第二章：道路与回路

哈密顿道路与回路

图论：基本概念回顾

- 图论中的图是互连结点的集合，用来描述某些事物之间的某种特定关系，结点代表事物，连接两结点的边表示相应两个事物间具有的某种关系。
- 图 G 用一个二元组表示：$G=(V,E)$
- 无限图：结点集或边集是无穷集合；有限图：结点集和边集均是有限集合。
- 无向图(undirected graph)：所有的边是无向边，无向边 e_k 可记为无序的结点对，$e_k=(v_i,v_j)$ 结点 v_i, v_j 称为边 e_k 的端点。
- 有向图(directed graph)：所有的边是有向边，有向边 e_k 可记为有序的结点对，$e_k=(v_i,v_j)$ 结点 v_i 为边 e_k 的始点，v_j 称为边 e_k 的终点，结点 v_i 为 v_j 的直接前趋，v_j 为 v_i 的直接后继。
- 多重图(multigraph)：有重边的图，即两结点间的多条边。
- 自环(loop)：两结点重合的边，即 $e_k=(v_i,v_i)$
- 简单图(simple graph)：无重边无自环的无向图
- 完全图(complete graph)：任意两结点都有边的简单图，记作 K_n
- 结点的度定义：与结点 v 关联的边数，作 $d(v)$
- 图的子图：如果 $V'=V$，则称 G' 是 G 的支撑(spanning)子图或生成子图。
- 若 G' 是 G 的导出(induced)子图，即 E' 包含了 G 在结点子集 V' 之间的所有边。

图论：道路与回路 欧拉道路与回路

定义 1：有向道路：有向图 G 中边序列 $P=(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{iq})$,其中 $e_{ik} = (v_l, v_j)$ 满足：v_l 是 $e_{i(k-1)}$ 的终点，v_j 是 $e_{i(k+1)}$ 的始点, 称边序列 P 是图 G 中的一条有向道路。
有向回路： e_{iq} 的终点也是 e_{i1} 的始点, 则称边序列 P 是图 G 中的一条有向回路。

定义 2：简单有向道路/回路：P 中边不重复出现。 初级有向道路/回路：P 中结点不重复出现。
初级有向道路/回路 一定是 简单有向道路/回路。

定义 3：道路/链：无向图 G 中 点边交替序列，$P = (v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{q-1}}, v_{i_q})$。
回路/圈：如果 $v_{i_q} = v_{i_1}$, 则称序列 P 是 G 中的一个圈或回路 (circuit)。

定义 4：简单道路/回路：P 中边不重复出现。初级道路/回路：P 中结点不重复出现。

定义 5：极大路径：P 为一条初级道路，其始点与终点都不与 P 外的顶点相邻。

定义 6：若无向图 G 的任意两个结点之间都存在道路, 称 G 是连通的。

定义 7：若 $G=(V, E)$ 为无向图，如果 $V(G)$ 可划分成子集 V_1 和 V_2，使得 G 中每条边的两个结点一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 是二分图。

定义 8：若 $G=(V, E)$ 为简单二分图，如果 V_1 中每个结点均与 V_2 中所有结点相邻，则称 G 是完全二分图，记为$K_{s,t}$，其中 $s=|V_1|$, $t=|V_2|$。

定义 9：欧拉回路：连通图 G 中一条经过所有边的简单回路。欧拉图：具有欧拉回路的图。
欧拉道路：连通图 G 中一条经过所有边的简单道路。欧拉半图：具有欧拉道路但无欧拉回路的图。

定理 1：无向连通图 G 中存在欧拉回路的充要条件是 G 中各结点的度都是偶数。

定理 2：无向连通图 G 中存在欧拉道路的充要条件是 G 中只有两个度为奇数的结点。

定理 3：有向连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是图中各点的入度和出度相等。

定理 4：有向连通图 G 是欧拉半图的充分必要条件是图中至多有两个顶点，其中一个顶点的入度比出度多1，另一个顶点的出度比入度多1，其它顶点入度和出度相等。

定理 1：若简单图 G ($n\geq 3$) 的任意两结点 v_i 与 v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$，则简单图 G 中存在 H 道路。

推论1：若简单图 G ($n\geq 3$) 的任意两结点 v_i 与 v_j 都满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则图 G 中存在 H 回路。

推论2：若简单图 G ($n\geq 3$) 的任一结点的度大于等于 $n/2$, 则 G 中存在 H 回路。

引理1：若简单图 G ($n\geq 3$) 有不相邻结点 v_i 与 v_j 满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则 G 存在 H 回路当且仅当 $G+(v_i, v_j)$ 有 H 回路。

闭合图：若 v_i 和 v_j 是简单图 G 的不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则令 $G' = G+(v_i, v_j)$，对 G' 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 G 的闭合图，记作 $C(G)$。

引理 2：简单图 G 的闭合图是唯一的。

引理3：若简单图有 H 回路当且仅当 $C(G)$ 有 H 回路。

推论3：若 $C(G)=K_n$，则 G 有 H 回路。

定理2：设 G 是哈密顿图，则对任意的非空点集 $V_1\subset V(G)$，图 $G-V_1$ 中的连通支数不大于 $|V_1|$。

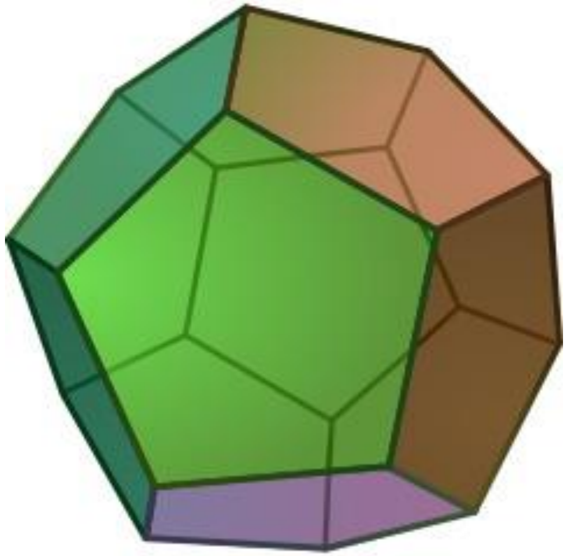
定理2推论：奇数个结点构成的二分图不是哈密顿图。

推论4. 设 G 是哈密顿半图，则对任意的非空点集 $V_1\subset V(G)$，图 $G-V_1$ 中的连通支数不大于 $|V_1|+1$。

哈密顿道路与回路

✓ 周游世界游戏

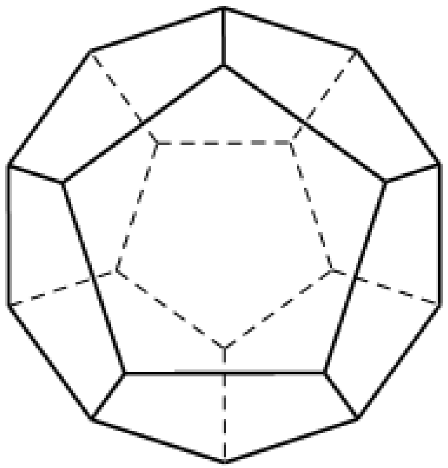
1857年，哈密顿发明了一个注册名为“周游世界”的玩具，在正 12 面体的 20 个顶点上分别标注北京、东京、柏林、巴黎、纽约等 20 个城市，要求从以上 20 个布遍世界的大都市中某一个城市出发，沿正 12 面体的棱行进，每城只到一次，再返回出发地。

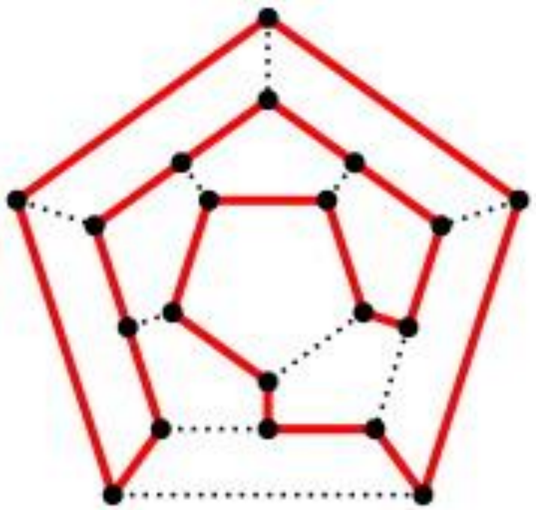


哈密顿道路与回路

✓ 周游世界游戏

正 12 面体的 20 个顶点比作 20 个城市，30 条棱表示这些城市间的交通线路。周游世界游戏变成：从这 20 个点中某点出发，沿边行进，经过每个点 1 次且只有 1 次，最后回到出发点（**一条不重复地遍历各顶点的回路**）。





图中点的遍历问题

图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

定义：

- ✓ **哈密顿回路（道路）：无向图 G 中的一条经过全部结点的初级回路（道路）**
- ✓ **哈密顿回路（道路）：简称为 H 回路（道路）**
- ✓ **哈密顿图：具有 H 回路的图**
- ✓ **哈密顿半图：具有 H 道路但无 H 回路的图**

哈密顿道路与回路

✓ 关于 H 回路问题

- H 回路是初级回路
- 要求 $V(G) = n \geq 3$
- 只需考虑简单图, 因为重边和自环不起作用
- 完全图 $K_n(n \geq 3)$ 中存在 H 回路

✓ H 回路的判定比较困难, 没有发现充分必要的条件, 只有若干充分条件。

哈密顿道路与回路

定理 1：若简单图 G 的任意两结点 v_i 与 v_j 之间恒有 $\boxed{d(v_i)+d(v_j)\ge n-1}$

则简单图 G 中存在 H 道路。

证明：(1) 首先证明 G 是连通图。

假设 G 非连通，不失一般性，假设 G 有 2 个连通支，

记为 G_1 和 G_2，且 $|V(G_1)|=n_1$，$|V(G_2)|=n_2$，各取 v_i 和 v_j，则有

$$\left.\begin{aligned} d(v_i) &\le n_1-1 \\ d(v_j) &\le n_2-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(v_i)+d(v_j)\le n-2 < n-1$$

与 $d(v_i)+d(v_j)\ge n-1$ 矛盾

所以可知图 G 是连通图

哈密顿道路与回路

(2) 证明 G 中存在 H 道路（寻找 H 道路）

即始点 v_1 和终点 v_l 均不与 P 外的结点相邻

设 $P = v_1 v_2 \cdots v_l$ 是 G 中一条极大路径，$l \le n$

(a) 若 $l = n$，则 P 是为 G 中的 H 道路

(b) 若 $l < n$，则 G 中存在 P 外的结点

需证则 G 中存在过 P 上所有点的初级回路

【1】 若 v_1 与 v_l 相邻，即 $P \cup (v_1, v_l)$ 为满足要求的初级回路

【2】 若 v_1 与 v_l 不相邻，

设 v_1 与 P 上 k 个结点 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻，

若 $k = 1$，则 $d(v_1) = 1$，$d(v_l) \le l - 2$，

$\Rightarrow d(v_1) + d(v_l) \le l - 1 < n - 1$，矛盾

$\Rightarrow$ $k \ge 2$

哈密顿道路与回路

(b) 若 $l < n$，则 G 中存在 P 外的结点

需证则 G 中存在过 P 上所有点的初级回路

【2】若 v_1 与 v_l 不相邻，

设 v_1 与 P 上的 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻 ⟶ $k \geq 2$

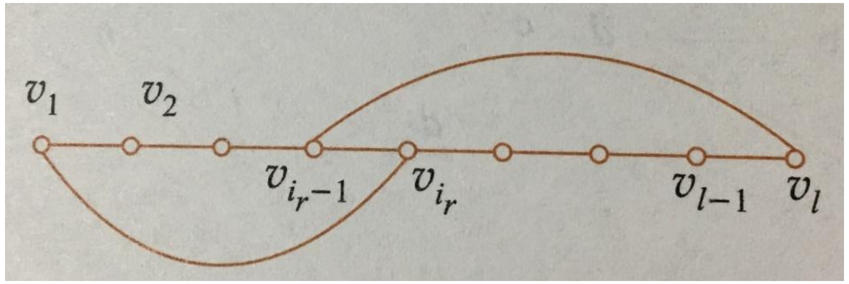
则 v_l 至少与 $v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻的结点 $\boxed{v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \cdots, v_{i_k-1}}$ 之一相邻

否则，由 $d(v_1) = k$，$d(v_l) \leq l - 2 - (k-1)$，

⟶ $d(v_1) + d(v_l) \leq l - 1 < n - 1$，矛盾

设 v_l 与 v_{i_r-1} 相邻 $(2 \leq r \leq k)$

⟶ 初级回路 $C = v_1 v_2 \cdots v_{i_r-1} v_l v_{l-1} \cdots v_{i_r} v_1$



辅助结论

图中无初级回路，则 v_l 与 v_1 邻点的邻点不相邻

↓

$d(v_1) + d(v_l) < n - 1$

图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

(b) 若 $l < n$，则 G 中存在 P 外的结点
需证则 G 中存在过 P 上所有点的初级回路

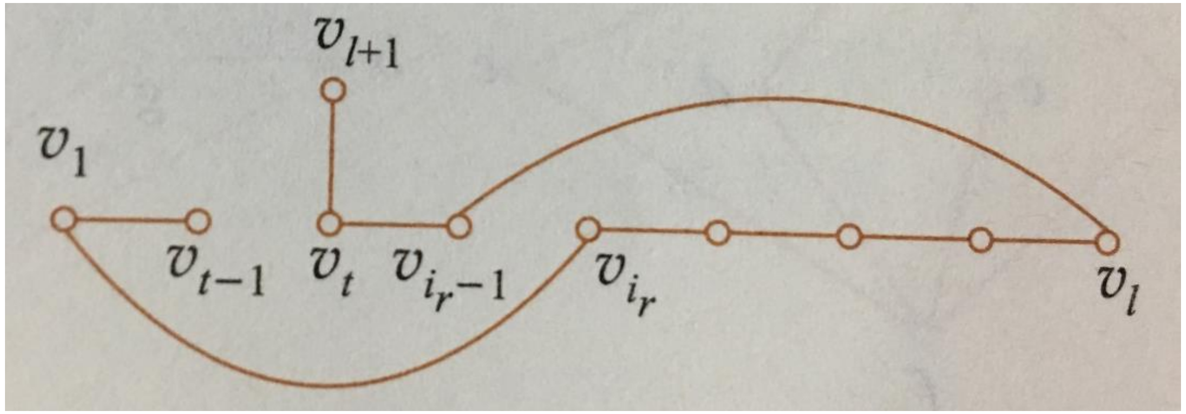
(c) 证明存在比 P 更长的路径

由 G 的连通性知，存在 $v_{l+1} \in V(G) - V(P)$ 与 P 上的某结点 v_t 相邻

当 $t < i_r - 1$ 时，删除边 (v_{t-1}, v_t)

➡ 路径 $P' = v_{t-1} \cdots v_1 v_{i_r} \cdots v_l v_{i_r-1} \cdots v_t \ v_{l+1}$ ➡ 比P长度大1

当$t \geq i_r - 1$时，类似构造。



重复上面步骤（2），直至 $l+1=n$，可得出图G的 H 道路。

哈密顿道路与回路

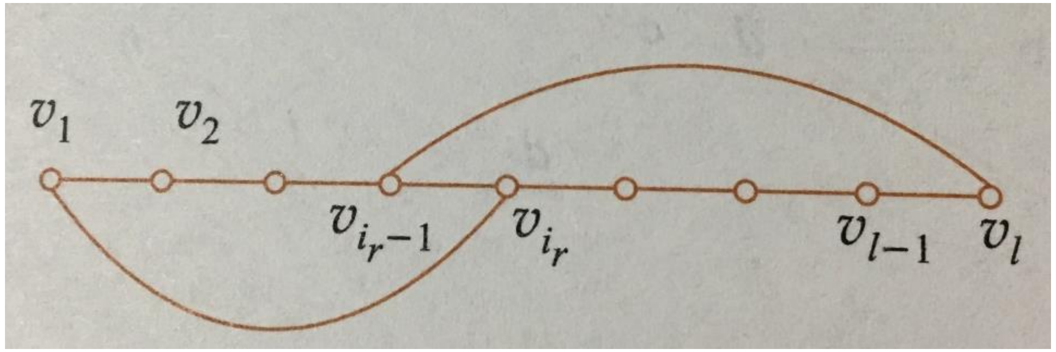
推论1： 若简单图 G $(n\geq 3)$ 的任意两结点 v_i 与 v_j 都满足 $\boxed{d(v_i)+d(v_j)\geq n}$
则图 G 中存在 H 回路。

证明：由定理 1 可知，图 G 中存在哈密顿道路，记为 $P=v_1v_2\cdots v_n$。

（1）若 v_1, v_n 相邻，即 $(v_1, v_n)\in E(G)$，由则 $P\cup(v_1, v_n)$ 定为 H 回路；

（2）若 v_1, v_n 不相邻，按照定理 1 的证明方法，可得存在过 P 上各结点的初级回路，即 H 回路。

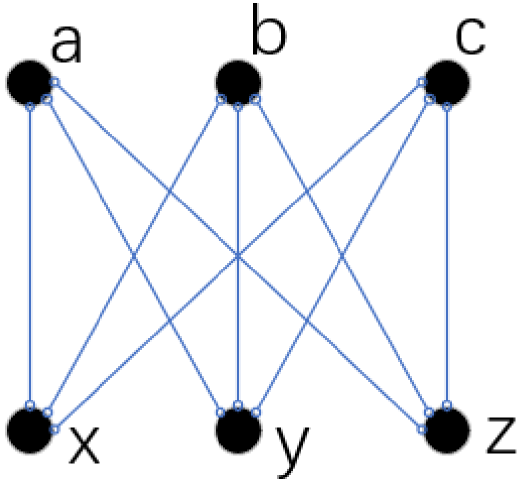
回路 $C=v_1v_2\cdots v_{i_r-1}v_lv_{l-1}\cdots v_{i_r}v_1$



哈密顿道路与回路

推论2：若简单图 G ($n \geq 3$) 的任一结点的度大于等于 $n/2$, 则 G 中存在 H 回路。

证明：推论 1 的直接结果。



判断 H 回路?

哈密顿道路与回路

引理1： 若简单图 G ($n\ge 3$) 有不相邻结点 v_i 与 v_j 满足 $\boxed{d(v_i)+d(v_j)\ge n}$

则 G 存在 H 回路当且仅当 $G+(v_i, v_j)$ 有 H 回路。

证明： （必要性） G 存在 H 回路则 $G+(v_i, v_j)$ 存在 H 回路，显然成立。

（充分性）证明当 $G+(v_i, v_j)$ 有 H 回路时， G 存在 H 回路。

反证法： G 无 H 回路 ➡ $G+(v_i, v_j)$ 的 H 回路必经过边 (v_i, v_j)

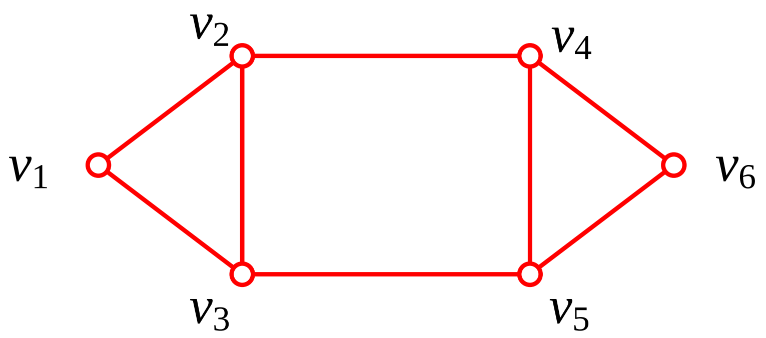
删除 (v_i, v_j) ➡ G 中存在以 v_i, v_j 为结点的 H 道路（极大路径）

无初级回路 ➡ $d(v_i)+d(v_j)\le n-1<n$（第12页辅助结论）

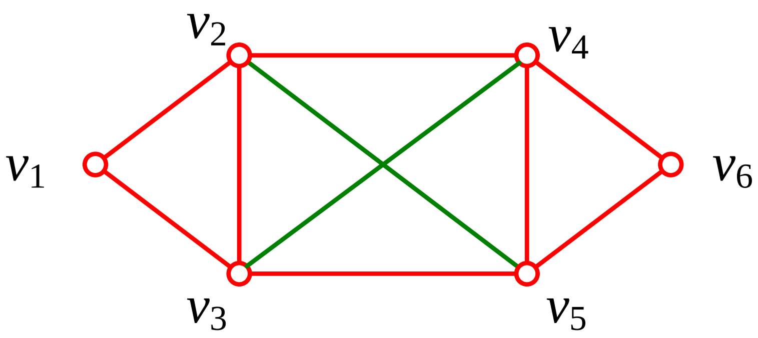
矛盾，得证。

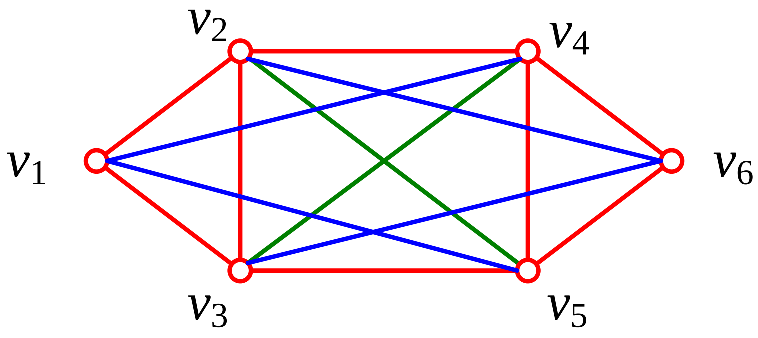
哈密顿道路与回路

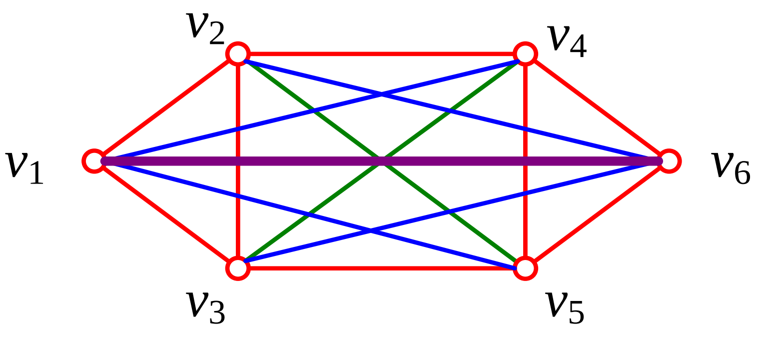
闭合图：若 v_i 和 v_j 是简单图 G 的不相邻结点，且满足 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$，则令 $G' = G+(v_i, v_j)$，对 G' 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 G 的**闭合图**，记作 $C(G)$。



画出左图的闭合图



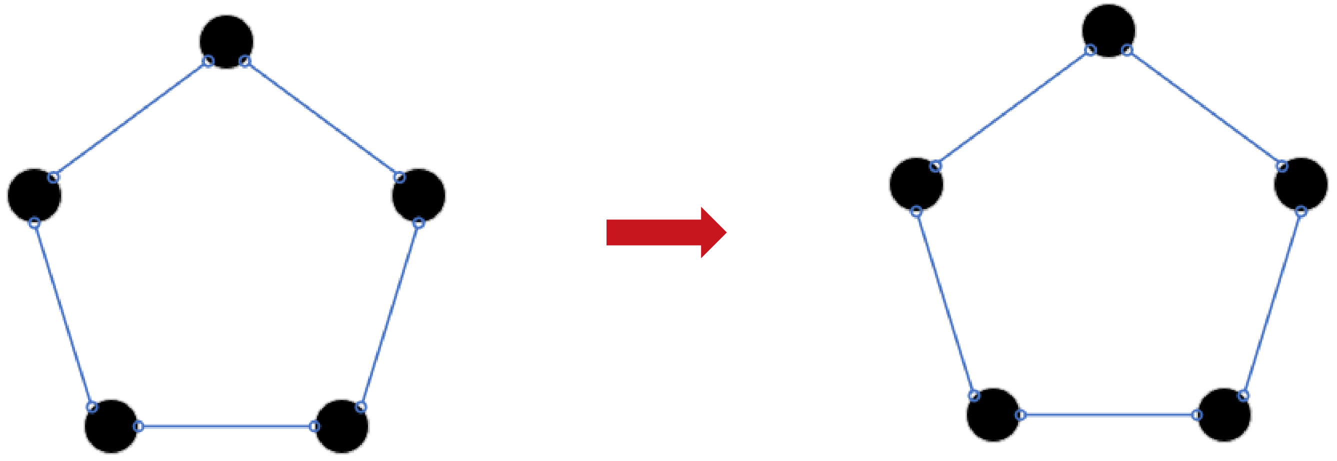


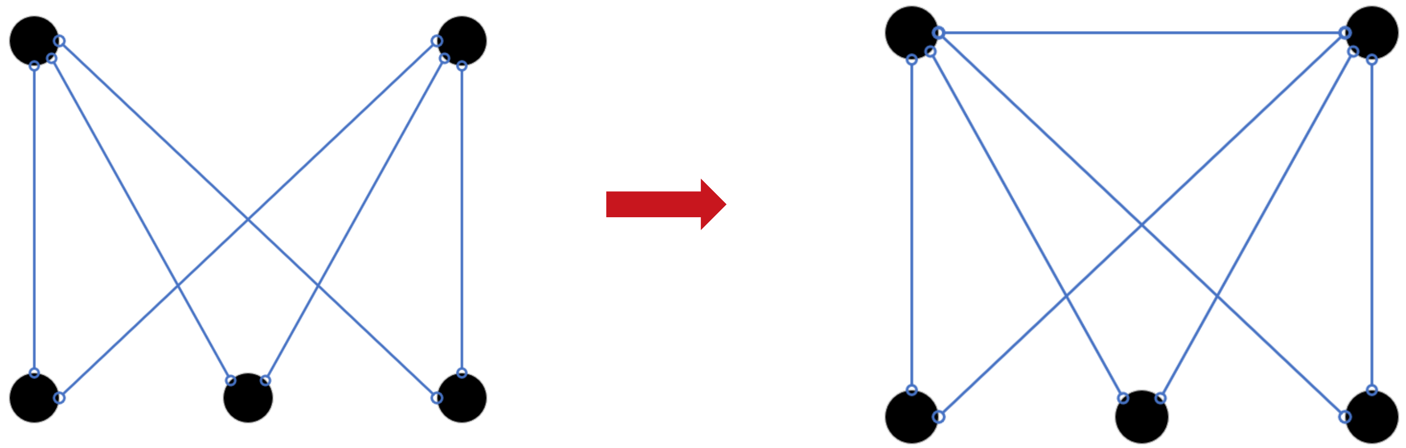


图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

画出右图的闭合图





哈密顿道路与回路

引理 2：简单图 G 的闭合图是唯一的。

引理3：若简单图 G有 H 回路当且仅当 $C(G)$ 有 H 回路。

证明引理3?

证明：设 $C(G)=G\cup L_1$，$L_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_l\}$

G 有 H 回路 $\Longleftrightarrow$ $G+e_1$ 有 H 回路

$\Longleftrightarrow$ $G\cup\{e_1,e_2\}$ 有 H 回路

$\vdots$

$\Longleftrightarrow$ $G\cup L_1$有 H 回路

$C(G)$ 唯一，得证。

推论3：若 $C(G)=K_n$，则 G 有 H 回路。

哈密顿道路与回路

定理2. 设 G 是哈密顿图，则对任意的非空 $V_1 \subset V(G)$，

图 $G\text{-}V_1$ 中的连通支数不大于 $|V_1|$。

证明：设 C 为 G 的任意一条哈密顿回路。

若 V_1 中结点在 C 中互不相邻，$C\text{-}V_1$的连通支达到最大 $|V_1|$；

若 V_1 中结点在 C 中有相邻，$C\text{-}V_1$的连通支小于 $|V_1|$；

所以，$C\text{-}V_1$ 的连通支不大于 $|V_1|$ 。

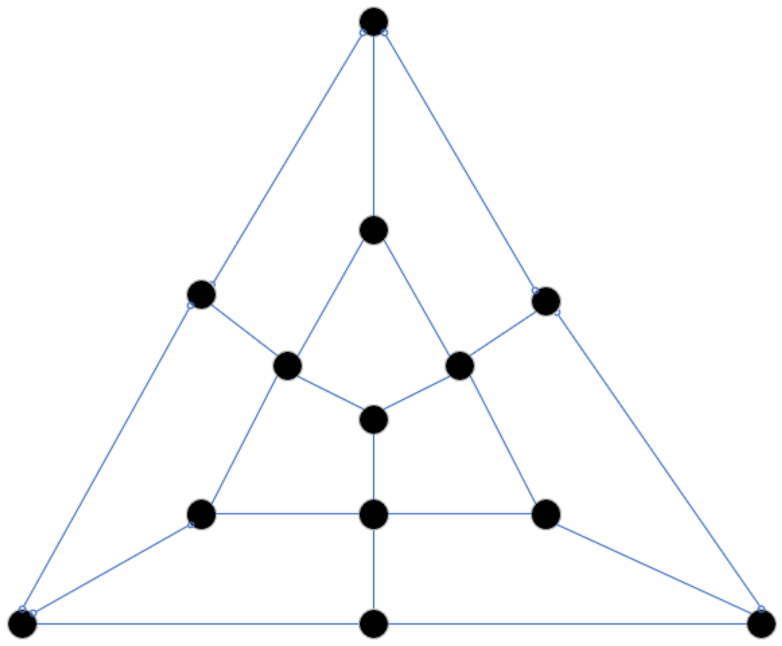
又因为 C 的是 G 的支撑子图，

则 $G\text{-}V_1$ 的连通支小于等于 $C\text{-}V_1$ 的连通支数。

哈密顿道路与回路

定理2推论： 奇数个结点构成的二分图不是哈密顿图。

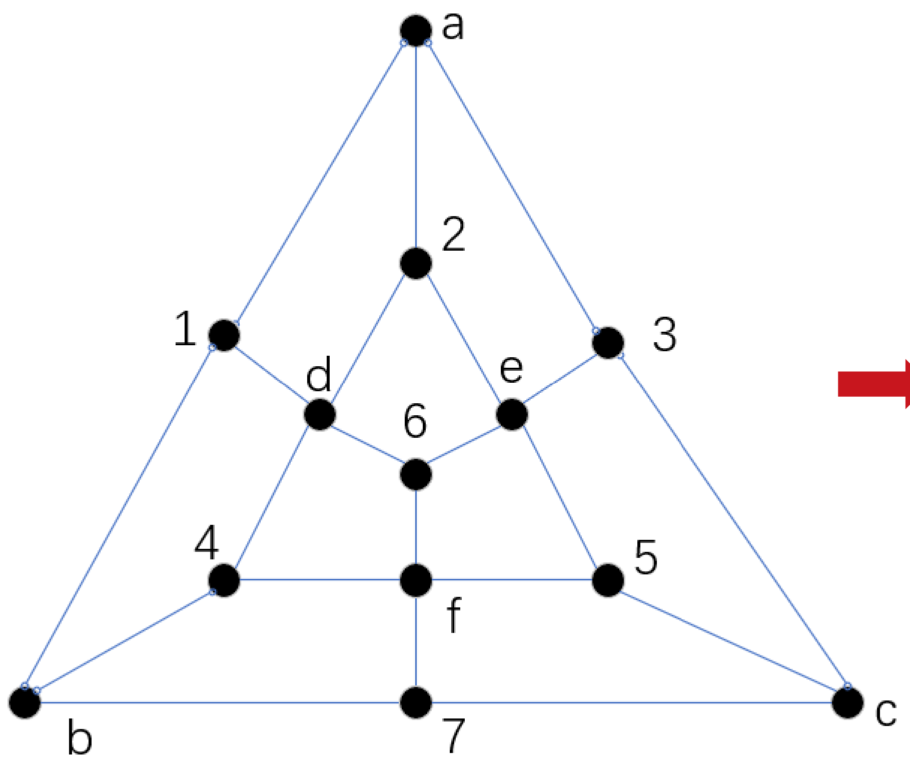
推论-例题

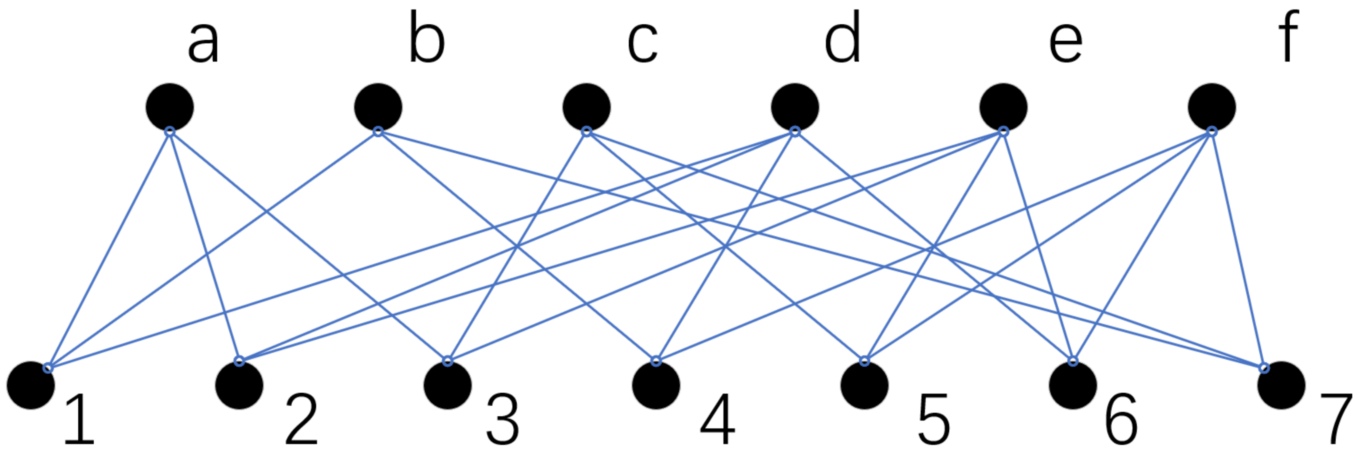


哈密顿道路与回路

定理2推论：奇数个结点构成的二分图不是哈密顿图。

G 是哈密顿图，图 $G\text{-}V_1$ 中的连通支数不大于 $|V_1|$



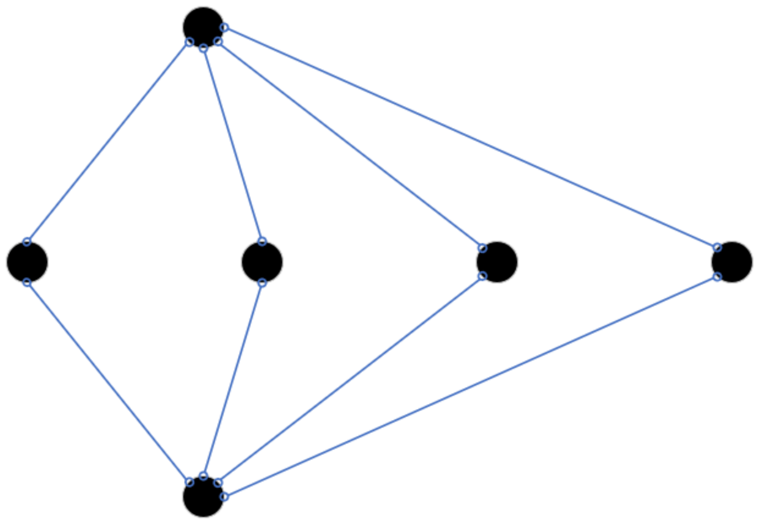


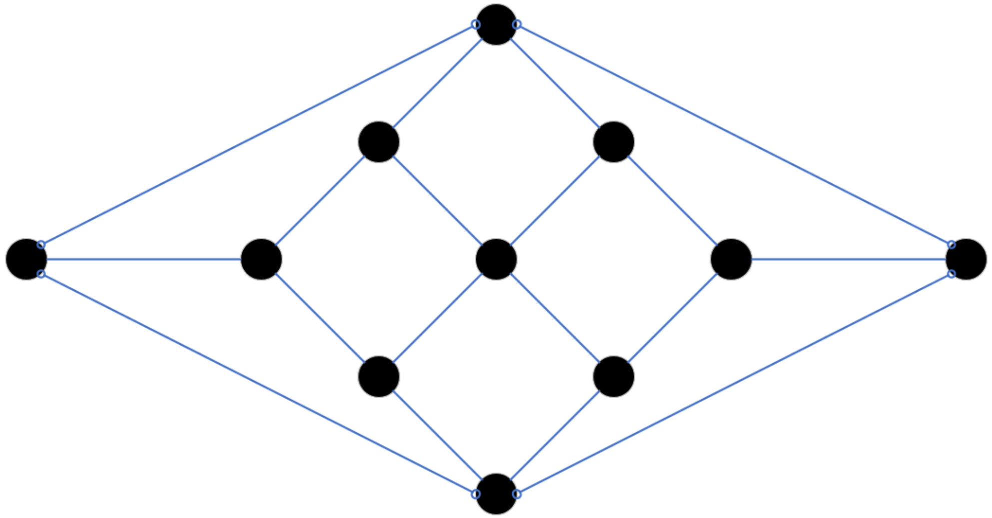
令 $V_1=(a,b,c,d,e,f)$，$|V_1|=6$， $G\text{-}V_1$ 中的连通支数为 7。

哈密顿道路与回路

推论4. 设 G 是哈密顿半图，则对任意的非空 $V_1 \subset V(G)$，图 $G\text{-}V_1$ 中的连通支数不大于 $|V_1|+1$。

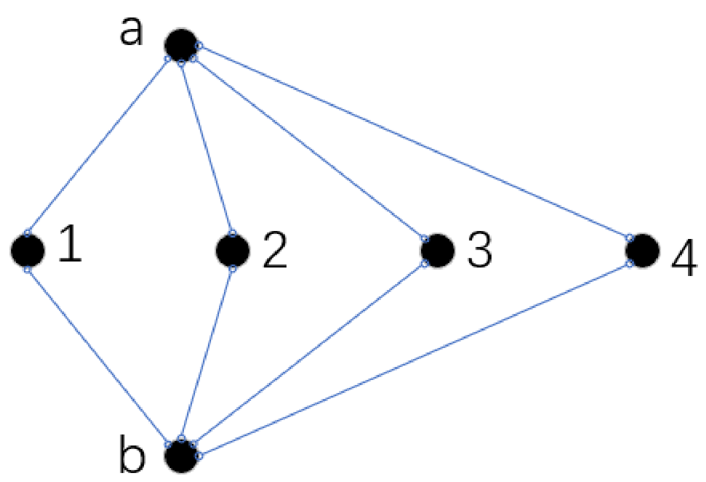
判断 H 图 or H半图

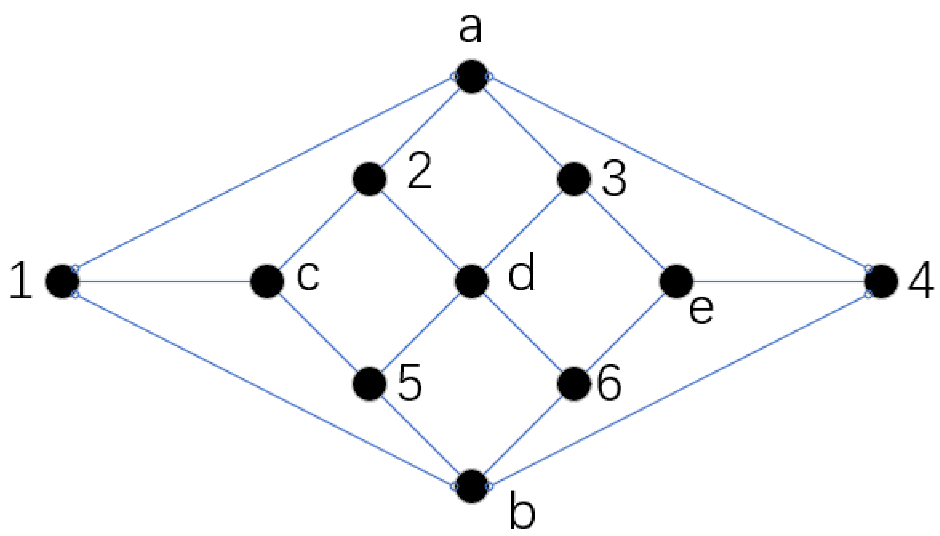




哈密顿道路与回路

判断 H 图 or H半图





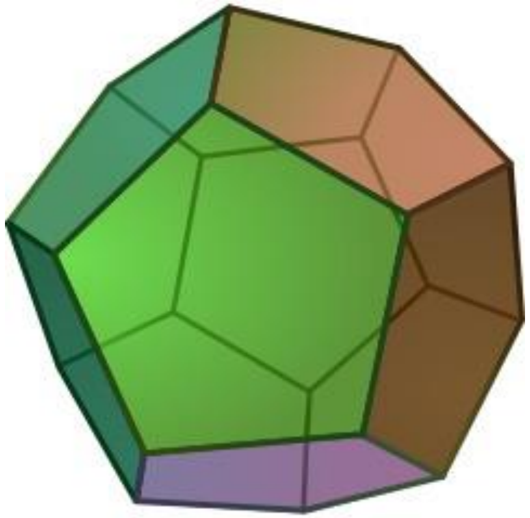
令 V_1 =(a,b), $|V_1|$=2，G-V_1 中的连通支数为 4> $|V_1|$。

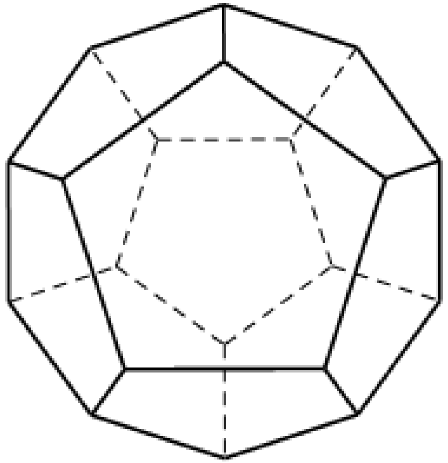
令 V_1 =(a,b,c,d,e), $|V_1|$=5，G-V_1 中的连通支数为 6 = $|V_1|$+1。

哈密顿道路与回路

例1：周游世界游戏

凸 12 面体的 20 个顶点比作 20 个城市，30 条棱表示这些城市间的交通线路。周游这 20 个“城市”，从某城市出发，经过每个城市 1 次且只有一次，最后回到出发点。

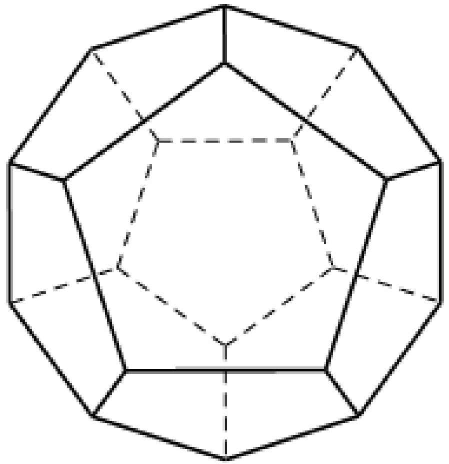




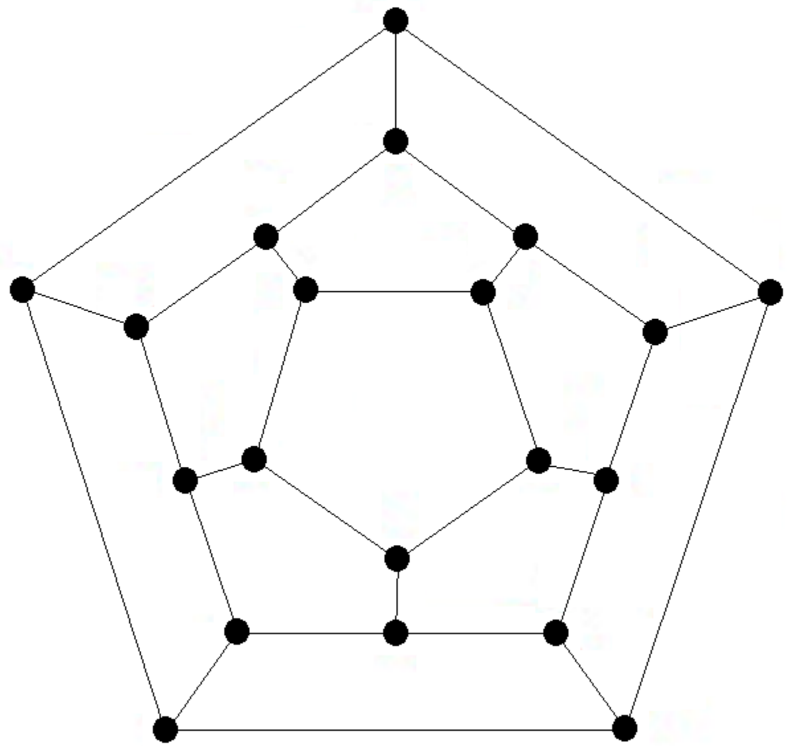
图中点的遍历问题

哈密顿道路与回路

例1： *建模*

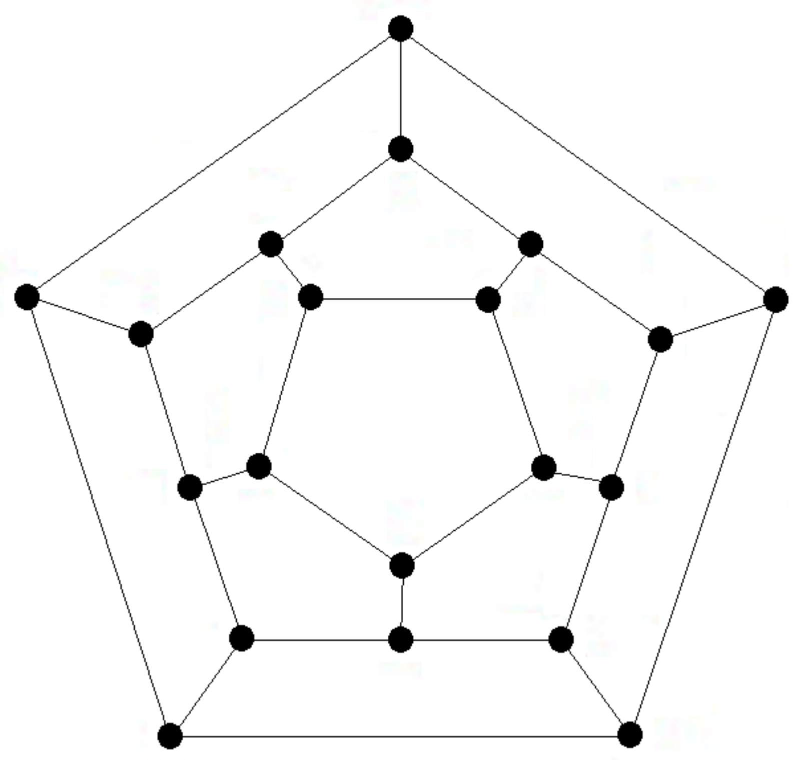


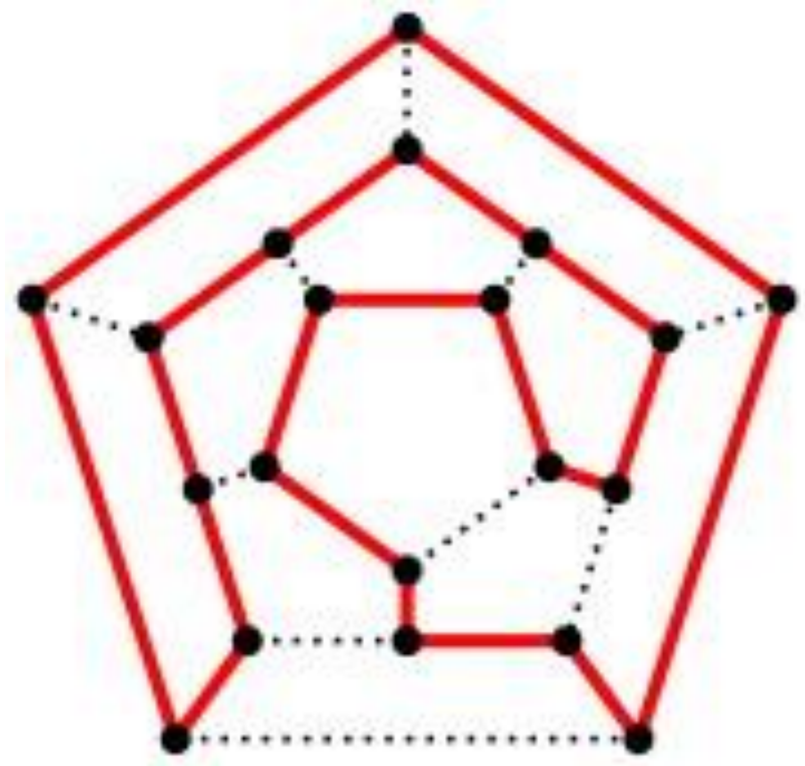
寻找哈密顿回路?



哈密顿道路与回路

例1： 寻找哈密顿回路？

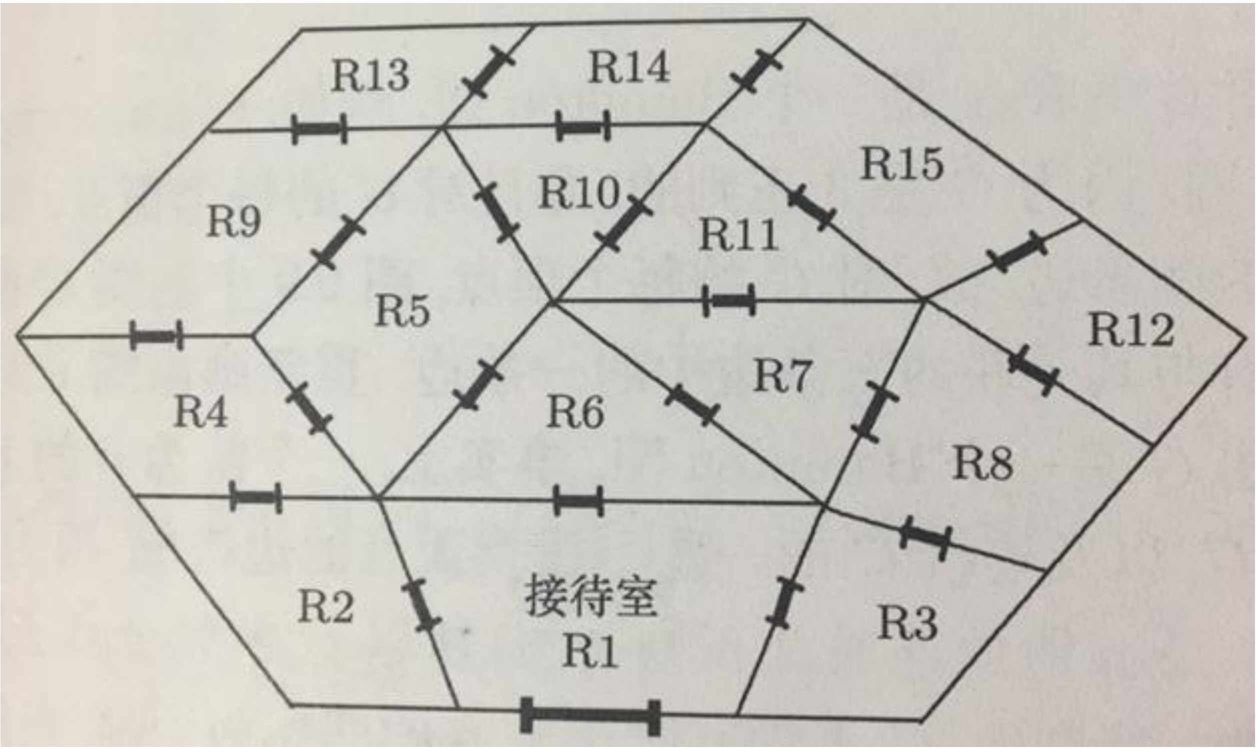




图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

例2：下图为现代艺术博物馆的结构示意图，该博物馆有 15 个展室。每天下班前，一个安保人员从前门进入接待室（R1），然后检查每一间展室看一切状况是否良好。如果工作人员能浏览每个房间一次且仅一次，然后回到接待室，该怎么走?

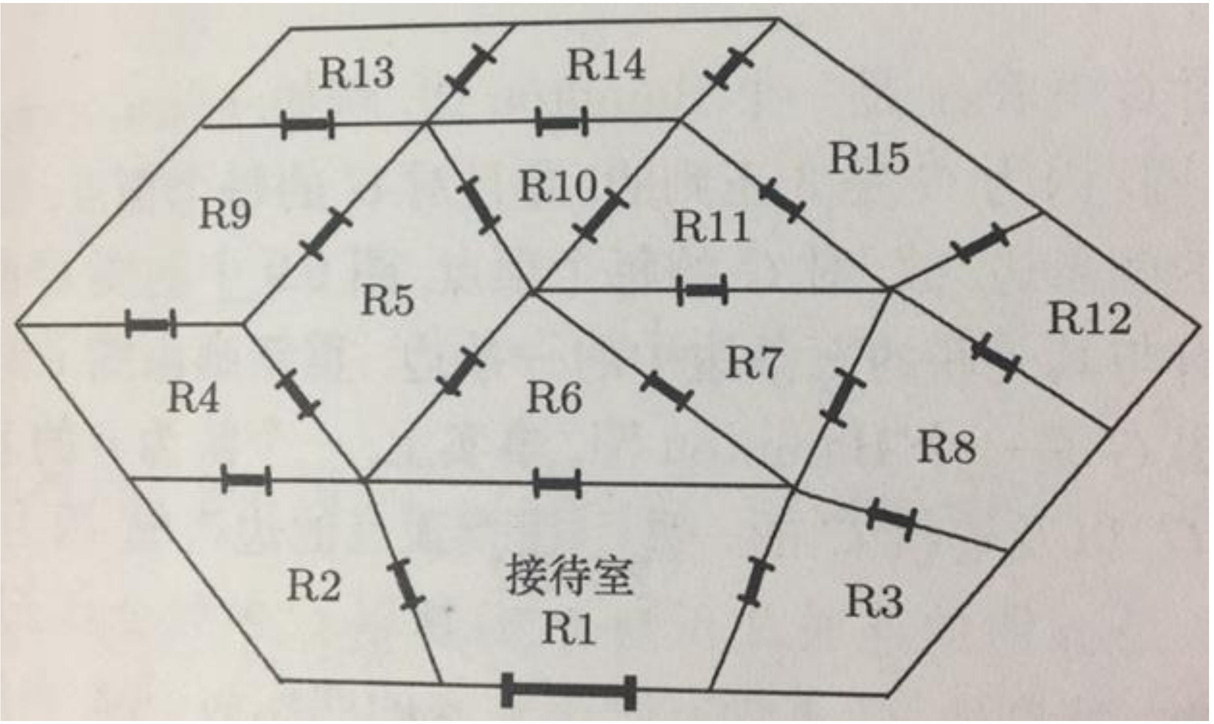


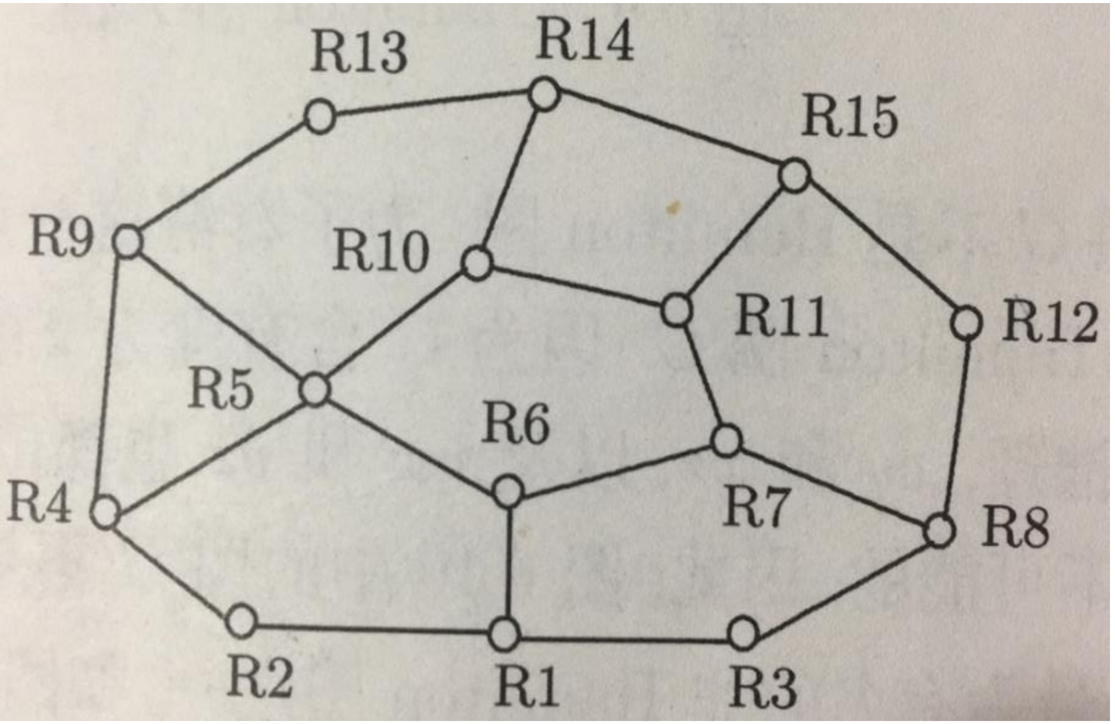
寻找哈密顿回路?

图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

例2：建模

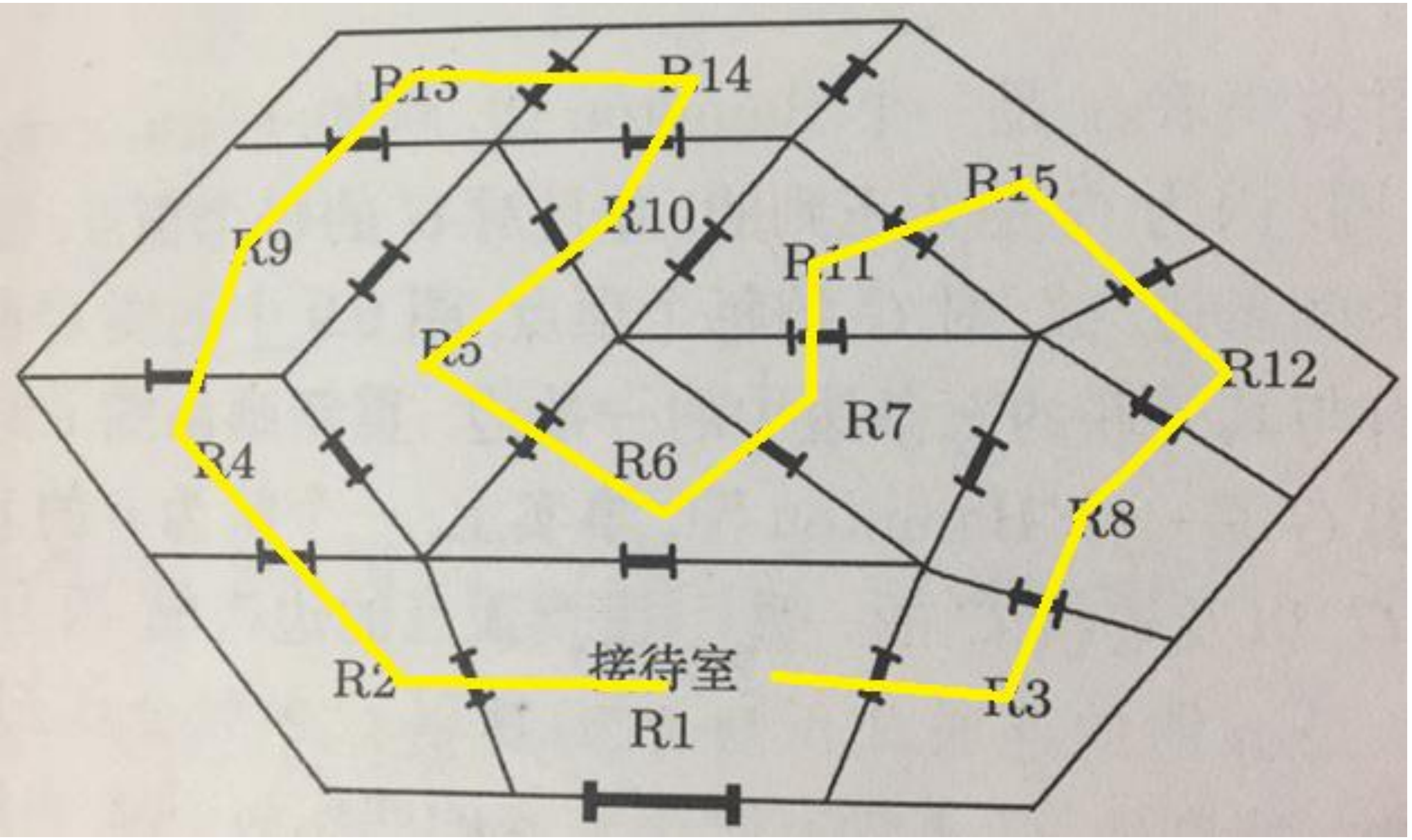




图论：道路与回路

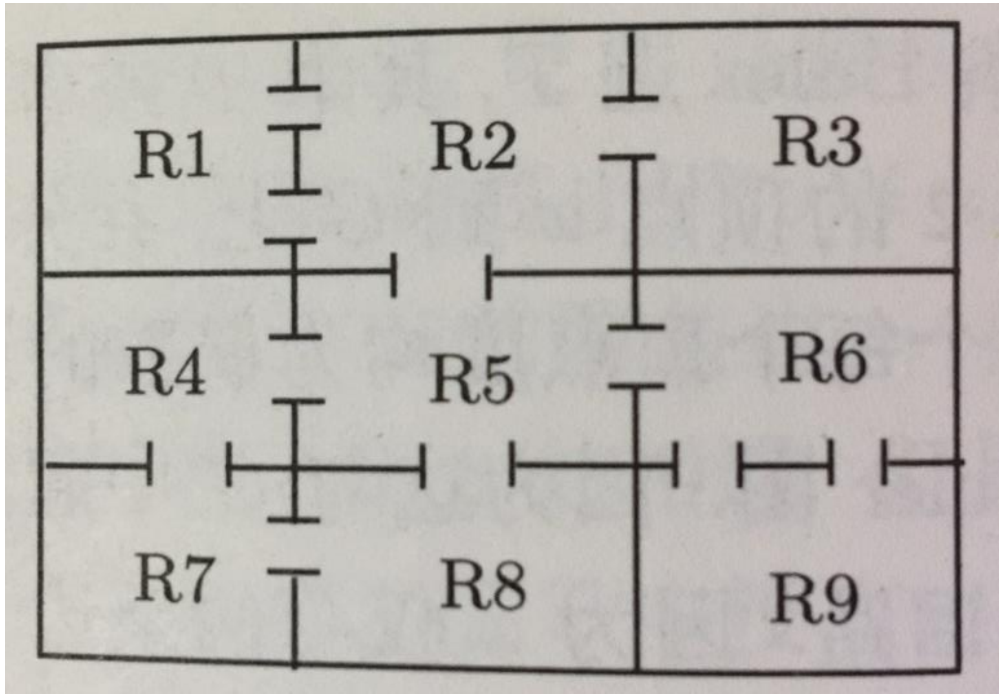
哈密顿道路与回路

例2：



哈密顿道路与回路

例3：下图为某大房子二楼的九间小屋子布局，其中屋门两个屋子共有。问能否从某间屋子开始作一次散步，使得经过每个屋子恰好一次?



寻找哈密顿道路?

图论：道路与回路

哈密顿道路与回路

例3：建模