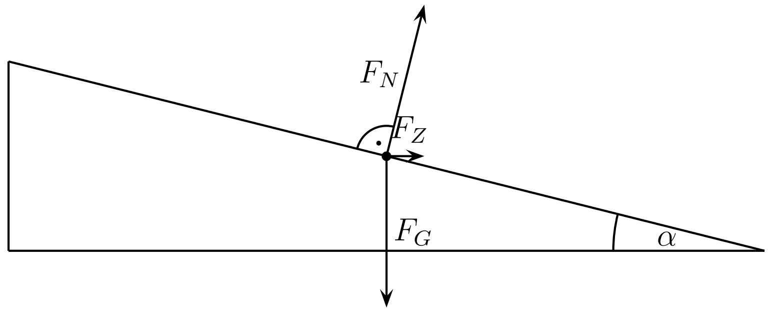
Achterbahnphysik auf dem Jahrmarkt

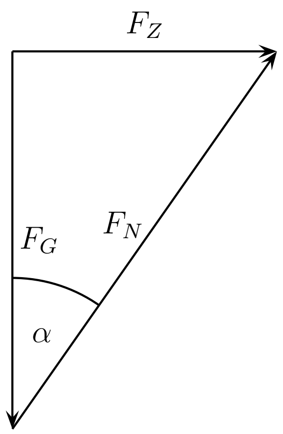
Constantin Paech

February 10, 2024

1 Wiederholung von überhöhten Kurven

Wir befinden uns auf einer Acherbahn mit einem geraden Stück. Das gerade Stück mündet in eine waagrechte Kurve mit dem Radius r. Die Kurve macht genau eine Umdrehung (2π im Bogenmaß). Die Kurve ist zusätzlich mit dem Winkel α überhöht. Wie schnell muss die Achterbahhn sein, damit keine Seitlichen Haltekräfte auf die Passagiere wirken?





$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} \tag{1a}$$

$$\tan\alpha \cdot F_G = F_Z \tag{1b}$$

$$\tan\alpha \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \tag{1c}$$

$$\tan\alpha \cdot g \cdot r = v^2 \tag{1d}$$

$$\sqrt{\tan\alpha \cdot g \cdot r} = v \tag{1e}$$

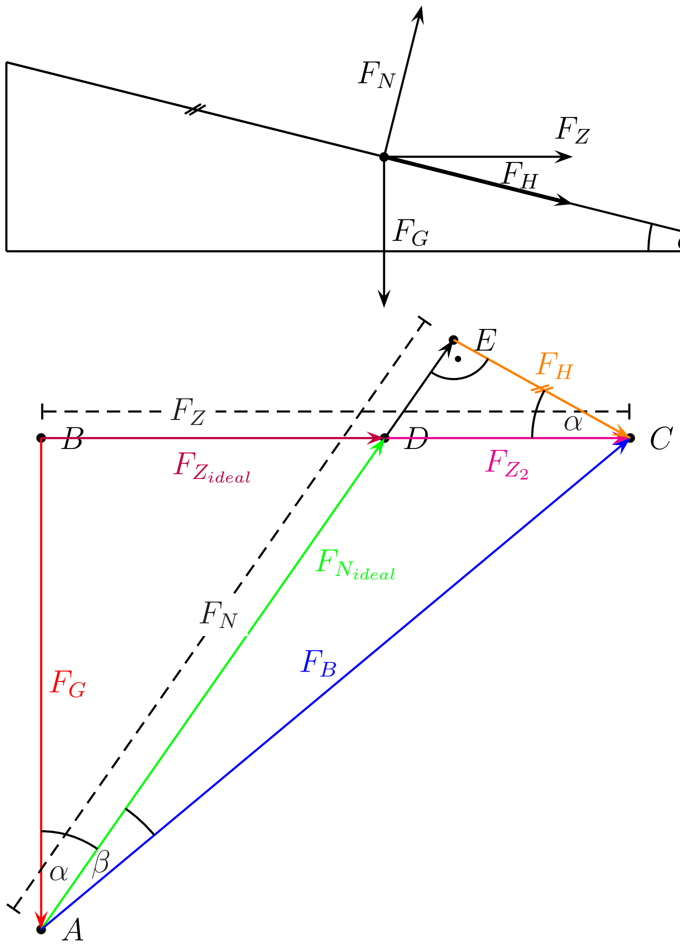
Beispiel: Bei einer Neigung von $\alpha = 30°$ und einem Radius von $r = 10\text{m}$ müsste der Betreiber die Achterbahn vor der Kurve auf

$$\sqrt{\tan{(30°)} \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\text{m}}$$

beschleunigen bzw. bremsen. Damit gilt $v \approx 7,52\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 27\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2 Bestimmung der Kräfte

Welche seitlichen Haltekräfte wirken wenn der Betreiber die Acherbahn zu schnell oder zu langsam beschleunigt? Es gelten wieder derselbe Winkel α und Radius r.



$$F_{Z_2} = F_Z - F_{Z_i} \tag{2a}$$

$$F_{Z_2} = m \cdot \frac{v^2}{r} - \tan\alpha \cdot F_G \tag{2b}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_H}{F_{Z_2}} \tag{2c}$$

$$\cos\alpha \cdot F_{Z_2} = F_H \tag{2d}$$

$$F_H = \cos\alpha \cdot \left(m \cdot \frac{v^2}{r} - \tan\alpha \cdot F_G\right) \tag{2e}$$

Beispiel: Der Betreiber aus dem vorherigem Beispiel beschleunigt die Bahn aus- versehen auf $12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vor der Kurve mit dem Radius 10m und Neigung 30°. Jetzt wirkt auf die Gäste eine seitliche Haltekraft von

$$\cos(30°) \cdot \left[\frac{\left(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{10\mathrm{m}} - \tan(30°) \cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

Für F_H gilt: $F_H \approx 3,75\mathrm{N}$

3 Berechnung mit Bewegung in der Vertikalen

Der Betreiber hat jetzt die Achterbahn Kurve so erweitert, dass die Kurve sich innerhalb einer vollen Drehung von 2π um die Höhe h erhöht. Stellen sie eine Funktion auf die den Neigungswinkel α in abhängigkeit der durchlaufenen Strecke s im Kreis angibt, so dass keine seitlichen Haltekräfte aufkommen. Ich werde im Folgendem schrittweise die Herleitung erörtern.

3.1 Potentielle Energie und Geschwindigkeit in einer Höhe

Durch die Steigung gewinnt die Achterbahn im Kreis an Höhe und damit an potentieller Energie. Dadurch muss die Achterbahn im Umkerschluss an kinetischer Energie verlieren. Wir berrechnen die Geschwindigkeit in einer bestimmten Höhe h durch den Energieerhaltungssatz.

$$E_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0)^2 \tag{3a}$$

$$E_{kin}(h) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0)^2 - mgh \tag{3b}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{kin}(h) \tag{3c}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0)^2 - mgh \tag{3d}$$

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot (v_0)^2 - gh \tag{3e}$$

$$v^2 = (v_0)^2 - 2gh \tag{3f}$$

$$v(h) = \sqrt{(v_0)^2 - 2gh} \tag{3g}$$

3.2 Neigungswinkel in Abhängigkeit der Höhe

Mithilfe der Formel aus der vorherigen Aufgabe können wir jetzt den benötigten Neigungswinkel α in einer bestimmten Höhe h ausrechnen.

$$\tan \alpha = \frac{F_Z}{F_G} \tag{4a}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_Z}{F_G}\right) \tag{4b}$$

$$\alpha(h) = \arctan\left[\frac{m \cdot \frac{(v(h))^2}{r}}{mg}\right] \tag{4c}$$

$$\alpha(h) = \arctan\left(\frac{v(h)^2}{rg}\right) \tag{4d}$$

3.3 Berechnung der Höhe an einem Winkel im Kreis

Jetzt stellen wir eine Formel auf mit derer Hilfe wir wir von einem Winkel s an dem wir uns in der Kreisbahn befinden auf die Höhe kommen. Diese können wir für dir Höhe in der Formel des vorherigen Schrittes einsetzen um auf die Finalform zu kommen.

Wir gehen von einer linearen Steigung der Höhe aus.

$$h(s) = \frac{s}{2\pi r} \cdot h_{\max} \tag{5a}$$

Einsetzen in die Formel des vorherigen Schrittes:

$$\alpha(s) = \alpha(h(s)) \tag{5b}$$

$$\alpha(s) = \arctan\left(\frac{[v(h(s))]^2}{rg}\right) \tag{5c}$$

$$\alpha(s) = \arctan\left(\frac{\left[\sqrt{(v_0)^2 - 2g \cdot h(s)}\right]^2}{rg}\right) \tag{5d}$$

$$\alpha(s) = \arctan\left(\frac{(v_0)^2 - 2g \cdot \frac{s}{2\pi r} \cdot h_{\max}}{rg}\right) \tag{5e}$$