《计算模型导引》第五章参考答案*

2019 年 5 月 22 日

习题 5.1

主要思想是先后抹除 $\overline{x}$ 最后移到 $\overline{y}$ 的头. 机器如下:

	0	1	解释
1	0R2	0R1	抹除第一个 $\overline{x}$ 并指向 $\overline{y}$ 头
2	0R3	1R2	移动到第二个 $\overline{x}$ 头
3	0L4	0R3	抹除第二个 $\overline{x}$
4	0L4	1L5	越过 $\overline{y}$ 的最后一个 1
5	0R6	1L5	移到 $\overline{y}$ 头

习题 5.2

主要思想是每次抹掉输入的一个 1 对应两个输出各增加一个 1. 即设计机器 M 实现如下功能:

$$M|1:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}01^k01^k0\cdots \twoheadrightarrow u:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{k+1}01^{k+1}0\cdots$$
$$M|1:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{l+1}01^k01^k0\cdots \twoheadrightarrow v:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{l}01^{k+1}01^{k+1}0\cdots$$

这里 $k \geq 0$, u 为停机状态. 这样 $M[v := 1]$ 既可实现循环.
具体实现如下:

*Ver. 0.1. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 然后由助教丁超录入修订补充. 此文档来源为`https://github.com/sleepycoke/NJU_Comp_Models`

	0	1	解释
1		0R2	输入移除 1
2	0R3	1R12	判断输入是否还有 1, 移到尾部再跳过后面的 0
3	1R4	1R3	输入为 0, 那么走第一个分支 3-8. 将第一个 1^k 后的 0 改为 1
4		0R5	将第二个 1^k 的第一个 1 改为 0
5	1R6	1R5	将第二个 1^k 后的 0 改为 1
6	1L7		再添个 1
7	0L8	1L7	跳过 1^{k+1}
8	0R9	1L8	移到输入头, 停机
12	0R13	1R12	输入不为 0, 那么走第二个分支 12-19. 跳过第一个输入
13	1R14	1R13	将第一个 1^k 后的 0 改为 1
14		0R15	将第二个 1^k 的第一个 1 改为 0
15	1R16	1R15	将第二个 1^k 后的 0 改为 1
16	1L17		再添个 1
17	0L18	1L17	跳过 1^{k+1}
18	0R19	1L18	再跳过 1^{k+1}
19	0R1	1L19	再移到输入头，循环

习题 5.4

参照第 133 页定理 5.14, 我们需要作一个预处理，添上一个输入 $\overline{1}$. 具体可以由如下机器 M_3 实现:

	0	1
1	0R2	1R1
2		1R3
3	1L4	
4		1L5
5	0L6	
6	0R7	1L6

如书中第 134 页构造机器 M_1:

	0	1
1		0R2
2	0R4	1R3
3	0R4	1R3

令 M_2 为 $M_1 \Rightarrow \boxed{\text{double}} \Rightarrow \boxed{\text{compress}} \Rightarrow \boxed{\text{shiftl}}$，从而

若 $x=0$, 则 $M_2|1: 0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow v: 000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0\cdots$

若 $x>0$, 则 $M_2|1: 0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow w: 00\underset{\uparrow}{\overline{x}-1}0\overline{g(y)}0\cdots$, 其中 w 为 M_2 的输出时的状态.

令 $\boxed{\text{f}} = M_2[w := 1]$, $M_3 \Rightarrow \boxed{\text{f}}$ 即为所求.

习题 5.5

- 若 $x=0$:

$$1:0\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2:01\underset{\uparrow}{0}000\cdots \tag{0L3}$$

$$3:0\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{1L3}$$

$$3:\underset{\uparrow}{0}10000\cdots \tag{0L3}$$

$$3:\underset{\uparrow}{\ }010000\cdots \tag{halt}$$

- 若 $x>0$:

$$1:0\underset{\uparrow}{1}1^x0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2:01\underset{\uparrow}{1}^x0000\cdots \tag{0R1}$$

$$1:010\underset{\uparrow}{1}^{x-1}0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2:0101\underset{\uparrow}{1}^{x-2}0000\cdots \tag{0R1}$$

$$\cdots \tag{1R2, 0R1}$$

$$3:\overbrace{0101\cdots0\underset{\uparrow}{1}}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}0000\cdots \tag{1L3}$$

$$\cdots \tag{0L3, 1L3}$$

$$3:\overbrace{\underset{\uparrow}{0}101\cdots01}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}\cdots010000\cdots \tag{0L3}$$

$$3:\underset{\uparrow}{\ }\overbrace{0101\cdots01}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}\cdots010000\cdots \tag{halt}$$

总之就是擦除了第偶数个 1, 然后指向第一个 0 左边 (越界).

习题 5.6

易见 $M_2|1:0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 1:000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0\cdots$

从而 $M_2|1:0\underset{\uparrow}{1}^n01^m01^k0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 1:0^{n+m+k+3}\underset{\uparrow}{0}0\cdots$(停)

又易见 $M_2|1:00\underset{\uparrow}{0}\cdots \twoheadrightarrow 7:0\underset{\uparrow}{1}1110\cdots$

于是 $M_2|1:0\underset{\uparrow}{1}^n01^m01^k0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 7:0^{m+n+k+4}\underset{\uparrow}{1}1110\cdots$(停)

习题 5.7

由于

$$y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \Leftrightarrow y \leq \sqrt{x} < y + 1 \Leftrightarrow y^2 \leq x < (y+1)^2$$

所以

$$f(x) = \mu y.x < (y+1)^2 = \mu y.N^2((sx) \dot{-} (sy)^2)$$

首先平方机器 $\boxed{\text{sqrt}}$ 可由 $\boxed{\text{copy1}}\Rightarrow\boxed{\text{shiftl}}\Rightarrow\boxed{\text{multi}}$ 构造，其中 $\boxed{\text{multi}}$ 为习题 5.3 的乘法机器. 然后减法机器也在习题 5.11 中给出，于是 f 涉及到的机器都已经构造出, 那么 $\boxed{\text{f}}$ 是可构造的. 具体构造过程可对照教材实现.

习题 5.10

参照第 133 页定理 5.14, 我们需要作一个预处理，添上一个输入 $\overline{0}$. 具体可以由如下机器 M_3 实现:

	0	1
1	0R2	1R1
2	1L3	
3	0L4	
4	0R5	1L4

接下来再如法构造 $\boxed{\text{f}}$ 既可. 最后结果为 $M_3\Rightarrow\boxed{\text{f}}$.

习题 5.11

注意到 $0 \dot{-} y = 0, \quad x \dot{-} 0 = x, \quad (x+1) \dot{-} (y+1) = x \dot{-} y$, 我们可以分情况处理. 机器如下:

	0	1	解释
1		0R2	将 x 减 1
2	0R3	1R4	判断原 x 是否为 0
3	1O15	0R3	原 x 为 0 那么把 $\overline{y}$ 修改为 1 输出
4	0R11	1R4	原 x 不为 0 找到 $\overline{y}$ 的头
5	0L6	1R5	找到 $\overline{y}$ 的尾部
6		0L7	将 y 减 1
7	0L10	1L7	找到 $\overline{x}$ 的尾
10	0R1	1L10	找到 $\overline{x}$ 的头, 迭代
11		1R12	跳过 $\overline{y}$ 的第一个 1
12	0L13	1R5	判断 y 是否为 0
13		0L16	原 y 为 0，抹掉 $\overline{y}$
14	0R15	1L14	原 y 为 0，找到 $\overline{x}$ 的头, 输出 x
15			停机
16	0L14		前左跳过一个 0

计算过程如下:

- 若 $x=0$:

$$1: 0\underset{\uparrow}{1}0\overline{y}000\cdots \qquad (0R2)$$

$$2: 00\underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \qquad (0R3)$$

$$3: 000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0000\cdots \qquad (0R3)$$

$$3: 0000\overline{\underset{\uparrow}{y}-1}0000\cdots \qquad (0R3)$$

$$\cdots \qquad (0R3)$$

$$3: 000\cdots\underset{\uparrow}{0}0000\cdots \qquad (1O15)$$

$$15: 000\cdots\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \qquad (\text{halt})$$

- 若 $x>0,\quad y=0$:

$$1: 0\underset{\uparrow}{1}1^x01000\cdots \qquad (0R2)$$

$$2: 00\underset{\uparrow}{1}^x01000\cdots \qquad (1R4)$$

$$\cdots \qquad (1R4)$$

$$4: 001^x\underset{\uparrow}{0}1000\cdots \qquad (0R11)$$

$$11: 001^x0\underset{\uparrow}{1}000\cdots \qquad (1R12)$$

$$12: 001^x01\underset{\uparrow}{0}00\cdots \qquad (0L13)$$

$$13: 001^x0\underset{\uparrow}{1}000\cdots \qquad (0L16)$$

$$16: 001^x\underset{\uparrow}{0}0000\cdots \qquad (0L14)$$

$$14: 001^{x-1}\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \qquad (1L14)$$

$$\cdots \qquad (1L14)$$

$$14: 0\underset{\uparrow}{0}1^x0000\cdots \qquad (0R15)$$

$$15: 00\underset{\uparrow}{1}^x0000\cdots \qquad (\text{halt})$$

- 若 $x > 0, \quad y > 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}1^x0\overline{y}000\cdots \qquad \text{(0R2)}$$

$$2 : 00\underset{\uparrow}{1}^x0\overline{y}000\cdots \qquad \text{(1R4)}$$

$$\cdots \qquad \text{(1R4)}$$

$$4 : 001^x\underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \qquad \text{(0R11)}$$

$$11 : 001^x0\underset{\uparrow}{\overline{y}}000\cdots \qquad \text{(1R12)}$$

$$12 : 001^x01\overline{\underset{\uparrow}{y}-1}000\cdots \qquad \text{(1R5)}$$

$$\cdots \qquad \text{(1R5)}$$

$$5 : 001^x0\overline{y}\underset{\uparrow}{0}00\cdots \qquad \text{(0L6)}$$

$$6 : 001^x01^y\underset{\uparrow}{1}000\cdots \qquad \text{(0L7)}$$

$$7 : 001^x01^{y-1}\underset{\uparrow}{1}000\cdots \qquad \text{(1L7)}$$

$$\cdots \qquad \text{(1L7)}$$

$$7 : 001^x\underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \qquad \text{(0L10)}$$

$$10 : 001^{x-1}\underset{\uparrow}{1}01^y000\cdots \qquad \text{(1L10)}$$

$$\cdots \qquad \text{(1L10)}$$

$$10 : 0\underset{\uparrow}{0}1^x01^y000\cdots \qquad \text{(0R1)}$$

$$1 : 00\underset{\uparrow}{1}^x01^y000\cdots \qquad \text{(Compute } (x-1) \dot{-} (y-1)\text{)}$$

习题 5.12

欲证 $Even$ Turing-可计算，只需构造机器 E 满足:

$$E|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^{2x+1}0\cdots \twoheadrightarrow u : 0\cdots0\underset{\uparrow}{1}0\cdots$$

$$E|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^{2x}0\cdots \twoheadrightarrow u : 0\cdots0\underset{\uparrow}{1}10\cdots$$

其中 $E(1,u)$ 无定义. E 可如下构造:

	0	1
1	1L3	0R2
2	1O4	0R4
3	1O3	

$E(1,1)$ 的 $E(1,2)$ 形成循环将成对的 1 改为 0. 若有奇数个 1, 最后会执行 $M(0,2)$ 停机, 输出 $\overline{0}$. 若有偶数个 1, 最后会执行 $M(0,1), M(0,3)$ 停机, 输出 $\overline{1}$.

习题 5.17

首先 0,1 显然都不是一个合法的机器编码, 假定输入至少为 2.
此题的关键在于给定机器 M 的编码 $\#M$ 如何确定其行数. 解法为:
设 M 有 $k+1$ 行，那么显然有 $k < \#M$. 从而设 $k = \max z \leq \#M, [p_z|\#M]$,
一但 k 确定, 那么对于各行的解码过程都是可计算的. 一旦出现不合法的行则解码失败, 全部成功解码则说明输入是一个合法的机器编码, 属于 S.
反过来由于编码和解码是一对逆过程, 那么解码失败的输入一定不属于 S.
如果我们承认 CT, 那么我们已经给出了一个能行的方法判定 S, 从而 S 是 Turing-可计算的.
若持有更保守的观点, 那可以通过证明 S 为递归集来证明其 Turing-可计算. 过程繁杂从略.

习题 5.18

由 Taylor 公式

$$e = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

(1) 令 $f(n) = \lfloor e \cdot n! \rfloor$, 我们往证 $f \in \mathcal{PRF}$:
$f(0) = f(1) = 2$, 当 $n \geq 2$

$$f(n) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right) n! + \frac{e^\theta}{n+1}$$

注意到当 $n \geq 2$ 时 $0 < \frac{e^\theta}{n+1} < 1$, 从而

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} (n-1)!$$

于是 $f \in \mathcal{PRF}$.

(2) 令 $h(n) = \lfloor e\dot{n} \rfloor$ 则 $h(0) = 0, \quad h(n) = \left\lfloor \frac{g(n)}{(n-1)!} \right\rfloor, n \geq 1$.
从而 $h \in \mathcal{PRF}$.

(3)

$$g(1) = 2$$

$$g(n) = h(10^n) \dot{-} h(10^{n \dot{-} 1}) \cdot 10, \quad n > 1$$

从而 $g \in \mathcal{PRF}$, 于是 g 可计算。

注意到余项的上界 $\frac{e}{(n+1)!}$ 严格单调递减且收敛速度超过指数函数, 此题也可以设计数值算法来求 e 的前 n 位有效数字, 进而通过 CT 说明 g 可计算.