

Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 5

REGULATOR LQR Z NIESKOŃCZONYM HORYZONTEM CZASOWYM

Celem ćwiczenia jest prezentacja regulatora liniowo-kwadratowego, jego budowy oraz przykładowych zastosowań. W tym ćwiczeniu przedstawiony zostanie schemat regulacji w nieskończonym horyzoncie czasowym. W ramach realizacji ćwiczenia studenci posłużą się językiem Python do zaimplementowania regulatora liniowo-kwadratowego, a następnie wykorzystają go w układzie sterowania.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opisu liniowych układów dynamicznych w przestrzeni zmiennych stanu,
- projektowania układów regulacji (pojęcia uchybu, wartości zadanej, sprzężenia, itp.)

1 Regulator LQR

Regulator LQR (ang. Linear Quadratic Regulator) jest podstawowym algorytmem sterowania należącym do grupy algorytmów sterowania optymalnego. Algorytm wykorzystuje sprzężenie od stanu, dla którego wartości wzmocnień wyznaczone są tak, by zapewnić minimalizację kwadratowego wskaźnika jakości sterowania. Regulator LQR wykorzystuje pojęcie tzw. horyzontu czasowego – chwili czasu w której oczekuje się uzyskania minimalizacji zadanego wskaźnika regulacji. W przypadku sterownika z nieskończonym horyzontem czasowym przyjmuje się, że zadany wskaźnik osiągnie wartość minimalną dla chwili czasu $t = \infty$.

Niech dany będzie układ liniowy opisany równaniem różniczkowym w postaci

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

gdzie x jest wektorem stanu, u wektorem sygnałów sterujących, natomiast A oraz B stanowią odpowiedni macierz stanu oraz macierzy wejścia. Proponuje się sygnał sterujący w postaci

$$u = -Kx, \quad (2)$$

gdzie K jest pewnym stałym wektorem wzmocnień. Zadaniem algorytmu LQR jest odnalezienie takich wzmocnień regulatora, które gwarantują minimalizację wskaźnika jakości regulacji opisanego wzorem

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (3)$$

gdzie J jest przyjętym wskaźnikiem jakości, natomiast R oraz Q stanowią stałe macierze wag których wartości własne powinny być dodatnie (tzn. macierze te powinny być dodatnio określone). Tak zdefiniowany wskaźnik regulacji ma prostą interpretację – osiąga on najmniejszą

wartość wtedy, gdy dla wszystkich chwil czasu wartości zarówno wektora stanu x , jak i sygnałów wejściowych u , pozostają możliwie niewielkie. Macierze Q oraz R to macierze wag dobierane przez projektanta systemu. Ich dobór ma kluczowy wpływ na charakter odpowiedzi układu pracującego w algorytmie LQR. Zwiększanie wartości macierzy Q prowadzi do szybszej zbieżności wektora stanu x w układzie, kosztem zwiększonych wartości sygnałów sterujących u . W ogólności wybór większych wartości dla macierzy Q powoduje minimalizację wskaźnika J przy mniejszej normie stanu x w porównaniu do normy sterowania u . Wzrost macierzy R skutkuje natomiast działaniem przeciwnym – spada prędkość kompensacji zbieżności wektora x , ale sygnał sterujący u pozostaje na niższym poziomie przez cały czas pracy układu.

W celu znalezienia optymalnych wartości wzmocnień minimalizujących wskaźnik jakości stosuje się Hamiltonian. Wyczerpujący opis wyprowadzenia algorytmu LQR dostępny jest w literaturze ¹. Wykazać można, że dla układu liniowego (1) z sygnałem sterującym (2) wskaźnik jakości (3) przyjmuje wartość minimalną dla wzmocnień regulatora przyjętych zgodnie z formułą

$$K = R^{-1}B^T P, \quad (4)$$

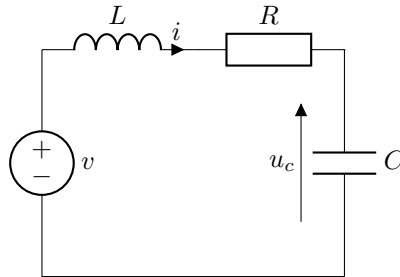
gdzie P jest pewną stałą, dodatnio określoną macierzą stanowiącą rozwiązanie tzw. algebraicznego równania Riccatiego danego wzorem

$$PA - PBR^{-1}B^T P + A^T P + Q = 0, \quad (5)$$

gdzie macierze A, B, Q, R stanowią odpowiednio macierze stanu i wejścia układu nominalnego (1) oraz macierze wag przyjętego wskaźnika jakości (3)

2 Zastosowanie

Regulator LQR może stanowić dobrą alternatywę dla regulatora PID. Niech dany będzie prosty układ elektryczny przedstawiony na Rys. 1. Przyjęto następujące wartości parametrów $R =$



Rysunek 1: Układ elektryczny RLC

0.5Ω , $C = 0.5F$, $L = 0.2H$. Przyjmując wektor zmiennych stanu w postaci $x = [q_c \ \dot{q}_c]^T = [q_c \ i]^T$ (gdzie $q_c = Cu_c$ stanowi ładunek zgromadzony na kondensatorze) oraz sygnał sterujący $u = v$ uzyskuje się reprezentację w przestrzeni zmiennych stanu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u = Ax + Bu. \quad (6)$$

Regulator LQR pozwala na stabilizację układu dynamicznego w punkcie równowagi, tj. $x = 0$.

2.1 Rozwiązać algebraiczne równanie Riccatiego dla dynamiki układu (6) przyjmując jednostkową macierz Q oraz $R = 1$. Do znalezienia rozwiązania równania Riccatiego wykorzystać funkcję `scipy.linalg.solve_continuous_are`. Wyznaczyć i wypisać wartości wzmocnień K zgodnie z równaniem (4)

¹Z. Hu, L. Guo, S. Wei, and Q. Liao, “Design of lqr and pid controllers for the self balancing unicycle robot,” in 2014 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA). IEEE, 2014, pp. 972–977

- 2.2** Przygotować funkcję `model(x,t)` implementującą model dynamiki układu otwartego zgodnie z równaniem (6). Funkcja powinna przyjmować na wejściu stan układu x oraz aktualną chwilę czasu t .
- 2.3** Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe w czasie $t \in (0, 5)$ s wykorzystując funkcję `odeint`.
- 2.4** Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał sterujący miał postać $u = -Kx$ zgodnie z (2)
- 2.5** Przeprowadzić symulację układu dla niezerowych warunków początkowych. Zbadać wpływ macierzy Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.
- Czy macierze Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doбором macierzy Q oraz R ?
- 2.6** Rozszerzyć funkcję `model(x,t)` o wyznaczanie wartości wskaźnika jakości J . Funkcja `model(x,t)` powinna wyznaczać pochodną (tj. wyrażenie podcałkowe) wskaźnika J jako dodatkową zmienną stanu – zostanie ona scałkowana przez `odeint`, a jej wartość zwrócona po zakończeniu symulacji
- Czy wyznaczona wartość rzeczywiście odpowiada minimalizowanemu wyrażeniu? W jakim horyzoncie czasu została ona wyznaczona?

3 Stabilizacja w punkcie

W zastosowaniach praktycznych stabilizacja układu w punkcie $x = 0$ jest często niesatysfakcjonująca, natomiast pożądanym jest przeprowadzenie układu do pewnego niezerowego punktu x_d w którym powinien on zostać ustabilizowany². Dla takiego przypadku rozważać można problem stabilizacji błędów regulacji w punkcie $e = x_d - x = 0$. Niech rozważane będzie zadanie stabilizacji stanu układu w wybranym punkcie $x_d = [q_d \ 0]^T$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla zmiennych stanu przyjętych zgodnie z powyższą propozycją zachodzi zależność $x_2 = \dot{x}_1$ – stabilizacja układu w stałym punkcie wymaga, by $x_{2d} = 0$ zgodnie z powyższą definicją zadania regulacji. W celu realizacji tak zdefiniowanego zadania definiuje się błąd śledzenia

$$e = x_d - x, \quad (7)$$

określający uchyb wszystkich zmiennych stanu w układzie. Poszukuje się opisu dynamiki błędu śledzenia w postaci równania układu liniowego (1). Dla takiej definicji układu zamkniętego zaprojektowany zostanie regulator LQR gwarantujący minimalizację błędów śledzenia e , a zatem zbieżność wektora stanu układu wyjściowego x do zdefiniowanego wektora wartości pożądanego x_d . Dynamika błędu śledzenia ma postać

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = -Ax - Bu. \quad (8)$$

Dodając do powyższego składnik $(Ax_d - Ax_d)$ uzyskuje się

$$\dot{e} = A(x_d - x) - Bu - Ax_d. \quad (9)$$

Uzyskana dynamika układu zamkniętego różni się od postaci liniowej (1) występowaniem składnika $Ax_d = [0 \ -\frac{1}{C}q_d]^T$. Ponieważ jedyny niezerowy element tego wyrażenia występuje w torze wejścia, możliwe jest jego odsprężgnięcie poprzez zastosowanie sterowania

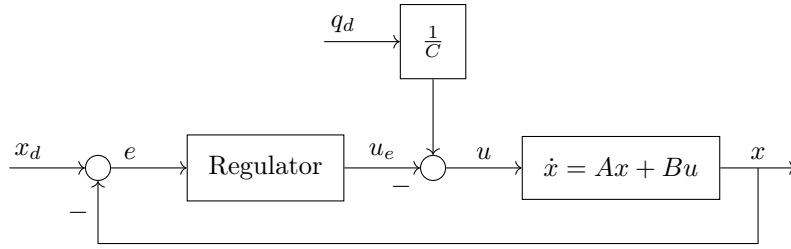
$$u = -u_e + \frac{1}{C}q_d \quad (10)$$

²J. Hespanha, Lecture notes on LQR/LQG controller design", 2005, pp. 37

co prowadzi do dynamiki błędu śledzenia

$$\dot{e} = Ae + Bu_e \quad (11)$$

gdzie u_e stanowi nowy sygnał sterujący. Układ ten ma postać klasycznego układu liniowego zgodną z (1). Stabilizacja układu (11) prowadzi do realizacji zdefiniowanego zadania – ponieważ $e = x_d - x$, to $e \rightarrow 0$ prowadzi do $x \rightarrow x_d$. Traktując wektor uchybów e jako wektor stanu układu zamkniętego, możliwe jest zastosowanie regulatora LQR do minimalizacji funkcji celu i stabilizacji układu zamkniętego poprzez sygnał sterujący zgodny z (2). Implementacja układu zamkniętego przedstawiona jest na Rys. 2.



Rysunek 2: Schemat sterowania LQR w pętli zamkniętej

Przyjmując sygnał sterujący $u_e = -Ke$ oraz wyznaczając wartości wzmocnień K takie, by zapewniały minimalizację wskaźnika regulacji

$$L = \int_0^\infty (e^T Q e + u_e^T R u_e) dt \quad (12)$$

uzyskuje się sterowanie optymalne z wykorzystaniem metody LQR stabilizujące stan układu w pożądanym punkcie x_d . Zauważyć można, że dla układu zamkniętego algebraiczne równanie Riccatiego przyjmuje taką samą postać jak dla układu otwartego – macierze stanu oraz wejścia układu zamkniętego pozostają takie same jak w układzie zamkniętym. Zgodnie z zasadą superpozycji regulacja zamkniętego układu liniowego sprowadza się do stabilizacji układu otwartego w punkcie $u = 0$ oraz wprowadzeniem dodatkowego sygnału sterującego przeprowadzającego układ do pożądanego stanu zadanego.

Dla rozważanego układu zaproponowane sterowanie

$$u_e = -Ke \quad (13)$$

może zostać przedstawione jako

$$u_e = -k_1 e - k_2 \dot{e} \quad (14)$$

co jest równoznaczne z tradycyjnym sterownikiem PD. Zależność ta wynika z przyjętej reprezentacji obiektu w postaci kanonicznej sterowalnej (dla której $x_2 = \dot{x}_1$, a zatem $e_2 = \dot{e}_1$). Zależność za obrazuje bliski związek między różnymi technikami sterowania, w szczególności sterowaniem poprzez sprzężenie od stanu, sterowaniem LQR oraz sterowaniem PID.

- 3.1** Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał sterujący wyznaczany był zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 2. Wyznaczyć wzmocnienia regulatora zgodnie z algorytmem LQR, tj. (4).
- 3.2** Przeprowadzić symulację układu zamkniętego dla wybranej wartości zadanej q_d . Zbadać wpływ macierzy Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

□