Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 6

Regulator LQR ze skończonym horyzontem czasowym

Celem ćwiczenia jest prezentacja regulatora liniowo-kwadratowego, jego budowy oraz przykładowych zastosowań. W tym ćwiczeniu przedstawiony zostanie schemat regulacji w skończonym horyzoncie czasowym. W ramach realizacji ćwiczenia studenci posłużą się językiem Python do zaimplementowania regulatora liniowo-kwadratowego, a następnie wykorzystają go w układzie sterowania.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opisu liniowych układów dynamicznych w przestrzeni zmiennych stanu,
- projektowania układów regulacji (pojęcia uchybu, wartości zadanej, sprzężenia, itp.)
- budowy oraz działania regulatora LQR z nieskończonym horyzontem czasowym

1 Regulator LQR ze skończonym horyzontem czasowym

Regulator LQR przedstawiony może zostać w dwóch odmiennych wersjach, w zależności od zdefiniowanego wskaźnika jakości podlegającego optymalizacji. Dotychczas poznany algorytm zakładał, że kryterium podlegające optymalizacji ewaluowane było w nieskończonym horyzoncie czasu - optymalność przebiegów gwarantowana była tylko, jeśli układ sterowania dział w nieskończoność. Regulator LQR ze skończonym horyzontem czasu zakłada ograniczony czas pracy układu, a poszukiwane nastawy zagwarantować mają najlepszą jakość regulacji jedynie w tym przedziale czasu. Dla układu liniowego opisanego równaniem różniczkowym

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

gdzie x jest wektorem stanu, u wektorem sygnałów sterujących, natomiast A oraz B stanowią odpowiedni macierz stanu oraz macierzy wejścia, pobudzanego sygnałem sterującym w postaci

$$u = -K(t)x, \tag{2}$$

gdzie K jest pewnym zmiennym w czasie wektorem wzmocnień, minimalizowany wskaźnik jakości przyjmuje postać

$$J = x^T(t_1)Sx(t_1) + \int_0^{t_1} \left(x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)\right) dt, \tag{3}$$

gdzie J jest przyjętym wskaźnikiem jakości, S, R oraz Q stanowią stałe macierze wag których wartości własne powinny być dodatnie (tzn. macierze te powinny być dodatnio określone), natomiast $t \in [0, t_1]$ stanowi czas pracy układu. Wartość t_1 określa skończony horyzont regulacji.

Interpretacja tak zdefiniowanego wskaźnika jest następująca – osiąga on najmniejszą wartość wtedy, gdy dla wszystkich chwil czasu wartości zarówno wektora stanu x, jak i sygnałów wejściowych u, pozostają możliwie niewielkie, przy czym jednocześnie wymagana jest możliwie mała wartość zmiennych stanu w końcowej chwili t_1. Macierze S, Q oraz R to macierze wag dobierane przez projektanta systemu. Ich dobór ma kluczowy wpływ na charakter odpowiedzi układu pracującego w algorytmie LQR. Zwiększanie wartości macierzy Q prowadzi do szybszej zbieżności wektora stanu x w układzie, kosztem zwiększonych wartości sygnałów sterujących u. Wzrost macierzy R skutkuje natomiast działaniem przeciwnym – spada prędkość kompensacji zbieżności wektora x, ale sygnał sterujący u pozostaje na niższym poziomie przez cały czas pracy układu. Nastawa S pozwala natomiast na zwiększanie lub zmniejszanie znaczenia jakości regulacji w chwili końcowej – jej zwiększanie prowadzi do zmniejszania wartości zmiennych stanu po zakończeniu regulacji, może jednak skutkować większymi wartościami zmiennych stanu lub sygnałów sterujących we wcześniejszych chwilach czasu. Istotne jest, iż stan uzyskany w chwili t_1 w ogólności nie jest równoznaczny stanowi ustalonemu.

Ponownie wykazać można, że dla układu liniowego (1) z sygnałem sterującym (2) wskaźnik jakości (3) przyjmuje wartość minimalną dla wzmocnień regulatora przyjętych zgodnie z formułą

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t), \tag{4}$$

gdzie P jest pewną macierzą zmienną w czasie, dodatnio określoną macierzą stanowiącą rozwiązanie tzw. różniczkowego równania Riccatiego danego wzorem

$$P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + A^T P(t) + Q = \dot{P}(t), \tag{5}$$

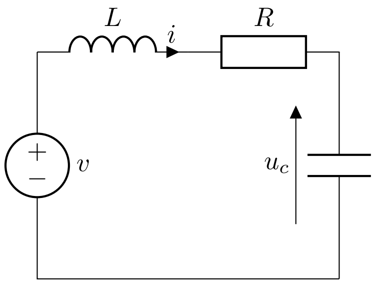
gdzie macierze A, B, Q, R stanowią odpowiednio macierze stanu i wejścia układu nominalnego (1) oraz macierze wag przyjętego wskaźnika jakości (3). W celu rozwiązania równania (5) konieczne jest zdefiniowanie warunku krańcowego dla macierzy $P(t)$. Na podstawie warunku transwersalności i kryterium Pontriagina wykazać można [1], że warunek końcowy

$$P(t_1) = S(t_1) \tag{6}$$

zapewnia optymalizację przyjętego kryterium jakości. Należy podkreślić, że w tym przypadku znana jest jedynie wartość końcowa rozwiązania równania różniczkowego, a nie warunek początkowy.

2 Zastosowanie

Regulator LQR może stanowić dobrą alternatywę dla regulatora PID. Niech dany będzie prosty układ elektryczny przedstawiony na Rys. 1. Przyjęto następujące wartości parametrów $R =$



Rysunek 1: Układ elektryczny RLC

0.5Ω, $C = 0.5$F, $L = 0.2$H. Przyjmując wektor zmiennych stanu w postaci $x = \begin{bmatrix} q_c & \dot{q}_c \end{bmatrix}^T =$

[1] S. M. Aseev and A. V. Kryazhimskiy, "The pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 43, no. 3, pp. 1094–1119, 2004.

$\begin{bmatrix} q_c & i \end{bmatrix}^T$ (gdzie $q_c = Cu_c$ stanowi ładunek zgromadzony na kondensatorze) oraz sygnał sterujący $u = v$ uzyskuje się reprezentację w przestrzeni zmiennych stanu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u = Ax + Bu. \tag{7}$$

Regulator LQR pozwala na stabilizację układu dynamicznego w punkcie równowagi, tj. $x = 0$.

2.1 Przygotować funkcję `riccati(p,t)` implementująca różniczkowe równanie Riccatiego (5). Zdefiniować wektor chwil czasu od t_1 do 0 przyjmując $t_1 = 5$s Wykorzystując funkcję `odeint` wyznaczyć przebieg wartości macierzy P w czasie. Zwrócić uwagę na konieczność konwersji macierzy P do postaci wektorowej dla uzyskania zgodności z funkcją `odeint`. Wykorzystać na przykład `np.reshape`, `squeeze` oraz `np.tolist`.

2.2 Wykreślić przebieg elementów macierzy $P(t)$ w czasie. Zweryfikować poprawność wyników poprzez porównanie z warunkiem krańcowym (6).

2.3 Przygotować funkcję `model(x,t)` implementującą model dynamiki układu otwartego zgodnie z równaniem (7). Funkcja powinna przyjmować na wejściu stan układu x oraz aktualną chwilę czasu t.

2.4 Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by wprowadzić do niej wyznaczone wcześniej wartości macierzy $P(t)$. Wykorzystać `interpolate.interp1d` w celu określenia wartości macierzy $P(t)$ w wybranej chwili czasu.

2.5 Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe w czasie $t \in (0, 5)$ s wykorzystując funkcję `odeint`.

2.6 Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał sterujący miał postać zgodną z (2)

2.7 Przeprowadzić symulację układu dla niezerowych warunków początkowych. Zbadać wpływ macierzy S, Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

- Czy macierze S, Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doborem tych macierzy?

2.8 Rozszerzyć funkcję `model(x,t)` o wyznaczanie wartości wskaźnika jakości J. Funkcja `model(x,t)` powinna wyznaczać pochodną (tj. wyrażenie podcałkowe) wskaźnika J jako dodatkową zmienną stanu – zostanie ona scałkowana przez `odeint`, a jej wartość zwrócona po zakończeniu symulacji

- Czy wyznaczona wartość rzeczywiście odpowiada minimalizowanemu wyrażeniu? W jakim horyzoncie czasu została ona wyznaczona?

2.9 Powtórzyć symulację dla $t_1 = 2$s oraz zmiennych wartości nastaw S, Q, R.

- Czy układ osiąga stan ustalony? Jaki teraz wpływ mają poszczególne nastawy?

□