Упражнения после 2 главы

(1) Если $\emptyset \neq A \subseteq I$. Тогда $\exists$ ультрафильтр на $I$ содержащий $A$

$\{A\}$ - fip $\Rightarrow F \overset{A}{\rightsquigarrow} \overline{F} \ni A$

(2) Существует неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$, содержащий все чётные числа / нечётные числа

$\mathcal{F}^{co} \not\ni \mathbb{N}_{2k}, \mathbb{N}_{2k+1}$

$\mathcal{F}^{co}$ - fip

$\mathcal{F}^{co} \cup \mathbb{N}_{2k}$, $\mathcal{F}^{co} \cup \mathbb{N}_{2k+1}$ - fip

Теорема 2.6.1

$\overline{\mathcal{F}}$ - неглавный, ибо если $\mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow I \setminus \mathcal{U} \notin \overline{\mathcal{F}}$, но $\overline{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}^{co}$

(3) Ультрафильтр на конечном множестве обязательно главный.

$\emptyset \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow I \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow \mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}}$

(4) $\mathcal{H} \subseteq P(I)$, $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$

(i) $\mathcal{F}^{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$

(ii) $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ - наименьший из таких

Достаточно показать, что $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ - $\mathcal{H}$-фильтр, и любой фильтр содержащий $\mathcal{H}$ содержит $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$

$\mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{ A \subseteq I : A \supseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n, \ n \in \mathbb{N}, \ B_i \in \mathcal{H} \}$

1) $\forall B \in \mathcal{H} \quad B \supseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$

2) $A \supseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n$
$A' \supseteq B_1' \cap \ldots \cap B_n' \Rightarrow A \cap A' \supseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap B_1' \cap \ldots \cap B_n'$

$A' \supseteq A \supseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n \Rightarrow A' \supseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n$

3) Любой фильтр, содержащий $\mathcal{H}$ имеет такие выражения

(5) $\mathcal{F}$ - собственный фильтр на $I$
(i) $A \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \cup A^c$ - fip
(ii) $\mathcal{F}$ - ультрафильтр $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ - максимальный собственный фильтр на $I$.

i) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ - собственный $\Rightarrow \mathcal{F}$ - fip
$A \notin \mathcal{F}$

$B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap A^c = 0 \Rightarrow B_1 \cap \ldots \cap B_n \in A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ - противоречие

$\Leftarrow$ $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap A^c = 0 \Rightarrow$ не fip

(ii) $\Rightarrow$ - очевидно
$\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ - собственный фильтр, не являющийся ультрафильтром
Тогда $\exists A : A \notin \mathcal{F}$ и $A^c \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \cup \mathcal{F}$ - fip

Тогда фильтр, порождённый $A \cup \mathcal{F}$ больше $\mathcal{F}$ — противоречие с максимальностью.

Упражнения к главе 3

3.3

(1) $\equiv$ - отношение эквивалентности

i) $r \equiv r$, т.к. $[r=r] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$

ii) $r \equiv s \Leftrightarrow s \equiv r$

iii) $r \equiv s \equiv t \Rightarrow [r=s] \cap [s=t] \subseteq [r=t] \Rightarrow [r=t] \subseteq \mathcal{F}$

(2) $r \equiv r'$, $s \equiv s'$

$[r=r'] \cap [s=s'] \subseteq [r+s=r'+s'] \cap [rs=r's'] \Rightarrow r+s \equiv r'+s'$, $rs \equiv r's'$

(3) $[\frac{1}{n}=0] = \varnothing \notin \mathcal{F} \Rightarrow \frac{1}{n} \not\equiv 0$

3.5

(1), (2) - фактически выше

(3) - аналогично

(4) (3) в две стороны

Завершение доказательство с нулем:

$[0] < [r]$, $[0] < [s] \Rightarrow [0<r] \cap [0<s] \subseteq [0<rs] \Rightarrow [0] < [rs]$

$[0<r] \cap [0<s] \subseteq [0<r+s] \Rightarrow [0] < [r]+[s]$

(3.8.1)

Если $[\varepsilon]$ - положительная бесконечно малая, то $[0<\varepsilon] \in \mathcal{F}$

$[\varepsilon<r] \in \mathcal{F}\ \forall r$

Тогда для $[\varepsilon]^{-1}$ выполнено $[0<\varepsilon^{-1}] \in \mathcal{F}$ и $[0<\varepsilon] \cap [\varepsilon<r] \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow [r<\varepsilon^{-1}] \in \mathcal{F}$

3.10 Упражнения по расширению

(1) Если $A$ - конечно, то любая последовательность, почти все члены которой лежат в $A$, обязана содержать бесконечное количество элементов из $A$.
$[r \in A] \in \mathcal{F} \iff [r = a_1] \sqcup \ldots \sqcup [r = a_n] \in \mathcal{F} \Rightarrow [r = a_i] \in \mathcal{F}$, но $a_i$ не может быть таким, что он встречается лишь конечное число раз $\Rightarrow {}^*a_i \equiv r$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow {}^*A \subseteq {}^*B$ - очевидно

$\Leftarrow$ Если $A \supset B$, то $\exists\, b : b \notin A$. Тогда ${}^*b \notin {}^*A$

$A = B \iff A \subseteq B$ и $B \subseteq A$
${}^*A = {}^*B \iff$ — " —

(3) $A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow {}^*A \cup {}^*B \subseteq {}^*(A \cup B)$
${}^*A \cup {}^*B \subseteq {}^*(A \cup B)$ - очевидно

$A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow {}^*(A \cap B) \subseteq {}^*A \cap {}^*B$
$[r] \in {}^*A \cap {}^*B \Rightarrow [r \in A] \cap [r \in B] \in \mathcal{F} \Rightarrow [r] \in {}^*(A \cap B)$

${}^*(A - B) \cap {}^*B = {}^*((A - B) \cap B) = {}^*\varnothing = \varnothing$
${}^*(A - B) \cap {}^*A = {}^*(A - B)$
$\Rightarrow {}^*(A - B) = {}^*A - {}^*B$

(4) ${}^*\mathbb{N} = {}^*\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \right) \supsetneq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^*\{n\} = \mathbb{N}$

(5) $x \in A \Rightarrow x \in {}^*A$ и $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in {}^*A \cap \mathbb{R}$
$x \in {}^*A \cap \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ и $x \in {}^*A \Rightarrow x \in A$

(6) ${}^*[a, b]$ - множество точек, которые почти все лежат в $[a, b]$, т.е. $\{ r \in {}^*\mathbb{R} : [r \in [a, b]] \in \mathcal{F} \} = \{ x \in {}^*\mathbb{R} : a \le x \le b \}$

(7) $\;{}^*\mathbb{Z} \overset{?}{\subseteq} {}^*\mathbb{R}$

$$[z],\ [z'] \in {}^*\mathbb{Z} \Rightarrow [z \in \mathbb{Z}],\ [z' \in \mathbb{Z}] \in \mathcal{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [z \in \mathbb{Z}] \cap [z' \in \mathbb{Z}] \subseteq \begin{matrix} [z - z' \in \mathbb{Z}] \subseteq \mathcal{F} \\ [zz' \in \mathbb{Z}] \subseteq \mathcal{F} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} [z] - [z'] \in {}^*\mathbb{Z} \\ [z] \cdot [z'] \in {}^*\mathbb{Z} \end{matrix}$$

(8) $\;{}^*(\mathbb{R}^+) = ({}^*\mathbb{R})^+$

$$[x] \in {}^*(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow [x > 0] \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [x] > [0] \Leftrightarrow [x] \in ({}^*\mathbb{R})^+$$

3.12

(1) $\;r \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^*f(r) = \langle f(r) \ldots \rangle = f(r)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {}^*\mathbb{R} \arrow[d, "{}^*f"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, hook] & {}^*\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(2) $\;{}^*f([r]) = {}^*f([r']) \Rightarrow [f(r)] = [f(r')] \Rightarrow [f(r) = f(r')] \in$

$$\mathcal{F} \Rightarrow [f(r) = f(r')] \subseteq [r = r'] \in \mathcal{F} \Rightarrow [r] = [r']$$

$\Rightarrow {}^*f$ - инъективна, если $f$ - инъективна.

Пусть $f$ - сюръективна и $[r_n] \in {}^*\mathbb{R}$
Используя аксиому выбора образуем $[f^{-1}(r_n)]$.

Тогда $\;{}^*f([f^{-1}(r_n)]) = [r_n] \Rightarrow {}^*f$ - сюръективна

(3) Надо показать, что

$$|x| = \begin{cases} x & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases} = {}^*|x|$$

$x > 0 \Leftrightarrow [x > 0] \in \mathcal{F} \Rightarrow |x| = x$

$x < 0 \Leftrightarrow [x < 0] \in \mathcal{F} \Rightarrow |x| = -x$

$x = 0 \Leftrightarrow [x = 0] \in \mathcal{F} \Rightarrow |x| = 0$

(4) $\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$

$^*(\chi_A) : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$

$[r_n] \longrightarrow [\chi_A(r_n)]$

$^*(\chi_A) \overset{?}{=} \chi_{^*A}$

$[r_n] \longrightarrow [\chi_A(r_n)] = \begin{cases} 0, \text{ если большинство } = 0 \\ 1, \text{ иначе} \end{cases} = \chi_{^*A}([r_n])$

(5) $f : \mathbb{R}^{\times m} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $^*f : {}^*\mathbb{R}^{\times m} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$

$x = \langle x^1 \ldots x^m \rangle \rightsquigarrow f(x)$ $\qquad$ $\langle [x_n^1] \ldots [x_n^m] \rangle \rightsquigarrow [f(x_n^1 \ldots x_n^m)]$

$x_n^1 \equiv y_n^1 \ \ldots \ x_n^m \equiv y_n^m \Rightarrow \bigcap\limits_i [x_n^i = y_n^i] \subseteq [\langle x_n^1 \ldots x_n^m \rangle = \langle y_n^1 \ldots y_n^m \rangle]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \mathcal{F}$

$\Rightarrow [f(x_n^1 \ldots x_n^m)] = [f(y_n^1 \ldots y_n^m)]$

3.15

(1) $\langle [r^1] \ldots [r^k] \rangle \in {}^*(A_1 \times \ldots \times A_k) \Leftrightarrow [\langle [r^1] \ldots [r^k] \rangle] \in \mathcal{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [r^1] \in \mathcal{F} \ldots [r^k] \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \langle [r^1] \ldots [r^k] \rangle \in {}^*A_1 \times \ldots \times {}^*A_k$

(2) $\langle [r^1], [r^2] \rangle \in {}^*(\operatorname{dom} P) \Leftrightarrow \langle r_n^1, r_n^2 \rangle \in \operatorname{dom} P$ для почти всех $n$
$\Leftrightarrow P\langle r_n^1, r_n^2 \rangle$ для почти всех $n$ $\Leftrightarrow {}^*P\langle [r^1], [r^2] \rangle \Leftrightarrow \langle [r^1], [r^2] \rangle \in \operatorname{dom} {}^*P$

(3) $P(r^1 \dots r^m) \iff r^1 \dots r^m \in A$ и $\exists s: f(r^1 \dots r^m)$

По обобщению (2): ${}^*\mathrm{dom}\, P = \mathrm{dom}\, {}^*P$

${}^*P([r^1] \dots [r^m]) \iff P(r^1_n \dots r^m_n)$ почти для всех $n$, т.е.

$$r^1_n \dots r^m_n \in A \text{ и } \exists\, s_n = f(r^1_n \dots r^m_n) \text{ почти для всех } n$$

$$\Updownarrow$$

$$[r^1] \dots [r^m] \in {}^*A \text{ и } \exists\, [s] = {}^*f([r^1] \dots [r^m])$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle [r^1] \dots [r^m] \rangle \in \mathrm{dom}\, {}^*f$$

Но $\mathrm{dom}\, P = \mathrm{dom}\, f$

Значит ${}^*\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, {}^*f$