# Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

# ĆWICZENIE 3

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW LINIOWYCH

*Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z pojęciem sterowalności układów liniowych. Ćwiczenie zapozna z definicją sterowalności oraz praktycznym kryterium jej badania. Student pozna i przeanalizuje przykłady rzeczywistych układów sterowalnych oraz niesterowalnych.*

**W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:**

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- modelowania układów liniowych,
- reprezentacji układu w postaci zmiennych stanu,
- operacji algebraicznych na macierzach.

→ Wyznaczyć modele układów z Rys. 1-4

## 1 Układy sterowalne

Sterowalność jest pojęciem określającym możliwość dowolnego wpływania na stan układu wykorzystując sygnały wejściowe. Jeśli dla dowolnych warunków początkowych $x_1(t_1)$ oraz dowolnej wybranej konfiguracji końcowej $x_2(t_2)$ znaleźć można sygnał wejściowy $u_0(t)$ pozwalający przeprowadzić układ ze stanu $x_1(t_1)$ do stanu $x_2(t_2)$ w skończonym czasie $\Delta t = t_2 - t_1$ to układ jest układem sterowalnym. Brak sterowalności oznacza, że istnieją takie konfiguracje układu, których nie da się osiągnąć przy pomocy sygnałów sterujących. Sterowalność lub jej brak jest immanentną cechą układu - nie wpływa na nią przyjęta reprezentacja, dobór zmiennych stanu lub równanie wyjścia.

Sterowalność układu liniowego zbadać można na podstawie jego opisu w przestrzeni zmiennych stanu. Niech dynamika układu opisana będzie równaniem różniczkowym

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stanowi stan układu, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m\times t}$ będzie sygnałem sterującym, natomiast $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ są stałymi macierzami stanu oraz wyjścia.

**Twierdzenie 1 (Kryterium macierzy Kalmana)** *Układ* (1) *jest sterowalny wtedy, i tylko wtedy, gdy macierz Kalmana zdefiniowana jako*

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{2}$$

*ma pełen rząd (tj.* $\operatorname{rank}(\boldsymbol{K}) = n$*, uwaga: rząd macierzy nie jest równoznaczny jej wymiarowi!).*

**Przykład 1 (Układ sterowalny)** *Niech dany będzie układ liniowy oraz wyznaczona na jego podstawie macierz Kalmana*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

*zatem* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{K}) = 3 = n$, *a układ jest układem sterowalnym.*

**Przykład 2 (Układ niesterowalny)** *Niech dany będzie układ liniowy oraz wyznaczona na jego podstawie macierz Kalmana*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

*zatem* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{K}) = 2 \neq n$, *a układ jest układem niesterowalnym.*

**1.1** Przeanalizować układy przedstawione na Rys. 1-4. Bez wykonywania obliczeń, na podstawie fizycznej interpretacji układów, określić sterowalność tych układów.

- *Jakie cechy układu pozwalają wnioskować o jego sterowalności?*
- *Jaki charakter będą miały odpowiedzi układów sterowalnych, a jaki niesterowalnych?*

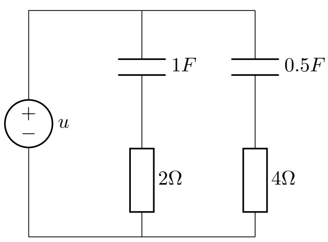
**1.2** Wyznaczyć modele układów z Rys. 1-4. Przedstawić modele w przestrzeni zmiennych stanu.

- *Czy możliwe jest uzyskanie innych modeli w przestrzeni zmiennych stanu?*

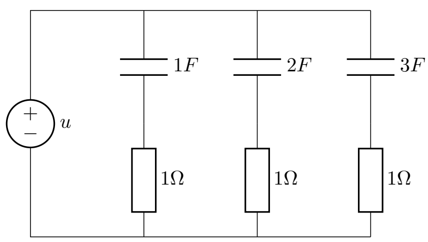
**1.3** Wyznaczyć macierze Kalmana i formalnie zbadać sterowalność układów (wykorzystać na przykład `numpy.linalg.matrix_rank`).

**1.4** Zaimplementować przedstawione układy i zbadać ich odpowiedzi na wybrane wymuszenia (np. wymuszenie skokowe, wymuszenie sinusoidalne, wykorzystać na przykład `scipy.signal.lsim` lub `scipy.signal.lsim2`).

- *Czy uzyskane przebiegi potwierdzają wcześniejsze przypuszczenia?*
- *Jakie są różnice między różnymi funkcjami symulującymi układy w Pythonie?*




Rysunek 1

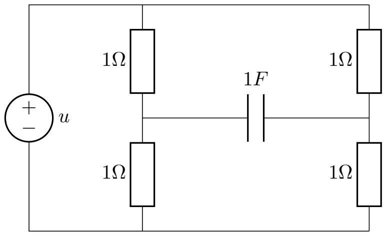



Rysunek 2

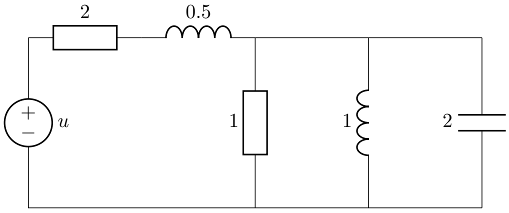
## 2 Postać sterowalna układu

Szczególnym przypadkiem liniowego modelu obiektu jest tzw. postać sterowalna lub normalna regulatorowa, opisana równaniem

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_s &= \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}_s &= \boldsymbol{C}_s \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{5}$$




Rysunek 3




Rysunek 4

gdzie macierz stanu oraz wejścia ma postać

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

gdzie $a_0, \dots, a_{n-1}$ są pewnymi stałymi współczynnikami. Istotną cechą takiej reprezentacji obiektów dynamicznych jest łatwość projektowania układów regulacji - zmienne stanu mają postać fazową (tzn. każda kolejna zmienne stanu jest pochodną poprzedniej), natomiast wszystkie nietrywialne parametry obiektu znajdują się bezpośrednio w torze wejścia, co pozwala na ich łatwą kompensację. Dla dowolnego sterowalnego układu liniowego

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{7}$$

współczynniki sterowalnej macierzy stanu sterowalnej postaci równania stanu wyznaczyć można na podstawie wielomianu charakterystycznego $\phi\lambda$ macierzy $\boldsymbol{A}$ poprzez zależność

$$\phi(\lambda) = \det(\boldsymbol{I}\lambda - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i. \tag{8}$$

Dla tak przyjętej macierzy $\boldsymbol{A}_s$ spełniona jest zależność

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

gdzie macierz przekształcenia $\boldsymbol{P}$ dana jest jako

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{A}_s^2\boldsymbol{b}_s & \dots & \boldsymbol{A}_s^{n-1}\boldsymbol{b}_s \end{bmatrix}^{-1}. \tag{10}$$

W oparciu o macierz przekształcenia $\boldsymbol{P}$ zapisać można ogólną zależność między dowolną ogólną postacią równania stanu (7), a postacią normalną regulatorową (5)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_s &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}_s &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{11}$$

**2.1** Dla układów sterowalnych z poprzednich zadań wyznaczyć postać sterowalną równań dynamiki. Do wykonania obliczeń wykorzystać funkcjonalności Pythona.

- Czy dla układów niesterowalnych można wyznaczyć postać normalną regulatorową dynamiki? Dlaczego?

**2.2** Dla wybranego przypadku przeprowadzić symulację obiektu dla obu reprezentacji (tj. wyznaczonej samodzielnie w zadaniu 1.2 oraz normalnej regulatorowej).

- Czy obie reprezentacje są równoważne?
- Czy przebiegi dla obu reprezentacji są jednakowe? Dlaczego? Jakie będzie miało to znaczenie przy projektowaniu układu regulacji w oparciu o postać sterowalną?

□

# Rozwiązania

**Rys. 1**

Pamiętając, że $i_c = C\frac{d}{dt}v_c$ zapisać można

$$u = i_c R + v_c$$
$$u = RC\frac{d}{dt}v_c + v_c$$
$$ddtv_c = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}u$$

Dynamika układu ma postać

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u$$

Istotnie, $R_1C_1 = R_2C_2$ a układ jest niesterowalny.

**Rys. 2**

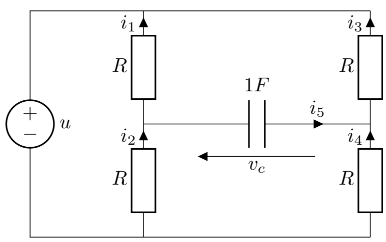
Analogicznie, dynamika układu ma postać

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RC_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{RC_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \\ \frac{1}{RC_3} \end{bmatrix} u,$$

a układ jest sterowalny. Postać sterowalna to

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -1 & -\frac{11}{6} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -24 & 27 \\ 3 & -12 & 9 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

**Rys. 3**



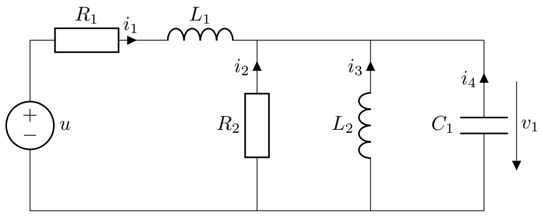

$$i_3 + i_4 = i_1 + i_2$$
$$i_1 R = u_c + i_3 R, \quad i_2 R = -u_c + i_4 R$$
$$i_5 = C\frac{d}{dt}v_c = i_2 - i_1 = i_3 - i_4$$
$$i_1 = \frac{1}{R}u_c + i_3, \quad i_2 = -\frac{1}{R}u_c + i_4$$
$$i_5 = -\frac{1}{R}u_c - \frac{1}{R}u_c + i_4 - i_3$$
$$i_5 = -\frac{1}{R}u_c - i_5$$
$$2C\frac{d}{dt}v_c = -\frac{1}{R}v_c - \frac{1}{R}v_c$$
$$\frac{d}{dt}v_c = -\frac{1}{CR}v_c$$

Dynamika układu ma postać

$$\frac{d}{dt}x_1 = \left[-\tfrac{1}{CR}\right]x_1 + \left[0\right]u$$

is jest niesterowalna.

**Rys. 4**




Pamiętając, że napięcie na cewce $u_L = L\frac{d}{dt}i_L$

$$\begin{aligned} v_1 &= L_2\frac{d}{dt}i_3 \\ v_1 &= i_2 R_2 \\ v_1 &= -u + i_1R_1 + L_1\frac{d}{dt}i_1 \\ i_4 &= -i_1 - i_2 - i_3 \\ C_1\frac{d}{dt}v_1 &= -i_1 - \frac{1}{R_2}v_1 - i_3 \end{aligned}$$

Zatem dynamika $[i_1, i_2, v_1]^T$ ma postać

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Jej postać sterowalna to

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7/2 & -9/2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$