第 30 卷 第 3 期
2 0 1 3 年 9 月

经 济 数 学
JOURNAL OF QUANTITATIVE ECONOMICS

Vol. 30, No. 3
Sep. 2 0 1 3

基于股价服从对数正态分布的凯利投资策略*

陆士杰，杨朝军
（上海交通大学 安泰经济与管理学院，上海 200052）

摘 要 基于集中投资策略的思想，把股票价格服从对数正态分布与凯利优化模型相结合，使其能更好地运用于股票投资实践中，推导出投资者个股投资的资产配置比例与投资者对个股投资收益率和标准差预测值之间的数学关系，从而实现最快财富增长速率的目标.

关键词 凯利优化模型；对数正态分布；最优投资比例；财富增长速率

中图分类号 F830.59 **文献标识码** A

The Investment Strategy of Kelly Criterion Based on the Stock Price Following Lognormal Distribution

LU Shi-jie, YANG Chao-jun
(*Antai College of Economics and Management*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200052, *China*)

Abstract Based on the idea of centralized investment strategy, we combined the stock price following lognormal distribution with Kelly Criterion, so that it can be used in stock investment more effectively. In order to achieve the fastest wealth growth rate, we deduced the mathematical relationship between the optimal investment proportion and the expectation return and standard deviation of a stock.

Key words Kelly Criterion; lognormal distribution; optimal investment proportion; wealth growth rate

1 引 言

集中投资策略作为股票投资中的主流策略之一源于一种极为简单的思想：在大概率事件上下大赌注. 即在市场非完全有效的前提下，寻找少数最具投资价值的股票，将注意力集中在这些股票上，密切关注和研究，然后对它们进行大量集中投资，这样不仅能获得超额收益，反而会降低风险. 目前，集中投资策略已经得到了理论的论证.

Kelly(1956)提出了凯利优化模型[1]，为集中投资策略提供了理论支持. 对于服从二项分布的赌博游戏，即只有成功和失败两种结果的游戏，如果成功则赢得双倍赌注，概率为 q，若失败则输掉全部赌注，那么理性的玩家每次下注比例应为 $b = 2q - 1$，从而使自身财富获得最快增长.

Breiman(1961)对凯利优化模型进行了扩展[2]，对于任意给定的固定财富目标，凯利策略使实现这一目标所需的游戏次数渐进最少；对于每次获胜概率不相同的赌博游戏，凯利策略同样适用. Thorp 则在实践中证明了凯利优化模型，把凯利优化模型分别运用到了 21 点游戏(1966)[3]，其他赌博游戏(1969)[4]和现代组合理论(1972)[5].

Rotando 和 Thorp(1992)证明了基于连续分布运用凯利优化模型得出的财富增长速率存在唯一最大值，根据凯利优化模型投资者应该把资产的

* 收稿日期：2013-06-10
作者简介：陆士杰(1987—)，男，重庆人，金融学硕士研究生
E-mail：lushijie6@gmail.com

117%长期投资于标普500指数，即投资者应该以无风险利率借贷17%的资金来投资[6].

Ziemba (2005) 提出对投资大师们具有右偏属性的资产组合进行评估应该用基于夏普比率的一般正态分布进行修正，并深入讨论了凯恩斯、巴菲特、索罗斯等投资大师们对凯利优化策略的运用[7]. Fuller (2006)[8] 和 Lee (2006)[9] 则分别讨论了Morningstar和Motley Fool对凯利优化模型的运用.

Poundstone (2005) 的《财富公式》一书详细介绍了投资者在投资实践中面临的一些限制，如对多资产面临的多因素难以理解，短期风险，交易成本等，使得完全凯利优化策略难以实施[10].

Thorp(2006)讨论了完全凯利优化策略对于许多投资者具有过高风险，而采用"部分凯利优化策略"，即 $f = cf^*$ $(0 < c < 1)$，对他们更加合适[11]. MacLean, Ziemba 和 Blazenko(1992)讨论了实际情况可能甚至会差于投资者预计的最差情况，如果投资者按照自己的预计情况来进行完全凯利优化策略投资，他将会面临高风险低收益，部分凯利优化策略则能起到一定的保护作用[12]. Nassim Nicholas Taleb(2007)在《黑天鹅》中指出人们倾向于忽视那些具有重大影响力的偶然事件产生的影响，这些事件将显著地降低最优投资比例，如果不考虑它们，投资者同样将面临投资比例过高的风险[13].

MacLean, Ziemba 和 Li (2005)[14], MacLean, Thorp, Zhao 和 Ziemba (2011)[15]对完全和部分凯利优化投资策略进行了讨论. MacLean, Thorp 和 Ziemba(2010)对凯利优化模型优势和劣势以及凯利优化模型的理论和实践进行了全面分析[16].

本文在以上研究的基础上，基于集中投资策略的思想对凯利优化模型进行了优化，使其能更好地运用于股票投资实践中，把股票价格服从对数正态分布与凯利优化模型相结合，推导出投资者个股投资的资产配置比例与投资者对个股投资收益率的期望和标准差预测值之间的数学关系，从而实现最快财富增长速率的目标. 本文主要创新点在于把股票价格服从对数正态分布的假设引入到了凯利优化模型，代替原有的二项分布假设(只有成功和失败两种结果)，使得基于凯利优化模型的集中投资策略更加适用于股票投资.

2 标准凯利优化模型

凯利优化模型是一种服从二项分布的赌博游戏的最优下注策略. 所谓服从二项分布的赌博游戏，即玩家未来只面临两种结果"成功"和"失败"；如果成功，玩家获得双倍赌注，概率为 $q > 50\%$；如果失败玩家将输掉所下赌注. 假设玩家每次下注比例为 b，那么他第 n 次游戏后的财富期望值

$$E(V_n) = [1 + (2q - 1)b]^n \cdot V_0.$$

因为 $q > 50\%$，这是一个期望收益为正的赌博游戏对玩家有利，$E(V_n)$ 是下注比例 b 的单调递增函数，所以如果玩家的目标是获得最大期望收益，那么他应该每次游戏都进行全额下注，即 $b = 100\%$，$\max_{b=1} E(V_n) = (2q)^n V_0$.

如果玩家在一次游戏中进行全额下注，他有 q 的概率使自己的财富翻倍，但同时他也面临概率为 $(1-q)$ 的破产风险. 运用这一下注策略进行 n 次游戏后，他面临破产风险的概率为 $(1 - q^n)$，当 n 足够大时有 $\lim_{n\to\infty}(1 - q^n) = 1$，即如果他玩足够多次游戏，他几乎肯定会破产，这不会是他所希望的. 因此，仅仅实现最大化期望收益的下注策略并不是一个理想的策略.

Kelly(1956)在"对信息率的新理解"一文中首次提出了一个渐进的优化策略，实现财富的最快增长速率，这就是后来被集中投资者广泛运用的凯利优化投资策略，权衡了最大期望收益率和最小破产风险两个目标. 凯利定义的财富增长速率为

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \frac{V_N}{V_0}.$$

对于前面所描述的服从二项分布的赌博游戏，玩家进行 N 次游戏后总财富为

$$V_N = (1 + f)^W (1 - f)^L V_0.$$

其中，W 和 L 分别表示 N 次赌博中赢和输的次数，那么：

$$G(f) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{W}{N}\ln(1 + f) + \frac{L}{N}\ln(1 - f)\right]$$
$$= q\ln(1 + f) + (1 - q)\ln(1 - f).$$

对上式求导有：

$$G'(f) = \frac{q}{1 + f} - \frac{1 - q}{1 - f} = \frac{2q - 1 - f}{(1 + f)(1 - f)},$$
$$= 0$$

即 $f = f^* = 2q - 1$；对上式二阶求导有：

$$G''(f) = \frac{-f^2 + 2f(2q - 1) - 1}{(1 - f^2)^2} < 0.$$

所以，为了实现最快财富增长速率，每次下注的比例应为 2 倍成功概率减 1，即：

$f = 2q - 1.$

对应的最快财富增长速率为：

$G(f) = q\ln q + (1-q)\ln(1-q) + \ln 2.$

$G(f)$ 函数图形见图 1.

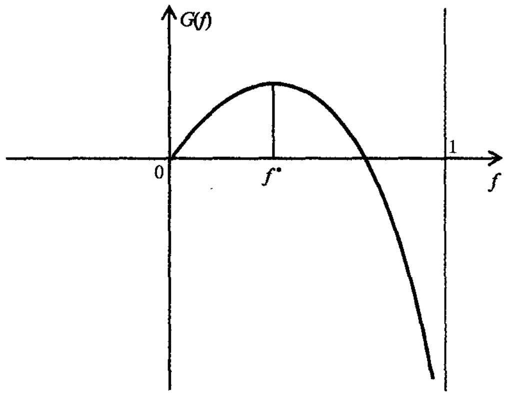

图 1 $G(f)$函数图形

假如玩家获胜的概率为 60%，那么他的最优下注策略为每次下注比例为 20%，对应的最快财富增长速率为 $G(0.2) = 0.0201$. 因此，进行 N 次游戏之后玩家的财富将为 $V_n = \exp(0.0201 \cdot N) \cdot V_0$

3 基于股票价格服从对数正态分布的凯利优化模型

标准凯利优化模型仅仅是对服从二项分布的赌博游戏的最优下注策略进行了分析和讨论. 但是在股票投资实践中，投资者面临的未来股票价格可能性远不止两种结果，标准凯利优化模型难以直接运用于股票投资实践中. 本文则基于股票价格服从对数正态分布的假设把凯利优化模型运用到了股票投资实践中.

3.1 研究假设

3.1.1 假设股票价格遵循几何布朗运动

根据 Black-Scholes 期权定价公式假设，股票价格服从漂移系数和波动系数均为常数的几何布朗运动，即

$dS = \mu S dt + \sigma S dz.$

其中，S 表示股票价格，μ 表示股票在单位时间内以连续复利表示的期望收益率（又称预期收益率），σ 表示证券收益率单位时间的标准差，简称证券价格的波动率，z 遵循标准布朗运动. 因此，这是一个漂移率为 μS 、方差为 $\sigma^2 S^2$ 的 Itô 过程，也被称为几何布朗运动.

从经济学意义上讲，股票价格服从几何布朗运动，可以表示为股价受两种因素共同作用：一种因素是股票期望收益率的漂移作用 $\mu S dt$ ，另一种因素是股价受随机作用力的冲击作用 $\sigma S dz$（见图 2）.

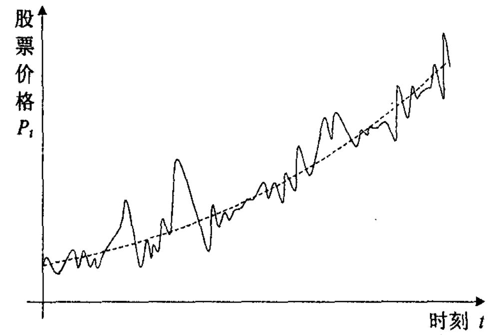

图 2 遵循几何布朗运动的股票价格走势图

根据 Itô 引理推导股票价格自然对数 $\ln S$ 遵循的随机过程：$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$ ，可以得出结论，遵从几何布朗运动的股票价格服从对数正态分布，即：

$$\ln \frac{S_T}{S_t} \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right).$$

3.1.2 假设不允许买空和卖空

运用凯利优化模型达到最优目标是一个概率渐进的过程，适用于长期投资. 然而，现在 A 股市场上买空和卖空机制仍不完善健全，融资融券成本较高，从长期投资来看投资者不宜进行融资融券. 因此，本文假设投资者在股票投资过程中不允许买空和卖空，即个股的投资比例满足：$f \in [0,1]$.

3.2 模型设计

股票价格服从对数正态分布，即股票价格的概率密度函数（见表 3）为

$$f\left(\frac{s}{s_0}\right) = \frac{1}{(s/s_0)\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\ln(s/s_0) - \mu}{2\sigma^2}\right),$$

$(s/s_0) \in (0, +\infty).$

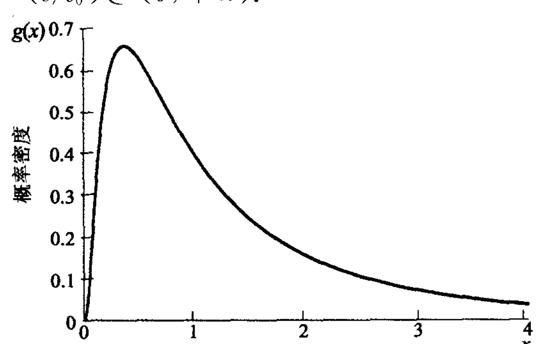

图 3 标准对数正态分布概率密度函数

令 r 为投资收益率，把股票价格转换为投资收益率有：$1+r=s/s_0$，则 r 对应的概率密度函数为

$$g(r)=\frac{1}{(1+r)\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\ln(1+r)-\mu}{2\sigma^2}\right),$$
$$r\in(-1,+\infty). \tag{1}$$

根据凯利优化模型，投资者每次做投资决策时面临的都是相同收益率概率密度函数，所以投资者会采用固定投资比例的投资策略，即每次投资金额都为当前所有总财富的一定比例 f，$B_i=f\cdot V_{i-1}$，$f\in[0,1]$，那么下一期拥有的财富为 $V_i=(1+r\cdot f)\cdot V_{i-1}$.

凯利优化模型中实现的预期财富增长速率系数 $G(f)$ 为

$$G(f)=E\left[\ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{1/n}\right]=\int_{-1}^{+\infty}\ln(1+r\cdot f)\cdot g(r)\mathrm{d}r.$$

上式中 r 的概率密度函数 $g(r)$ 与每次投资比例无关，对 $G(f)$ 求导只需对第一项求导，有

$$G'(f)=\int_{-1}^{+\infty}\frac{r}{1+r\cdot f}\cdot g(r)\mathrm{d}r. \tag{2}$$

对上式进行二阶求导有

$$G''(f)=\int_{-1}^{+\infty}-\frac{r^2}{(1+r\cdot f)^2}\cdot g(r)\mathrm{d}r.$$

因为在 $r\in(-1,+\infty)$ 区间有

$$\frac{r^2}{(1+r\cdot f)^2}\geqslant 0, g(r)>0.$$

因此，$G''(f)<0$，即 $G'(f)$ 在 $r\in(-1,+\infty)$ 区间单调递减. 另外，当时有

$$G'(0)=\int_{-1}^{+\infty}r\cdot g(r)\mathrm{d}r=E(r).$$

当 $E(r)>0$ 时 $G'(0)>0$，$G'(f)$ 在 $f\in[0,1]$ 上连续，那么 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $G(\varepsilon)>G(0)$；当 $E(r)\leqslant 0$ 时，$G'(0)\leqslant 0$，而 $G''(f)<0$，所以对 $\forall f\in(0,1]$ 都有 $G'(f)<0$，又 $G(0)=0$，所以 $\forall f\in[0,1]$ 有 $G(f)\leqslant 0$.

因此，根据上面的计算可以得出一个结论：如果一项投资的期望投资收益为正，那么投资者就应该进行投资；如果一项投资的期望投资收益为负，那么投资者就不应该进行投资.

把股票收益率的概率密度函数(1)代入式(2)中可得

$$G'(f)=\int_{-1}^{+\infty}\frac{r}{1+r\cdot f}\cdot\frac{1}{(1+r)\cdot\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{\ln(1+r)-\mu}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}r. \tag{3}$$

由对数正态分布函数的性质知

$$E(1+r)=1+E(r)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

$$\mathrm{Var}(1+r)=Var(r)=(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}.$$

$G'(f)$ 函数中的系数可以由投资收益率的期望和方差值表示出来

$$\mu=\ln[1+E(r)]-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{Var(r)}{(1+E(r))^2}+1\right], \tag{4}$$

$$\sigma^2=\ln\left[\frac{Var(r)}{(1+E(r))^2}+1\right]. \tag{5}$$

根据公式(4)和(5)可知，公式(3)中概率密度函数的 2 个参数 μ 和 σ^2 可以由投资者对股票收益率的期望和方差的预测值计算得到. 然后再把两个参数代回公式(3)中并令 $G'(f)=0$ 进行求解即可得到基于凯利优化模型的最优投资比例.

收益率方差 $Var(r)$ 表示的是收益率的绝对离散程度，而 $Var(r)/(1+E(r))^2$ 表示相对离散程度，在反映不同股票收益率风险上更具可比性.

所以，令 $E(r)=U$，表示收益；$Var(r)/(1+E(r))^2=V$，表示风险；式(4)和式(5)可变换为：

$$\mu=\ln[U+1]-\frac{1}{2}\ln[V+1], \tag{6}$$

$$\sigma^2=\ln[V+1]. \tag{7}$$

因此，根据式(6)和(7)式可以得出结论：

1)当风险不变收益上升时，即 V 不变 U 增加，对应为 μ 增加不变，概率密度函数如图 4 变化，大数值出现的概率变大，令得到的最优投资比例 f^* 增加；即收益提高，最优投资比例增加.

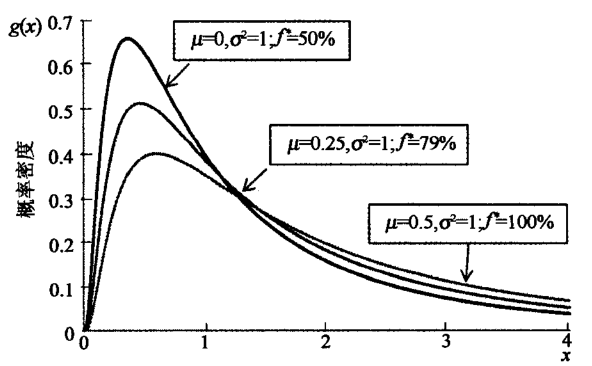

图 4　对数正态分布的概率密度函数(不同收益)

2)当收益不变，风险增加时，即 U 不变 V 增加，对应为 μ 减少 σ^2 增加，并且由公式(6)和(7)可知 $\mu+0.5\sigma^2=\ln(U+1)$，概率密度函数如图 5 变化，小数值出现概率变大，令得到的最优投资比例减少：即风险增加，最优投资比例减少.

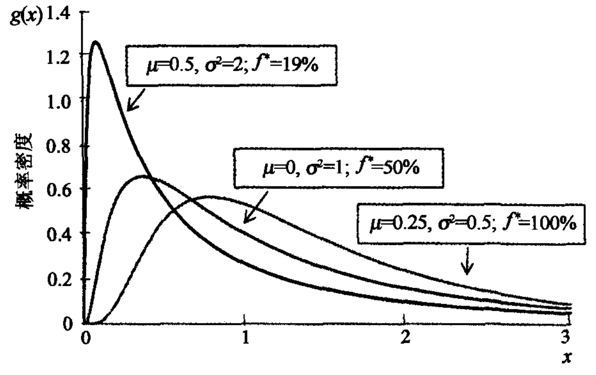

图 5 对数正态分布的概率密度函数(不同风险)

3.3 模型运用

投资者依据基于股票价格服从对数正态分布的凯利优化模型策略进行投资总共由 4 个步骤构成:

第一步,投资者对个股进行深入研究和密切跟踪,依据其内在价值与当前价格预测未来一年投资收益率的期望值 $E(r)$ 和方差 $Var(r)$,当 $E(r)>0$ 时进行投资,$E(r)\leqslant 0$ 时不投资.

第二步,把预测期望值和方差 $Var(r)$ 代入公式(4)可求出服从对数正态分布的投资收益率概率密度函数参数 μ 和 σ^2 ;

第三步,把计算得到的概率密度函数参数 μ 和 σ^2 代入凯利优化模型财富增长速率一阶导公式(3)中,在区间找到使 $G(f)$ 实现最大化的 $f=f^*$.即如果 $\exists f^*\in(0,1]$,使得,又 $G''(f)<0$,那么 f^* 为最优投资比例;如果 $\forall f\in[0,1]$ 都有 $G'(f)>0$,即 $G(f)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,$f=f^*=1$ 时 $G(f)$ 实现最大化.

第四步,投资者根据上一步计算出来的投资比例进行投资就实现了凯利优化模型投资策略,从长期来看投资者最终将获得渐进最快财富增长速率,或对于实现任何事先给定的投资目标所需年限渐进最少.

4 模型结果及分析

4.1 模型结果

在基于股票价格服从对数正态分布的凯利优化模型中涉及对财富增长速率的积分为 $(-1,+\infty)$ 区间的广义积分.本文采用辛普森积分算法在数学软件 Matlab 上对该积分进行近似计算,积分精度为 10^{-6} ,$\pi=3.141\,5926536$,积分下限为 $-0.999\,9$,积分上限为 100 .对于标准对数正态分布,$[-0.999\,9,100]$ 区间所占概率为

$$P(-0.999\,9\leqslant x\leqslant 100)$$
$$=\int_{-0.9999}^{100}\frac{1}{(1+r)\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{\ln(1+r)}{2}\right)\mathrm{d}r$$
$$=99.999\,8\%.$$

所以,$[-0.999\,9,100]$ 区间的定积分可以作为 $(-1,+\infty)$ 区间广义积分的近似.

取期望收益率 $E(r)=5\%,10\%,15\%,20\%,25\%,30\%,40\%,50\%$,取期望收益率标准差 $\sqrt{Var(r)}=0.50,0.75,1,1.5,2,3$,进行敏感性分析可得计算结果最优投资比例 f^* (见表 1)和最快财富增长速率 $G_{\max}(f)$ (见表 2)

表 1 最优投资比例的敏感性分析

f^*		收益率标准差/%					
		0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00
期望收益率	5%	23	10	6	3	2	1
	10%	51	23	13	6	4	2
	15%	100	39	23	11	6	3
	20%	100	56	33	16	10	5
	25%	100	74	45	22	13	7
	30%	100	92	57	28	17	9
	40%	100	100	83	43	27	14
	50%	100	100	100	60	38	20

表 2 最快财富增长速率 $G_{\max}(f^*)$

$G_{\max}(f^*)$		收益率标准差/%					
		0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00
期望收益率	5%	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10%	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	15%	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
	20%	0.10	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00
	25%	0.15	0.08	0.05	0.02	0.01	0.01
	30%	0.19	0.12	0.07	0.03	0.02	0.01
	40%	0.28	0.21	0.14	0.07	0.04	0.02
	50%	0.35	0.29	0.22	0.11	0.07	0.04

4.2 结论与启示

根据模型的计算结果可以得出结论,只有当期望收益率大,收益率方差小时该项投资才能对投资者的总资产增长起到显著的贡献作用;而如果期望收益率较小,收益率方差较大时,最优投资比例也相应小,那么该项投资对投资者的总资产增长的贡献作用微乎其微.

所以在股票投资实践中,投资者应该集中精力去寻找市场上少有的具有高预期收益率和高确定性的股票,然后根据凯利优化策略进行集中投资长期持有.这样投资者才能获得高的超额投资收益,实现快速的财富积累.

本文提出的基于股票价格服从对数正态分布的凯利优化模型,正是在投资者对股票进行了深入分

析研究有了对股票未来收益率预期之后,可以直接作为其投资实践中资产配置比例的指引.

不过,尽管理论上按照凯利优化策略进行投资能给投资者带来最快财富增长,但是在投资实践中也存在一些因素限制了完全凯利优化策略的运用:

1)机会成本:当投资者拥有两个具有相同期望收益率和方差且相互独立的投资机会时,最优的方法是对两个投资机会投入相同的资金 f^* ,为了避免破产的可能性,必须有 $2f^* < 1$,所以 $f^* < 0.5$.同理,如果存在 n 个相同的投资机会,每个机会投资比例应该满足 $f^* < 1/n$,那么这一投资比例就很可能低于只有一个投资机会时运用凯利优化模型得到的最优投资比例.

2)风险容忍度.完全凯利优化策略对于许多投资者具有过高风险,如果用"部分凯利优化策略",即 $f = cf^*$ $(0 < c < 1)$,对于他们会更加合适.

3)低于预期."真实"场景可能甚至会差于保守估计的下限,此时如果投资者按照自己的预计情况来进行投资,他的投资比例就会高于实际最优投资比例,他不仅会面临更高的风险,投资收益也会更低,而采用"部分凯利优化策略"则可以给他带来一定的保护作用.

4)"黑天鹅"事件.人们倾向于忽视那些具有重大影响力的偶然事件产生的影响,这些事件将显著地降低最优投资比例.如果不考虑它们,投资者同样将面临投资比例过高的风险.一个有效的把"黑天鹅"事件考虑进模型的方法是用场景最优随机规划模型,即假设一个事件发生的概率并指定它的结果但并不假设这件事情具体是什么.Geyer 和 Ziemba (2008)在西门子奥地利抚恤基金中运用了这一方法[17].

5)长期投资.凯利优化模型是一个渐进最优的投资策略,只有进行足够长时间的投资,它的优势才能得以显现.

参考文献

[1] J L KELLY. A new interpretation of information rate[J]. Bell System Technical Journal, 1956, 35:917—926.

[2] L BREIMAN. Optimal gambling systems for favorable games [J]. Fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics, 1961,1:65—78.

[3] E O THORP. Beat The Dealer[M]. 2nd Ed. New York: Vintage, 1966.

[4] E O THORP. Optimal gambling systems for favorable games [J]. Review of the International Statistical Institute, 1969,37 (3):273—293.

[5] E O THORP. Portfolio choice and the Kelly criterion. Proceedings of the 1971[J]. Business and Economics Section of the American Statistical Association, 1972,4:215—224.

[6] L M ROTANDO, E O THORP. The Kelly Criterion and the Stock Market [J]. The American Mathematical Monthly, 1992,99:922—931.

[7] W T ZIEMBA. The symmetric downside risk Sharpe ratio and the evaluation of great investors and speculators[J]. Journal of Portfolio Management Fall, 2005,3:108—122.

[8] J FULLER. Optimize your portfolio with the Kelly formula [EB/OL]. [2006—10—06]. Morningstar. com,http://news. morningstar. com/articlenet/article. aspx? id=174562.

[9] E LEE. How to calculate the Kelly formula[EB/OL]. [2006—10—31]. Fool. com, http://www. fool. com/investing/value/2006/10/31/how-to-calculate-the-kelly-formula. aspx.

[10] W POUNDSTONE. Fortune's formula: the untold story of the scientific system that beat the casinos and wall street[M]. New York: Farrar, Straus and Giroux, 2005.

[11] E O THORP. The Kelly criterion in blackjack, sports betting and the stock market[J]. Handbook of Asset and Liability Management, 2006,1:385—428.

[12] L C MACLEAN, W T Ziemba, G Blazenko. Growth versus security in dynamic investment analysis[J]. Management Science, 1992, 38: 1562—1585.

[13] N N TALEB. The Black Swan: the impact of the highly improbable[M]. New York: Allen Lane, 2007.

[14] L C MACLEAN, W T ZIEMBA, Y LI. Time to wealth goals in capital accumulation and the optimal trade-off of growth versus security[J]. Quantitative Finance, 2005, 5 (4): 343—357.

[15] L C MACLEAN, E O THORP, Y ZHAO, *et al*. How does the fortune's formula-kelly capital growth model perform? [J] Journal of Portfolio Management, 2011,37(4):96—112.

[16] L C MACLEAN, E O THORP, W T ZIEMBA. Long term capital growth: the good and bad properties of the Kelly criterion[J]. Quantitative Finance, 2010,10(7): 681—687.

[17] A GEYER, W T ZIEMBA. The Innovest Austrian pension fund financial planning model InnoALM[J]. Operations Research 56(4):2008, 797—810.