Упражнения

1. Покажите, что если в категории коммутативных колец диаграмма $R \to R \otimes S \leftarrow S$ с отображениями $r \mapsto r \otimes 1, 1 \otimes s \leftarrow s$ определяет копроизведение.

2. Покажите, что если в категории всегда существуют (бинарные) копроизведения и коуравнители, то в ней всегда существуют и универсальные квадраты. Примените этот результат в случаях **Set**, **Grp** и **Top**.

3. В категории $\mathbf{Matr}_K$ из § 1.2 опишите коуравнитель двух $m \times n$-матриц A, B (т. е. двух стрелок $n \to m$ в этой категории).

4. Опишите копроизведения (и покажите, что они существуют) в категориях **Cat**, **Mon** и **Grph**.

5. Пусть E — отношение эквивалентности на множестве X. Покажите, что множество классов эквивалентности X/E можно описать через понятие коуравнителя в категории **Set**.

6. Покажите, что для объектов a и b категории C существует копроизведение, если и только если функтор $C(a, -) \times C(b, -) : C \to \mathbf{Set}$ представим. Используйте соответствие $c \mapsto C(a, c) \times C(b, c)$.

7. (Каждая абелева группа является копределом своих конечно порожденных подгрупп.) Пусть A — абелева группа, J_A — предпорядок, состоящий из всех конечно порожденных подгрупп $S \subset A$, упорядоченных по включению. Покажите, что A является копределом очевидного функтора $J_A \to \mathbf{Ab}$. Обобщите этот факт.

Маклейн 3.2

Упражнение 1 (См. «Копроизведение»)

Упражнение 2

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & S \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, "h"] & \\ C \arrow[r, "j"] \arrow[drr, "k"'] & B \sqcup C \arrow[dr, dashed, "!"] & \\ & & S \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "i"] \arrow[ddrr, "h"] & & \\ C \arrow[r, "j"] \arrow[ddrr, "k"'] & B \sqcup C \arrow[dr, "u"] & & \\ & & B \sqcup_A C \arrow[dr, dashed, "!"] & \\ & & & S \end{tikzcd}$$

Универсальные квадраты $\cong C(B \sqcup C, S) \cong C(B \sqcup_A C, S)$

Set

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "ui"] \\ Z \arrow[r, "uj"'] & Y \sqcup Z / E \end{tikzcd}$$

$E = \bigcap_{\mathcal{H}} H$, где H – отношение эквивалентности, содержащее все пары $\langle if(x), jg(x) \rangle$

Grp Копроизведение в Grp – свободное произведение

Коуравнитель:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & H \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & H / \mathcal{H}_{\langle f,g \rangle} \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

, $\mathcal{H}_{\langle f,g \rangle} = \bigcap N$, где N – нормальная подгруппа, для которой $f(x) \sim g(x)$ $\forall x \in G$.

Универсальный квадрат:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[d, "uj"] \\ K \arrow[r, "ui"'] & K * H / \mathcal{H}_{\langle ig, jf \rangle} \end{tikzcd}$$

Top

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "ui"] \\ Z \arrow[r, "uj"'] & Y \sqcup Z / E \end{tikzcd}$$

$E = \bigcap_{\mathcal{H}} H$, где H – отношение эквивалентности, которое содержит все пары $\langle if(x), jg(x) \rangle$

Упражнение 3

Коуравнитель в $Matr_K$. $Matr_K \cong Vect^!_K$, где объекты только K^n, $n \in \mathbb{N}_0$. Удобнее работать в $Vect^!_K$, чтобы понять что должно быть объектом в паре коядра.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & K^m \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & K^? \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & K^s \end{tikzcd} \quad \begin{array}{l} uf = ug \\ hf = hg \end{array}$$

Коуравнитель $\Longleftarrow$ Коядро

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f-g"] & K^m \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & K^m / Im(f-g) \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & K^s \end{tikzcd} \cong K^{m - \dim(Im[f-g])}$$

$u(f-g) = 0$

$h(f-g) = 0$

Таким образом,

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & m \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & m - \dim(Im[f-g]) \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & K^s \end{tikzcd} \quad \begin{array}{l} uf = ug \\ hf = hg \end{array}$$

Упражнение 4

<u>Cat</u> $\quad C, D \rightsquigarrow C \amalg D \qquad Ob(C \amalg D) = Ob(C) \amalg Ob(D)$

$$\underset{C \amalg D}{Mor}(c, c') = \underset{C}{Mor}(c, c') \qquad \underset{C \amalg D}{Mor}(c, d) = \varnothing = \underset{C \amalg D}{Mor}(d, c)$$

$$\underset{C \amalg D}{Mor}(d, d') = \underset{D}{Mor}(d, d')$$

Так определённое $C \amalg D$ становится категорией

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook, "I"] \arrow[dr, "F"'] & C \amalg D \arrow[d, dashed, "!H"] & D \arrow[l, hook', "J"'] \arrow[dl, "G"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

$$H_c = F_c, \quad H_d = G_d$$

$$H_f = F_f, \quad H_g = G_g$$

$$c \xrightarrow{f} c' \qquad d \xrightarrow{g} d'$$

H - функтор

<u>Mon</u> $\quad M, N \rightsquigarrow M * N$

Из элементов моноидов M, N построим множество всевозможных слов с операцией конкатенации и с пустым словом. Полученное множество отфакторизую по отношению эквивалентности, где два слова эквивалентны если и только если отличаются на единицы. Такое отношение эквивалентности будет согласовано с операцией.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & M * N \arrow[d, dashed, "!h"] & N \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$$h(w) = h(m_1 n_1 m_2 m_3 \dots) = f(m_1)\, g(n_1)\, f(m_2)\, f(m_3) \dots$$

$$h() = e_S$$

<u>Grph</u> $\quad G, \Gamma \rightsquigarrow G \amalg \Gamma; \quad O(G \amalg \Gamma) = O(G) \amalg O(\Gamma)$

$$A(G \amalg \Gamma) = A(G) \amalg A(\Gamma)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & G \amalg \Gamma \arrow[d, dashed, "!h"] & \Gamma \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

$$h(g) = f(g)$$

$$h(r) = g(r)$$

$$h\left(\underset{g}{\cdot} \xrightarrow{s} \underset{g'}{\cdot}\right) = \underset{f(g)}{\cdot} \xrightarrow{f(s)} \underset{f(g')}{\cdot}$$

$$h\left(\underset{r}{\cdot} \xrightarrow{e} \underset{r'}{\cdot}\right) = \underset{g(r)}{\cdot} \xrightarrow{g(e)} \underset{g(r')}{\cdot}$$

Упражнение 5

$E \subseteq X \times X$

$\pi_1(x \times y) = x$

$\pi_2(x \times y) = y$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & X/E \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & & S \end{tikzcd}$$

$u\pi_1 = u\pi_2$

$h'([x]) = h(x)$ - корректно, ибо если $x \sim x'$, то $(x, x') \in E \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x) = h(x')$

Упражнение 6

Необходимость - параграф

Достаточность:

Пусть $C(a,-) \times C(b,-) \overset{\cdot}{\cong} C(a \amalg b, -)$, т.е. Функтор $C(a,-) \times C(b,-)$ - представим

Докажем, что $a \amalg b$ - копроизведение a, b. Воспользуемся естественностью биекции:

$$\begin{tikzcd} a \amalg b \arrow[d, "h"] \\ c \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C(a \amalg b, a \amalg b) \arrow[r] \arrow[d] & C(a, a\amalg b) \times C(b, a \amalg b) \arrow[d] \\ C(a \amalg b, c) \arrow[r] & C(a, c) \times C(b, c) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1_{a\amalg b} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & i \times j \arrow[d, squiggly] \\ h \arrow[r, squiggly] & hi \times hj \end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f = hi"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "!h"] & b \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "hj = g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Упражнение 7

$\Delta : Ab \longrightarrow Ab^{J_A}$

$F : J_A \longrightarrow A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "!"'] \\ G \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\cdot"] \arrow[dr, "\cdot"'] & \Delta A \arrow[d, dashed, "\cdot"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \Delta G \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, hook, "F_u"] \arrow[dr, "i"'] & & F_j \arrow[dl, "j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$\longleftarrow$ предельный конус?

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, bend right, "f_i"'] & & F_j \arrow[dl, "j"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\ & A \arrow[d, dashed, "!h"] & \\ & G & \end{tikzcd}$$

Поскольку любой элемент $x \in A$ лежит в своей циклической конечнопорождённой подгруппе $\langle x \rangle \triangleleft A$, то множество конечнопорождённых подгрупп в A содержащих x не пусто. Тогда h если и существует, то определено однозначно $\left(h(x) = f_{\langle x \rangle}(x) \right)$. Докажем, что $h(x) = f_{N \triangleleft A}(x)$ - корректно. Действительно, если есть две подгруппы в A: $N, N' \triangleleft A$, $N \ni x$, то $N \cap N' \triangleleft A$ - тоже конечно порождённая подгруппа в A и $N \cap N' \ni x$. Тогда имеется такая часть конуса:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr] \arrow[ddr, "f_N"'] & \overset{x}{N \cap N'} \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & N' \arrow[dl] \arrow[ddl, "f_{N'}"] \\ & A \arrow[d, dashed, "h"] & \\ & G & \end{tikzcd}$$

$f_N(x) = f_{N \cap N'}(x) = f_{N'}(x)$

Значит h задано корректно

$h(x+y) = f_{\langle x,y \rangle}(x+y) = f_{\langle x,y \rangle}(x) + f_{\langle x,y \rangle}(y) = h(x) + h(y)$

$h \in Hom_{Grp}$

Таким образом, $A = \underrightarrow{Lim}\, F$

Обобщение этой конструкции имеет место на любые категории: Top, Met, Grp, Grph, R-Mod, Rng, Cat...
Например тот же копредел получается если заменить Ab на Grp.