第一章：图的基本概念

图论：基本概念

图
Graph

互连结点的集合

图模型

- 结点表示事物
- 边表示事物之间的联系

- 图论中的图是由若干给定的点（结点）及连接两点的线（边）所构成的图形
- 用这种图形来描述某些事物之间的某种特定关系，其中结点代表事物，连接两结点的边表示相应两个事物间具有的某种关系。

图论：基本概念

图的表示：

图 *G* 用一个二元组表示：$G = (V, E)$

- *V* 表示非空结点(vertex)集合,
- *E* 表示边(edge)的集合, 每条边代表 *V* 中的两个结点相关联。

对图 *G*，用 *V*(*G*) 和 *E*(*G*) 表示该图的结点集和边集。

图论：基本概念

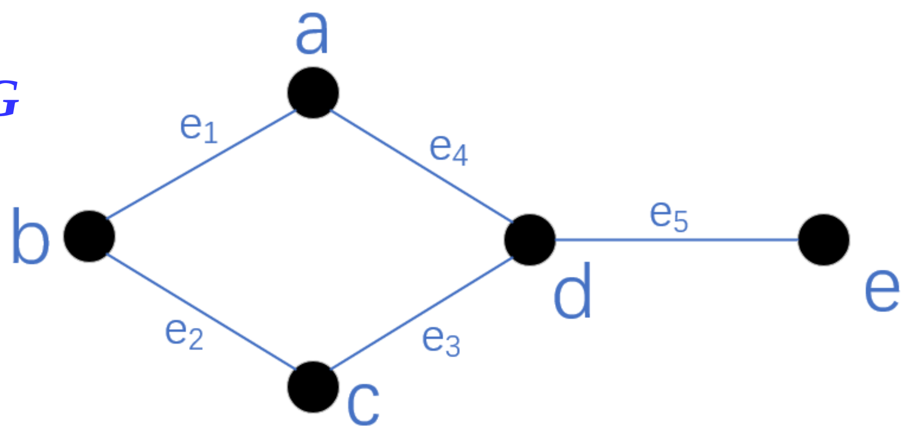
图的分类

- 无限图：结点集或边集是无穷集合；
- 有限图：结点集和边集均是有限集合；

结点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 结点数 $|V(G)|=n$

边集 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 边数 $|E(G)|=m$

图 G



$V(G)=$?

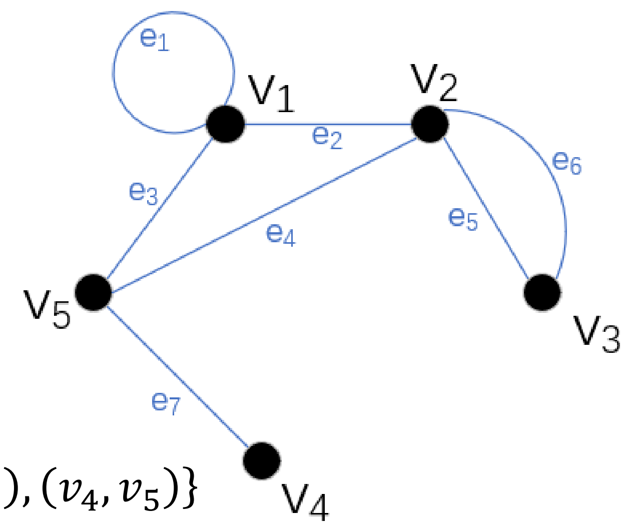
$E(G)=$?

图的分类

✓ 无向图(undirected graph)：所有的边是无向边

无向边 e_k 可记为**无序的结点对** $e_k = (v_i, v_j)$

下图中 v_1 的邻集是?



结点 v_i, v_j 称为边 e_k 的端点

结点 v_i 的**邻集**： $\Gamma(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\}$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$= \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_5)\}$$

$\Gamma(v_1) =$?

图论：基本概念

图的分类

✓ 有向图(directed graph)：所有的边是有向边

有向边 e_k 可记为有序的结点对 $e_k = (v_i, v_j)$ 或 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$

结点 v_i 为边 e_k 的始点， v_j 称为边 e_k 的终点

结点 v_i 为 v_j 的直接前趋， v_j 为 v_i 的直接后继

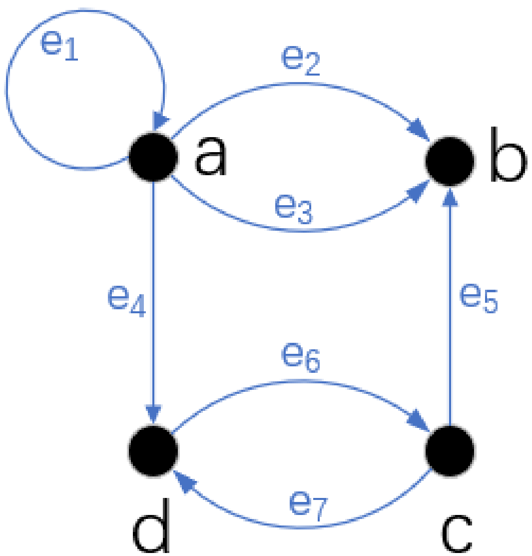
结点 v_i 的前趋元集(内邻集)： $\Gamma^-(v_i) = \{v_j | (v_j, v_i) \in E\}$

结点 v_i 的后继元集(外邻集)： $\Gamma^+(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\}$

结点 v_i 的邻集： $\Gamma(v_i) = \Gamma^+(v_i) \cup \Gamma^-(v_i)$

图论：基本概念

图的分类：例题



$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G) = \{(a,a),(a,b),(a,b),(a,d),(c,b),(c,d),(d,c)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

内邻集 $\Gamma^-(d) =$ **?**

外邻集 $\Gamma^+(d) =$ **?**

邻集 $\Gamma(d) =$ **?**

结点 v_i 的前趋元集(内邻集)： $\Gamma^-(v_i) = \{v_j | (v_j, v_i) \in E\}$

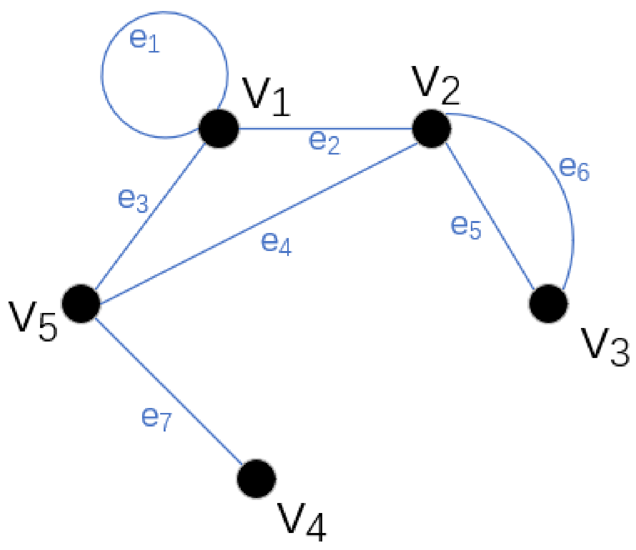
结点 v_i 的后继元集(外邻集)： $\Gamma^+(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\}$

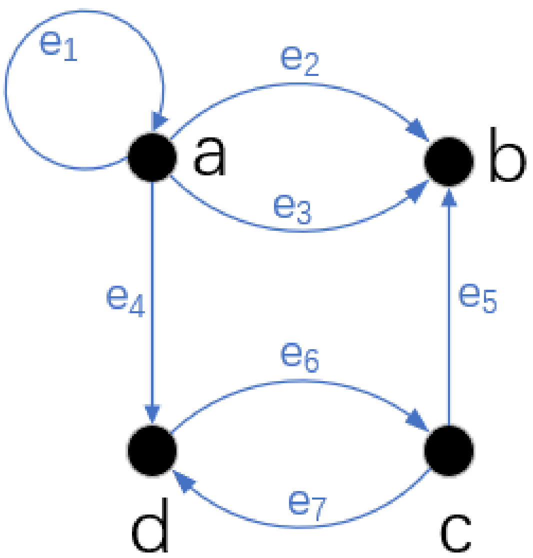
图论：基本概念

✓ **混合图：既有无向边也有有向边**

✓ **多重图(multigraph)：有重边的图**

- **重边(multiple edges): 两结点间的多条边**
- **自环(loop)：两结点重合的边，即** $e_k = (v_i, v_i)$

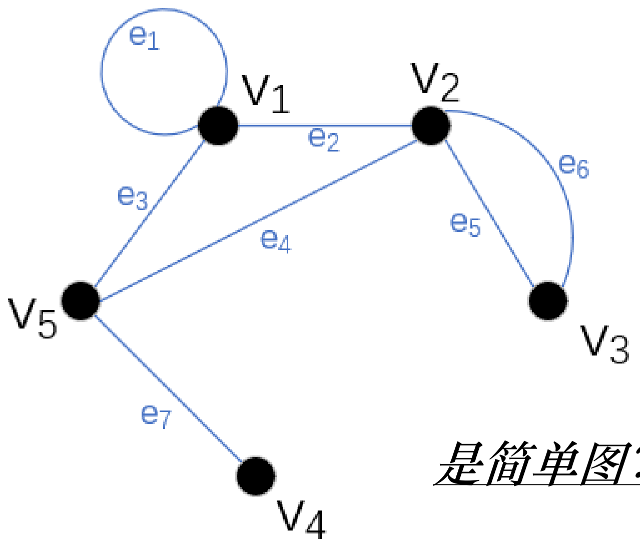




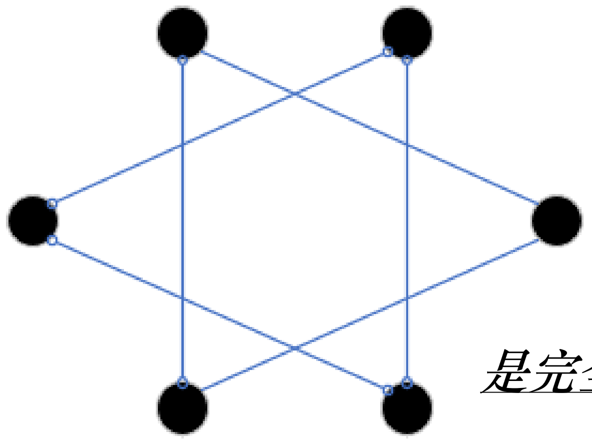
上图中自环和重边有哪些?

图论：基本概念

✓ **简单图 (simple graph)：无重边无自环的无向图**



是简单图?



是完全图?

K_6有多少条边?

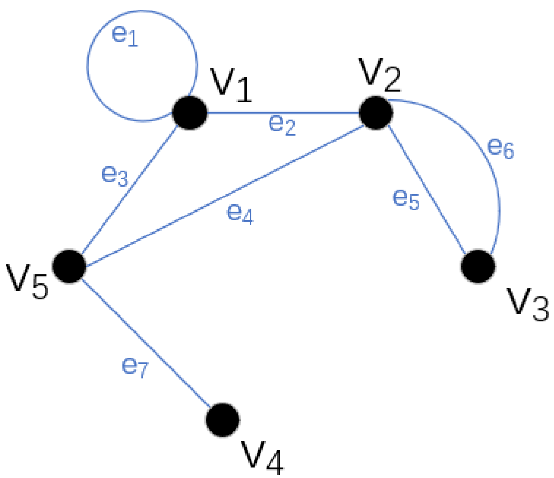
✓ **空图(null/empty graph)：无任何边的简单图，记作 N_n**

✓ **完全图(complete graph)：任意两结点都有边的简单图，记作 K_n**

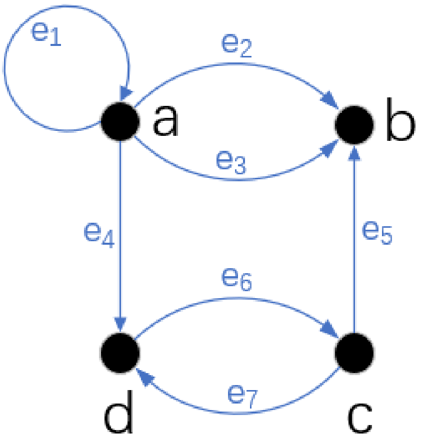
图论：基本概念

结点的度(degree)

- ✓ 定义：记与结点 v 关联的边数，作 $d(v)$
  - ✓ v 带有自环，自环对 $d(v)$ 的贡献度为 2



<u>*各结点的度是多少?*</u>

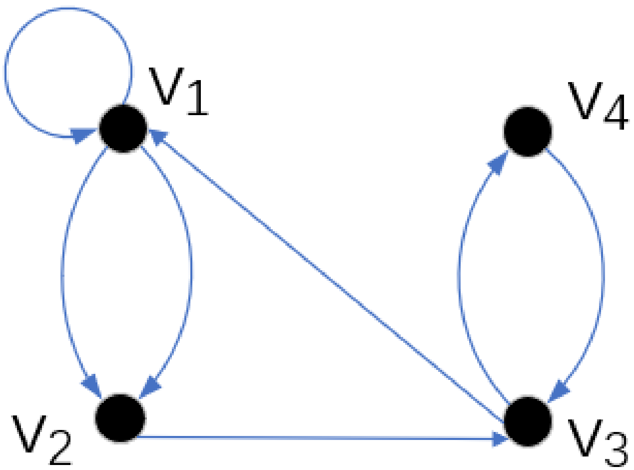


- ✓ 有向图中结点 v 的**正度**是以 v 为<u>*始点的边*</u>的数目，记作 $d^{+}(v)$
- ✓ 有向图中结点 v 的**负度**是以 v 为<u>*终点的边*</u>的数目，记作 $d^{-}(v)$
- ✓ 有向图中结点 v 的**度** $d(v) = d^{+}(v) + d^{-}(v)$

图论：基本概念

结点的度(degree)：

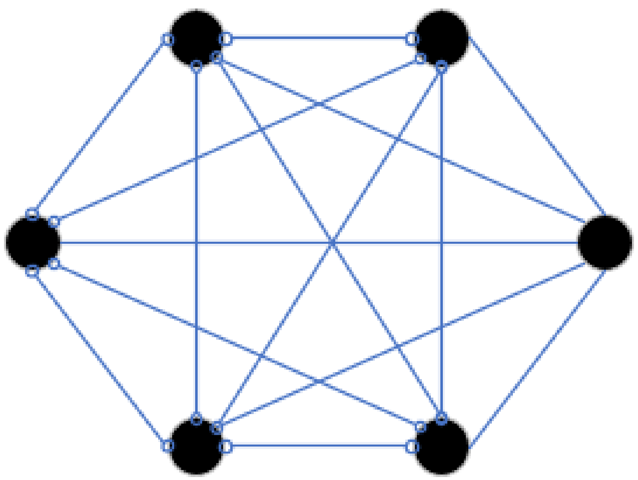
- ✓ 度为 0 的结点称为孤立点



$d^{+}(v_1) = ?$

$d^{-}(v_1) = ?$

$d(v_1) = ?$



K_6中各结点的度是多少？

图论：基本概念

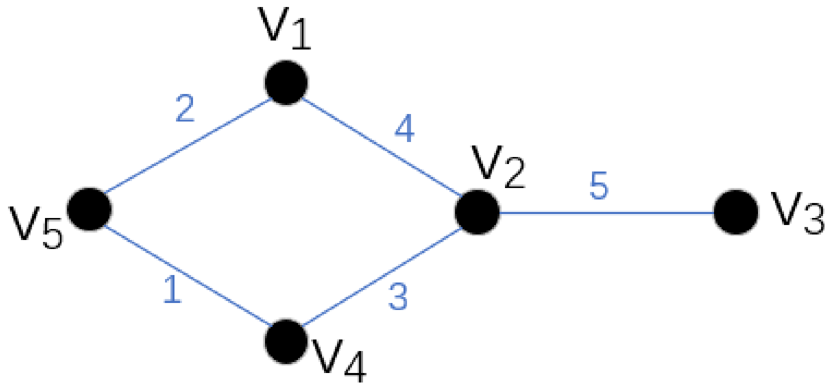
度的基本性质

- ✓ 对于 $G(V,E)$ ，$|E|=m$ ，则 $\sum_{v\in V(G)} d(v)=2m$;
- ✓ 图 G 中度为奇数的结点必有偶数个；
- ✓ 有向图中正度之和等于负度之和；
- ✓ K_n 的边数 $m=\frac{1}{2}n(n-1)$ ；
- ✓ 非空简单图中一定存在度相同的结点.

图论：基本概念

赋权图

- ✓ 定义：如果给图 $G=(V, E)$ 的每条边 e_k 都赋以一个实数 w_k 作为该边的权 (weight)，则称 G 是赋权图。



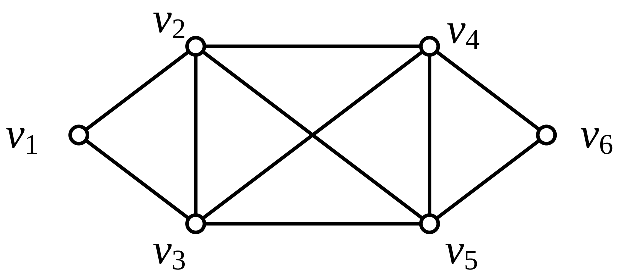
- ✓ 如果权都是正数, 称为正权图。

- ✓ 应用中往往是赋权图；权可以表示长度、时间、费用等。

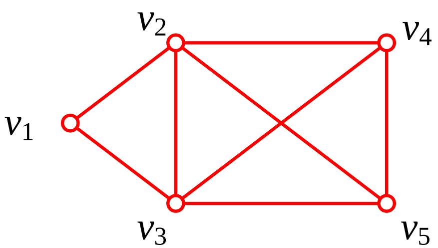
图论：基本概念

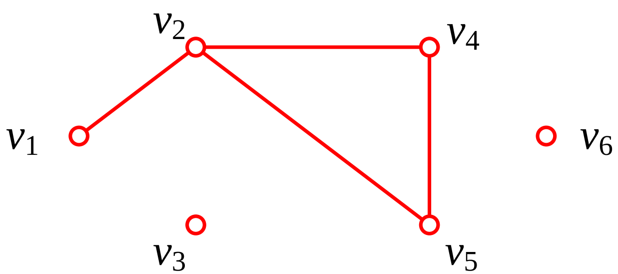
图的运算：子图

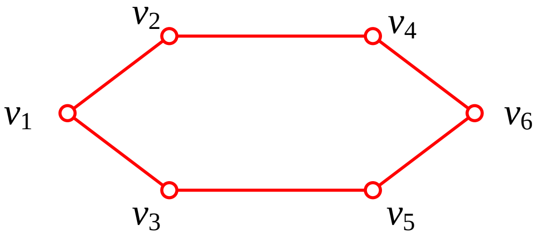
- ✓ 定义：给定 $G=(V, E)$, 如果图 $G' = (V', E')$ 满足 $V'\subseteq V, E'\subseteq E$, 则称图 G' 是 G 的**子图**(subgraph)，记作 $G'\subseteq G$
- ✓ 如果 $V'=V$，则称 G' 是 G 的 **支撑(spanning)子图** 或生成子图



支撑子图判断？



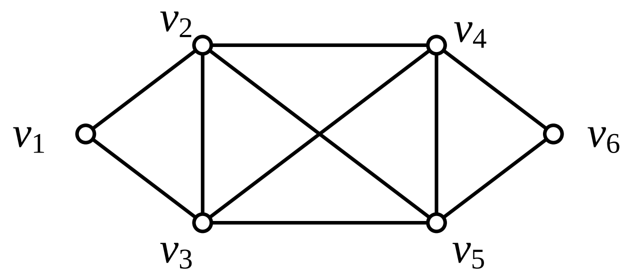




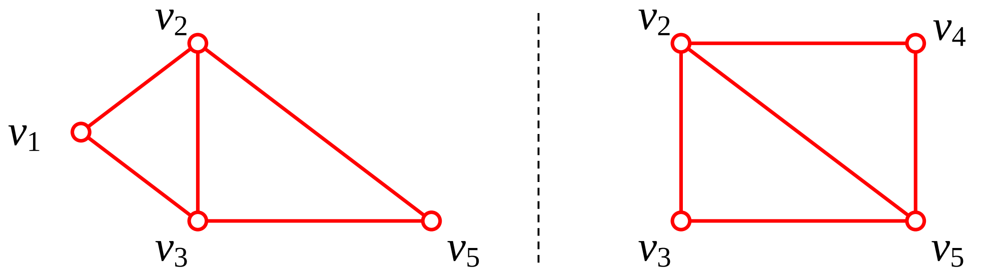
图论：基本概念

图的运算：子图

- ✓ 如果 $V'\subseteq V$，且对任意的 v_i , $v_j \in V'$，若 $e_k=(v_i, v_j) \in E$，有 $e_k \in E'$，则称 G' 是 G 的 **导出(induced)子图**，E' 包含了 G 在结点子集 V' 之间的所有边（E' 是 E 中那些两个端点都在 V' 中的边构成的集合）。



导出子图判断?



- ✓ G 的平凡子图： G 和 N_n 。
  G 是 G 的支撑子图、导出子图，空图也是 G 的支撑子图。

图论：基本概念

图的运算：交、并、差、补和对称差

✓ **定义：给定图 $G_1=(V_1, E_1)$ 和图 $G_2=(V_2, E_2)$,**

交： $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$

并： $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$

差： $G_1 - G_2 = (V_1, E_1 - E_2)$ **如果出现孤立点，孤立点删掉**

补： $\overline{G_1} = K_n - G_1$

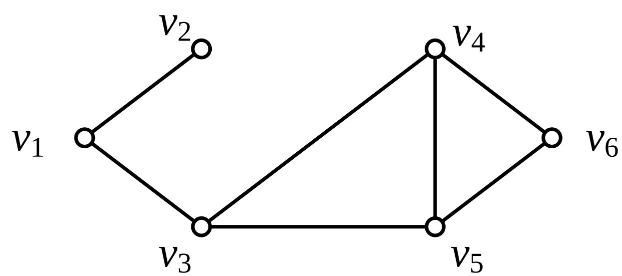
对称差：
$$\begin{aligned} G_1 \oplus G_2 &= (V_1 \cup V_2, E_1 \oplus E_2) \\ &= \big(V_1 \cup V_2, (E_1 - E_2) \\ &= (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1) \\ &= G_1 \cup G_2 - G_1 \cap G_2 \end{aligned}$$

结点在图中的可以独立存在，但边只能关联结点而存在，因此删除边不删除结点，但删除结点则会删除该结点所关联的边。

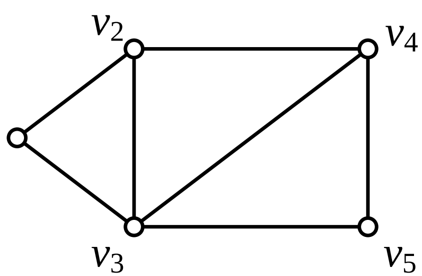
图论：基本概念

图的运算：交、并、差和对称差

G_1

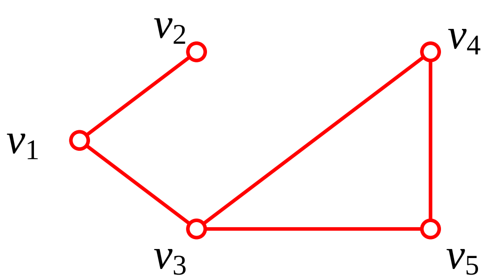


G_2



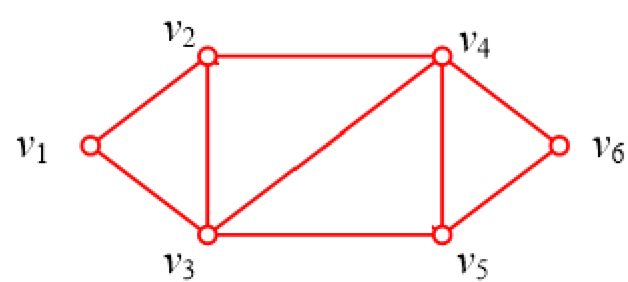
G_1 ? G_2

$G_1 \cap G_2$



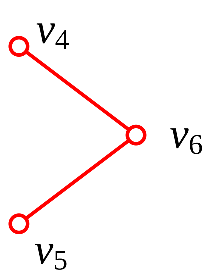
G_1 ? G_2

$G_1 \cup G_2$



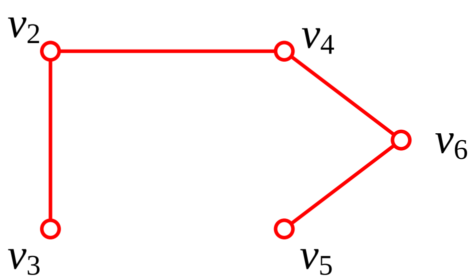
G_1 ? G_2

$G_1 - G_2$



G_1 ? G_2

$G_1 \oplus G_2$



图论：基本概念

图的运算：其它

✓ 从 G 中删去结点 v 及其关联的边: $G-v$　　$G-v$ 是 G 的导出子图

✓ 从 G 中删去边 e: $G-e$　　$G-e$ 是 G 的支撑子图

✓ 向 G 中增加边 $e_{ij}=(v_i, v_j)$: $G+e_{ij}$

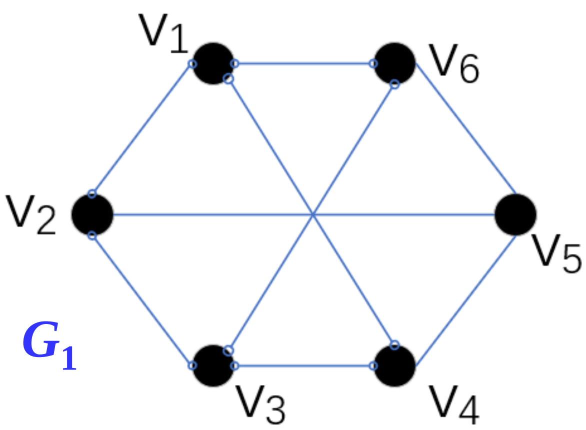
图论：基本概念

图的同构

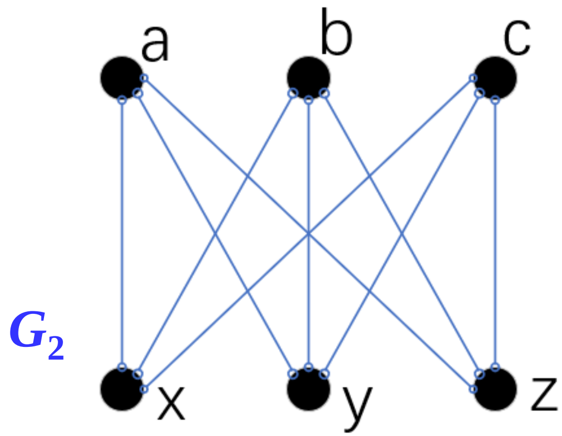
- ✓ 定义：给定图 $G_1=(V_1, E_1)$ 及图 $G_2=(V_2, E_2)$，如果在 V_1 和 V_2 之间存在双射使得

$$(u,v) \in E_1 \quad \textbf{iff} \quad \big(f(u), f(v)\big) \in E_2$$

则称 G_1 和 G_2 同构(isomorphic), 记作 $G_1 \cong G_2$

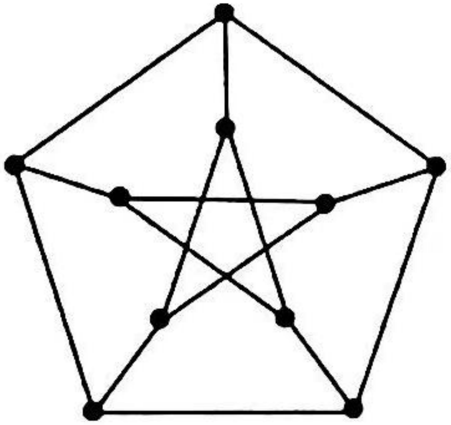


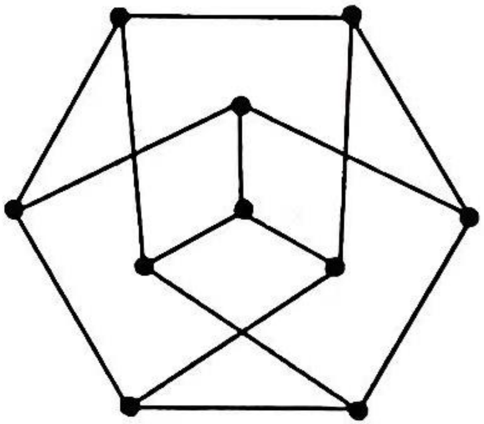
是否同构?

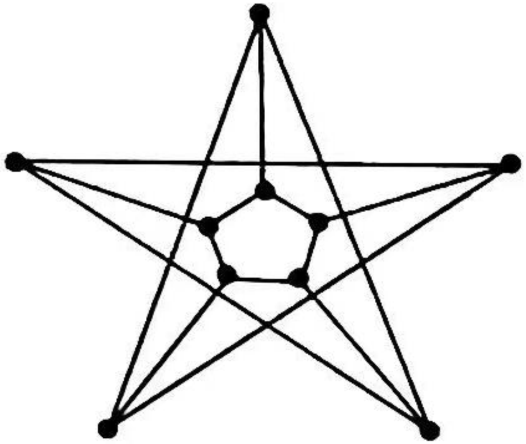


图论：基本概念

图的同构



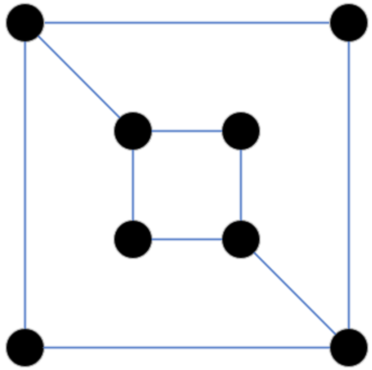


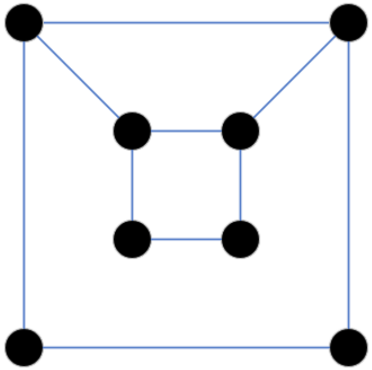


是否同构?

图的同构

- ✓ 若 $G_1 \cong G_2$，则有 $|V(G_1)| = |V(G_2)|$，$|E(G_1)| = |E(G_2)|$
- ✓ G_1 和 G_2 结点度的非增序列相同；
- ✓ G_1 和 G_2 存在同构的导出子图。
  （用于判断两个图是否同构，十分有效）



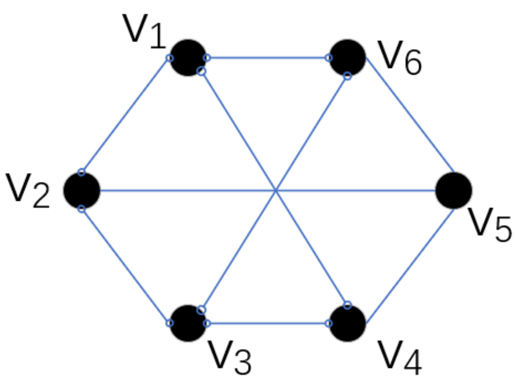


是否同构?

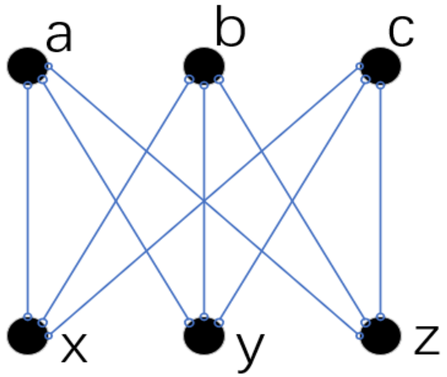
不存在同构的导出子图。

图论：基本概念

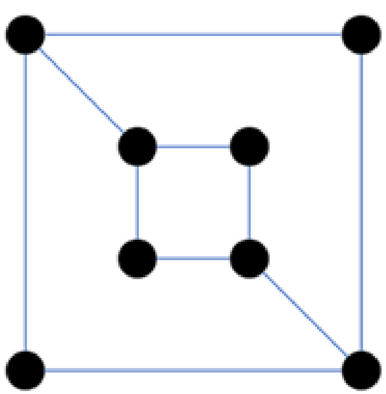
图的同构



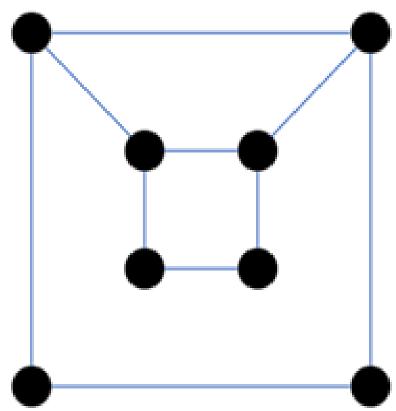
是否同构?



n=6, m=9,{3,3,3,3,3,3}　　n=6, m=9,{3,3,3,3,3,3}



是否同构?



n=8, m=10,{2,2,2,2,3,3,3,3}　　n=8, m=10,{2,2,2,2,3,3,3,3}

图的同构

一个集合及其上的运算关系称为一个**代数结构**。

两个代数结构 A_1 和 A_2 称为是同构的，如果同时满足以下两个条件：

- ✓ 有 A_1 和 A_2 的集合元素之间存在一一映射 $\sigma\colon A_1 \longrightarrow A_2$。
- ✓ 在映射 σ 作用下，原像集合 A_1 的元素运算关系，保持到了像集合 A_2。

在本节中，图的同构所指的运算关系是 *点边关系* $e=(u,v)$，也称为点边同构。

图的同构

简单图的同构

两个简单图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 称为是（点边）同构的，如果同时满足以下两个条件：

1. 两个结点集合 V_1 和 V_2 之间存在一一映射：$\sigma\colon V_1\to V_2$；
2. 在映射 σ 作用下，G_1 中的点边关系保持到了 G_2：
   对任意
   $$u,v\in V_1:\ (u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (\sigma(u),\sigma(v))\in E_2$$

图的同构

一般图的同构（点边同构）

两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 称为是（点边）同构的，如果同时满足以下两个条件：

1. 图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 之间存在两个一一映射：
$$\sigma\colon V_1\to V_2,\ \varphi\colon E_1\to E_2;$$

2. 在映射 σ 和 φ 作用下，G_1 中的点边关系保持到了 G_2：

   对任意 $u,v\in V_1$：$e=(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow \varphi(e)=(\sigma(u),\sigma(v))\in E_2$。

在有重边的情形下，$e=(u,v)$只是表达“e的端点分别为u,v”。

从定义可以看到，图的同构是一种等价关系。

图的同构

目前还没有发现两个图同构的充分必要条件，也没有发现判断两个图同构的有效算法。

因此只能直观地理解两个图同构的含义，即在不考虑图的标记的情况下，这两个图在适当移动顶点和边之后有相同的直观表示，或者说这两个图的顶点和边之间的关联情况完全一致。

图论：基本概念

图的代数表示：
邻接矩阵(adjacency matrix)

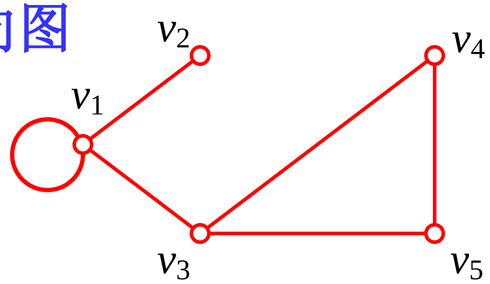
描述 结点之间 关系

- ✓ 图 $G=(V,E)$ 的邻接矩阵是一个 $n\times n$ 矩阵 A，其元素为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E,\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

- ✓ 邻接矩阵可以表示自环，但不能表示重边。

无向图



邻接矩阵?

$$A=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc}1&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{array}\\ \begin{array}{ccccc}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5\end{array}\end{array}$$

无向图的邻接矩阵是对称阵;
简单图邻接矩阵的第 i 行之和为结点v_i的度。

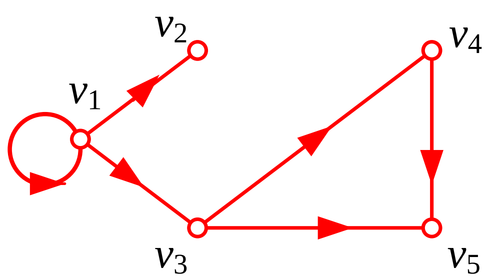
图论：基本概念

图的代数表示：
邻接矩阵(adjacency matrix)

描述 结点之间 关系

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E,\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

有向图



邻接矩阵?

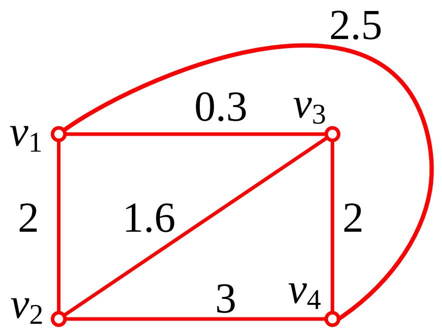
$$A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{matrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{matrix}\\ \begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{matrix} & \end{array}$$

有向图的邻接矩阵的第 i 行之和为结点 v_i 的正度，
第 j 列之和为结点 v_j 的负度。

图的代数表示：
权矩阵

- ✓ 赋权图 $G=(V, E)$ 的权矩阵是一个 $n\times n$ 矩阵 A，其元素为

$$a_{ij}=\begin{cases} w_{ij}, & (v_i,v_j)\in E, \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



赋权图

邻接矩阵?

$$A=\begin{array}{c@{}c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.3 & 2.5 \\ 2 & 0 & 1.6 & 3 \\ 0.3 & 1.6 & 0 & 2 \\ 2.5 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & \end{array}$$

图的代数表示：
关联矩阵 (incidence matrix)

描述 结点与边之间 关系

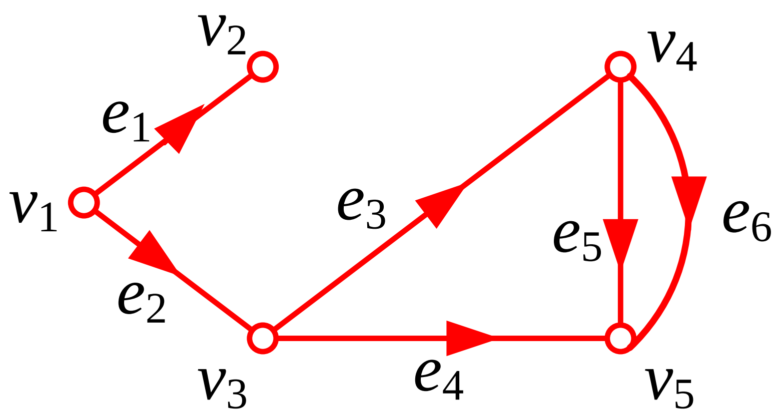
✓ 有向图 $G=(V, E)$ 的关联矩阵是一个 $\boxed{n\times m}$ 矩阵 B，其元素为

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E,\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\in E,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

- 每列只有两个非零元素：1 和 -1；
- 第 i 行非零元素数为结点 v_i 的度 $d(v_i)$，其中1的个数是 $d^+(v_i)$，-1的个数是 $d^-(v_i)$;
- 关联矩阵可表示重边，但不能表示自环。

图的代数表示：关联矩阵 (incidence matrix)

描述结点与边之间关系



$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} & \end{array}$$

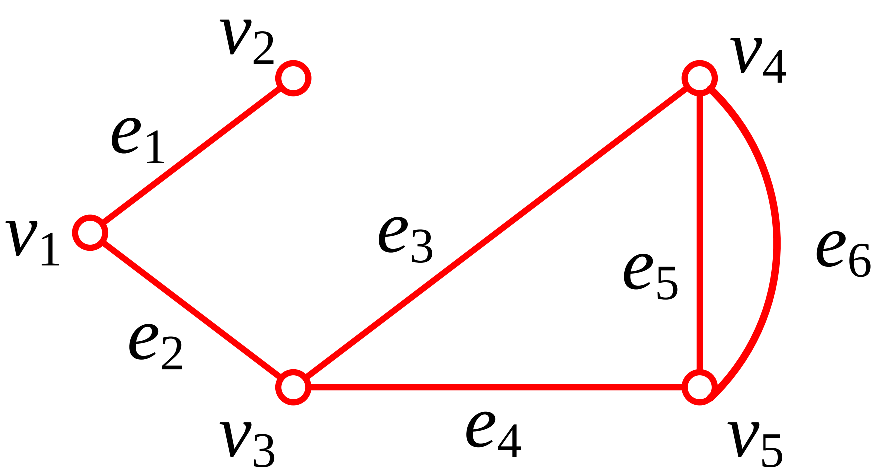
- 每列只有两个非零元素：1和-1；
- 第 i 行非零元素数为 v_i 的度$d(v_i)$，其中 1 的个数是 $d^+(v_i)$，-1的个数是 $d^-(v_i)$;
- 可表示重边，但不能表示自环。

图论：基本概念

图的代数表示：关联矩阵 (incidence matrix)　*描述结点与边之间关系*

- ✓ 无向图 $G=(V, E)$ 的关联矩阵是一个 $n\times m$ 矩阵 B，其元素为

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$



$$B=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc}1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{array}\\ \begin{array}{cccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{array}\end{array}$$

图的代数表示：总结

- ✓ 图的定义
- ✓ 图的分类
- ✓ 图的运算
- ✓ 图的同构
- ✓ 图的代数表示

谢谢！