Упражнения

1. Дайте определения противоположного графа и произведения графов, согласованные с соответствующими определениями для категорий (т. е. так, чтобы функтор U сохранял произведения и переход к противоположному графу).

2. Покажите, что каждый конечный ординал является свободной категорией.

3. Покажите, что каждый граф G порождает свободный группоид F (т. е. удовлетворяющий теореме 1, в которой категория C заменена на группоид F, а категория B — на группоид E). Выведите как следствие, что каждое множество X порождает свободную группу.

Упражнения

1. Покажите, что категория, порожденная графом

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f'"] \\ \cdot \arrow[r, "g'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

с одним соотношением $g'f = f'g$, имеет четыре единичные стрелки и ровно пять неединичных стрелок f, g, f', g' и $g'f = f'g$.

2. Пусть C — группа (рассматриваемая как категория с одним объектом). Покажите, что для каждой конгруэнтности R на C существует нормальная подгруппа N в G такая, что fRg, если и только если $g^{-1}f \in N$.

Упражнения

1. Покажите, как интерпретируются в виде универсальных стрелок следующие известные конструкции:

а) целочисленное групповое кольцо группы (и вообще моноида);

б) тензорная алгебра векторного пространства;

в) внешняя алгебра векторного пространства.

2. Найдите универсальный элемент для контравариантного функтора множества-степени $\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

3. Найдите универсальные стрелки (из данного произвольного объекта) в следующие забывающие функторы: $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab}$ (забывается умножение), $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set}$.

4. Используя лишь универсальность (проекций), докажите следующие теоретико-групповые изоморфизмы:

а) если M, N — нормальные подгруппы в группе G, причем $M \subset N$, то $(G/\mathcal{M})/(N/M) \cong G/M$;

б) если S, N — подгруппы в группе G, вместе порождающие подгруппу SN, причем N нормальна, то $SN/N \cong S/S \cap N$.

5. Покажите, что K-фактормодуль A/S (где S — подмодуль в A) может быть описан в терминах универсальности. Выведите теоремы об изоморфизмах.

6. Опишите факторкольца по двусторонним идеалам колец в терминах универсальности.

7. Покажите, что построение кольца $K[x]$ многочленов над коммутативным кольцом K от переменного x является универсальной конструкцией.

Маклейн 2.7, 2.8, 3.1

Упражнение 1

Опр: Противоположный граф к графу $G=(O,A)$ — это граф $G^{op}=(O,A^{op})$, где $A\simeq A^{op}$ и $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{cod}(f^{op})$, $\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(f^{op})$

Произведение графов G,Γ - граф $G\times\Gamma=(O_G\times O_\Gamma,\ A_G\times A_\Gamma)$, где стрелки выглядят «параллельно»

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}:\ &Cat \longrightarrow Grph \\ &C \rightsquigarrow \mathcal{U}C \\ &C^{op} \rightsquigarrow \mathcal{U}C^{op}=(\mathcal{U}C)^{op} \\ &C\times C' \rightsquigarrow \mathcal{U}(C\times C')=\mathcal{U}C\times\mathcal{U}C' \end{aligned}$$

Упражнение 2

Ординал $\bar{n}$ - категория предпорядка $1\to2\to3\to\dots$, которая является свободной категорией, порождённой графом $1\to2\to3\to\dots\to n$

Упражнение 3

$G=(O,A)\rightsquigarrow G\sqcup G^{-1}=(O,A\sqcup A^{-1})\rightsquigarrow C(G\sqcup G^{-1})\rightsquigarrow C(G\sqcup G^{-1})/_{ff^{-1}=1}=F(G)$

Построим по G граф с дополнительными противоположными стрелками

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "f"] & \bullet \arrow[l, bend left, dashed, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

По $G\sqcup G^{-1}$ строится свободная категория из тех же объектов и цепей стрелок из $G\sqcup G^{-1}$ в виде морфизмов.
Для любой категории C и набору отношений $R_{a,b}$ $\forall a,b$ существует фактор-категория, через которую пропускается любой сохраняющий отношение функтор.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C/R \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & D \end{tikzcd}$$

fRf'

Хочется понять как выглядит $C(G\sqcup G^{-1})/_{ff^{-1}=1}$. Получим эту категорию конструктивно.

Простой редукцией цепи $f\in Mor_{C(G\sqcup G^{-1})}$ называется цепь f_1 полученная удалением из f рядом стоящих противоположных стрелок. Полной редукцией цепи $f\in Mor_{C(G\sqcup G^{-1})}$ называется последовательность простых редукций Ω и цепь $\bar f$: $f\to f_1\to f_2\to\dots\to\bar f$, где $\bar f$ больше не редуцируется. Очевидно, что у каждой полной редукции Ω конечное число звеньев.

Каждая полная редукция приводит к одному и тому же слову $\bar{w}$.
Индукция по длине $|f|$. Картинка

$$\begin{tikzcd} & f_1' \arrow[r] \arrow[dr] & \dots \\ f \arrow[ur] \arrow[dr] & & f_1 \arrow[r] & \dots \\ & f_1'' \arrow[r] \arrow[ur] & \dots \end{tikzcd}$$

Введём отношение конгруэнтности на $C(G\sqcup G^{-1})$

$f,f'\in Mor_{C(G\sqcup G^{-1})}$. $f\sim f' \Leftrightarrow \bar f=\bar f'$

Если $f\sim f'$, то $\overline{hfg}=\overline{h\bar f g}=\overline{h\bar f' g}=\overline{hf'g} \Rightarrow hfg\sim hf'g$

Заметим, что если $f\sim f'$ в конструктивном описании, то $f\sim f'$ в смысле наименьшей конгруэнтности $\Rightarrow$ построенная конструкция - универсальна

Покажем, что стрелка $\langle F(G), G\xrightarrow{i}\mathcal{U}F(G)\rangle$ - универсальная стрелка из G в $\mathcal{U}: Grpd\longrightarrow Grph$, т.е.

$$\begin{tikzcd} F(G) \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ \Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}F(G) \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}\varphi"] \\ G \arrow[r, "s"] & \mathcal{U}\Gamma \end{tikzcd}$$

Пусть такой φ существует. Тогда $\varphi(f_1^{\varepsilon_1}f_2^{\varepsilon_2}\dots f_n^{\varepsilon_n})=\varphi(f_1)^{\varepsilon_1}\dots\varphi(f_n)^{\varepsilon_n}=s(f_1)^{\varepsilon_1}\dots s(f_n)^{\varepsilon_n} \Rightarrow$ ($f_i\in G$, $\varepsilon_i=\pm1$)
$\Rightarrow$ φ - единственный. С другой стороны, если определить φ таким образом, то он будет функтором.

Таким образом по G построен свободный группоид $F(G)$. Как следствие получаем существование свободной группы F_X, порождённой X.

Упражнение 1

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "g'"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, bend left, "f'\circ g"] \arrow[dr, dashed, bend right, "g'\circ f"'] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "g'"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'\circ g = g'\circ f"] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "g'"'] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Отношение $g'\circ f = f'\circ g$; $f, f', g, g' = f, f', g, g'$ – конгруэнция => склеиваются только $f'\circ g$ с $g'\circ f$.

Упражнение 2

C - категорная группа

$C \xrightarrow{P} C/R$

Полный прообраз $1_{C/R}$ - нормальна подгруппа в C, т.к. $P(cNc^{-1}) = P(c)P(N)P(c^{-1}) = 1$

$fRg \iff P(f) = P(g) \iff P(f)P^{-1}(g) = 1 \iff P(fg^{-1}) = 1 \iff fg^{-1} \in N$

Упражнение 1

а) целочисленное групповое кольцо группы (моноида)

Пусть дан моноид $(M, \circ, 1)$, R-ассоциативное кольцо с 1

Построим по нему кольцо функций относительно свёртки – $R^M = \{ f \in R^M \mid \# supp(f) < \infty \}$, где $supp(f) = \{ x \in M \mid f(x) \neq 0 \}$

- $supp(f+g) \subseteq supp(f) \cup supp(g)$
- $supp(f*g) \subseteq supp(f) \circ supp(g)$

операции замкнуты внутри R^M

$(f*g)(x) = \sum\limits_{u\circ v = x} f(u)g(v)$ – имеет смысл, если $\# supp(f) < \infty$ и $\# supp(g) < \infty$

R^M имеет структуру ассоциативного кольца с 1, а также свободного R-модуля с базисом $\bigcup\limits_{m\in M} f_m$, $f_m(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = m \\ 0, \text{ если } x \neq m \end{cases}$

Таким образом R^M - кольцо конечных формальных сумм $\sum\limits_i r_i f_i$ с покоординатным сложением и умножением как у многочленов.

Построим по $M \rightsquigarrow \mathbb{Z}^M = \mathbb{Z}[M]$.

Пусть $\mathcal{U}: Rng \xrightarrow{(\text{ад. моноид})} Mon$ - забывающий функтор. Покажем, что стрелка $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{U}\mathbb{Z}[M]$ с естественным вложением - универсальная стрелка из M в $\mathcal{U}$, т.е.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[M] \arrow[d, "!\varphi"] \\
R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{U}\mathbb{Z}[M] \arrow[d, "\mathcal{U}\varphi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & \mathcal{U}R
\end{tikzcd}
$$

Пусть существует такое φ. Тогда по аддитивности $\varphi\left(\sum\limits_m n_m f_m\right) = \sum\limits_m \varphi(n_m f_m) = \sum\limits_m \varphi(\overbrace{\pm f_m \pm \ldots \pm f_m}^{|n| \text{ раз}}) = \sum\limits_m n\varphi(f_m) = \sum\limits_m n\alpha(m)$ – единственно

С другой стороны, любое отображение базисных элементов $\mathbb{Z}[M]$ в R продолжается до морфизма $\mathbb{Z}$-модулей между аддитивной группы $\mathbb{Z}[M]$ и аддитивной группы R.

$1_{\mathbb{Z}[M]} \rightsquigarrow 1_R$.

Осталось проверить мультипликативность.

$$\varphi(h*g) = \varphi\left(\sum_{m\in M}\left(\sum_{u\circ v = m} h(u)g(v)\right) f_m\right) = \sum_{m\in M}\left(\sum_{u\circ v = m} h(u)g(v)\right)\varphi(f_m) \overset{\text{индукция по } supp(h) \text{ и } supp(g)}{=} \varphi(h)\cdot\varphi(g)$$

Аналогично с группой G и забывающим функтором $\mathcal{U}: Rng \longrightarrow Grp$.

Упражнение 2

$$\mathcal{P}: \mathrm{Set}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set} \qquad X \rightsquigarrow 2^X$$

$$X \xrightarrow{f^{op}} Y \rightsquigarrow \mathrm{Map}(X, \{0,1\}) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Map}(Y, \{0,1\})$$

Универсальный элемент: $\langle \{0,1\}, \{0,1\} \xrightarrow{1} \{0,1\} \rangle$

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d, "f^{op}"] & \mathrm{Map}(\{0,1\}, \{0,1\}) \ni 1 \arrow[d, "-\circ f"] \\ X \arrow[r] & \mathrm{Map}(X, \{0,1\}) \ni f \end{tikzcd}$$

Упражнение 3

1) $\mathcal{U}: \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Grp}$

$$\begin{tikzcd} G^{ab} \arrow[d, "!"] \\ A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & \mathcal{U}G^{ab} \arrow[d] \\ G \arrow[r, "f"'] & \mathcal{U}A \end{tikzcd}$$

$f(G') \subseteq A' = 0 \Rightarrow G' \subseteq \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow f$! пропускается через π.

2) $\mathcal{U}: \mathrm{Rng} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[A] \arrow[d, "!"] \\ M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & \mathcal{U}\mathbb{Z}[A] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & \mathcal{U}M \end{tikzcd}$$

3) $\mathcal{U}: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$

$$\begin{tikzcd} (X, T_d) \arrow[d, "f"] \\ (Y, T_Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & \mathcal{U}(X, T_d) \arrow[d, "\mathcal{U}f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathcal{U}(Y, T_Y) \end{tikzcd}$$

4) $\mathcal{U}: \mathrm{Set}_* \longrightarrow \mathrm{Set}$

$$\begin{tikzcd} X \sqcup \{*\} \arrow[d, "f + (* \mapsto y)"] \\ (Y, y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & X \sqcup \{*\} \arrow[d, "f + (* \mapsto y)"] \\ X \arrow[r, "f"'] & (Y, y) \end{tikzcd}$$

Упражнение 4

а) $M \trianglelefteq N \trianglelefteq G$; $\quad \dfrac{G/M}{N/M} \overset{?}{\simeq} G/N$

$$\begin{tikzcd} G/M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & G/N \arrow[d, dashed, "!\varphi"] \\ G/M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

$f(N/M) = 0$

$\pi([g]_M) = [g]_N \quad (M \trianglelefteq N)$

$\varphi([g]_N) = f([g]_M)$ – корректно

$g \sim g' \Rightarrow g = g'n$; $\quad f([g]_M) = f([g]_M) f([n]_M) = f([gn]_M) = f([g']_M)$

б) $S \leq G$, $N \trianglelefteq G$, $\quad SN/N \simeq S/S \cap N$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & SN/N \arrow[d, dashed, "!\varphi"] \\ S \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

$f,\ f(S \cap N) = 0$

$\pi(s) = \frac{s}{N}$

$\varphi\left(\frac{sn}{N}\right) = f(s)$ – корректно

Упражнение 5

A - K-модуль, $S \trianglelefteq A$ - подмодуль

K-фактормодуль A по S - K-модуль A/S вместе с отображением $\pi: A \longrightarrow A/S$ такой, что для любого K-линейного отображения $f: A \longrightarrow M$ в K-модуль M, где $f(S)=0$ существует единственное K-линейное отображение $\varphi: A/S \longrightarrow M$ и $\varphi \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A/S \arrow[d, dashed, "!\varphi"] \\ A \arrow[r, "{f,\, f(S)=0}"'] & M \end{tikzcd}$$

$$S \trianglelefteq M \trianglelefteq A \Rightarrow \frac{A/S}{M/S} \simeq A/M$$

$$S, M \trianglelefteq A \Rightarrow S+M/M \simeq S/S \cap M$$

Упражнение 6

R - кольцо

$I \trianglelefteq R$ - двусторонний идеал в R

Фактор-кольцо кольца R по идеалу I называется кольцо R/I с морфизмом колец $\pi: R \longrightarrow R/I$ такое, что
Для любого морфизма колец $f: R \longrightarrow K$, где $f(I)=0$ существует единственный морфизм колец $\varphi: R/I \longrightarrow K$ и $\varphi \circ \pi = f$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & R/I \arrow[d, dashed, "!\varphi"] \\ R \arrow[r, "{f,\, f(I)=0}"'] & K \end{tikzcd}$$

Упражнение 7

Рассмотрим категорию $R\text{-alg}_*$ - ассоциативных R-алгебр с 1 над коммутативным ассоциативным кольцом с 1 R с выделенной точкой. Тогда кольцо многочленов $(R[x], x)$ с выделенным мономом x становится универсальным инициальным объектом категории $R\text{-alg}_*$:

$$\begin{tikzcd} (R[x], x) \arrow[d, "!\varphi"] & x \arrow[d, mapsto] \\ (A, *) & * \end{tikzcd} \qquad \varphi = ev_*(-)$$

Это наконец-то объясняет, что такое „x" в многочленах - трансцендентная переменная (в неё подставляется что угодно).