Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 3

Początek zapisów: **11 grudnia 2007 r.**

Termin realizacji: **17 stycznia 2008 r.**

Punktacja: ***maksymalnie 8 punktów za każde zadanie.***

Każde zadanie może być wybrane najwyżej czterokrotnie.

P3.1. Wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

można zapisać w postaci

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n} f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x),$$

a wielomian J_n o własności $J_n(u_{n-1,k}) = f(u_{n-1,k})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $u_{n-1,k} = \cos(k\pi/n)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$, można zapisać wzorem

$$J_n(x) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' \left(\sum_{k=0}^{n}{}'' f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \right) T_j(x).$$

Wielomian $K_n \in \Pi_n$ podany wzorem

$$K_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n}{}' \left(\sum_{k=0}^{n+1}{}'' f(u_{nk}) T_k(u_{nj}) \right) T_j(x)$$

jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze $\{u_{n0}, u_{n1}, \ldots, u_{n,n+1}\}$, gdzie $u_{nk} = \cos(k\pi/(n+1))$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$. Dla wybranych funkcji f i wartości n obliczyć (w przybliżeniu) błędy aproksymacji jednostajnej funkcji f za pomocą I_n, J_n i K_n, w przedziale $[-1, 1]$.
Uwaga. Symbol $\sum'$ oznacza sumę, której pierwszy składnik należy podzielić przez 2, a $\sum''$ – sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.

P3.2. Przybliżoną wartość pochodnej funkcji f w punkcie x podaje wyrażenie

$$\varphi(h) := \frac{1}{2h} \left[f(x+h) - f(x-h) \right],$$

gdzie $h > 0$. Jeśli f jest dostatecznie regularna, wówczas można skonstruować trójkątną tablicę przybliżeń pochodnej według wzorów

$$\begin{aligned} &D_{m0} := \varphi(h_0/2^m) \qquad (m = 0, 1, \ldots) \\ &D_{mk} := (1 + \lambda_k) D_{m,k-1} - \lambda_k D_{m-1,k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ m = k, k+1, \ldots), \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_k := 1/(4^k - 1)$, h_0 jest ustalone (np. $h_0 = 1$).

Dla danych f, x i ε skonstruować $M+1$ początkowych wierszy tablicy $\{D_{mk}\}$, gdzie M jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|D_{MM} - D_{M-1,M-1}| < \varepsilon |D_{MM}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|f'(x) - D_{mk}|/|f'(x)|\}$. Sprawdzić działanie programu **między innymi** dla $f(x) = \ln x$ i $x = 3$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $x = \arcsin 0.8$ oraz $f(x) = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x)$ i $x = 0$.

P3.3. Zrealizować algorytm, który dla danej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\, b]$, liczby naturalnej n oraz układu $n+2$ punktów $D_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a,\, b]$ wyznacza n-ty wielomian optymalny w_n^* w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze D_n. Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n w wypadku, gdy

(i) $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n+1}$; ***(ii)*** $x_k = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

Naszkicować wykres funkcji $e_n := f - w_n^*$ w przedziale $[a,\, b]$.

P3.4. Zrealizować następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu $s_n := \sum_{k=0}^{n} w_k P_k$, gdzie współczynniki $w_0, w_1, \ldots, w_n$ są dane, a $\{P_k\}$ jest ciągiem wielomianów, spełniającym związek rekurencyjny postaci

$$P_0(x) = a_0, \qquad P_1(x) = (a_1 x - b_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (a_k x - b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

przy czym a_k, b_k, c_k są danymi stałymi.

> Obliczamy pomocnicze wielkości $B_0, B_1, \ldots, B_{n+2}$ według wzorów
>
> $$B_k = w_k + (a_{k+1}x - b_{k+1})B_{k+1} - c_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$
>
> gdzie $B_{n+1} = 0$, $B_{n+2} = 0$. Wówczas jest $s_n(x) = a_0 B_0$.

Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla wielomianów I_n i J_n, podanych w zadaniu **P3.1** w postaci kombinacji wielomianów Czebyszewa T_k, oraz ich pochodnych I_n' i J_n'. *Wskazówka*: Zauważyć, że $T_k' = kU_{k-1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, gdzie U_k są *wielomianami Czebyszewa II rodzaju*, spełniającymi związek rekurencyjny $U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ z warunkami początkowymi $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$.

P3.5. Dla danego n i danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ wyznaczyć współczynniki kwadratury interpolacyjnej

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

stosując wzór

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{x - x_k}\,dx, \qquad \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Rozważyć (a) węzły równoodległe, (b) węzły będące zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa, (c) punkty ekstremalne n-tego wielomianu Czebyszewa. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \qquad f_2(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)}\sin\pi(1+x).$$

P3.6. W zadaniu chodzi o realizację pewnego wariantu metody Romberga obliczania całki $\int_a^b f(x)dx$, w którym stosuje się rozbicie przedziału całkowania na podprzedziały, uwzględniające charakter zmienności funkcji f. Niech będą dane $h > 0$ i d. W znany sposób konstruujemy dla przedziału $[a, a+h]$ początkowy fragment tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, zawierający nie więcej niż 4 wiersze (tj. m, $k \leq 4$). Jeśli dla pewnego $m \leq 4$ T_{m0} i $T_{m-1,0}$ zgadzają się z dokładnością do d cyfr, to akceptujemy T_{m0} jako wartość całki $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ i przechodzimy do przedziału $[a+h,\, a+2h]$ (wartość h można przy tym zwiększyć, jeśli $m = 1$, lub zmniejszyć – w wypadku $m = 4$). Jeśli T_{40} i T_{30} nie pokrywają się z dokładnością do d cyfr, to zmniejszamy krok h i powtarzamy opisane czynności dla skróconego podprzedziału. Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.7**.

P3.7. Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Dla danych a, b, f i $\varepsilon > 0$ należy skonstruować K początkowych wierszy tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, gdzie K jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon |T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + x^4}, \quad f_3(x) = \frac{2}{2 + \sin(10\pi x)}.$$

(Uwaga: wynik dokładny I jest równy odpowiednio 1.582233, 0.866970 i 1.15470054; w pierwszym wypadku jest $[a,\, b] = [-1,\, 1]$, a w pozostałych $[a,\, b] = [0,\, 1]$).

P3.8. Wyprowadź wzory na współczynniki kwadratury Newtona–Cotesa dla

(a) 2 węzłów (*wzór trapezów*),
(b) 3 węzłów (*wzór Simpsona*),
(c) 4 węzłów (*reguła 3/8 Simpsona*),
(d) 5 węzłów (*wzór Boole'a*).

Następnie wykorzystaj otrzymane wzory do skonstruowania odpowiednich kwadratur złożonych. Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całek typu

$$\int_a^b P(x)dx, \qquad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \qquad \int_a^b R(\sin x, \cos x)dx,$$

gdzie P i Q są wielomianami, a R – funkcją wymierną dwu zmiennych. Wyciągnij wnioski.

P3.9. Wykorzystując poznane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych, zaproponuj i zrealizuj algorytmy wyznaczania przybliżonej wartości całki podwójnej

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx.$$

Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całki

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy\,dx}{x^2 + y^2 + 1} = 0.639510351870311001962693085427323679\ldots$$

Literatura: J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*, WNT, 1988, str. 164–166. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971, str. 139–140.

P3.10. Zrealizować efektywny algorytm obliczania wartości sumy

$$s_n(x) = {\sum_{i=0}^{n}}' c_k T_k(x),$$

gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Zaburzyć wartości współczynników według wzoru $\tilde{c_k} := c_k(1+\epsilon_k)$, wybierając losowo liczby ϵ_k z małego przedziału $[-\delta, \delta]$. Porównać wartości wielomianu $s_n(x)$ dla dokładnych i dla zaburzonych współczynników. Wykonać obliczenia **między innymi** dla wielomianów I_n i J_n z zadania **P3.1**.

P3.11. Zrealizować algorytm konstrukcji takiego wielomianu w możliwie najniższego stopnia, który – dla danej liczby dodatniej ε – spełnia nierówność

$$\int_0^1 x[f(x) - w(x)]^2\,dx < \varepsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

P3.12. Niech dana będzie funkcja $f \in C[-1,1]$ mająca zera w punktach -1 i $+1$, tzn. $f(-1) = f(+1) = 0$. Zaproponuj i zrealizuj algorytm wyznaczania wielomianu $w_n^* \in \widetilde{\Pi}_n$ $(n \geq 2)$ spełniającego warunek

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \widetilde{\Pi}_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie $\widetilde{\Pi}_n := \{w \in \Pi_n \,:\, w(-1) = w(+1) = 0\}$, a $||g||_2^2 := \displaystyle\int_{-1}^{1} [g(x)]^2\,dx$. Przedstaw wnioski z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych dla odpowiednio dobranych funkcji f.

P3.13. O funkcji $f \in C[0,1]$ wiadomo, że $f(0) = a$, a $f(1) = b$. Opracuj efektywny algorytm wyznaczania wielomianu $w_n^* \in \widehat{\Pi}_n$ $(n \geq 2)$ spełniającego warunek

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \widehat{\Pi}_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie $\widehat{\Pi}_n := \{w \in \Pi_n \,:\, w(0) = a,\ w(1) = b\}$, a $||g||_2^2 := \displaystyle\int_0^1 [g(x)]^2\,dx$. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

P3.14. Obliczyć ***przybliżoną wartość całki*** $\int_a^b f(x)\,dx$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Zastosować co najmniej dwie różne metody! Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)} \sin \pi(1+x).$$

P3.15. Zrealizować następującą metodę obliczenia przybliżonej wartości całki nieoznaczonej

$$I(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{dla } a \leq x \leq b$$

przy założeniu, że znane są tylko wartości funkcji f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

(i) Wyznaczyć naturalną funkcję sklejaną III stopnia s, interpolującą f w punktach $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

(ii) Przyjąć $I(x) \approx \int_a^x s(t)\,dt$.

Ocenić dokładność metody na podstawie wykonanych obliczeń kontrolnych, w których znany jest wzór na całkę $I(x)$.

P3.16. Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$I := \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Podzielić przedział całkowania na N podprzedziałów o równej długości, a następnie zastosować do obliczenia całki w każdym z podprzedziałów – po uprzedniej liniowej zamianie zmiennej całkowania – dwupunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a

$$Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Przybliżenie całki (1) daje suma przybliżeń całek w podprzedziałach. Powtórzyć czynności dla $N := 2N$ i porównać otrzymane wyniki. Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla całek podanych w zadaniu **P3.7**.

P3.17. Za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} &P_{m0} := \psi(h_0/2^m) \qquad (m = 0, 1, \ldots) \\ &P_{mk} := (1 + \lambda_k)P_{m,k-1} - \lambda_k P_{m-1,k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ m = k, k+1, \ldots), \end{aligned}$$

gdzie

$$\psi(h) := \frac{1}{h^2}\left[f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)\right], \qquad \lambda_k := 1/(4^k - 1),$$

a h_0 jest ustalone (np. $h_0 = 1$), określamy następującą tablicę przybliżeń wartości drugiej pochodnej funkcji f w punkcie x:

$$\begin{array}{llllll} P_{00} \\ P_{10} & P_{11} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{m0} & P_{m1} & P_{m2} & \ldots & P_{mm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & & \ddots \end{array}$$

Dla danych f, x i ε skonstruować $N+1$ początkowych wierszy tablicy $\{P_{mk}\}$, gdzie N jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność $|P_{NN} - P_{N-1,N-1}| < \varepsilon|P_{NN}|$. Sprawdzić działanie programu m. in. dla $f(x) = \ln x$ i $x = 3$ oraz $f(x) = \sin(x^2 + \frac{1}{3}x)$ i $x = 0$.

P3.18. Zadanie dla dwuosobowego zespołu

Rozważyć następujące sugestie co do sposobu obliczenia całek

$$I_c := \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, \qquad I_s := \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$$

(a) Użyć złożonego wzoru trapezów z $n+1$ równoodległymi węzłami, „ignorując" osobliwość w $x = 0$ (tj. przyjmując arbitralnie zerową wartość funcji podcałkowej dla $x = 0$). Wykonać obliczenia dla $n = 100(100)1000$.

(b) Wybrać małe $h > 0$, użyć złożonego wzoru trapezów z n równoodległymi węzłami do obliczenia całki $\int_h^1$ oraz (odpowiednio przekształconego) wzoru

$$\int_0^1 t^{-1/2} g(t)\,dt \approx \frac{4}{3}g(0) + \frac{2}{3}g(1)$$

do obliczenia całki $\int_0^h$. Wykonać obliczenia dla $n = 100(100)1000$.

(c) Zamienić zmienną całkowania według wzoru $x = t^2$, a następnie użyć złożonego wzoru trapezów z $n+1$ równoodległymi węzłami. Wykonać obliczenia dla $n = 20(20)200$.

(d) Użyć kwadratury Gaussa-Legendre'a do obliczenia całek otrzymanych w punkcie **3.18c**. Wykonać obliczenia dla $n = 1(1)4$.

Skomentować otrzymane wyniki. *Uwaga*: $I_c = 1.809045218947\ldots$, $I_s = 0.620549071924\ldots$.

P3.19. Zadanie dla dwuosobowego zespołu

Wielomiany Bernsteina n-tego stopnia definiujemy wzorem

$$B_{ni}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Korzystając z tożsamości

$$t^i = \binom{n}{i}^{-1} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} B_{nj}(t), \qquad B_{ni}(t) = \sum_{k=i}^{n} (-1)^{i+k} \binom{j}{i} \binom{n}{k} t^k$$

opracować algorytmy przekształcenia postaci potęgowej wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \tag{2}$$

na *postać Béziera* tego wielomianu

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i B_{ni}(t), \tag{3}$$

jak również przekształcenia odwrotnego. Wartość wielomianu p dla danego argumentu $t \in [0, 1]$ można w wypadku, gdy ma on postać (2), obliczać za pomocą schematu Hornera, natomiast jeśli ma on postać (3), można użyć następującego **algorytmu**:

Niech pomocnicze wielkości $\beta_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ i = 0, 1 \ldots, n-k)$ będą określone wzorami

$$\begin{cases} \beta_i^{(0)} := \beta_i & (i = 0, 1, \ldots, n), \\ \beta_i^{(k)} := (1-t)\beta_i^{(k-1)} + t\beta_{i+1}^{(k-1)} & (k = 1, 2 \ldots, n;\ i = 0, 1 \ldots, n-k). \end{cases}$$

Wówczas $p(t) = \beta_0^{(n)}$.

Porównać te dwa algorytmy na przykładach pod względem efektywności oraz odporności na zaburzenia danych.

P3.20. Zadanie dla dwuosobowego zespołu

Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$I := \int_{-1}^{1} f(x)\, dx. \tag{4}$$

Dla danego n parzystego funkcję f przybliżamy za pomocą wielomianu

$$J_n = {\sum_{j=0}^{n}}' a_j T_j,$$

gdzie

$$a_j := \frac{\epsilon_j}{n} {\sum_{k=0}^{n}}'' f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \quad (j = 0, 1, \ldots, n;\ \epsilon_j = 2,\ \text{gdy } j < n,\ \epsilon_n = 1),$$

$$u_{n-1,k} = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

a następnie za przybliżenie całki (4) przyjmujemy liczbę

$$I_n := \int_{-1}^{1} J_n(x)\,dx = 2(b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1}),$$

gdzie

$$b_{2k-1} := \frac{a_{2k-2} - a_{2k}}{4k-2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n/2).$$

W prostszej wersji zadania wartość n jest wybierana przez prowadzącego obliczenia. W wersji ambitniejszej wartość ta powinna być wyznaczona tak, by $|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon |I_n|$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest dane. (Dla bezpieczeństwa warto podać ograniczenie z góry wartości n). Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.7**.

P3.21. Zadanie dla dwuosobowego zespołu[1]

Załóżmy, że dany jest obraz o rozdzielczości M_x na M_y punktów. Zadanie polega na przekształceniu go do obrazu o rozdzielczości N_x na N_y punktów. Ponieważ zmiana rozmiaru odbywać się ma w poziomie i w pionie niezależnie od siebie, więc – dla uproszczenia – opis algorytmu ogranicza się jedynie do obrazów o rozmiarze M na 1 punktów.

Obraz taki można traktować jako ciąg wartości kolorów w punktach $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, ..., $t_M = M$. Zmiana rozmiaru polega na wyznaczeniu wartości koloru $K(\cdot)$ w punktach

$$p_i = 1 + (i-1)\frac{M-1}{N-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

gdzie N jest nowym rozmiarem obrazu. Można to zrobić na kilka sposobów:

(a) *metodą najbliższego sąsiedztwa*, wyznaczając wartości $K(p_i)$ w sposób nastepujący:

$$K(p_i) := K(\mathrm{round}(p_i)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

(b) skonstruować taką funkcję sklejaną S pierwszego stopnia, że $S(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, M$, a następnie przyjąć

$$K(p_i) := S(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

(c) skonstruować taką naturalną funkcję sklejaną Z trzeciego stopnia, że $Z(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, M$, a następnie przyjąć

$$K(p_i) := Z(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

przy czym wartości wykraczające poza przedział dopuszczalnych wartości dla koloru są zastępowane końcami tego przedziału (np. wartość -2 zostanie zastąpiona przez 0, a 256 przez 255; zakładamy przy tym, że *kolor* jest liczbą całkowitą z przedziału [0,255]).

W wypadku obrazów, których oba wymiary są większe od 1, zmieniamy rozdzielczość najpierw w pionie, a następnie w poziomie (albo najpierw w poziomie, a potem w pionie).

Należy

(i) przetestować trzy podane wyżej metody zmiany rozdzielczości obrazka,

(ii) sprawdzić, czy istotne jest to, w którym kierunku obraz jest najpierw przeskalowywany; można np. generować „obraz różnicy” o kolorach $|K^{(1)}(\cdot,\cdot) - K^{(2)}(\cdot,\cdot)|$, gdzie $K^{(1)}$ jest kolorem otrzymanym pierwszym sposobem, a $K^{(2)}$ – drugim (warto rozważyć też sytuacje, w których jeden wymiar jest zwiększany, a drugi zmniejszany),

[1] Realizacja zadania wymaga umiejętności przekształcania obrazu (bitmapy) o 256 odcieniach szarości na tablicę liczb, i odwrotnie.

(iii) porównać czasy działania trzech podanych wyżej algorytmów,

(iv) (*nieobowiązkowe*) porównać (wizualnie) najlepszy z powyższych algorytmów z profesjonalnym programem obróbki obrazów,

(v) (*nieobowiązkowe*) zastosować najlepszy z algorytmów do zmiany rozmiaru obrazów kolorowych (obraz kolorowy, to w istocie nałożone na siebie trzy obrazy jednobarwne); powtórzyć punkt (iv) dla kolorowych obrazków.

P3.22. Wyznaczyć rozkład danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wykonać obliczenia m. in. dla ***macierzy Hilberta*** $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad (i,\, j = 1, 2, \ldots, n)$$

i ***macierzy Pei***

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & d & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdxie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P3.23. Zaproponować algorytm rozwiązywania układu n równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$) przy założeniu, że elementy a_{ij} są równe zeru, jeśli $|i-j| > m$, gdzie m jest ustaloną liczbą, znacznie mniejszą niż n (np. równą 1 lub 2). Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

P3.24. Zaproponować algorytm rozwiązywania układu n równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$) przy założeniu, że $a_{1n} \neq 0$, $a_{n1} \neq 0$, a pozostałe elementy a_{ij} są równe zeru, jeśli $|i-j| > 1$. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P3.25. Korzystając z rozkładu danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych, wyznaczyć macierz A^{-1}. Wykonać obliczenia dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P3.22**) stopnia n, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru d (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!). Dla kontroli obliczyć obliczyć element o maksymalnej wartości bezwzględnej macierzy $AB - I$, gdzie $B = fl(A^{-1})$.

P3.26. Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy A. Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o $\det A$ podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log|\det A|,$$

gdzie $\sigma := \operatorname{sgn}\, \det A$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P3.22**) i omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów n i d (w tym – $d \approx 1$).

P3.27. Macierz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, odwrotna do danej macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, spełnia równanie $AX = I$, gdzie $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą jednostkową. Zaproponować algorytm wykorzystujący ten fakt do wyznaczenia macierzy X. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.