

Упражнения

1. Покажите, что если в категории коммутативных колец диаграмма $R \rightarrow R \otimes S \leftarrow S$ с отображениями $r \mapsto r \otimes 1, 1 \otimes s \leftarrow s$ определяет копроизведение.

2. Покажите, что если в категории всегда существуют (бинарные) копроизведения и коуравнители, то в ней всегда существуют и универсальные квадраты. Примените этот результат в случаях **Set**, **Grp** и **Top**.

3. В категории **Matr_K** из § 1.2 опишите коуравнитель двух $m \times n$ -матриц A, B (т. е. двух стрелок $n \rightarrow m$ в этой категории).

4. Опишите копроизведения (и покажите, что они существуют) в категориях **Cat**, **Mon** и **Grph**.

5. Пусть E — отношение эквивалентности на множестве X . Покажите, что множество классов эквивалентности X/E можно описать через понятие коуравнителя в категории **Set**.

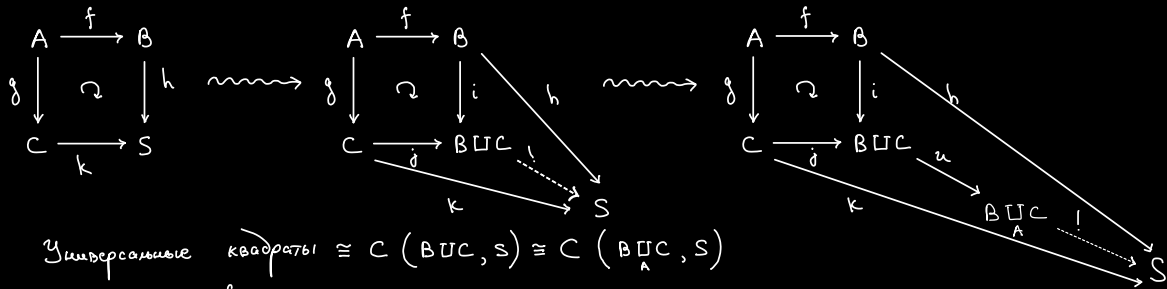
6. Покажите, что для объектов a и b категории C существует копроизведение, если и только если функтор $C(a, -) \times C(b, -) : C \rightarrow \mathbf{Set}$ представим. Используйте соответствие $c \mapsto C(a, c) \times C(b, c)$.

7. (Каждая абелева группа является копределом своих конечно порожденных подгрупп.) Пусть A — абелева группа, J_A — предпорядок, состоящий из всех конечно порожденных подгрупп $S \subset A$, упорядоченных по включению. Покажите, что A является копределом очевидного функтора $J_A \rightarrow \mathbf{Ab}$. Обобщите этот факт.

Маклейн 3.2

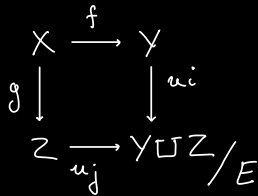
Упражнение 1 (См. «Произведения»)

Упражнение 2



Универсальные квадраты $\cong C(B \sqcup C, S) \cong C(B \sqcup_A C, S)$

Set



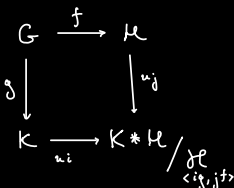
$E = \bigcap_{\mathcal{H}} \mathcal{H}$, где \mathcal{H} - отношение эквивалентности, содержащее все пары $\langle i f(x), j g(x) \rangle$

Grp

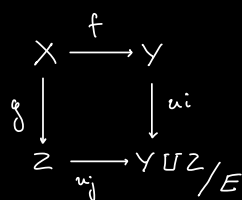
Произведение в Grp - свободное произведение

Когравитель: $G \xrightarrow[f]{g} H \xrightarrow{u} H / \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \bigcap_{\langle i f(x), j g(x) \rangle} N$, где N - нормальная подгруппа, для которой $f(x) \sim g(x) \forall x \in G$.

Универсальный квадрат:



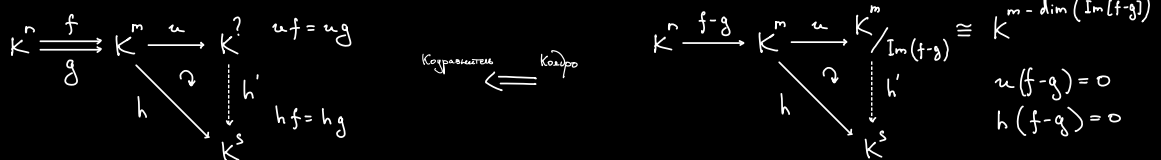
Top



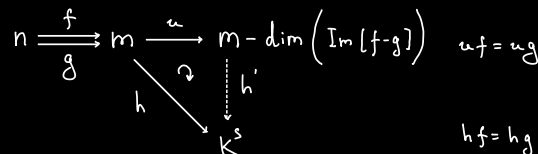
$E = \bigcap_{\mathcal{H}} \mathcal{H}$, где \mathcal{H} - отношение эквивалентности, которое содержит все пары $\langle i f(x), j g(x) \rangle$

Упражнение 3

Когравитель в Matr_K . $\text{Matr}_K \cong \text{Vect}_K^I$, где объекты только K^n , $n \in \mathbb{N}_0$. Удобнее работать в Vect_K^I , чтобы показать что должно быть объектами в паре кофра.



Получим образом,



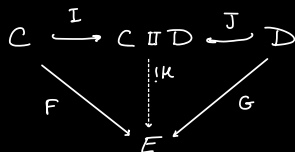
$h f = h g$

Упражнение 4

$$\underline{\text{Cat}} \quad C, D \rightsquigarrow C \amalg D$$

$$\text{Ob}(C \amalg D) = \text{Ob}(C) \amalg \text{Ob}(D)$$

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{C \amalg D}(c, c') &= \text{Mor}_C(c, c') & \text{Mor}_{C \amalg D}(c, d) &= \emptyset = \text{Mor}_{C \amalg D}(d, c) \\ \text{Mor}_{C \amalg D}(d, d') &= \text{Mor}_D(d, d') \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} h_c &= f_c, & h_d &= g_d \\ h_f &= f_f, & h_g &= g_g \end{aligned}$$

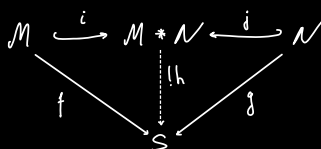
h - функтор

$$c \xrightarrow{f} c' \quad d \xrightarrow{g} d'$$

Так определяются $C \amalg D$ стандартная категория

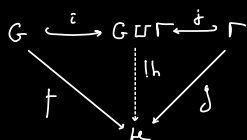
$$\underline{\text{Mon}} \quad M, N \rightsquigarrow M * N$$

Из элементов множеств M, N построим множество всех возможных слов с операцией конкатенации и с пустым словом. Полученное множество отобразим по отношению эквивалентности, где два слова эквивалентны если и только если отбрасываются на единицы. Такое отношение эквивалентности будет согласовано с операцией.



$$\begin{aligned} h(w) &= h(m_1 n_1 m_2 m_3 \dots) = f(m_1) g(n_1) f(m_2) f(m_3) \dots \\ h(\epsilon) &= e_s \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Grph}} \quad G, \Gamma \rightsquigarrow G \amalg \Gamma; \quad \begin{aligned} O(G \amalg \Gamma) &= O(G) \amalg O(\Gamma) \\ A(G \amalg \Gamma) &= A(G) \amalg A(\Gamma) \end{aligned}$$

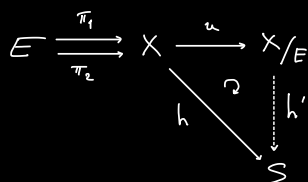


$$\begin{aligned} h(q) &= f(q) \\ h(r) &= g(r) \\ h\left(\begin{smallmatrix} s \\ g \end{smallmatrix}\right) &= \begin{smallmatrix} f(s) \\ f(g) \end{smallmatrix} \end{aligned}$$

$$h\left(\begin{smallmatrix} e \\ r \end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix} g(e) \\ g(r) \end{smallmatrix}$$

Упражнение 5

$$\begin{aligned} E &\subseteq X \times X \\ \pi_1(x \sim y) &= x \\ \pi_2(x \sim y) &= y \end{aligned}$$



$$u\pi_1 = u\pi_2$$

$$\begin{aligned} h'([x]) &= h(x) - \text{корректно, ибо если } x \sim x', \text{ то } (x, x') \in E \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = h(x') \end{aligned}$$

Упражнение 6

Необходимость - параграф

Достаточность:

Пусть $C(a, -) \times C(b, -) \cong C(a \amalg b, -)$, т.е. Функтор $C(a, -) \times C(b, -)$ - представим

Докажем, что $a \amalg b$ - копроизведение a, b . Воспользуемся естественностью диаграмм:

$$\begin{array}{ccc}
 a \sqcup b & C(a \sqcup b, a \sqcup b) & \longrightarrow C(a, a \sqcup b) \times C(b, a \sqcup b) \\
 \downarrow h & \downarrow & \begin{array}{ccc} i_{a \sqcup b} & \xrightarrow{\quad} & i \times j \\ \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow h \times h_j \\ h & \xrightarrow{\quad} & h i \times h j \end{array} \\
 c & C(a \sqcup b, c) & \longrightarrow C(a, c) \times C(b, c)
 \end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{i} a \sqcup b & \xleftarrow{j} b \\
 \searrow f = h i & \downarrow \parallel h & \swarrow h j = g \\
 & c &
 \end{array}$$

Упражнение 7

$$\begin{array}{l}
 \Delta: A^b \rightarrow A^b \\
 F: J_A \rightarrow A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & F & \xrightarrow{\quad} \Delta A \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 G & & \Delta G
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F_i & \xrightarrow{F_u} & F_j \\
 \downarrow i & & \downarrow j \\
 & A &
 \end{array}$$

← предельный конус?

$$\begin{array}{ccc}
 F_i & \xrightarrow{\quad} & F_j \\
 \downarrow f_i & \searrow & \swarrow f_j \\
 & A & \\
 \downarrow h & & \\
 & G &
 \end{array}$$

Поскольку любой элемент $x \in A$ лежит в своей единственной конечно порождённой подгруппе $\langle x \rangle \triangleleft A$, то множество конечно порождённых подгрупп в A содержащих x не пусто. Тогда h есть и существует, то определено однозначно ($h(x) = f_{\langle x \rangle}(x)$). Докажем, что $h(x) = f_{N \cap N'}(x)$ - корректно. Действительно, если есть две подгруппы в A : $N, N' \triangleleft A$, $N \ni x$ то $N \cap N' \triangleleft A$ - тоже конечно порождённая подгруппа в A и $N \cap N' \ni x$. Тогда имеется такая часть конуса:

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xleftarrow{x} N \cap N' & \xrightarrow{\quad} N' \\
 \downarrow f_N & \searrow & \swarrow f_{N'} \\
 & A & \\
 \downarrow h & & \\
 & G &
 \end{array}$$

$$f_N(x) = f_{N \cap N'}(x) = f_{N'}(x)$$

Значит h задано корректно

$$h(x+y) = f_{\langle x,y \rangle}(x+y) = f_{\langle x,y \rangle}(x) + f_{\langle x,y \rangle}(y) = h(x) + h(y)$$

$$h \in \text{Hom}_{\text{Grp}}$$

Таким образом, $A = \varinjlim F$

Обобщение этой конструкции имеет место на любых категориях: Top, Met, Grp, Grph, A-Mod, Ring, Cat...
Например тот же конусол получается если заменить A^b на Grp.