模拟结构图和状态空间实现

状态空间实现：根据传递函数导出状态空间描述，并常常伴随不同形式的模拟结构图。本质就是找状态变量，从而写出状态方程。

在状态空间分析中，利用模拟计算机的模拟结构图能充分反映状态变量间的相互关系，对建立状态空间表达式很有帮助。由模拟结构图写出状态方程的方法往往使我们得到几种有用的特殊的状态方程的实现形式，称标准型。

基本思路：

（1）基于串并联分解

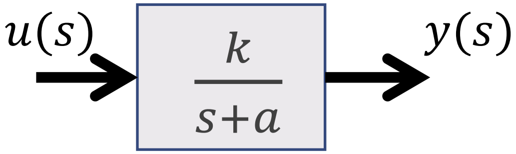
（2）基于部分分式分解

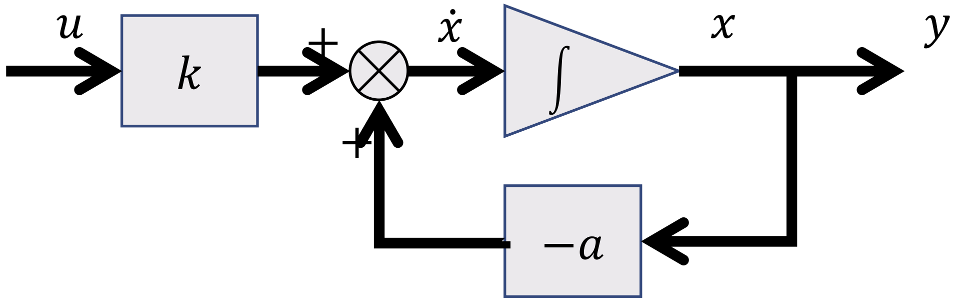
（3）基于积分器串+常值反馈

基于串并联分解

模拟结构图的基本单元的实现：

例如：$G(s)=\frac{k}{s+a}$



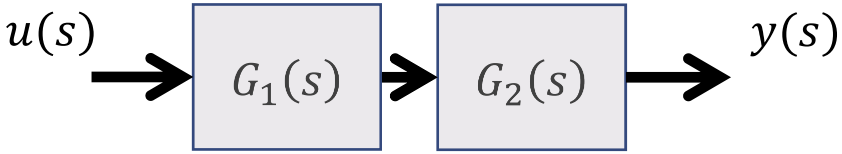


$$y(s)=[ku(s)-ay(s)]s^{-1}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax+ku\\ y=x\end{cases}$$

储能元件（积分器）的输出就是状态变量

串并联分解：框图变换的反过程



基于串并联分解

当系统的描述是以方块图给出时，基于各模块的串并联分解可直接导出相应的状态空间表达式。设给出系统如图1(a)所示，其中z_1、p_1、p_2、p_3、k均为常值，y为输出，u是输入。导出相应的状态空间表达式。

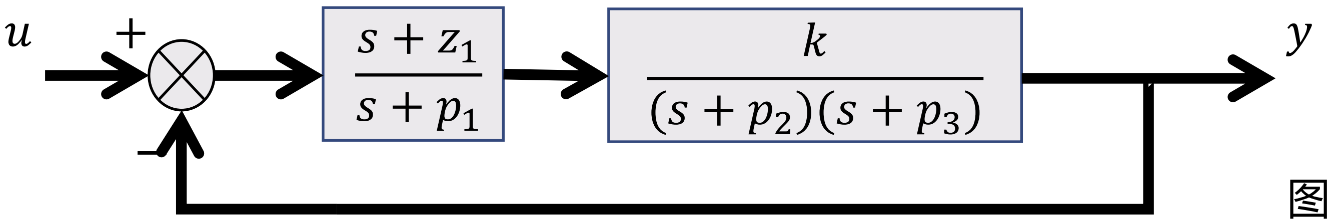


图1(a)

第一步是把各环节的传递函数化为最简形式$\left(\frac{k_i}{s+p_i}\right)$的组合，于是图1(a)可化为图1(b)。

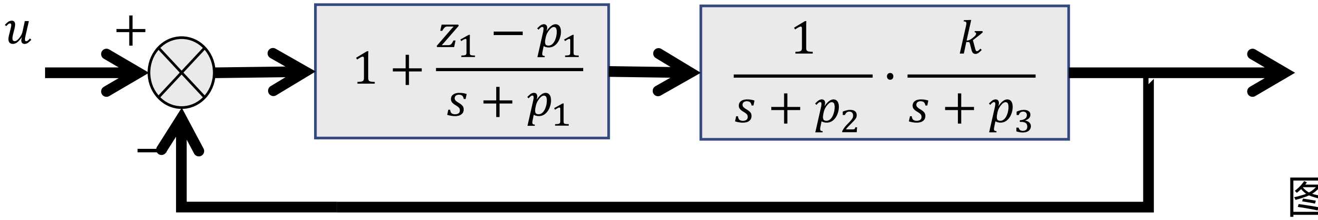


图1(b)

基于串并联分解

第二步是把具有简单函数相加的环节化为单元方块的并联，把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联，从而将图1(b)转化为图1(c)。

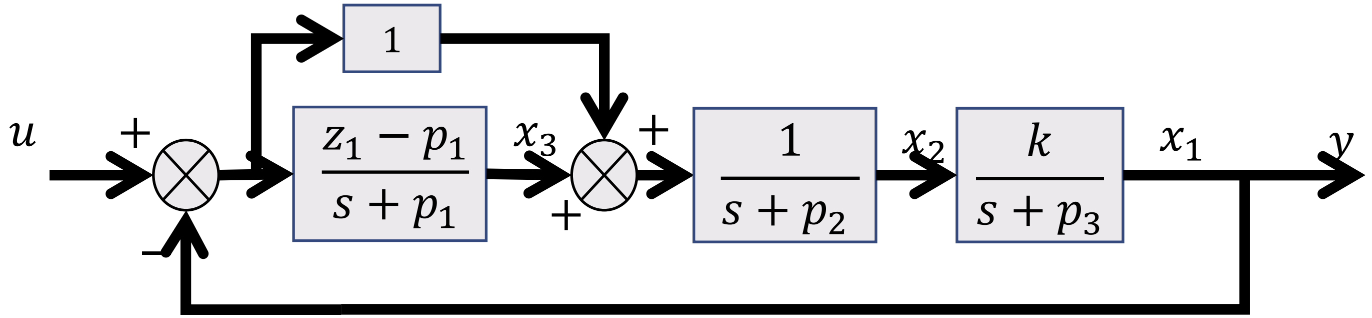


图1(c)

第三步，在图（c）上设置状态变量并列出状态方程和输出方程。

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -p_3x_1 + kx_2 \\
\dot{x}_2 = -x_1 - p_2x_2 + x_3 + u \\
\dot{x}_3 = (p_1 - z_2)x_1 - p_1x_3 + (z_1 - p_1)u
\end{cases}
$$

$$
y = x_1
$$

基于串并联分解

写成矩阵向量的形式即为：$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -p_3 & k & 0 \\ -1 & -p_2 & 1 \\ p_1 - z_1 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 - p_1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] x \end{cases}$

例　　写出图2(a)所示系统的状态方程和输出方程。首先把前向通路的二阶传递函数表示为两个一阶传递函数的串联，如图2(b)所示，然后在图2(b)上设置态变量，并根据图2(b)写出状态空间表达式。

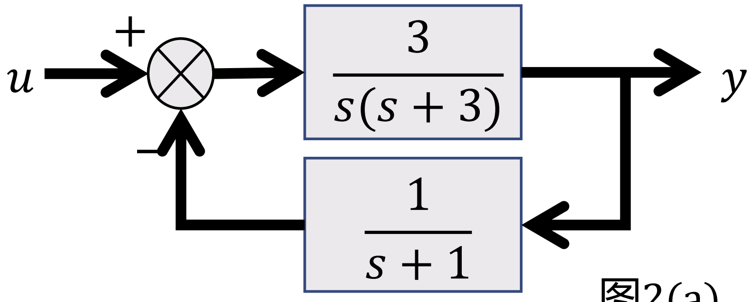


图2(a)

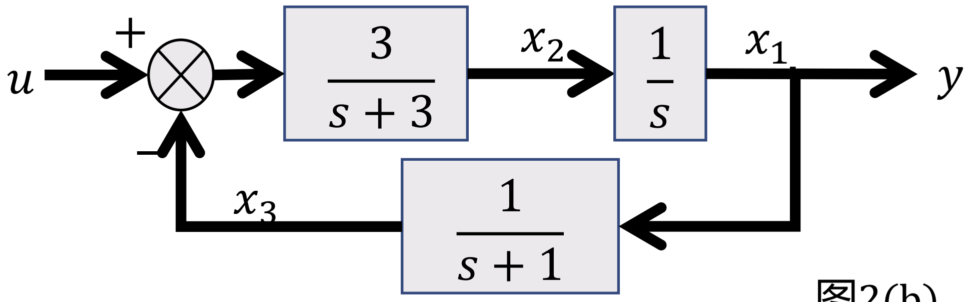


图2(b)

基于串并联分解

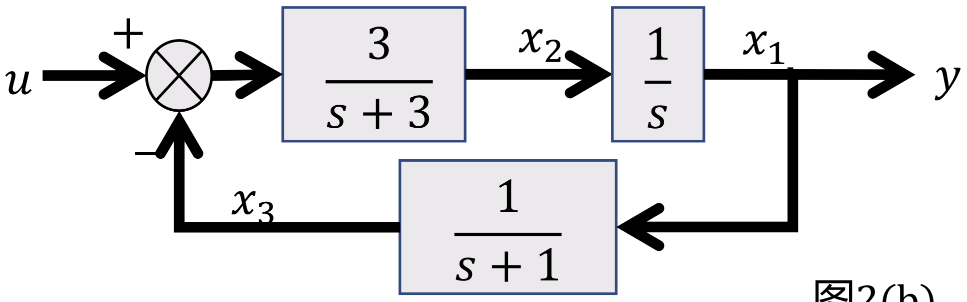


图2(b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 3(-x_3 + u) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

整理并写成向量矩阵形式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

基于部分分式分解

将传递函数展开成部分分式，根据此部分分式画出其模拟结构图，然后由此模拟结构图写出的状态空间表达式是具有一定特点的约当标准型。

设单输入一单输出系统的传递函数如下：

$$g(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

由于系统的特征值有两种情况，一是所有的特征值都是两两相异的；一是有些特征值是相同的。

以下分两种情况分别讨论。

基于部分分式分解

(1) 设传递函数具有两两相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$，则$g(s)$可展开成如下部分分式：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\alpha_1}{s-\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-\lambda_n} + \delta$$

其中：

$$\alpha_i = \lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\cdot g(s) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

而：

$$y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i} u(s) + \delta u(s) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

基于部分分式分解

容易看到，其模拟结构图如 图1 所示。

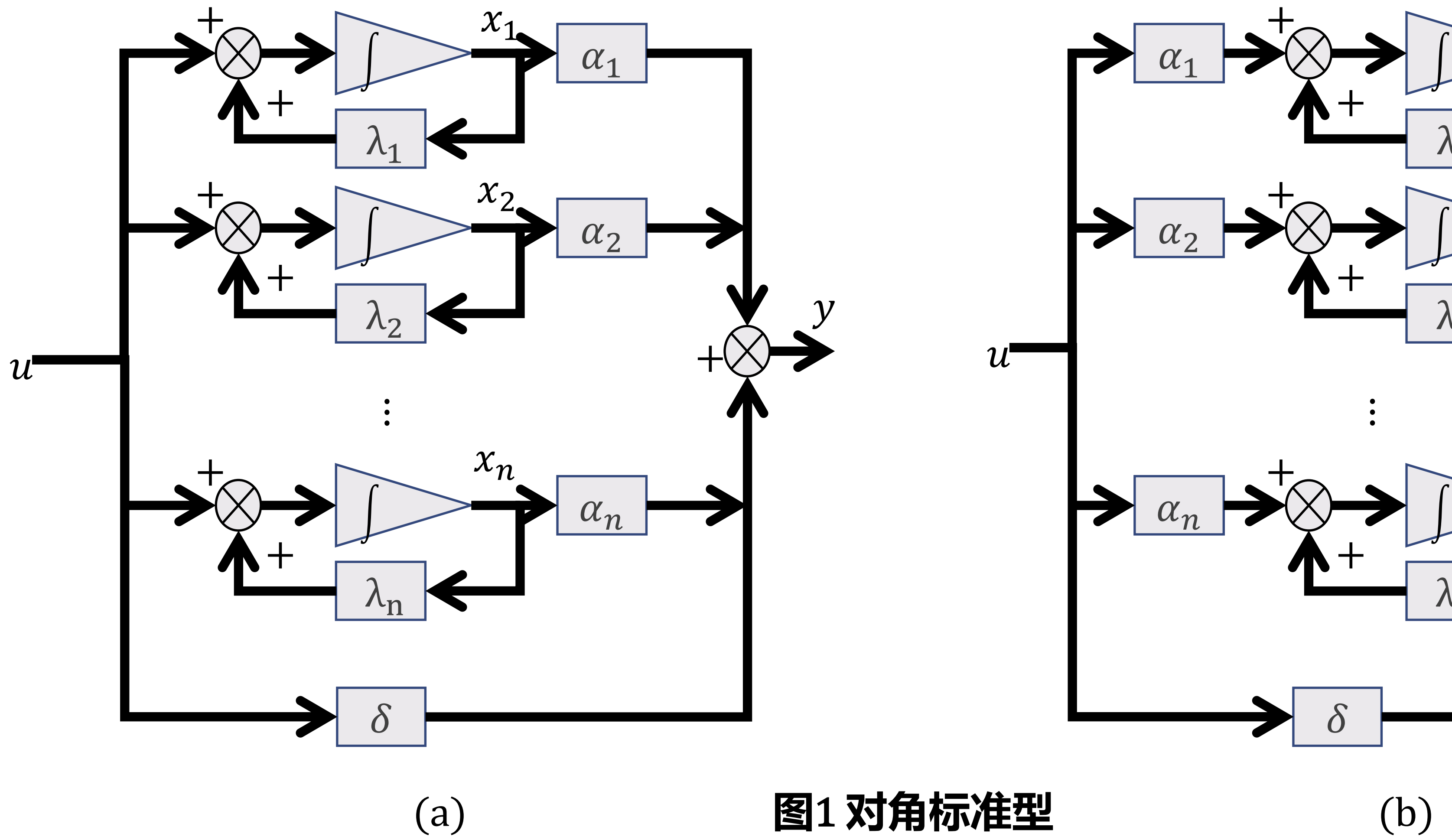


图1 对角标准型

基于部分分式分解

这种结构的显著特点是积分器不再是前后串联形式而是并联形式。

取状态变量如图1所示，则状态方程和输出方程可表示为：

$$
(a)\ \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} x + \delta u \end{cases}
$$

$$
(b)\ \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x + \delta u \end{cases}
$$

基于部分分式分解

两式是互为对偶的，两式的系数矩阵A均为对角矩阵，对角线上各元素是互异的 n 个特征值，故称为对角线标准型或解耦标准型，即变量之间不存在耦合关系。广义地说，它是属于下面介绍的约当标准型：

$$g(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

(2) 考虑特征方程式具有重根的情况。此时，也可以象下面那样用部分分式展开。为了简单起见，设 λ_1 为三重根， $\lambda_4\sim\lambda_n$为互异的根，于是得到：

$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

基于部分分式分解

$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

其中：

$$\begin{cases}\alpha_{13}=\lim\limits_{s\to\lambda_1}[(s-\lambda_1)^3 g(s)] \\ \alpha_{12}=\lim\limits_{s\to\lambda_1}[\frac{d\left((s-\lambda_1)^3 g(s)\right)}{ds}] \\ \alpha_{11}=\frac{1}{2!}\lim\limits_{s\to\lambda_1}[\frac{d^2\left((s-\lambda_1)^3 g(s)\right)}{ds^2}] \\ \alpha_i=\lim\limits_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\cdot g(s) \quad i=4,5,\ldots,n\end{cases}$$

可以画出系统的模拟结构图，如图2所示。在这种结构中，重根分式采取积分器的串联形式，其余的采用积分器并联形式。

基于部分分式分解

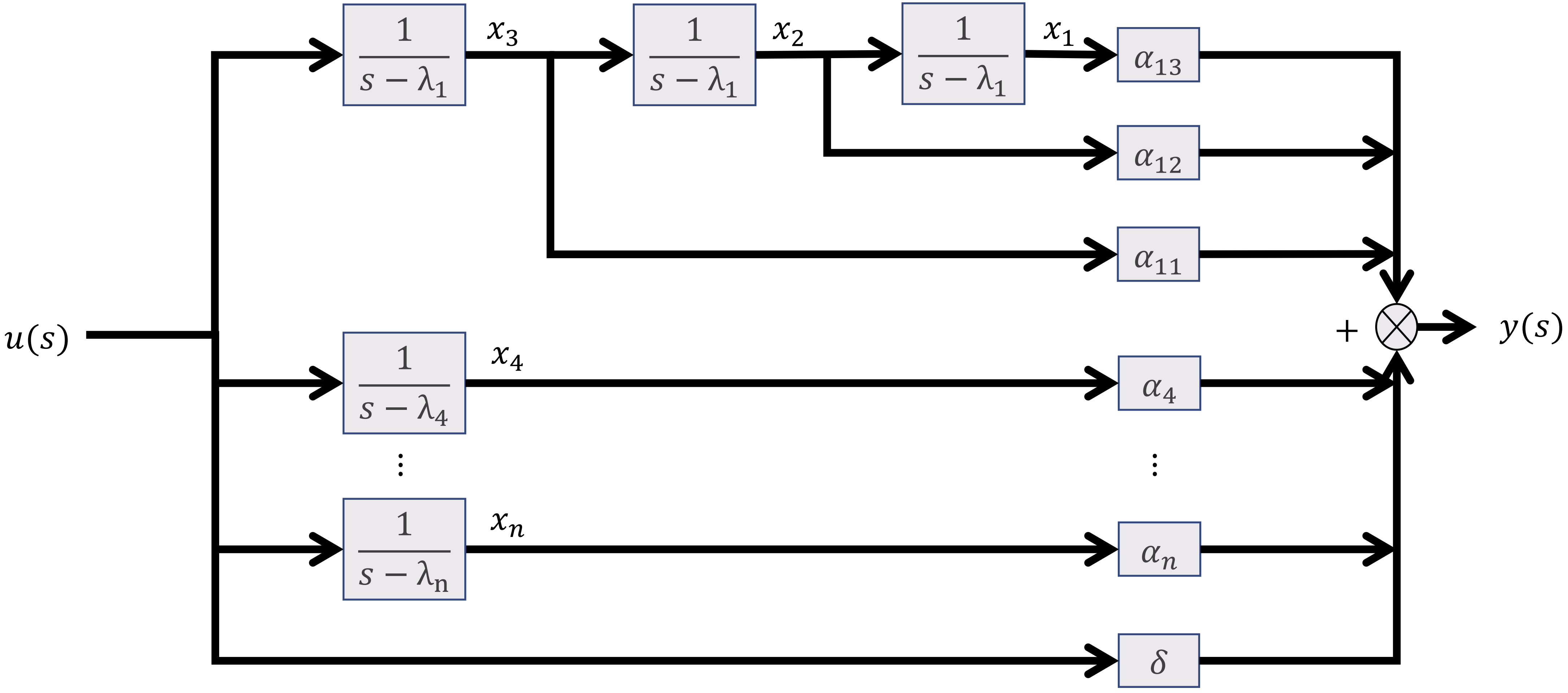


图2　　约当标准型

基于部分分式分解

设置状态变量如上页图2所示，则相应的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u \\ \qquad\quad \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u \end{cases}$$

$$y = \alpha_{13} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{11} x_3 + \alpha_4 x_4 + \cdots + \alpha_n x_n + \delta u$$

基于部分分式分解

写成向量矩阵的形式:

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|cccc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u
$$

$$
y=\begin{bmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}x+\delta u
$$

上式称为约当标准型。

式中对应于重特征根 λ_1 的虚线框块称为约当块。约当块的特点是主对角元素是特征值，主对角线左下方的元素都为零，主对角线右上面，紧靠重根的元素全为1，其余元素均为零。

基于部分分式分解

一个系统有n个多重根，就有n个约当块。

例如一系统含有三重λ_1，二重2以及单重根λ_3和λ_4，则其状态矩阵A为：

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

其中有两个约当块，每个从属于一个特征值。

基于部分分式分解

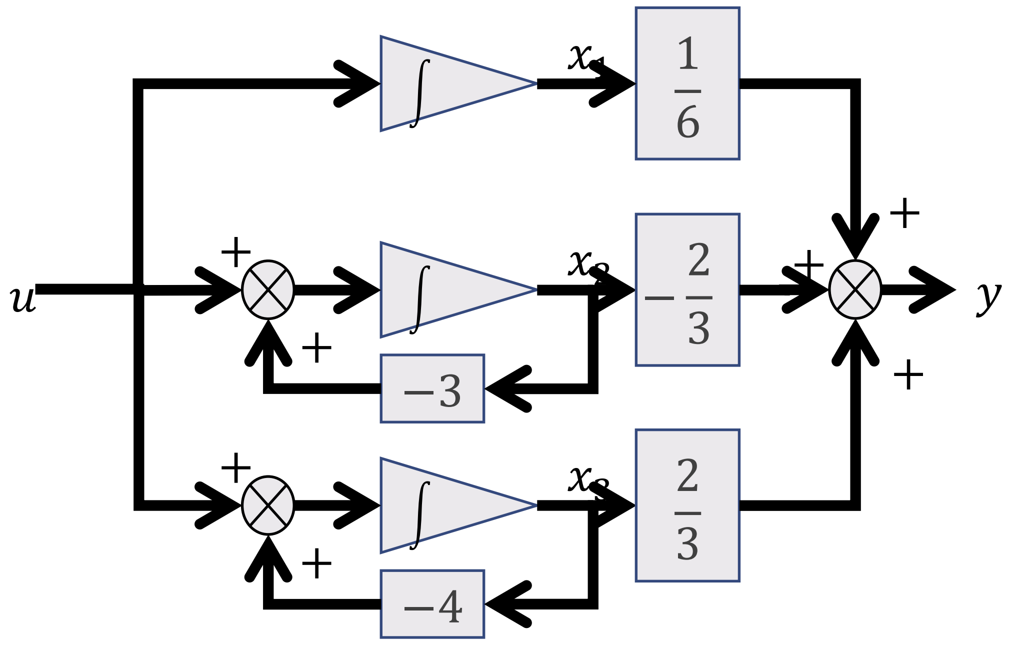
例 设系统的传递函数为：$g(s)=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}=\frac{1}{6s}-\frac{2}{3(s+3)}+\frac{3}{2(s+4)}$

可画出如下图所示的模拟结构图，并在图上设置状态变量。

状态方程及输出方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=-3x_2+u\\ \dot{x}_3=-4x_3+u\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{3}{2}x_3$$



写成向量矩阵形式即为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}x$$

基于积分器串+常值反馈

基于串并联分解或部分分式分解的实现方法，都要求先得到系统的零极点，当系统阶次较高时，有时难以计算。

此时如何建立对应于传递函数的状态空间描述?

基于积分器串+常值反馈

1、能控标准 I 型

为了方便起见，先来看一个三阶微分方程：

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$$

其传递函数为：$g(s)=\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$

上式可变换为：

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=b_0+\frac{(b_1-a_1b_0)s^2+(b_2-a_2b_0)s+b_3-a_3b_0}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$=b_0+\frac{(b_1-a_1b_0)s^{-1}+(b_2-a_2b_0)s^{-2}+(b_3-a_3b_0)s^{-3}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}$$

令：$e(s)=\frac{1}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}u(s)$

则有：$e(s)=u(s)-a_1e(s)s^{-1}-a_2e(s)s^{-2}-a_3e(s)s^{-3}$

基于积分器串+常值反馈

可画出如 图1 所示的模拟结构图：

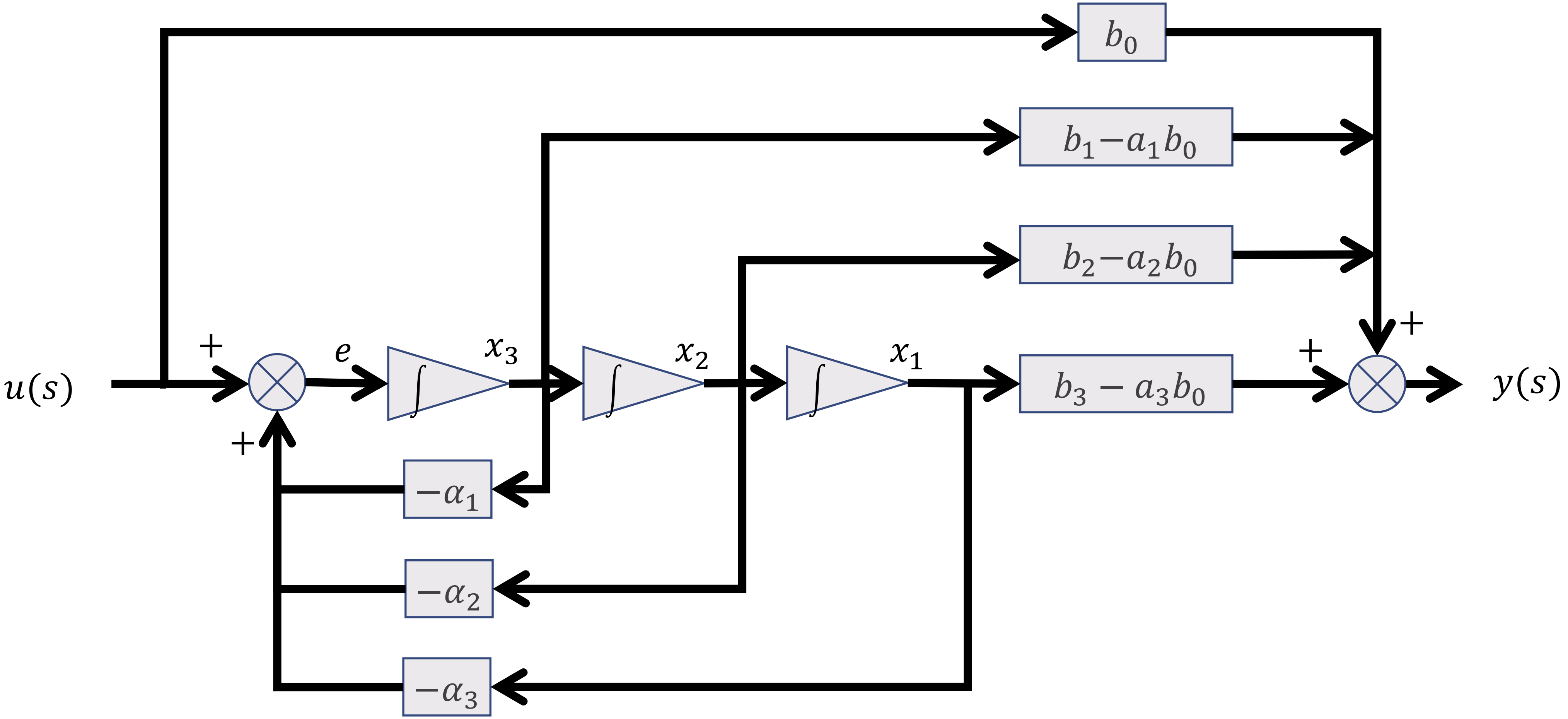


图1 能控标准 I 型

基于积分器串+常值反馈

在图1上设置状态变量，则得状态空间表达式为：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u \\
y = (b_3 - a_3 b_0) x_1 + (b_2 - a_2 b_0) x_1 + (b_1 - a_1 b_0) x_1 + b_0 u
\end{cases}
$$

写成矩阵形式：

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{a}_3 & -\boldsymbol{a}_2 & -\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_0] \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{u}
\end{cases}
$$

基于积分器串+常值反馈

上述这种方法也称为**直接程序法**。扩大到n阶系统，有：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[b_n-a_nb_0 \quad b_{n-1}-a_{n-1}b_0 \quad b_{n-2}-a_{n-2}b_0 \quad \ldots \quad b_1-a_1b_0]x+b_0u$$

具有图1结构或以上结果所示的形式称为**能控标准Ⅰ型**，也称控制器规范型（第二可控规范型）。

一般情况下$b_0=0$

基于积分器串+常值反馈

2、能观标准II型

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

同样以三阶系统为例，将传递函数重写如下：

$$g(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}}$$

则有：$y(s) + a_1 s^{-1} y(s) + a_2 s^{-2} y(s) + a_3 s^{-3} y(s)$

$$= b_0 u(s) + b_1 s^{-1} u(s) + b_2 s^{-2} u(s) + b_3 s^{-3} u(s)$$

进一步：

$$y(s) = b_0 u(s) + [b_1 u(s) - a_1 y(s)]s^{-1} + [b_2 u(s) - a_2 y(s)]s^{-2} + [b_3 u(s) - a_3 y(s)]s^{-3}$$

$$= b_0 u(s) + s^{-1}\{b_1 u(s) - a_1 y(s) + s^{-1}[b_2 u(s) - a_2 y(s) + s^{-1}(b_3 u(s) - a_3 y(s))]\}$$

基于积分器串+常值反馈

用模拟结构图来表示，则可画出下面所示图2：

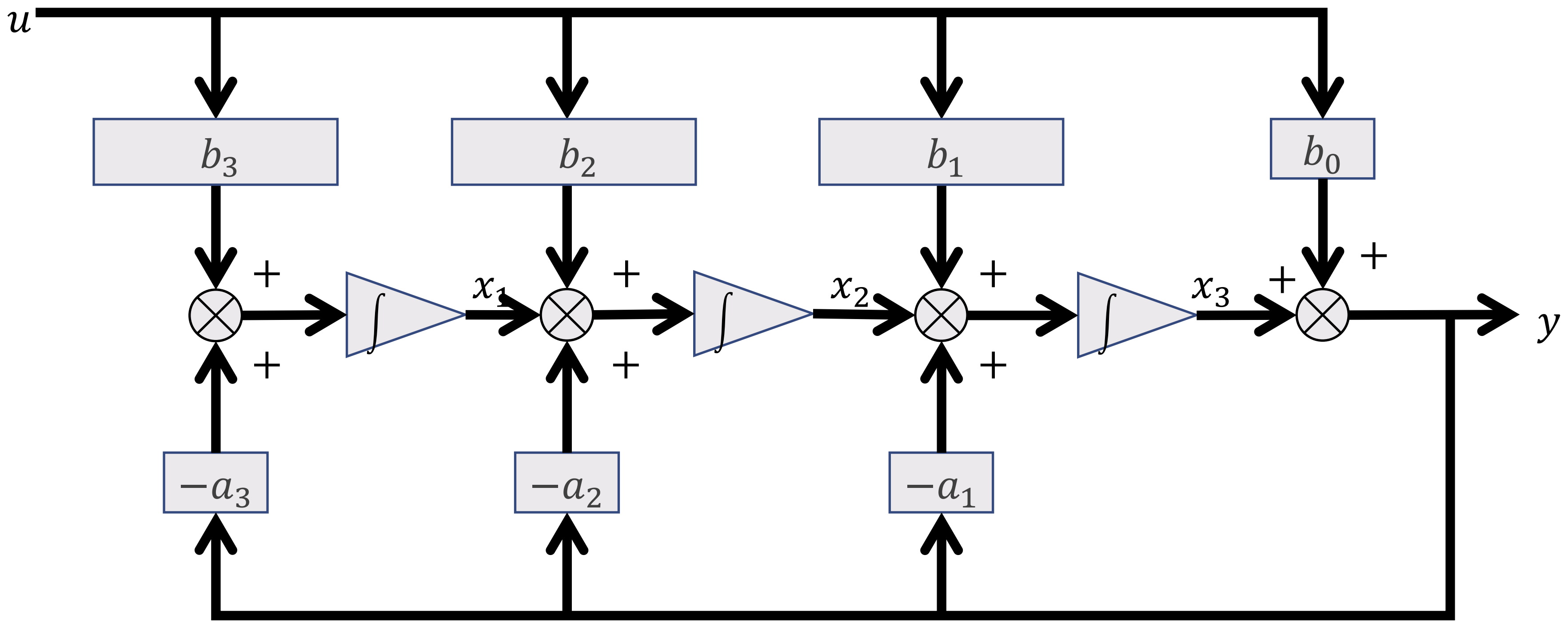
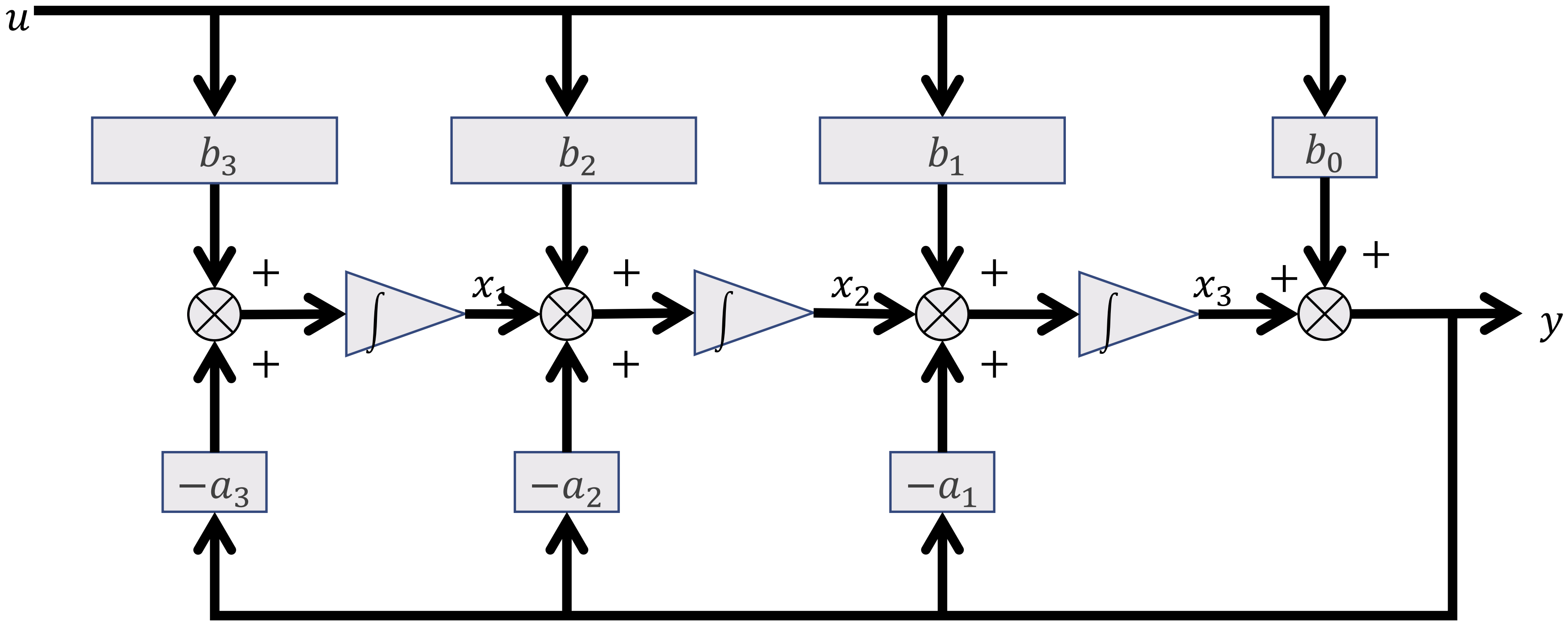


图2 能观标准 II 型

基于积分器串+常值反馈



根据 图2 设置的状态变量，则可以写出状态方程和输出方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3(x_3 + b_0 u) + b_3 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2(x_3 + b_0 u) + b_2 u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1(x_3 + b_0 u) + b_1 u \end{cases}$$

$$y = b_0 u + x_3$$

基于积分器串+常值反馈

将上式重写如下，并加以整理得右下式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -a_3(x_3 + b_0 u) + b_3 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2(x_3 + b_0 u) + b_2 u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1(x_3 + b_0 u) + b_1 u\end{cases}$$
$$y = b_0 u + x_3$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -a_3 x_3 + (b_3 - a_3 b_0)u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2 x_2 + (b_2 - a_2 b_0)\,u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1 x_3 + (b_1 - a_1 b_0)u\end{cases}$$
$$y = b_0 u + x_3$$

将上式写成向量矩阵式得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_0 x$$

上述这种方法称多层积分法。将上式扩展到 n 阶系统：

基于积分器串+常值反馈

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0\\ b_{n-1}-a_{n-1}b_0\\ b_{n-2}-a_{n-2}b_0\\ \vdots\\ b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}x+b_0u$$

具有如上形式或具有 图2 模拟结构的系统称**能观标准 II 型**。

通常能控标准I型，能观标准II型用得较多，以后如不加特殊说明，能控标准型就是指其I型，而能观标准型就是指其II型。

基于积分器串+常值反馈

例　　已知系统的传递函数如下,试写出它的状态空间表达式。

$$g(s)=\frac{3(s+1)}{s^3+4s^2+3s+3}$$

解　　可以应用前述方法中任何一种写出它的状态空间表达式。可以不必画出状态变量图，而直接列写方程。上式中：

$$a_1=4,\ a_2=3,\ a_3=3,\ b_0=0,\ b_1=0,\ b_2=3,\ b_3=3$$

能控标准I型（第二可控规范型）为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

而能观标准II型（第二可观规范型）为上式的对偶形式，即为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$