

Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 4

REGULATOR PID - OPTIMALIZACJA UKŁADÓW LINIOWYCH

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z układami regulacji automatycznej z regulatorem PID oraz sposobami optymalizacji tego regulatora. Na początku zostanie przedstawiona idea układów regulacji automatycznej. Następnie zostanie opisana budowa oraz działanie regulatora PID oraz każdego z jego członów. Następnie zostaną przedstawione trzy metody optymalizacji regulatora PID oraz sposoby sprawdzania ich skuteczności.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opis układów dynamicznych liniowych za pomocą transmitancji;
- przekształcenie pomiędzy opisem za pomocą transmitancji a zmiennymi stanu;
- reprezentacji układu w postaci zmiennych stanu;
- podstawowe właściwości transformaty Laplace'a.

1 Wprowadzenie

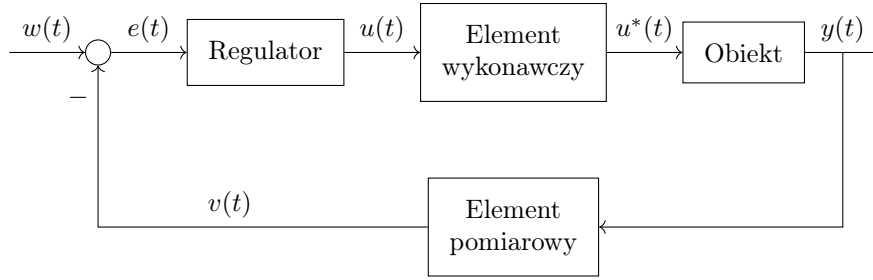
Przy projektowaniu sterowników liniowych często stosowany jest regulator PID. Powodem tego stanu rzeczy jest fakt, że oferuje on dobre parametry sterowania i pozwala na dobre dopasowanie charakterystyki regulacji do specyficznej charakterystyki obiektu. Regulatory te mogą być oddzielnymi urządzeniami, ale często stanowią też moduły programowe sterowników PLC. W celu sprawnego działania do każdego urządzenia wymagane jest odpowiednie ustawienie poszczególnych członów regulatora. Opracowane zostały metody pozwalające na dobranie optymalnych, ze względu na przyjęte kryterium, nastaw regulatora.

2 Opis układu regulacji automatycznej

Na rysunku 1 pokazano uproszczony schemat blokowy układu automatycznej regulacji. Jednym z elementów układu jest regulator. Na rys. 1 zastosowano następujące oznaczenia: $y(t)$ – wielkość regulowana, $w(t)$ – wielkość zadana, $e(t)$ – uchyb (błąd) regulacji, $u(t)$ – sygnał na wyjściu regulatora, $u^*(t)$ – wielkość sterująca (regulująca), $v(t)$ – wielkość regulowana, zmierzona przez element pomiarowy.

Regulator jest to urządzenie, którego zadaniem jest:

- porównanie wielkości regulowanej $v(t)$, zmierzonej przez element pomiarowy, z wielkością zadaną $w(t)$;



Rysunek 1: Uproszczony schemat blokowy układu automatycznej regulacji.

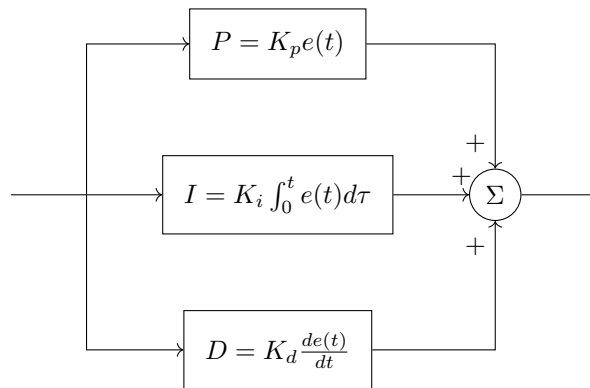
- na podstawie otrzymanej wielkości uchybu (błędu) regulacji $e = w(t) - v(t)$, wyznaczenie wielkości sterującej $u^*(t)$, zgodnie z zastosowanym prawem sterowania; sygnał $u^*(t)$ powinien tak oddziaływać na obiekt sterowania, aby błąd regulacji $e(t)$ miał jak najmniejszą wartość;
- ukształtowanie własności statycznych i dynamicznych układu regulacji tak, aby układ ten spełniał postawione przed nim wymagania. Wymaga się mianowicie, aby układ był stabilny oraz zapewniał odpowiednią jakość regulacji w stanie ustalonym i przejściowym, przy ograniczeniach nałożonych na przebieg sygnału sterującego. Własności dynamiczne układu regulacji kształtuje się m.in. poprzez zastosowanie regulatora o odpowiednio dobranych własnościach dynamicznych.

3 Regulator PID

Regulator PID (proporcjonalno-całkująco-różniczkujący) składa się z trzech członów. Są to kolejno:

- Człon proporcjonalny (oznaczony P);
- Człon całkujący (oznaczony I);
- Człon różniczkujący (oznaczony D).

Struktura regulatora PID została zaprezentowana na rys. 2. Na rysunku zastosowano następujące oznaczenia: $e(t)$ jest różnicą pomiędzy wartością zmiennej procesowej a punktem nastawy, K_p oznacza współczynnik wzmocnienia członu proporcjonalnego, K_i wzmocnienie członu całkującego, a K_d wzmocnienie członu różniczkującego.



Rysunek 2: Regulator PID

Działanie **członu proporcjonalnego** zmniejsza uchyb regulacji w stanie ustalonym, nieznacznie wpływa na skrócenie czasu regulacji (zwiększa prędkości odpowiedzi) i zwiększa prze-

regulowanie. Sygnał wyjściowy z regulatora P jest postaci:

$$u_p(t) = K_p e(t), \quad (1)$$

z kolei transmitancja operatorowa regulatora P ma postać:

$$G_p(s) = K_p. \quad (2)$$

Człon całkujący sprowadza uchyb regulacji w stanie ustalonym do zera, wpływa na wydłużenie czasu regulacji i zwiększa przeregulowanie. Człon I kompensuje akumulację uchybów z przeszłości.

$$u_I(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (3)$$

gdzie jako T_I oznaczono stałą czasową całkowania. Transmitancja operatorowa regulatora całkującego¹ ma postać:

$$G_I(s) = \frac{1}{sT_I}. \quad (4)$$

Człon różniczkujący nie wpływa na uchyb regulacji w stanie ustalonym, wpływa na skrócenie czasu regulacji i zmniejsza przeregulowanie. Człon D kompensuje przewidywane uchyby w przyszłości. Sygnał wyjściowy regulatora typu D jest postaci:

$$u_D(t) = T_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (5)$$

gdzie T_D to czas zdwojenia. Transmitancja operatorowa członu różniczkującego² ma postać:

$$G_D(s) = sT_D. \quad (6)$$

Równanie czasowe **Regulatora PID** (złożonego z opisanych wcześniej członów) dane jest w postaci:

$$u_{PID}(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (7)$$

Właściwości dynamiczne idealnych regulatorów PID mogą być opisane za pomocą transmitancji operatorowej, będącej stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego regulatora $U^*(s)$ i transformaty Laplace'a uchybu regulacji (sygnału wejściowego) $E(s)$:

$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right). \quad (8)$$

4 Całkowe kryteria jakości regulacji

Optymalizacja układu regulacji ma za zadanie dobranie takich parametrów regulatora, aby odpowiedź układu zapewniała uzyskanie minimalnej (lub maksymalnej) wartości przyjętego kryterium. Przykładami takich kryteriów są kryteria całkowe skonstruowane w oparciu o przebieg sygnału błędu $e(t)$. Optymalizacja nastaw regulatora z ich wykorzystaniem polega na minimalizacji wartości kryterium. Przykładowe wskaźniki jakości to:

- Kryterium ISE (Integral Squared Error) dane równaniem (9): kryterium sumuje wartości chwilowego uchybu podniesionego do kwadratu. Warto zauważyć, że uchyby mniejsze od wartości 1 mają mniejszy wpływ na końcową wartość kryterium.

$$I_{ISE} = \int_0^\infty e(t)^2 dt \quad (9)$$

¹Uwaga: w praktyce nie mamy nigdy do czynienia z samodzielnym regulatorem typu I. Wynika to z powolnej odpowiedzi na niezerową wartość uchybu, która z kolei może prowadzić do dużej różnicy pomiędzy sygnałem zadanym a rzeczywistym wyjściem układu. Może to doprowadzić do niestabilności układu lub cyklu granicznego. Dlatego człon I stosuje się równocześnie z członem P.

²Człon różniczkujący nie występuje samodzielnie w układzie regulacji, ze względu na zerowy sygnał sterujący dla niezerowego sygnału uchybu niezmiennego w czasie.

- Kryterium ITSE (Integral of Time multiplied by Squared Error) dane równaniem (10): mnożenie przez czas t odpowiada nadawaniu większej wagi wartościom kwadratu błędu, które występują w późniejszych chwilach symulacji. Minimum kryterium uzyskuje się zazwyczaj dla odpowiedzi, gdzie zauważalne jest większe tłumienie oscylacji wielkości regulowanej w dalszych przedziałach czasowych.

$$I_{ITSE} = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt \quad (10)$$

- Kryterium IAE (Integral of Absolute value of Error) dane równaniem (11): uzyskuje większą wartość, gdy wartości uchybu są mniejsze niż 1, w porównaniu do wskaźnika ISE.

$$I_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (11)$$

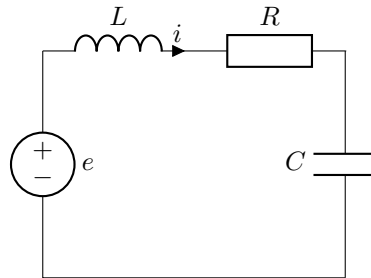
- Kryterium ITAE (Integral of Time multiplied by Absolute value of Error)

$$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (12)$$

Mnożenie przez czas t odpowiada nadawaniu wagi wartości bezwzględnej błędu. Kryterium to znalazło szerokie zastosowanie w technice, ponieważ prowadzi do kompromisu: niewielkie przeregulowanie przy stosunkowo krótkim czasie regulacji.

5 Realizacja regulatora PID

W niniejszym ćwiczeniu rozważany będzie układ elektryczny RLC



Rysunek 3: Układ elektryczny RLC

przedstawionego za pomocą transaminacji:

$$G = \frac{5}{(s+3)^3} \quad (13)$$

Oraz macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = 5 \quad D = 0$$

5.1 W języku Python zaimportować biblioteki `numpy`, `scipy.signal`, `scipy.integrate.solve_ivp` lub `scipy.integrate.odeint` a następnie `matplotlib.pyplot`.

5.2 Wprowadzić zmienne regulatora PID $K_p = 2$, $T_I = 1$, $T_D = 0.4$ oraz parametry obiektu z rys. 3.

- 5.3 Wyznaczyć i zaimplementować transmitancję układu zamkniętego. Wykorzystać w tym celu funkcję `signal.TransferFunction(num,den)`.
- 5.4 Zasymulować odpowiedź układu regulacji z regulatorem PID. Wykorzystać funkcję `signal.lsim`.
- 5.5 Wyznaczyć odpowiedź skokową układu (można w tym celu wykorzystać polecenie `signal.step()`) oraz utworzyć jej wykres, przykładowo poleceniem `matplotlib.pyplot`.
 - Czy układ z regulatorem PID z losowo dobranymi wartościami parametrów jest stabilny?
- 5.6 Wyznaczyć równania stanu na podstawie transaminacji. Wykorzystać w tym celu funkcję `signal.tf2ss(num, den)`.

6 Metody Zieglera-Nicholsa

Dla danego układu regulacji nie istnieje jeden globalnie optymalny zestaw parametrów regulatora PID. Dobór parametrów zależy od przyjętego kryterium optymalizacji. Można przyjąć różne kryteria optymalizacyjne, przykładowo te przedstawione w rozdziale 4 realizujące minimalizację uchybu. Można jednak przeprowadzić minimalizację sygnału sterującego, zerowy uchyb ustalony, brak oscylacji. Poniżej przedstawiono kilka metod doboru parametrów regulatorów PID, które minimalizują określone kryteria.

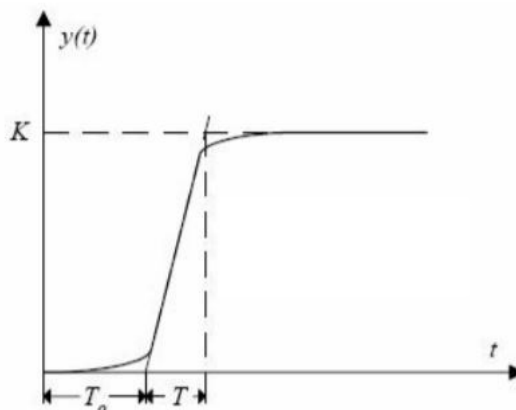
Jednymi z najbardziej popularnych metod regulacji są metody opracowane przez Johna G. Zieglera i Nathaniela B. Nicholasa w latach 40-tych. Zostaną one opisane w kolejnych podrozdziałach.

6.1 Metoda analizy odpowiedzi skokowej Zieglera-Nicholsa

Metoda opiera się na analizie odpowiedzi skokowej otwartej pętli przy dezaktywowanym regulatorze. Dzieli się ona na 3 etapy:

Etap 1 - Badanie odpowiedzi obiektu na skok w układzie otwartym

Na początek należy pobudzić obiekt skokiem jednostkowym. Z odpowiedzi skokowej obiektu należy odczytać następujące parametry (sprawdź rys. 4): K - wzmacnienie statyczne, T - czas ustalania oraz T_0 to czas opóźnienia po jakim wartość na wykresie zaczęła narastać.



Rysunek 4: odpowiedź charakterystyczna dla wielu układów

Etap 2 - Wyznaczenie optymalnych nastaw K_p , T_I i T_D

Jest kilka optymalnych kombinacji K_p , T_I , T_D dla tej samej odpowiedzi skokowej. Jednak następujące nastawy regulatora PID zapewnią najkrótszy czas regulacji przy przeregulowaniu

nie większym niż 20%:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1.2T}{KT_0} \\ T_I &= 2T_0 \\ T_D &= 0.4T_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Należy pamiętać, że opóźnienie T_0 musi być w zakresie $(0.15T, 0.6T)$.

Etap 3 - Sprawdzenie odpowiedzi układu zamkniętego

Po dobraniu parametrów należy je zaimplementować w regulatorze PID oraz przeprowadzić symulację zamkniętego układu (rys. 1) na wymuszenie skokiem jednostkowym.

- 6.1** Zapisać system w postaci fazowych zmiennych stanu wykorzystując polecenie `signal.StateSpace(A,B,C,D)`. Wyznaczyć i wykreślić odpowiedź skokową układu
- 6.2** Utworzyć tablicę wartości czasu $t \in (0, 15)$.
- 6.3** Wykreślić rozwiązanie równania dla pobudzenia skokiem jednostkowym, wykorzystując polecenie `matplotlib.pyplot`
- 6.4** Wyznaczyć nastawy K_p , T_i , T_d zgodnie z równaniem (14).
- 6.5** Zbadać odpowiedź skokową układu zamkniętego (zoptymalizowanego metodą ZN).
 - *Jakie są właściwości odpowiedzi skokowej układu zamkniętego dla tak dobranych nastaw regulatora?*
- 6.6** Wyznaczyć wartość kryterium całkowego IAE danego równaniem (11).
 - *Czy można ustawić inne wartości parametrów regulatora PID tak, aby wartość kryterium IAE była mniejsza? Spróbować również ręcznie metodą prób i błędów znaleźć nastawy które pozwalają na lepszą regulację oraz sprawdzić za pomocą kryterium IAT*

6.2 Druga metoda Zieglera – Nicholisa

Druga metoda Zieglera – Nicholisa jest bardziej rozpowszechniona. Również opiera się o odpowiedź skokową, zatem wyznaczenie parametrów regulatora jest doświadczalne. Metoda ta składa się z kilku etapów:

Etap 1 - Wyznaczenie wzmocnienia krytycznego

W regulatorze PID należy wyłączyć działanie członów całkującego i różniczkującego (tzn. należy ustawić maksymalną wartość stałej czasowej całkowania T_i i minimalną wartość stałej czasowej różniczkowania T_d). Dla załączonego regulatora P oraz przy jednostkowym wymuszeniu skokowym należy stopniowo zwiększać współczynnik wzmocnienia K_p regulatora, dochodząc do granicy stabilności układu. Wzmocnienie krytyczne jest równe wzmocnieniu regulatora dla układu na granicy stabilności $K_{kr} = K_p$.

Etap 2 - Wyznaczenie okresu oscylacji

Gdy układ zostanie doprowadzony do niegasnących oscylacji, należy odczytać okres oscylacji oznaczany T_{osc} , który nazywany jest też okresem drgań krytycznych.

Etap 3 - Wyznaczenie nastaw regulatora PID

Po wyznaczeniu zmiennych w poprzednim etapie należy wyliczyć nastawy regulatora PID z następujących wzorów

$$K_p = 0.6K_{kr}, \quad T_I = 0.5T_{osc}, \quad T_D = \frac{T_{osc}}{8}. \quad (15)$$

Etap 4 - Wyznaczenie odpowiedzi skokowej układu zamkniętego

Po dobraniu parametrów należy je zaimplementować w regulatorze PID, a następnie wyznaczyć odpowiedź skokową zamkniętego układu sterowania (rys. 1).

- 6.7** Przeprowadzić strojenie regulatora PID drugą metodą Zieglera-Nicholsa.
- 6.8** Wykreślić odpowiedź skokową układu zamkniętego.
- 6.9** Porównać odpowiedzi skokowe dla dwóch zestawów nastaw: z pierwszej i drugiej metody Zieglera-Nicholsa.
- *Jakie różnice są zauważalne dla obu uzyskanych przebiegów?*
- 6.10** Dla rozważanego układu, dobrać parametry regulatora PID tak, aby zminimalizować kryterium ITSE (10).
- *Czy ten sam zestaw parametrów regulatora PID odpowiada minimalnym wartościom wszystkich rozważanych kryteriów całkowych? Spróbować również ręcznie metodą prób i błędów znaleźć nastawy które pozwalają na lepszą regulację oraz sprawdzić za pomocą kryterium ITSE*

7 Metoda Chiena-Hrones-Reswicka (CHR)

Pewną modyfikacją metod Zieglera- Nicholasa jest metoda CHR, która również bazuje na analizie odpowiedzi skokowej układu. Autorzy tej metody wprowadzili dodatkowy parametr R , który dany jest jako:

$$R = \frac{T}{T_0}, \quad (16)$$

gdzie T_0 oznacza czas opóźnienia odpowiedzi skokowej, a T czas ustalania, podobnie jak w metodach ZN. Dzięki tej metodzie można na podstawie odpowiedzi skokowej obiektu dobrać regulator jaki najlepiej sprawdzi się w układzie w zależności od tego jaką wartość przyjmuje parametr R . Po wyliczeniu wartości typ regulatora należy dobrać zgodnie z tab. 1.

Typ regulatora	wartość R
P	$R > 10$
PI	$7.5 < R < 10$
PID	$3 < R < 7.5$
wyższy rząd	$R < 3$

Tablica 1: Typ regulatora w zależności od wartości parametru R .

W przypadku kiedy wartość parametru R wskazuje na strukturę regulatora typu PID³, jego nastawy należy odczytać z tabeli 2. Warto zauważyć, że parametry różnią się w zależności czy odpowiedź skokowa powinna być aperiodyczna (bez przeregulowań) czy może wykazywać 20% przeregulowanie.

nastawy regulatora PID	Odpowiedź aperiodyczna	Przeregulowanie 20%
K_p	$\frac{0.3T}{KT_0}$	$\frac{0.7T}{KT_0}$
T_I	T	$1.4T$
T_D	$0.5T_0$	$4.7T_0$

Tablica 2: Nastawy regulatora PID zgodnie z metodą CHR.

7.1 Dokonać regulacji podobnie jak w przypadku pierwszej metody ZN

³W przypadku regulatora P oraz PI nastawy dobiera się według wzorów innych niż te przedstawione w tabeli 2

- 7.2** Wykreślić odpowiedź skokową układu zamkniętego z regulatorem PID.
- 7.3** Na podstawie kryterium ISE (9) sprawdzić jakość regulacji
- Czy można ustawić inne wartości parametrów regulatora PID tak, aby wartość kryterium ISE była mniejsza? Spróbować również ręcznie metodą prób i błędów znaleźć nastawy które pozwalają na lepszą regulację oraz sprawdzić za pomocą kryterium ISE
- 7.4** Porównać odpowiedzi skokowe dla trzech metod strojenia.
- Wybrać jedno z kryteriów optymalności i sprawdzić która z metod sprawdza się najlepiej dla przedstawionego regulatora