，
规定$\cap\varnothing$无意义

- 前提：集合A的元素都是集合
- 把A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并，记作$\cup A$；

$A=\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$

$\cup A=\{a, b, c, d\}$

$$\cup A=\{x|(\exists z)(z\in A\wedge x\in z)\}$$

- 把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交，记作$\cap A$

$$\cap A=\{x|(\forall z)(z\in A\rightarrow x\in z)\}$$

$\cap A=\{b\}$

集合

广义并和广义交

广义并(交)与并(交)

$A \cup B = \cup \{A, B\}$

$A \cap B = \cap \{A, B\}$

- 广义并和并集的运算符都是∪
- 广义并是一元运算，并集是二元运算

幂集

- 集合的幂集是该集合所有子集组成的集合
- 若A是集合，则把A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作$P(A)$：

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$$

幂集是集合的集合

$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$

$P(\{\emptyset\})=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\{a, b\})=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$

对任意的集合A，有$\emptyset\subseteq A$和$A\subseteq A$，因此有$\emptyset\in P(A)$和$A\in P(A)$。

笛卡儿积

- 两个集合的笛卡儿积是它们的元素组成的**有序对**的集合
  - ✓ 有序对 $<x, y>$ 应具有下列性质

    (1) $x \neq y \Longrightarrow <x, y> \neq <y, x>$

    (2) $<x, y> = <u, v> \Leftrightarrow (x=u) \wedge (y=v)$

  - ✓ 在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有序对
- 用集合定义有序对

  有序对 $<x, y>$ 定义为

$$\boxed{<x, y> = \{\{x\}, \{x, y\}\}}$$

笛卡儿积

$\boxed{<x, y>=\{\{x\}, \{x, y\}\}}$

(1) $<x, y> = <u, v> \Leftrightarrow (x=u)\wedge(y=v)$

(2) $x\neq y \Rightarrow <x, y> \neq <y, x>$

证明 (1) 设$(x=u)\wedge(y=v)$， 显然有$\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}$

于是$<x, y> = <u, v>$

设$<x, y> = <u, v>$，则有 $\{\{x\},\{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}$

考虑 $x=y$ 和 $x\neq y$ 两种情况

① 当$x=y$时，$<x, y>=\{\{x\}\}$，于是$\{x\}=\{u\}=\{u, v\}$，

则 $x=u=v=y$;

② 当 $x\neq y$ 时，显然$\{u\}\neq\{x, y\}$；于是 $\{u\}=\{x\}$ 且 $\{x, y\}=\{u, v\}$

则 $x=u$；显然 $y\neq u$，于是 $y=v$。

两种情况都可得到 $(x=u)\wedge(y=v)$

笛卡儿积

- 由有序的n个元素组成的n元组；
- n元组是用递归方法定义

若$n \in N$且$n>1$，x_1， x_2 ，…， x_n是n个元素，
则n元组$<x_1, \ldots, x_n>$定义为

当$n=2$时，二元组是有序对$<x_1, x_2>$

当$n \neq 2$时，$<x_1, \ldots, x_n> = << x_1, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$

集合

笛卡儿积

在A=B时，把$A \times A$简写为A^2

当$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$时，简写为$A^n$

- 集合A和B的笛卡儿积(又称卡氏积、乘积、直积)$A \times B$定义为

$$A \times B = \{z \mid (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (z = \langle x, y \rangle)\}$$

或 $A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$

已知集合A和B为$A = \{a, b\}$，$B = \{-1, 2\}$，则有

$A \times B = \{\langle a, -1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, -1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$

$B \times A = \{\langle -1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle -1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}$

$A \times A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

- 若$n \in N$且$n > 1$，而$A_1, A_2, \ldots A_n$是n个集合，它们的n阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}$$

优先权

一元运算符(-A，$P(A)$，$\cap A$，$\cup A$)

二元运算符(-，$\cap$，$\cup$，$\oplus$)

集合关系符(=，$\subseteq$，$\subset$，$\in$，$\times$)

一元联结词($\neg$)

二元联结词($\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$)

逻辑关系符($\Leftrightarrow$，$\Rightarrow$)

括号表示优先权方法、从左到右的优先次序.

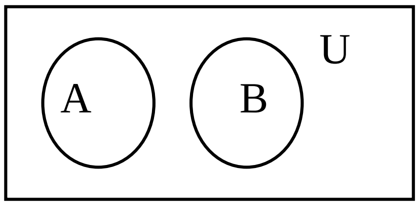
(1)括号内的优先于括号外的

(2)同一层括号内，按上述优先权

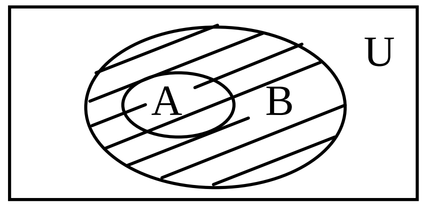
(3)同一层括号内，同一优先级的，按从左到右的优先次序

集合

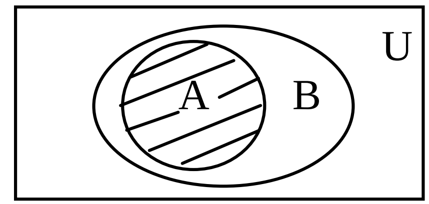
文氏图　　只能用于说明，不能用于证明



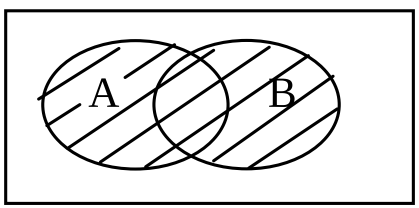
$A \cap B = \varnothing$



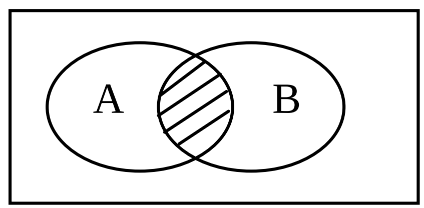
$A \subseteq B, A \cup B = B$



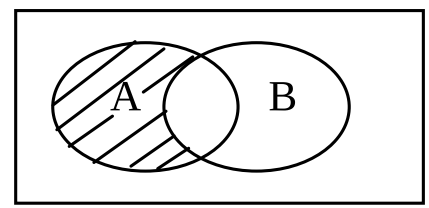
$A \subseteq B, A \cap B = A$



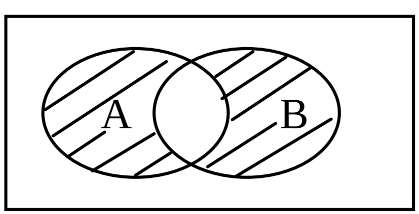
$A \cup B$



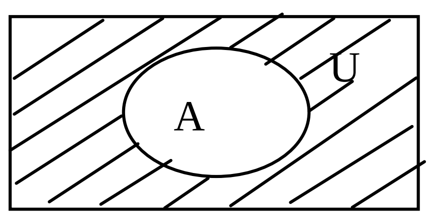
$A \cap B$



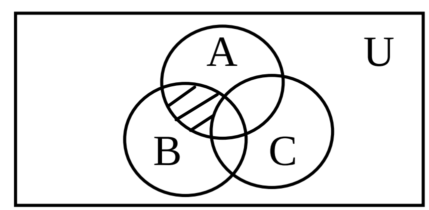
$A - B$



$A \oplus B$



$\bar{A}$



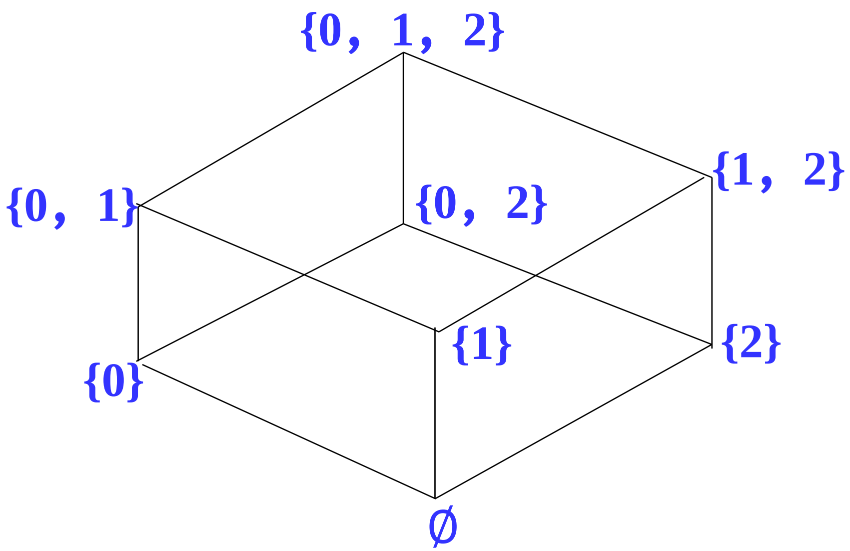
$A \cap B - C$

集合

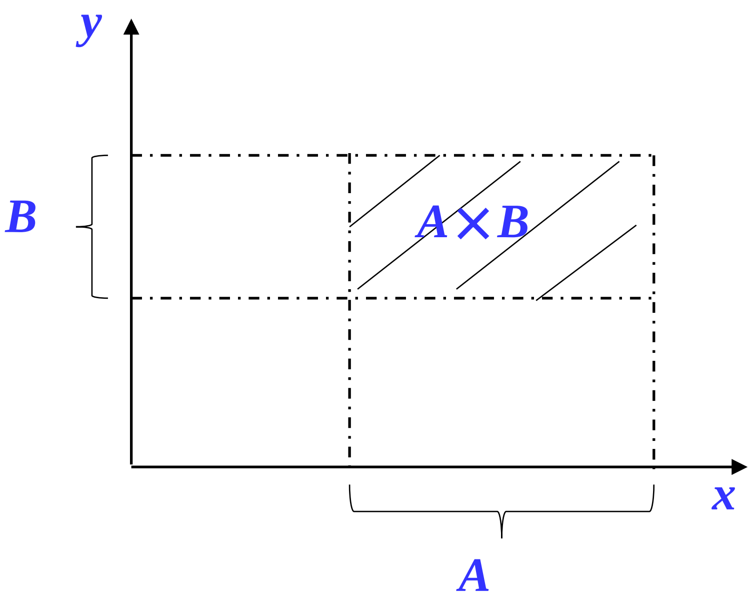
幂集的图示法

- 网络图中的各结点表示幂集的各元素

设A={0，1，2}，则$P(A)$的各元素在图中表示，结点间的连线表示二者之间有包含关系。



笛卡尔积的图示法



集合运算的性质

- **基本运算的性质**　　　集合的三种运算$A\cup B$，$A\cap B$，$-A$

对任意的集合A，B和C，有

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$　$A\cap B=B\cap A$

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（4）幂等律　$A\cup A=A$　$A\cap A=A$

（5）吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$　$A\cap(A\cup B)=A$

基本运算的性质

- 求证 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

对于任意的x可得

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

利用谓词演算的方法

集合运算的性质

(6) 摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$-(B\cup C)=-B\cap -C$

$-(B\cap C)=-B\cup -C$

(7) 同一律 $A\cap E=A$ $A\cup\emptyset=A$

(8) 零律 $A\cup E=E$ $A\cap\emptyset=\emptyset$

(9) 补余律 $A\cup -A=E$ $A\cap -A=\emptyset$

(10) $-\emptyset=E$ $-E=\emptyset$

(11) 双补律 $-(-A)=A$

集合

➢ 差集的性质

对任意的集合A，B和C，有

(1) $A-B=A-(A\cap B)$

$\boxed{(2)\ A-B=A\cap -B}$

(3) $A\cup(B-A)=A\cup B$

(4) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

(4) $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap -C)$

$=(A\cap B)\cap -C$

$=(A\cap B)-C$

(1) 对任意的x

$$x\in A-(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)$$

$$\Leftrightarrow F\vee(x\in A-B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B$$

(2) 对任意的x

$$x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in -B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\cap -B$$

集合

- 对称差的性质 $\boxed{A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{x \mid x\in A \,\overline{\vee}\, x\in B\}}$

对任意的集合A，B和C，有

（1）交换律 $A\oplus B = B\oplus A$

（2）结合律 $(A\oplus B)\oplus C = \mathrm{A}\oplus(B\oplus C)$

（3）分配律 $A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$

（4）同一律 $A\oplus\emptyset = A$

（5）零律 $A\oplus A = \emptyset$

（6） $A\oplus(A\oplus \mathrm{B}) = B$

集合

- **集合间的⊆关系**

集合间的 $\subseteq$ 关系类似于实数间的 $\leq$ 关系，性质如下:

对任意的集合A，B和C，有

$(1) A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

$(2) A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

$(3) (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

$(4) (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

$(5) (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$

$(6)\ C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

基本运算的性质

- 幂集的性质

对任意的集合A和B，有

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

(2) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

(3) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(4) $\boxed{P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)}$

(5) $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$

基本运算的性质

- 对任意的集合A和B，有 $P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\emptyset\}$

证明 对任意的x，若$x\neq\emptyset$，则有

$$x\in P(A-B)\Leftrightarrow x\subseteq A-B$$

$$\Leftrightarrow(\forall y)(y\in x\to y\in A-B)$$

$$\Leftrightarrow(\forall y)(y\in x\to y\in A)\wedge(\forall y)(y\in x\to y\notin B)$$

$$\Rightarrow(\forall y)(y\in x\to y\in A)$$

$$\Leftrightarrow x\subseteq A$$

此外 $x\in P(A-B)\wedge x\neq\emptyset$

$$\Leftrightarrow x\subseteq A-B\wedge(\exists y)(y\in x)$$

$$\Leftrightarrow(\forall y)(y\in x\to(y\in A\wedge y\notin B))\wedge(\exists y)(y\in x)$$

$$\Rightarrow(\exists y)(y\in x\wedge y\notin B)\qquad\text{(用推理规则)}$$

$$\Leftrightarrow x\not\subseteq B$$

于是 $x\in P(A-B)\wedge x\neq\emptyset$

$$\Rightarrow x\subseteq A\wedge x\not\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow x\in P(A)\wedge x\notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow x\in(P(A)-P(B))$$

$$\Rightarrow P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\emptyset\}$$

若$x=\emptyset$,有

$\emptyset\in P(A-B)$且$\emptyset\in(P(A)-P(B))\cup\{\emptyset\}$

传递集合

- 如果集合的集合A的任一元素的元素都是A的元素，称A为传递集合

例：A={∅，{∅}，{∅ ，{∅}}}是(否)传递集合

A的元素的元素有∅和{∅}，都是A的元素。

B={{∅}，{∅ ，{∅}}}

B的元素的元素有∅和{∅}，但是∅不是B的元素

$\boxed{A\text{是传递集合} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)}$

$\boxed{\text{传递集合的元素必是它的子集}}$

集合

传递集合

A是传递集合$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in y\wedge y\in A)\rightarrow x\in A)$

集合的集合A的任一元素的元素都是A的元素

- 对集合的集合A，A是传递集合$\Leftrightarrow A\subseteq P(A)$

证明

设A是传递集合，则对任意的$y\in A$

① 若$y=\emptyset$，则 $y\in P(A)$

② 若$y\neq\emptyset$，对$(\forall x)(x\in y)$有$x\in A$

则有 $y\subseteq A$，于是 $y\in P(A)$

由$y\in A\rightarrow y\in P(A)$，有$A\subseteq P(A)$.

设$A\subseteq P(A)$，则对任意的 x 和 y

有$x\in y\wedge y\in A\Rightarrow x\in y\wedge y\in P(A)$

$\Leftrightarrow x\in y\wedge y\subseteq A\Rightarrow x\in A$

因此，A是传递集合.

集合的集合A的任一元素的元素都是A的元素

$\boxed{A\text{是传递集合} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)}$

传递集合

➢ 对集合的集合A，A是传递集合 $\Leftrightarrow$ $P(A)$是传递集合。

证明 $\boxed{x \in y \wedge y \in P(A) \Rightarrow x \in P(A)}$ $\boxed{x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in A}$

设A是传递集合，对任意的x和y，有

$x \in y \wedge y \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \in y \wedge y \subseteq A \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \subseteq A$ （因为A是传递集合）

$\Leftrightarrow x \in P(A)$

所以$P(A)$是传递集合

设$P(A)$是传递集合．对任意的x和y，有

$x \in y \wedge y \in A \Leftrightarrow x \in y \wedge \{y\} \subseteq A$

$\Leftrightarrow x \in y \wedge y \in \{y\} \wedge \{y\} \in P(A)$

$\Rightarrow x \in y \wedge y \in P(A)$ （$P(A)$是传递集合）

$\Leftrightarrow x \in y \wedge y \subseteq A \Rightarrow x \in A$

所以A是传递集合

集合

广义并和广义交的性质

把A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并

把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交

对集合的集合A和B，有

(1) $A\subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$

(2) $A\subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$，其中$A$和$B$非空

(3) $\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$

(4) $\cap(A\cup B)=(\cap A)\cap(\cap B)$，其中$A$和$B$非空

证明 (3) 对任意的x，可得

$x\in\cup(A\cup B)\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in A\cup B)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge(y\in A\vee y\in B))$

$\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in A)\vee(\exists y)(x\in y\wedge y\in B)$

$\Leftrightarrow x\in\cup A\vee x\in\cup B\Leftrightarrow x\in(\cup A)\cup(\cup B)$

所以$\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$

$\cup A=\{x|(\exists z)(z\in A\wedge x\in z)\}$

广义并和广义交的性质

> 把A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并
>
> 把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交

- $\boxed{\text{对任意的集合}A\text{，有}\cup(P(A))=A}$

证明 对任意的 x，可得

$$
\begin{aligned}
& x\in\cup(P(A)) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists y)(x\in y\wedge y\in P(A)) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists y)(x\in y\wedge y\subseteq A) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A
\end{aligned}
$$

所以$\cup(P(A))=A$

> 广义并是幂集的逆运算

> $P(\cup A)\neq A$
>
> $A\subseteq P(\cup A)$

$A=\{\{a\},\{b\}\}$

当$A=\{a,b\}$有$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，

有$\cup P(A)=\{a,b\}$

集合

广义并和广义交的性质

$\cup A = \{x | (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

- 若集合A是传递集合，则$\cup A$是传递集合。

证明 对任意的 x 和 y，有

$$x \in y \wedge y \in \cup A$$

$$\Leftrightarrow x \in y \wedge (\exists z)(y \in z \wedge z \in A)$$

$$\Rightarrow x \in y \wedge y \in A \quad (A\text{是传递集合})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup A$$

所以$\cup A$是传递集合

广义并和广义交的性质

- 若集合A的元素都是传递集合，则$\cup A$是传递集合

证明 对任意的x和y，有

$$x \in y \wedge y \in \cup A$$

$$\Leftrightarrow x \in y \wedge (\exists z)(y \in z \wedge z \in A)$$

$$\Rightarrow (\exists z)(x \in z \wedge z \in A) \quad (z\text{是传递集合})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup A$$

所以$\cup A$是传递集合

例：$A=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\cap A=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- 若非空集合A是传递集合，则$\cap A$是传递集合，且$\cap A=\emptyset$

传递集合

- 若非空集合A的元素都是传递集合，则$\cap A$是传递集合.

$$x \in y \wedge y \in \cap A$$
$$\Leftrightarrow x \in y \wedge (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z)$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)(x \in y \wedge (z \notin A \vee y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \wedge z \notin A) \vee (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)((x \in y \vee (x \in y \wedge y \in z)) \wedge \left(z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z)\right))$$
$$\Rightarrow (\forall z)(z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow (x \in y \wedge y \in z))$$
$$\Rightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)) \qquad z\text{是传递集合}$$
$$\Leftrightarrow x \in \cap A$$

笛卡儿积的性质

- 笛卡儿积具有下列基本性质

(1) $A\times\emptyset=\emptyset\times B=\emptyset$

(2) 若$A\neq\emptyset$，$B\neq\emptyset$且$A\neq B$，则$A\times B\neq B\times A$

(3) $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

笛卡儿积不满足交换律和结合律

笛卡儿积的性质

$PP(A)$表$P(P(A))$

- 若A是集合，$x \in A, y \in A$，则$<x, y> \in PP(A)$

证明： $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$且

$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$

由以上两式可得

$$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in PP(A)$$

笛卡儿积的性质

- 对任意的集合A，B和C，有

  (1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

  (2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

  (3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

  (4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

证明（1） 对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup A\times C$$

笛卡儿积的性质

- 对任意的集合A，B和C，若 $C\neq\emptyset$，则

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$$

证明：设$A\subseteq B$，若$y\in C$, 则 $\langle x,y\rangle\in A\times C\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Rightarrow x\in B\wedge y\in C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C$ 所以$A\times C\subseteq B\times C$

设$A\times C\subseteq B\times C$，$y\in C$, 则

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge y\in C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C$$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C$

$\Rightarrow x\in B$ 所以$A\subseteq B$

总之$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)$

笛卡儿积的性质

- 对任意的非空集合A，B，C和D

$$(A\times B\subseteq C\times D)\Leftrightarrow(A\subseteq C\wedge B\subseteq D)$$

证明：设$A\times B\subseteq C\times D$，对任意的$x\in A$，因存在$y\in B$，则

$$x\in A\wedge y\in B$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B$$
$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D$$
$$\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$$
$$\Rightarrow x\in C$$

所以$A\subseteq C$　类似有$B\subseteq D$

设$A\subseteq C\wedge B\subseteq D$，对任意的$x$，$y$有

$$\langle x,y\rangle\in A\times B$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$$
$$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D$$

所以$A\times B\subseteq C\times D$

有限集合的基数

- 如果存在$n \in N$，使集合A与集合$\{x| x \in N \wedge x<n\}=\{0，1，2，…，n\text{-}1\}$的元素个数相同，则称集合$A$的**基数**是$n$；
  - ✓ 记作$\#(A)=n$或$|A|=n$或$\text{card}(A)=n$；
  - ✓ 空集$\emptyset$的基数是0。

- 如果存在$n \in N$，使n是集合A的基数，则A是**有限集合**；
  - ✓ 如果不存在这样的n，则A是**无限集合**。

集合

幂集和笛卡儿积的基数

➢ 对有限集合A，

$$\boxed{|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n}$$

➢ 对有限集合A和B，

$$\boxed{|A \times B| = |A| \times |B|}$$

基本运算的基数

➢ 对有限集合A_1和A_2，有

$(1)|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$

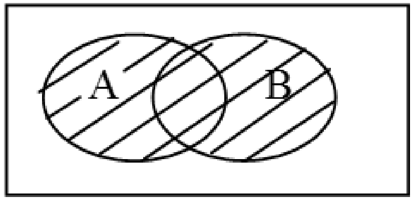
$(2)|A_1 \cap A_2| \leq min(|A_1|, |A_2|)$

$(3)|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$

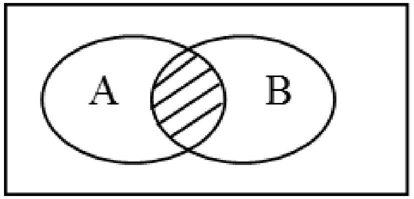
$(4)|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$

集合

基本运算的基数



$A \cup B$



$A \cap B$

- 排斥原理

对有限集合A_1和A_2，有

$$\boxed{|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|}$$

证明：① 若A_1与A_2不相交，显然成立，即 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

② 若A_1与A_2相交，则$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$，且有

$$|A_1| = |A_1 \cap -A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_2| = |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap -A_2| + |-A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$\Rightarrow \quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

基本运算的基数

- **排斥原理推广1：对有限集合A_1，A_2和 A_3，有**

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

- **排斥原理推广2：若$n \in N$且$n>1$, A_1, A_2, ..., A_n是有限集合，则**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

基本运算的基数

30位同学中，15加体育组，8人参加音乐组，6人参加美术组，其中3人同时参加三个组．问至少有多少人没有参加任何小组?

设A_1、 A_2、 A_3分别表示体育组、音乐组、美术组成员的集合，则有 $|A_1|$=15，$|A_2|$=8，$|A_3|$=6， $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ =3.

因此 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15+8+6 - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| +3$

$= 32- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$

而 $|A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|=3$

$|A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|=3$

$|A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|=3$

所以$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leq$ 32-3-3-3=23

至多23人参加小组，所以至少7人没有参加任何小组.

集合

集合论公理系统

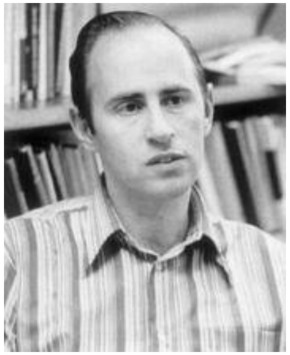
- 集合论公理系统是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理；
- 集合论公理系统可推出一阶谓词的所有定理，也可推出集合论的概念和定理，防止了集合论中的悖论；
- 集合论公理系统的主要目的是构造出所有合法的集合，即判定集合的存在性、合法性；
- 集合论公理系统的一个基本思想是认为“任一集合的所有元素都是集合”，集合论的研究对象只是集合；除集合外的其他对象(如有序对、数字、字母)都要用集合定义；对这些对象的研究也就转化为对集合的研究。

数理逻辑：绪论

所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发

公理集合论

- ✓ 研究公理集合论是整个数学的基础
- ✓ Cantor的朴素集合论有缺陷
  - ➢ Burali-Forti悖论，罗素悖论，Richard悖论，…
- ✓ Ernst Zermelo：第一个公理化集合论(1908)
  - ➢ 经Fraenkel (弗兰克尔，1922)改进成为经典的ZF集合论
  - ➢ 避免了罗素悖论
- ✓ Gödel和Paul Cohen(保罗·寇恩，1963)在CH方面的工作
  - ➢ CH(连续统假设)在ZF系统中不可判定
  - ➢ Cohen的新方法(力迫法)让人们证明了许多不可判定的问题；数学绝不是“非真即假”那么单纯!



集合

集合论公理

➢ ZF公理系统(10条)

定义了集合论中第一个集合，空集∅

由外延公理知，空集是唯一的.

① 外延公理 两个集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素

$$(\forall x)(\forall y)(x=y\leftrightarrow(\forall z)(z\in x\leftrightarrow z\in y))$$

② 空集合存在公理 存在不含任何元素的集合(空集∅)

$(\exists x)(\forall y)(y\notin x)$ x是空集∅

③ 无序对集合存在公理 对任意的集合x和y，存在一个集合z，它的元素恰好为x和y

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u\in z\leftrightarrow((u=x)\vee(u=y)))$$

在$x=y$时，构造出恰好有一个元素的集合，如$\{\varnothing\}$和$\{\{\varnothing\}\}$;

在$x\neq y$时，构造出两个元素的集合，如$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$和$\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

集合论公理

- ZF公理系统

由无序对集合存在公理和并集合公理，解决两个集合并集的存在性(并集是集合)。

④ 并集合公理 对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素恰好为x的元素的元素

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\leftrightarrow(\exists u)(z\in u\wedge u\in x))$$

由集合$\{\{\varnothing，\{\varnothing\}\}，\{\varnothing，\{\{\varnothing\}\}\}\}$构造集合$\{\varnothing，\{\varnothing\}，\{\{\varnothing\}\}\}$，解决了广义并的存在性(集合的广义并是集合).

⑤ 子集公理模式(分离公理模式) 对于任意的谓词公式$P(z)$，对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素z恰好既是x的元素又使$P(z)$为真

子集公理模式不是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，因此称为公理模式。

集合论公理

公理指出幂集的存在性(集合的幂集是集合)

- ZF公理系统

⑥ 幂集合公理 对任意的集合x，存在一个集合y，它的元素恰好是x的子集

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\leftrightarrow(\forall u)(u\in z\rightarrow u\in x))$$

排除奇异集合，防止发生悖论

⑦ 正则公理 对任意的非空集合x，存在x的—个元素，它和x不相交

$$(\forall x)(x\neq\emptyset\rightarrow(\exists y)(y\in x\wedge(x\cap y=\emptyset)))$$

⑧ 无穷公理 存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\emptyset\in x\wedge(\forall y)(y\in x\rightarrow(y\cup\{y\})\in x))$$

式中x是自然数集合N，构造了第一个无限集合

集合论公理

➢ **ZF公理系统**

符号$(!\exists y)$表示存在唯一的一个y

⑨ **替换公理模式** 对于任意的谓词公式$P(x, y)$，如果对任意的x存在唯一的y使得$P(x,y)$为真，那么对所有的集合t就存在一个集合s，使s中的元素y恰好是t中元素x所对应的那些y.

$$(\forall x)(!\exists y)P(x, y) \to (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \land P(z, u)))$$

⑩ **选择公理** 对任意的关系R，存在一个函数F，F是R的子集，而且F和R的定义域相等

$$(\forall \text{关系} R)(\exists \text{函数} F)(F \subseteq R \land \mathrm{dom}(R)=\mathrm{dom}(F))$$

集合

集合论公理

- ZF公理系统

由已知集合构造新集合的公理

子集公理模式是替换公理模式的特例

- 外延公理和正则公理是描述集合性质的公理，其他公理都是判定集合存在的公理，也就是构造集合的公理。
- 空集合存在公理和无穷公理不以其他集合的存在为前提，是直接构造基本的集合，称为无条件的存在公理；
- 无序对集合存在公理，并集合公理、幂集合公理、子集公理模式、替换公理模式和选择公理是有条件的存在公理；
- 前5条公理构造的集合是唯一的，而选择公理没有给出构造新集合的方法，它只判定了新集合的存在性.
- 无序对集合存在公理和子集公理模式可由其它公理推出。

空集公理，幂集公理，替换公理模式

集合

子集公理模式

对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$p(z)$为真

- 子集公理模式：$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y\leftrightarrow(z\in x\wedge p(z)))$

应用：已知若干满足条件$p(z)$的元素，判定这些元素能否组成一个集合.

方法：① 只要找到一个集合A，使这些满足条件$p(z)$的元素都有$z\in A$；

② 由A和$p(x)$用分离公理得到集合$\{x|x\in A\wedge p(x)\}$就是那些元素组成的集合.

实例： 交集、差集、广义交和笛卡儿积的存在性

子集公理模式

- 对任意的集合A和B，笛卡儿积$A\times B$是集合.

证明：对任意的<x，y>，有

$$x\in A\wedge y\in B$$

$$\Longrightarrow x\in A\cup B\wedge y\in A\cup B$$

$$\Longrightarrow \langle x,y\rangle\in PP(A\cup B)$$

显然$PP(A\cup B)$是集合，选取公式$p(z)$为

$$z=\langle x,y\rangle\wedge x\in A\wedge y\in B$$

可以构造它的子集

$$\{z|z\in PP(A\cup B)\wedge z=\langle x,y\rangle\wedge x\in A\wedge y\in B\}$$

此即$A\times B$，故$A\times B$是集合

集合

子集公理模式

为什么以前规定$\cap\emptyset$不存在?

➢ 不存在集合A, 使任一集合都是A的元素

证明　假设存在集合A，任一集合是A的元素；选$p(x)$为$x \notin x$，依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{x | x \in A \wedge x \notin x\}$$

即$x \in A_0 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x$

取$x = A_0$，则有

$$A_0 \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0$$

如果$A_0 \in A$就有$A_0 \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \notin A_0$

是不可能的，所以$A_0 \notin A$

与假设矛盾，定理得证。

集合

正则公理

- 非空集合的极小元

对任意的集合A和B，当有$A\in B$且$A\cap B=\emptyset$，称A为B的一个极小元.

基础公理
限制公理

例：集合$B=\{\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$，则$A_1=\{\emptyset\}$是$B$的极小元，$A_2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$不是$B$的极小元

- 正则公理：任一非空集合都有极小元.

$$(\forall x)(x\neq\emptyset\rightarrow(\exists y)(y\in x\wedge x\cap y=\emptyset))$$

$\Rightarrow$ 对任意的集合A，$A\notin A$.

对任何非空的传递集合A，有$\emptyset\in A$.

集合

奇异集合

- 如果集合A中有集合的序列$A_0 \in A$ ，$A_1 \in A$ ，…，$A_n \in A$，…，使得…，$A_{n+1} \in A_n$ ，$A_n \in A_{n-1}$ ，…，$A_1 \in A_0$，称A为奇异集合

- 奇异集合不满足正则公理

- 若非空集合A不是奇异集合，则A满足正则公理.

若存在奇异集合，则不满足正则公理；
若存在正则公理，则不存在奇异集合.

- 正则公理是限制性的，它排除了奇异集合的存在

无穷公理和自然数集合

- 对任意的集合A，可以定义集合$A^+=A\cup\{A\}$，把A^+称为A的后继，A称为A^+的前驱.
- 集合$0=\emptyset$是一个自然数，若集合n是一个自然数，则集合$n+1=n^+$也是一个自然数.

$$0=\emptyset$$
$$1=0^+=0\cup\{0\}=\{0\}$$
$$2=1^+=1\cup\{1\}=\{0,1\}$$
$$3=2^+=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}$$
$$\cdots$$
$$n+1=n^+=\{0,1,\ldots,n\}$$

0没有元素，1有一个元素，2有两个元素，这样定义自然数是合理的，容易定义自然数间的大小关系。

集合

无穷公理和自然数集合

- 对任意的自然数m和n

$$m<n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n>m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

- 无穷公理是

$$(\exists N)(\varnothing \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

无穷公理给出了自然数集合N的存在性.

式中的N就是自然数集合，依据外延公理，自然数集合是唯一的

集合

无穷公理和自然数集合

- 自然数的三岐性

对集合A，如果对任意的集合$A_1 \in A$和$A_2 \in A$，使

$$A_1 \in A_2, A_1 = A_2 \text{和} A_2 \in A_1$$

三式中恰好有一个成立，称集合A有三岐性

例：集合3={0，1，2}；因为0∈1，0∈2，1∈2，所以3有三岐性，

- 集合N有三岐性；每个自然数都有三岐性；对任意的自然数m和n，有

$$m<n \vee m=n \vee m>n$$