Упражнения

1. Пусть функторы $K, K' : D \to \mathbf{Set}$ имеют представления $\langle r, \psi \rangle$ и $\langle r', \psi' \rangle$ соответственно. Докажите, что для каждого естественного преобразования $\tau : K \dot{\to} K'$ существует единственный морфизм $h : r \to r'$ из D такой, что

$$\tau \circ \psi = \psi' \circ D(h, -) : D(r, -) \dot{\to} K'.$$

2. Сформулируйте утверждение, двойственное к лемме Йонеды (с заменой D на D^{op}).

3. (Kan; «лемма ко-Йонеды».) Пусть $K : D \to \mathbf{Set}$ — функтор; $(* \downarrow K)$ — категория элементов $x \in Kd$; $Q : (* \downarrow K) \to D$ — проекция $x \in Kd \mapsto d$; $a : (* \downarrow K) \to D$ при любом $a \in D$ — диагональный функтор, образом которого является константа a. Установите естественный изоморфизм

$$\mathrm{Nat}\,(K, D(a, -)) \cong \mathrm{Nat}\,(a, Q).$$

4. (Естественность не затрагивается при расширении категории-кообласти.) Пусть E — полная подкатегория в E', а $J : E \to E'$ — соответствующее вложение. Докажите для функторов $K, L : D \to E$, что $\mathrm{Nat}\,(K, L) \cong \mathrm{Nat}\,(JK, JL)$.

Маклейн 3.2

Упражнение 1

$\psi: D(r,-) \cong K \qquad \tau: K \dot\to K'$

$\psi': D(r',-) \cong K' \qquad D(h,-): D(r,-) \dot\to D(r',-)$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f"'] \\ d' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(r,d) \arrow[r, "-\circ h"] \arrow[d, "f\circ -"'] & D(r',d) \arrow[d, "f\circ -"] \\ D(r,d') \arrow[r, "-\circ h"'] & D(r',d') \end{tikzcd} \qquad r' \xrightarrow{h} r$$

$\tau \cdot \psi = \psi' \cdot D(h,-) \Rightarrow D(h,-) = \psi'^{-1} \cdot \tau \cdot \psi$ ($D(h,-)$ единственно в силу обратимости ψ')

По лемме Йонеды $\underset{\tau \longmapsto \tau_r 1_r}{Nat(D(r,-), K) \cong K_r}$. Значит стрелка $h = (\psi'^{-1}_r \cdot \tau_r \cdot \psi_r)(1_r)$

Упражнение 2

Пусть $D(-,r): D^{op} \to Set$ – главный контрвариантный функтор (из D^{op} он, конечно, ковариантный)
и $K: D^{op} \to Set$ – произвольный функтор

Построим естественный изоморфизм $\underset{\tau \longmapsto \tau_r 1_r}{Nat(D(-,r), K) \cong K_r}$

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, "f^{op}"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(r,r) \arrow[rr] \arrow[dd, "-\circ f"'] & & Kr \arrow[dd, "K_{f^{op}}"] \\ & \begin{tikzcd} 1_r \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \tau_r 1_r \arrow[d] \\ f \arrow[r, mapsto] & K_{f^{op}}(\tau_r 1_r) \end{tikzcd} & \\ D(d,r) \arrow[rr] & & Kd \end{tikzcd}$$

$K_{f^{op}}$ – компонента τ определена образом 1_r в τ_r

По элементу $u \in Kr$ можно построить естественное преобразование $\tau^u: D(-,r) \dot\to K$, который действует так: $D(d,r) \xrightarrow{\tau_d} Kd$; $\tau_d(f) = K_{f^{op}}(u)$. Легко проверить, что такая компонента действительно задаёт естественное преобразование.

Два построенных отображения $y: Nat(D(-,r),K) \to Kr$ и $y^{-1}: Kr \to Nat(D(-,r),K)$ обратны друг к другу.
Таким образом, имеется изоморфизм $Nat(D(-,r),K) \cong Kr$, который будет естественным для функторов $E, N: Set^{D^{op}} \times D^{op} \to Set$, где E – функтор вычисления, а N – функтор, который считает все $Nat(D(-,r),K)$

Упражнение 3 (лемма ко-Йонеды)

$K: D \to Set$ – функтор
$(* \downarrow K)$ – категория запятой (категория элементов,)
$Q: (* \downarrow K) \to D$ – проекция
$\Delta a: (* \downarrow K) \to D$ при любом $a \in D$ – диагональный функтор, образом которого является константа a

$$Nat(K, D(a,-)) \cong Nat(a, Q)$$

Пусть задан $\tau: K \dot\to D(a,-)$, т.е.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "h"'] \\ d' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Kd \arrow[r, "\tau_d"] \arrow[d, "Kh"'] & D(a,d) \arrow[d, "D(a,h)"] \\ Kd' \arrow[r, "\tau_{d'}"'] & D(a,d') \end{tikzcd}$$

Построим $\sigma: \Delta a \dot\to Q$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ Kd \arrow[rr, "Kh"'] & G & Kd' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\tau_d(f(*))"] \arrow[d, "1_a"'] & d \arrow[d, "h"] \\ a \arrow[r, "\tau_{d'}(f'(*))"'] & d' \end{tikzcd}$$

Наоборот, пусть задан $\sigma : \Delta a \xrightarrow{\cdot} Q$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ Kd \arrow[rr, "Kh"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & & Kd' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\sigma_d(f)"] \arrow[d, "1_a"'] & d \arrow[d, "h"] \\ a \arrow[r, "\sigma_{d'}(f')"'] & d' \end{tikzcd}$$

Построим $\tau : K \xrightarrow{\cdot} D(a,-)$

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[r, mapsto] & \sigma_d(f) \\ d \arrow[d, "h"'] & Kd \arrow[r] \arrow[d, "Kh"'] & D(a,d) \arrow[d, "h\circ"] \\ d' & Kd' \arrow[r] & D(a,d') \\ & f' \arrow[r, mapsto] & \sigma_{d'}(f') \end{tikzcd}$$

Таким образом, эти построения обратны друг к другу $\Rightarrow$ $Nat(K, D(a,-)) \cong Nat(\Delta a, Q)$

Упражнение 4

$J : E \to E'$ – унивалентный полный функтор.

Полнота: $Hom_{E'}(Jd, Jd') = Hom_{JE}(Jd, Jd')$

Унивалентность: $Jf = Jf' \Rightarrow f = f'$

$Nat(K, L) \cong Nat(JK, JL)$?

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & E \arrow[r, bend left, "J"] \arrow[r, bend right, "J"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_J"] & E' \end{tikzcd}$$

$Nat(K, L) \xrightarrow{\varphi} Nat(JK, JL)$

$\tau \longmapsto 1_J \circ \tau \; ; \; (1_J \circ \tau)(d) = J\tau(d)$

$Nat(JK, JL) \xrightarrow{\varphi^{-1}} Nat(K, L)$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f"'] & JKd \arrow[r, "\tau d"] \arrow[d, "JK_f"'] & JLd \arrow[d, "JL_f"] \\ d' & JKd' \arrow[r, "\tau d"'] & JLd' \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} d \arrow[d, "f"'] & Kd \arrow[r, "\tau'_d"] \arrow[d, "K_f"'] & Ld \arrow[d, "L_f"] \\ d' & Kd' \arrow[r, "\tau'_{d'}"'] & Ld' \end{tikzcd}$$

Поскольку функтор J – полный функтор, то для τ_d и $\tau_{d'}$ существуют стрелки τ'_d и $\tau'_{d'}$ такие, что $J\tau'_d = \tau_d$ и $J\tau'_{d'} = \tau_{d'}$

Пусть τ' – не натуральное преобразование, т.е. $\exists$ стрелка $d \xrightarrow{f} d'$:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f"'] & Kd \arrow[r, "\tau'_d"] \arrow[d, "K_f"'] \arrow[dr, phantom, "\cancel{\circlearrowleft}"] & Ld \arrow[d, "L_f"] \\ d' & Kd' \arrow[r, "\tau'_d"'] & Ld' \end{tikzcd}$$

Но что это означало бы? Что $\tau'_{d'} \circ K_f \neq L_f \circ \tau'_d$, но $J(\tau'_{d'} \circ K_f) = \tau_{d'} \circ JK_f = JL_f \circ \tau_d = J(L_f \circ \tau'_d)$ – противоречие с унивалентностью.

Таким образом $\varphi\varphi^{-1} = 1$ и $\varphi^{-1}\varphi = 1$, т.е. $Nat(K, L) \cong Nat(JK, JL)$