Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 7

STEROWANIE UKŁADAMI NIELINIOWYMI PRZY POMOCY METODY SDRE

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z regulatorem SDRE. Jest on bardzo podobny do regulatora LQR jednak został zaprojektowany dla układów nieliniowych. Przedstawiony zostanie również przykład jego zastosowania. W ćwiczeniu studenci posłużą się językiem phyton w celu implementacji

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opisu liniowych układów dynamicznych w przestrzeni zmiennych stanu,
- projektowania układów regulacji (pojęcia uchybu, wartości zadanej, sprzężenia, itp.)
- budowy oraz działania regulatora LQR z nieskończonym i skończonym horyzontem czasowym

1 Wprowadzenie

Metoda sterowania SDRE (ang. State Dependent Riccati Equation) stała się bardziej popularna ze względu na efektywną możliwość projetowania nieliniowych regulatorów oraz zapewnienie większej elastyczności poprzez wprowadzenie zależnych od stanu macierzy wag. Nieliniowa dynamika systemu w metodzie SDRE, jest przybliżana z użyciem parametryzacji SDC do systemu liniowego z macierzami współczynników zależnymi od stanu, które są kluczowe do rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego-ARE, oraz równania różniczkowego DRE i uzyskania suboptymalnego prawa sterowania. Minimalizacja nieliniowego wskaźnika jakości daje formę kwadratową i jest także wykorzystywana w systemach lokalnie dodatnich

2 Metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym

Nieliniowy system opisany jest wzorem:

$$\dot{x} = F(x) + Bu(t) \tag{1}$$

Gdzie x i u są odpowiednio wektorami stanu i wejścia. F jest nieliniową funkcją opisującymi dynamikę systemu zaś macierz B jest macierzą o stałych współczynnikach. Należy znaleźć sterowanie dopuszczalne u które minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J = x^T(t_1)Sx(t_1) + \int_0^{t_1} \left(x(t)^T Q(x)x(t) + u(t)^T R(x)u(t)\right) dt, \tag{2}$$

gdzie Q(x) i S są symetrycznymi dodatnimi półokreślonymi macierzami, zaś R(x) jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Macierze te, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej. Rozwiązanie problemu sterowania ze skończonym horyzontem czasowym wymaga przedstawienia (1) w postaci sparametryzowanej.

$$\dot{x} = A(x)x(t) + Bu(t), \tag{3}$$

gdzie $A(x)x = F(x)$ jest wektorem stanu, u wektorem sygnałów sterujących, natomiast A oraz B stanowią odpowiedni macierz stanu oraz macierzy wejścia. Analogicznie jak dla problemu sterowania z regulatorem liniowo kwadratowym LQR prawo sterowania ma postać

$$u = -R^{-1}B^T p, \tag{4}$$

Podstawiając

$$p = P(x)x \tag{5}$$

gdzie P(x) i obliczając pochodną obu stron równania (5) po czasie można zapisać Proponuje się sygnał sterujący w postaci

$$\dot{p} = \dot{P}(x)x + P(x)\dot{x} = \dot{P}(x)xP(x)A(x) - P(x)BR^{-1}(x)B^T P(x)x \tag{6}$$

Konieczny warunek optymalności dla SDRE ma postać

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{7}$$

Gdzie H oznacza Hamiltonian który uzyskuje się stosując rachunek Hamiltona-Jakobiego-Bellmana Na podstawie operacji matematycznych można dojść do algebraicznego różniczkowym równaniem Riccatiego (ang. Differential Algebraic Riccati Equation (DARE)) z warunkiem początkowym

$$P(t_1) = S(t_1) \tag{8}$$

DARE określa się wzorem:

$$-P(x)A(x) - P(x)BR^{-1}(x)B^T P(x) - A^T(x)P(x) + Q(x) = \dot{P}(x), \tag{9}$$

Warunek konieczny optymalności jest zaś postaci

$$\frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}x^T P(x)BR^{-1}(x)B^T P(x)x + P(x)A(x) - x^T \frac{\partial A^T(x)}{\partial x} P(x)x - x^T P(x)BR^{-1}(x)\frac{\partial B^T}{\partial x} P(x)x = 0 \tag{10}$$

3 Metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym

Metoda ta niewiele różni się od opisanej w poprzednim rozdziale. W tej metodzie należy znaleźć sterowanie dopuszczalne u które minimalizuje wskaźnik jakości opisany wzorem

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q(x)x + u^T R(x)u\right) dt, \tag{11}$$

gdzie Q jest symetryczną dodatnią półokreśloną macierzą, zaś R jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Macierze te, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej. Przepisując równanie (1) do formy SDC uzyskuje się

$$\dot{x} = A(x)x(t) + B(x)u(t) \tag{12}$$

Problem sterowania dla nieliniowych ciągłych układów sterowania (1) może być przedstawiony w następujący sposób: mając nieliniowe funkcje F(x), B, Q(x), R(x) znaleźć takie sterowanie u , które przeprowadza stan od x_0 do $x\infty$ minimalizując wskaźnik jakości (11). Niech x^T Q(x)x + u^T R(x)u oraz A(x)x + Bu będą ciągle różniczkowalnymi funkcjami dla każdego ze swoich argumentów. Jeśli u jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (11) w odniesieniu do (12) i jeśli x jest stanem, to istnieje takie p dla którego

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} \text{ dla } t \in \begin{bmatrix} t_0 & \infty \end{bmatrix} \tag{13}$$

które są warunkami nałożonymi na p zapewniającymi uzyskanie sterowania optymalnego minimalizującego (11). Niech p będzie nieliniową funkcją stanu wyrażoną przez

$$p = K(x)x \tag{14}$$

gdzie x jest rozwiązaniem nieliniowego równania stanu

$$\dot{x} = A(x)x(t) - BR^{-1}(x)B^T P(x)x \tag{15}$$

Gdzie P(x) będzie rozwiązaniem zależnego od stanu równania Riccatiego (SDRE), o postaci

$$P(x)A(x) - P(x)BR^{-1}(x)B^T P(x) + A^T(x)P(x) + Q(x) = 0, \tag{16}$$

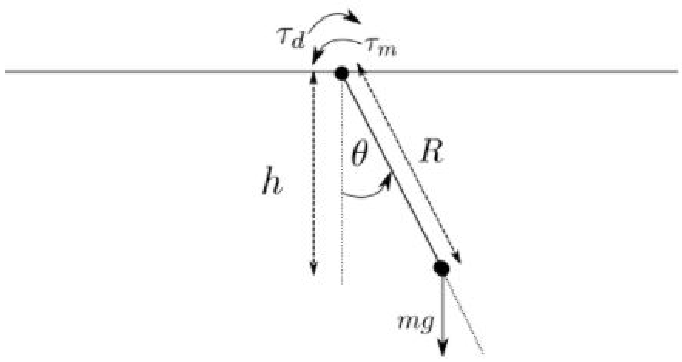
Na tej podstawie można podać suboptymalną postać sterowania

$$u = -R^{-1}(x)B^T P(x)x \tag{17}$$

Dla układu ze wskaźnikiem (11) w odniesieniu do (1) równanie Riccatiego dla systemów złożonych rozwiązuje się najczęściej numerycznie.

4 Zastosowanie

Na rysunku 1 przedstawiony został model wahadała. Przyjęto następujące wartości zmiennych: długość ramienia R = 1[m], masa kuli m = 9[kg], moment bezwładności układu napędowego J = 1[kg · m2], g = 10[m/s2] oraz współczynnik modelu tarcia d = 0.5[Nm · s 2/rad2].



Rysunek 1: Wahadło

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}\tau_m - \frac{d}{J}\dot{\theta}(t) - \frac{mg}{J}Rsin(x_1(t)) \tag{18}$$

Równanie wahadła można sprowadzić do postaci ogólnej równań nieliniowych

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{19}$$

$$y = g(x(t), u(t)) \tag{20}$$

Funkcje f oraz g są nieliniowymi funkcjami opisującymi dynamikę systemu. Przez podział na dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu. Należy wprowadzić zatem dwie zmienne stanu tj. x_1(t)

$= \theta(\mathrm{t})$ i $x_2(\mathrm{t}) = \theta(\mathrm{t})$. Wówczas równanie (18) można zapisać jako Dla powyższego przykładu wykonaj następujące zadania:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), u(t)) = x_2(t) \tag{21}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x(t), u(t)) = \frac{1}{J}u(t) - \frac{d}{J}x_2(t) - \frac{mg}{J}Rsin(x_1(t)) \tag{22}$$

4.1 Wyznaczyć macierze stanu dla wahadła z rysunku 1 na następnie zaimplementować je do programu

4.2 Przygotować funkcję `riccati(p,t)` Rozwiązującego równinie SDRE zarówno dla skończonego jak i nieskończonego horyzontu czasowego (10). W wariancie z skończonym horyzontem czasowym zdefiniować wektor chwil czasu od t_1 do 0 przyjmując $t_1 = 5$s Wykorzystując funkcję `odeint` dla obu przebiegów wyznaczyć przebieg wartości macierzy P w czasie. Dla nieskończonego horyzontu czasowego wykorzystać `scipy.linalg.solve_continuous_are`. Zwrócić uwagę na konieczność konwersji macierzy P do postaci wektorowej dla uzyskania zgodności z funkcją `odeint`. Wykorzystać na przykład `np.reshape`, `squeeze()` oraz `np.tolist()`.

- Porównaj oba wyniki dla obu wariantów. Spróbuj zmienić początkowe wartości macierzy P, Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doborem tych macierzy?

4.3 Wykreślić przebieg elementów macierzy $P(t)$ w czasie. Zweryfikować poprawność wyników poprzez porównanie z warunkiem krańcowym (8).

4.4 Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe w czasie $t \in (0, 5)$ s wykorzystując funkcję `odeint`.

4.5 Przeprowadzić symulację układu dla niezerowych warunków początkowych. Zbadać wpływ macierzy Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

- Czy macierze Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doborem tych macierzy?

4.6 Rozszerzyć funkcję `model(x,t)` o wyznaczanie wartości wskaźnika jakości J. Funkcja `model(x,t)` powinna wyznaczać pochodną (tj. wyrażenie podcałkowe) wskaźnika J jako dodatkową zmienną stanu – zostanie ona scałkowana przez `odeint`, a jej wartość zwrócona po zakończeniu symulacji

- Czy wyznaczona wartość rzeczywiście odpowiada minimalizowanemu wyrażeniu? W jakim horyzoncie czasu została ona wyznaczona?

4.7 Powtórzyć symulację dla $t_1 = 2$s oraz zmiennych wartości nastaw Q, R.

- Czy układ osiąga stan ustalony? Jaki teraz wpływ mają poszczególne nastawy?

□