第四章：谓词逻辑的基本概念

谓词逻辑的基本概念

命题逻辑

- 命题逻辑研究命题的推理演算；

-- 命题：

简单命题：原子命题

复合命题：分子命题

合式公式　自然语言形式化

-- 等值与推理：

等值定理：$\boxed{\alpha = \beta \ \ \textit{iff} \ \alpha \leftrightarrow \beta \text{ 是重言式}}$

推理定理：$\boxed{\alpha \Rightarrow \beta \ \textit{iff} \ \alpha \rightarrow \beta \text{ 是重言式}}$

谓词逻辑的基本概念

命题逻辑

例：如果今天张三生病了，
那么他不会来上课。

张三来上课了

→ 今天张三没病

P: 今天张三生病了

Q: 张三不会来上课

$$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$$

例：大一学生都要学习微积分。

张三是大一学生

→ 张三要学习微积分

P: 大一学生都要学习微积分

Q: 张三是大一学生

R: 张三要学习微积分

$$(P \wedge Q) \rightarrow R?$$

命题逻辑的局限性

谓词逻辑的基本概念

谓词逻辑与命题逻辑的区别

- 命题逻辑：简单命题是分析的基本单元，不再对简单命题的内部结构进行分析。

  例：*P*：“柏拉图是人”和 *Q*：“亚里士多德是人”

  两个相互独立的命题，看不出*P*和*Q*有什么联系；

- 谓词逻辑 (*predicate logic*)：深入到简单命题的内部进行更精细的分析 (例如主谓结构)。

  例：*P*：“柏拉图是人”和 *Q*：“亚里士多德是人”

  用谓词*Man*( )表示“…是人”，则上面两个命题可表示为*Man*(Plato)和*Man*(Aristotle)。

  这样能看出两命题间有联系。

谓词逻辑的基本概念

对命题的进一步分析

- 日常语言的陈述句包含主语和谓语

  例如：“亚里士多德是人”

  主语(“亚里士多德”)是述说的对象；

  谓语(“是人”)描述主语的属性或关系。

谓词逻辑用**个体词描述对象**，用**谓词表达谓语**，如*Man*(Aristotle)，*Man*(Plato).

例如：“人是动物”；

主语“人”就不适合看成个体了。因为“人”是类概念。

适合理解成：“对任何个体*x*：若*x*是人，则*x*是动物”。

所以涉及两个谓词*Man*( )和*Animal*( )间的蕴涵。

谓词逻辑的基本概念

为什么需要谓词逻辑?

- 描述更丰富的推理形式.

例如：下面这个推理用命题演算就无法描述。

$$\begin{array}{ll} \text{人皆有死.} & P \\ \text{苏格拉底是人.} & Q \\ \hline \therefore \text{苏格拉底会死.} & R \end{array}$$

- 本章介绍**一阶谓词逻辑**，它基本上覆盖了人们在数学和日常生活中用到的推理。

谓词逻辑的基本概念

个体词

- **个体词** (individual) 表示思维对象.

  个体常项：例如Socrates，Plato，Aristotle；

  个体变项：表达一般情形。

- 所有个体构成**论域** (domain of discourse)，也叫**个体域**

  不特别指明的话，包括一切事物；

  当讨论真假性时，往往指明特定论域；

  论域是所有个体变项的变化范围。

谓词逻辑的基本概念

谓词

- **谓词**(predicate)描述个体的属性以及个体之间的关系。

  例如:

  柏拉图**是人**. → *Man*(Plato)

  亚当**喜欢**夏娃. → *Likes*(Adam, Eve)

  A**在**B和C**之间**. → *Between*(A, B, C)

谓词常项：有确切的意义，如*Man*( )。

谓词变项：表达任一谓词。

谓词逻辑的基本概念

谓词的变目个数

- 用一元谓词描述个体的属性；

  --如前面的*Man*(x)

- 用多元谓词描述个体间的关系；

  关于*n*个个体的谓词称为*n*元谓词；

  --如前面的二元谓词*Likes*(x, y)

- 有0元谓词?

  命题可视为0元谓词!

  是独立于任何变元的陈述句；

  故谓词逻辑是命题逻辑的推广。

谓词逻辑的基本概念

谓词是命题函数

- 一元谓词 P 可视为从个体域D到集合$\{T, F\}$上的映射:

$$P: D \rightarrow \{T, F\}$$

- n元谓词也是一样:

$$P: D^n \rightarrow \{T, F\}$$

- 注意：$P(x)$是命题形式但不是命题，因为其真值不确定；

  仅当 P 取定为谓词常项，x取定为个体常项时，
  $P(x)$才成为命题；

  谓词的真值依赖于个体变元的论域。

谓词逻辑的基本概念

函数

- 谓词逻辑也可引入将个体映射为个体的**函数(函项)**

$$f : D^n \to D$$

-- 不同于谓词(将个体映射为真假值);

-- 函数只能当作个体使用，不能单独使用

例如：若函数$father(x)$表示 x 的父亲，

$P(x)$表示 x是教师，

则$P(father(x))$就表示 x的父亲是教师。

谓词逻辑的基本概念

量词

- **量词**(*quantifier*)用来对个体的数量进行约束;

  常用两个量词:

  全称量词 $\forall$: 表示“对所有…”(*for all* …)

  存在量词 $\exists$: 表示“存在某个…”(*there exists* …)

谓词逻辑的基本概念

全称量词

- 全称量词表达“对**所有**个体**都**…..”

  “**所有**”是对个体数量的一种约束；

  与此同义的还有“**凡是**”、“**一切**”、“**任一**”、 “**每个**”等。

- 基本形式为 $(\forall x)\ P(x)$

  $(\forall x)\ P(x)$为真 *iff* 对论域中所有个体x，$P(x)$都为真

  量词 $(\forall x)$ 后面也可以是任意公式

谓词逻辑的基本概念

存在量词

- 存在量词表达“存在个体使得……”.

  “存在”也是对个体数量的一种约束，即至少有一个；

  与此同义的还有“有”、“某个”、“某些”等。

- 基本形式为：$(\exists x)\ P(x)$

  $(\exists x)\ P(x)$为真 *iff* 论域中至少存在一个个体 x_0 使$P(x_0)$为真。

  量词 $(\exists x)$ 后面可以是任意公式。

谓词逻辑的基本概念

约束变元和自由变元

- $(\forall x)\ P(x)$和 $(\exists x)\ P(x)$中的 x 处于量词的限制之下，称为约束变元；
- $P(x)$中的变元 x 不被量词限制，称为自由变元。

例：$(\forall x)\ P(x) \vee Q(y)$

- 公式中同一个变元可能出现多次，从而可能即是约束变元又是自由变元。

例：$(\forall x)P(x) \vee Q(x)$ → 变元的约束出现和自由出现

不同于$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$!

➡ 这涉及量词的辖域问题

谓词逻辑的基本概念

量词的辖域

- 量词所约束的范围称为量词的**辖域**，即:

  $(\forall x)$ (…辖域…)

  $(\exists x)$ (…辖域…)

- 在 $\forall x$ (或 $\exists x$)的辖域内的自由x都被该量词约束

  例： $(\forall x)(\underline{P(x) \vee Q(x)})$

  例： $(\forall x)(\underline{P(x) \vee (\exists x)\underline{Q(x)}})$

谓词逻辑的基本概念

量词的辖域

例：指出下列公式中的自由变元和约束变元，并指出各量词的辖域

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \wedge Q(z))$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)\, Q(y)) \vee ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(z))$$

谓词逻辑的基本概念

命题形式$P(x)$如何化为命题?

- 假设P含义确定，是谓词常项

  若x用个体常项代入，则$P(x)$ 真假就定了;

  或者将x量化，形如$(\forall x)P(x)$或$(\exists x)P(x)$，这时也确定了真假。

- 命题中是不能有自由变元的。

- **变元易名规则**：约束变元改名不改变命题的真值，即

$$(\forall x)\ P(x) = (\forall y)\ P(y)$$

谓词逻辑的基本概念

一阶谓词逻辑

- **一阶(*first-order*)谓词逻辑：**量词仅作用于个体变元，不允许作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词；

  简称一阶逻辑，记作FOL。

  $(\forall P)\,(P(x) \rightarrow Q(y))$

- 符号约定

命题变项: $p, q, r, \ldots$

个体变项: $x, y, z, \ldots$

个体常项: 单词或 $a, b, \ldots$

谓词变项: $P, Q, R, \ldots$

谓词常项: 单词

函数: $f, g, h, \ldots$

联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词: $\forall, \exists$

括号: ( )

谓词逻辑的基本概念

FOL的合式公式

- 可描述更丰富的推理形式.

① 命题常项、命题变项和原子谓词公式(无联结词)是*wff*;

② 如果α是*wff*, 则$\neg\alpha$也是*wff*;

③ 如果α和β是*wff*, 且无变元 x 在其中一个里是约束的而在另一个里是自由的，则$(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$, $(\alpha\leftrightarrow\beta)$也是*wff*;

注：公式的最外层括号可省略.

④ 如果 α 是*wff*，而 x是α中自由个体变元，则$(\forall x)\alpha$, $(\exists x)\alpha$也是*wff*;

⑤ *wff* 仅限于此；

谓词逻辑的基本概念

合式公式

- 合式公式:

  $\neg p$

  $\neg P(x, y) \lor Q(x, y)$

  $(\forall x)(A(x) \to B(x))$

  $(\exists x)(A(x) \to (\forall y)B(x, y))$

- 非合式公式:

  $(\forall x)P(x) \lor Q(x)$

  $(\exists x)((\forall x)F(x))$

  $(\forall x)P(y)$

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

- 使用FOL表示自然语句，首先分解出谓词，进而使用量词、函数、联结词来构成合式公式。

(1) 所有有理数都是实数

$P(x)$表示有理数
$Q(x)$表示实数

$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

$(\forall x)\ (P(x) \wedge Q(x))$ ×

论域为一切事物的集合

所有…都是…只能用→

(2) 有些实数是有理数

$(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$

$(\exists x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ ×

公式的真假依赖于论域

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

- 使用FOL表示自然语句，首先分解出谓词，进而使用量词、函数、联结词来构成合式公式。

(3) 没有无理数是有理数/无理数都不是有理数

$P(x)$表示无理数
$Q(x)$表示有理数

$$\neg(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow \neg\ Q(x))$$

$$(\forall x)\ (Q(x) \rightarrow \neg\ P(x))$$

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

(4) 设论域是自然数集

令$Eq(x, y)$表示 $x=y$, $s(x)$表示x的后继$x+1$, $p(x)$表示x的前驱$x-1$

i. 对每个数，有且仅有一个后继

$$(\forall x)(\exists y)(Eq(y, s(x)) \land (\forall z)(Eq(z, s(x)) \rightarrow Eq(y, z)))$$

ii. 没有这样的数，0是其后继

$$\neg(\exists x)(Eq(0, s(x)))$$

iii. 除0之外的数，有且仅有一个前驱

$$(\forall x)(\neg Eq(x, 0) \rightarrow (\exists y)(Eq(y, p(x)) \land (\forall z)(Eq(z, p(x)) \rightarrow Eq(y, z))))$$

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

(5) "函数$f(x)$在$[a,b]$上的点x_0处连续"的ε-δ定义

"$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当$|x-x_0|<\delta$时，

恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta)(\delta>0\land(\forall x)(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)))$$

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

(6) 多次量化：如对$P(x, y)$有四种多次量化情形

$$(\forall x)((\forall y)P(x, y)) = (\forall x)(\forall y)P(x, y) = (\forall y)(\forall x)P(x, y)$$

人人爱人人 ＝ 人人被人人爱

$$(\forall x)((\exists y)P(x, y)) = (\forall x)(\exists y)P(x, y) \neq (\exists y)(\forall x)P(x, y)$$

人人都有所爱之人 ≠ 有人被人人爱

$$(\exists x)((\forall y)P(x, y)) = (\exists x)(\forall y)P(x, y) \neq (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

某人爱人人 ≠ 人人都有人爱

$$(\exists x)((\exists y)P(x, y)) = (\exists x)(\exists y)P(x, y) = (\exists y)(\exists x)P(x, y)$$

某人爱某人＝某人被某人爱

谓词逻辑的基本概念

自然语句的形式表示

例1：将下列自然语句符号化

所有的油脂都不溶于水　　$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow \neg\ Q(x))$

只有一个上海　　$(\exists x)\ (P(x) \wedge (\forall y)\ (P(y) \rightarrow Eq(x, y)))$

任何金属都可溶于某种液体中　　$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow (\exists y)\ (Q(y) \wedge R(x, y)))$

例2：将下列公式翻译成自然语句

$P(x)$表示x是有理数，$Q(x)$表示x是实数，$R(x)$表示x是无理数

$\neg\ (\forall x)\ (Q(x) \rightarrow P(x))$　　并非所有实数都是有理数

$(\forall x)\ (Q(x) \rightarrow (P(x)\ \overline{\vee}\ R(x)))$　　任一实数，不是有理数就是无理数

谓词逻辑的基本概念

有限论域下的量词

谓词公式转化成了命题公式

- 若**论域是有限的**，假设用$\{1,2,\ldots,k\}$表示，则

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$$

全称量词$\forall$是合取词$\wedge$的推广

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k)$$

存在量词$\exists$是析取词$\vee$的推广

例：个体域为$\{a, b, c\}$，将下列公式写成命题逻辑公式

$$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(\exists\, x)\,P(x) \rightarrow (\forall y)\,Q(y)$$

谓词逻辑的基本概念

有限论域下的量词

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Longrightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

- 有限论域下多次量化

$\boxed{\exists\text{、}\forall\text{交换不等价}}$

在{1, 2}域上分析多次量化情形

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) = P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(2, 1) \wedge P(2, 2)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x, y) = P(1, 1) \vee P(1, 2) \vee P(2, 1) \vee P(2, 2)$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) = (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$$

$$\begin{aligned}(\forall y)(\exists x)P(x, y) &= (P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2)) \\ &= (\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee (P(1, 1) \wedge P(2, 2)) \\ &\quad \vee (P(1, 2) \wedge P(2, 1))\end{aligned}$$

谓词逻辑的基本概念

谓词公式的解释

- 谓词公式的真假与论域、自由个体变项、命题变项、谓词变项有关。
- 谓词公式的解释*I*包括：

  论域 *D*

  对命题变项指派为{T, F}

  对(自由)个体变项指派为*D*中个体

  对谓词变项指派为*D*上的谓词(关系)

  对函数指派为*D*上的函数

- 谓词公式在解释下有确定的真值.

谓词逻辑的基本概念

谓词公式的解释

考虑对$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(f\ (x), a))$的解释$I$:

论域D指派为$\{1, 2\}$;

个体常项a指派为1;

f 指派为D上函数f^I: $f^I(1)=2$, $f^I(2)=1$;

P指派为D上一元关系$P^I=\{(2)\}$; $P(1)=\mathrm{F}$, $P(2)=\mathrm{T}$;

Q指派为D上二元关系$Q^I=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ $Q(1, 1)=\mathrm{T}$, $Q(1, 2)=\mathrm{T}$

$Q(2, 1)=\mathrm{F}$, $Q(2, 2)=\mathrm{T}$

若x指派为1: $P(1) \rightarrow Q(f\ (1), 1) = \mathrm{T}$

若x指派为2: $P(2) \rightarrow Q(f\ (2), 1) = \mathrm{T}$

所以$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(f\ (x), a))$在$I$下为真.

谓词逻辑的基本概念

谓词公式的真假性

- 谓词逻辑的公式按真假性分为三类

    普遍有效公式

    可满足公式

    不可满足公式

- 真假性依赖于对谓词公式的解释.

谓词逻辑的基本概念

普遍有效的公式

- 如果一个谓词公式在任一解释下都为真，则称为**普遍有效**的(*universally valid*).

普遍有效公式反映了一般逻辑规律.

例如:

$$(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$$

$(\forall x)P(x) \to P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

谓词逻辑的基本概念

可满足的公式

- 如果一个谓词公式在某个解释下为真，则称为**可满足的**.

例如: $(\forall x)P(x)$

取D为{交大20级新生}, P为“高考成绩大于0”

$(\exists x)P(x)$

取D为{交大20级新生}, P为“是女生”

谓词逻辑的基本概念

不可满足的公式

- 如果一个谓词公式在任一解释下都为假，则称为**不可满足的**.

例如:　$(\forall x)(P(x) \land \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \land (\exists y)\neg P(y)$

- 定理：公式α普遍有效 *iff* $\neg\alpha$不可满足

谓词逻辑的基本概念

公式在有限域上的真假性

- 公式若在某k个体域上普遍有效(或可满足)，则在任何k个体域上都普遍有效(或可满足)；

即在有限域上，公式的普遍有效性和可满足性仅依赖于个体域的大小。

- 公式若在k-个体域上普遍有效，则在$(k-1)$-个体域上也普遍有效。(大永真推出小永真)

- 公式若在k个体域上可满足，则在$(k+1)$-个体域上也可满足。(小可满足推出大可满足)

谓词逻辑的基本概念

判定问题

- **判定问题**(*Entscheidungs problem*，或*decision problem*)：
  是否有一个算法，它以某个形式语言的语句(公式)为输入，判断其真假并产生**T**或**F**作为输出。

  Hilbert于1928年提出，但可回溯到Leibniz.

  算法必须是**能行的**(effective)，即可**机械地**逐步进行，在**有穷步**内完成。

谓词逻辑的基本概念

判定问题

- 常常特指FOL的判定问题：即算法地判定一阶逻辑公式是否普遍有效.
- 命题逻辑是可判定的.

  用真值表法可判定是否重言式(永真公式).
- 谓词逻辑是不可判定的（个体域无穷集，谓词设定任意）.
- 只含有一元谓词变项的公式是可判定的.
- 如下两型的公式是可判定的：

  $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\alpha(x_1,\ldots,x_n)$

  $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\alpha(x_1,\ldots,x_n)$
- 个体域有穷时，谓词公式是可判定的.