Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

Początek zapisów: **13 listopada 2007 r.**

Termin realizacji: **10 grudnia 2007 r.**

Punktacja: ***maksymalnie 8 punktów za każde zadanie.***

Każde zadanie może być wybrane najwyżej czterokrotnie.

P2.1. Dla naturalnego $n \geq 2$ rozważyć równanie

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

Równanie to można zapisać w równoważnej postaci $p_n(x) = 0$, gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Można wykazać, że ma ono dokładnie dwa pierwiastki dodatnie,

$$\alpha_n \in (0, 1), \qquad \beta_n \in (1, 3).$$

Ponadto ciąg $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ jest monotonicznie malejący, tj.

$$\beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta_n > \beta_{n+1} > \ldots$$

(a) Metodą bisekcji wyznaczyć β_n ($n = 2, 3, \ldots, 20$) z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych. Użyć $[1, 3]$ jako przedziału początkowego dla β_2 oraz $[1, \beta_n]$ – dla β_{n+1} ($n \geq 2$). Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.

(b) Stosując metodę Newtona do równania $p_n(x) = 0$ wyznaczyć β_n ($n = 2, 3, \ldots, 20$) z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych. Użyć 3 jako wartości początkowej dla β_2 oraz β_n – dla β_{n+1} ($n \geq 2$). Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.

P2.2. Zrealizować następujący ***wariant metody Newtona z nadzorem***. Niech f będzie daną funkcją i niech będą dane takie dwa przybliżenia a i b jej pierwiastka, że $f(a)f(b) < 0$. Jeśli $|f(a)| < |f(b)|$, połóżmy $c := a$; w przeciwnym razie $c := b$. Jeśli jeden krok metody Newtona dla $x_0 := c$ daje wartość x_1 leżącą w przedziale $[a, b]$, przyjmujemy $c := x_1$, w przeciwnym razie kładziemy $c := a + (b - a)/2$ (*co to oznacza?*). Następnie przyjmujemy

$$[a,\, b] := \begin{cases} [a,\, c], & \text{jeśli} \quad f(a)f(c) < 0, \\ [c,\, b], & \text{jeśli} \quad f(a)f(c) \geq 0 \end{cases}$$

i powtarzamy wszystkie opisane wyżej czynności dla aktualnych wartości a i b. Proces kończymy wówczas, gdy $|b - a| < \epsilon$ lub gdy $|f(c)| < \delta$, gdzie ϵ i δ są zadanymi z góry małymi liczbami. Proszę pamiętać o ograniczeniu liczby iteracji, żeby wykluczyć bardzo długie obliczenia!

P2.3. ***Metoda Steffensena*** jest następującą metodą iteracyjną rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/g(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

gdzie

$$g(x) := [f(x + f(x)) - f(x)]/f(x).$$

Przy pewnych założeniach jest ona zbieżna kwadratowo.

Zaprogramować powyższą metodę i wykonać obliczenia m. in. dla $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ (zera leżące w pobliżu 4.5 i 7.7) oraz $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ i $x_0 = 5$.

P2.4. Załóżmy, że funkcja $f \in C[a,b]$ jest rosnąca w przedziale $[a,m]$ oraz malejąca w przedziale $[m,b]$, gdzie $a \le m \le b$. Inaczej mówiąc, f osiąga w punkcie m ***jedyne maksimum*** w przedziale $[a,b]$. Niech będzie $a_1 := (2a+b)/3$, $b_1 := (a+2b)/3$. Zauważmy, że jeśli $f(a_1) < f(b_1)$, to $m \in [a_1, b]$, a w przeciwnym wypadku $m \in [a, b_1]$. Wykorzystać tę obserwację do zaproponowania metody iteracyjnej pozwalającej wyznaczyć ciąg przedziałów $\{I_k\}$ o własności

$$m \in I_{k+1} \subset I_k \subset I_0 := [a,b], \qquad |I_k| \to 0, \text{ gdy } k \to \infty.$$

Czy w podobny sposób można szukać minimum funkcji? Przeprowadzić eksperymenty obliczeniowe dla odpowiednio dobranych f i $[a,b]$.

P2.5. ***Metoda Newtona*** wyznacza pierwiastek α równania $f(x) = 0$ jako granicę ciągu (x_k), gdzie x_0 jest dane, a pozostałe wyrazy oblicza się według wzoru

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Następujące dwa ***warianty metody Newtona*** mają znaczenie zwłaszcza wówczas, gdy obliczanie wartości pochodnej f' wiąże się ze znacznym kosztem.

(a) We wzorze (1) zastępujemy $f'(x_k)$ przez $f'(x_0)$ (w każdym kroku).

(b) Obliczamy pochodną w co drugim kroku:

$$\left.\begin{aligned} x_{2k+1} &:= x_{2k} - f(x_{2k})/f'(x_{2k}), \\ x_{2k+2} &:= x_{2k+1} - f(x_{2k+1})/f'(x_{2k}) \end{aligned}\right. \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Porównać (również pod względem szybkości zbieżności) metodę Newtona (1) oraz warianty (a) i (b) na wybranych przykładach prostych funkcji o znanych pierwiastkach.

P2.6. Zrealizować następujący ***wariant metody siecznych***. Niech f będzie daną funkcją i niech a i b będą takie, że $f(a)f(b) < 0$. Połóżmy $c := a$. W kolejnych krokach metody niech b oznacza *ostatnie przybliżenie* zera α funkcji f, a – *przedostatnie przybliżenie*, a c – *najbardziej aktualne przybliżenie* (tj. otrzymane najpóźniej) o własności

$$f(c)f(b) < 0. \tag{2}$$

W każdym kroku aktualizujemy wartości a, b, c zastępując je odpowiednio wartościami a', b', c'. Jeśli $f(a)f(b) < 0$, to obliczamy b' stosując jeden krok metody siecznych dla przybliżeń a i b (symbolicznie $b' := MS(a,b)$). Jeśli $f(a)f(b) > 0$, to sprawdzamy najpierw, czy punkt $MS(a,b)$ będzie leżał w przedziale o końcach b i c. Jeśli TAK, to kładziemy $b' := MS(a,b)$; w przeciwnym razie przyjmujemy $b' := (b+c)/2$. Wreszcie definiujemy $a' := b$, potem $c' := c$ albo $c' := a'$, aby zachodziła własność analogiczna do własności (2), a następnie powtarzamy wszystkie wyżej opisane czynności dla aktualnych wartości a, b i c. Proces kończymy wówczas, gdy $|b-a| < \epsilon$ i/lub gdy $|f(b)| < \delta$, gdzie ϵ i δ są zadanymi z góry małymi liczbami. Proszę pamiętać o ograniczeniu liczby iteracji, żeby wykluczyć bardzo długie obliczenia!

P2.7. Na podstawie (udokumentowanych) obliczeń dla wybranych równań nieliniowych postaci $f(x) = 0$ wyznaczyć w przybliżeniu (inaczej mówiąc – odgadnąć) rząd każdej z poniższych metod iteracyjnych:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{\sqrt{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}}, \tag{3}$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]^2 \qquad (\textbf{\textit{metoda Olvera}}), \tag{4}$$

$$x_{k+1} := x_k - 1\Big/\left[\frac{f'(x_k)}{f(x_k)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\right] \qquad (\textbf{\textit{metoda Halleya}}). \tag{5}$$

P2.8. Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M}\right) i \; : \; k, l = 0, 1 \ldots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

(a) $z_0 := w; \qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1;$ np. $N = 10, 20, 35)$;

(b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

P2.9. Niech α będzie rozwiązaniem równania nieliniowego $f(x) = 0$. Załóżmy, że dysponujemy metodami iteracyjnymi postaci

$$x_{n+1} := F(x_n), \qquad x_{n+1} := G(x_n),$$

gdzie F i G są funkcjami spełniającymi warunek $F(\alpha) = G(\alpha) = \alpha$ (np. w wypadku metody Newtona mamy $F(x) = x - f(x)/f'(x)$). Załóżmy, że metody te są rzędu p i q, odpowiednio. Można wykazać, że metody postaci

$$x_{n+1} := F(G(x_n)), \qquad x_{n+1} := G(F(x_n))$$

są rzędu $p \cdot q$. Wykorzystaj powyższą obserwację do zaproponowania metod iteracyjnych wysokiego rzędu rozwiązywania równań nieliniowych. Przeprowadź odpowiednie eksperyment numeryczne i wyciągnij wnioski.

P2.10. Trudne zadanie dla dwuosobowego zespołu. Rozważmy następującą metodę iteracyjną wyznaczania pierwiastka α równania nieliniowego $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + h(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

gdzie x_0 jest dane, a h jest pewną funkcją. Oczywiście przy $h(x) \equiv 0$ mamy do czynienia z klasyczną metodą Newtona, o której wiadomo, że jest zbieżna kwadratowo, jeśli α jest pierwiastkiem pojedynczym. Zbadać możliwość takiego doboru funkcji h, aby wykładnik zbieżności powyższej metody wynosił więcej niż 2, np. 3, 4 albo 5. Wyniki teoretyczne poprzeć odpowiednimi testami numerycznymi. Czy w podobny sposób można zmodyfikować inne metody, np. metodę Halleya (patrz zadanie **P2.7.**)?

WSKAZÓWKI: 1^o Jakie warunki musi spełniać funkcja h? 2^o Zapoznaj się z rozdziałem 8.4. książki A. Ralstona, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.

P2.11. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu}}$ Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie obliczania wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach rzeczywistych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \ldots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Bairstowa*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 107], [2, str. 112], [3, str. 384] i [4, str. 293]. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

Literatura

[1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.

[3] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.

[4] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

P2.12. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu}}$ W wielu zastosowaniach konieczne jest wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach zespolonych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \ldots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Laguerre'a*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 112], [2, str. 108] i [3, str. 376] (patrz zadanie **P2.11**). Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

P2.13. Wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający dla danych parami różnych liczb $t_0, t_1, \ldots, t_n$ i liczb $y_0, y_1, \ldots, y_n$ warunki $L_n(t_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, można zapisać w ***postaci Lagrange'a***

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (t - t_j), \tag{6}$$

gdzie

$$\omega_i := 1 \Big/ \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (t_i - t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Na przykładach, m. in. dla y_i określonych jako wartości funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1-4x)$, porównać algorytmy obliczania wartości wielomianu L_n, stosujące

(a) postać (6);

(b) ***postać barycentryczną*** tego wielomianu:

$$L_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i}{t - t_i} y_i \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i}{t - t_i} & (t \notin \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, \\ y_k & (t = t_k,\ 0 \leq k \leq n). \end{cases}$$

P2.14. Zrealizować algorytm, który dla danej liczby naturalnej N i danych liczb rzeczywistych: x, $\varepsilon > 0$, $x_0, x_1 \ldots, x_N$ ($x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$), $y_0, y_1, \ldots, y_N$ znajduje takie najmniejsze n ($n < N$), że $|p_n(x) - p_{n-1}(x)| < \varepsilon$, gdzie $p_m \in \Pi_m$ ($0 \leq m \leq N$) jest wielomianem spełniającym warunki $p_m(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, \ldots, m$).

P2.15. Zadanie dla dwuosobowego zespołu Jak wiadomo, interpolacja wielomianowa znajduje zastosowanie także w grafice komputerowej. Z pewnych względów (jakich?) osoby zajmujące się tą tematyką preferują tzw. *postać Béziera wielomianu*, tzn. wielomian $w_n \in \Pi_n$ zapisują w postaci

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(x),$$

gdzie B_k^n jest k-tym wielomianem Bernsteina stopnia n,

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N})$$

(patrz np. [1, §9], [2, §7.2.3], [3, §1]).

Niech dane będą liczby $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1$ oraz funkcja f określona w punktach x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$). Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolacyjnym dla powyższych danych zapisanym w postaci Newtona,

$$L_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x),$$

gdzie $b_k := f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) oraz $p_0(x) := 1$, $p_k(x) := (x - x_{k-1})p_{k-1}(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Opracuj **efektywny algorytm** zamiany *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego L_n na jego *postać Béziera*, tj. znajdowania takich współczynników c_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) dla których zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x).$$

Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź zaproponowaną metodę pod względem jej dokładności, skuteczności i stabilności. Wyciągnij wnioski.

Literatura

[1] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R.L. Phillips, *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, WNT, 2001.

[2] M. Jankowski, *Elementy grafiki komputerowej*, WNT, 1990.

[3] P. Kiciak, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*, WNT, 2005.

P2.16. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L_n \in \Pi_n$, przyjmujący w węzłach $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [-1, 1]$ takie same wartości, co funkcja f, można wyrazić wzorem

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\lambda_i(t), \quad \text{gdzie} \quad \lambda_i(t) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (-1 \leq t \leq 1). \tag{7}$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości wielomianu (7) określamy wzorem

$$K_n := \max_{-1 \leq t \leq 1} \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i(t)|.$$

Obliczyć wartość K_n dla

(a) węzłów równoodległych $t_i := \dfrac{2i}{n} - 1$ lub $t_i := \dfrac{2i+1}{n+1} - 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$,

(b) węzłów będących zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa,

(c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski, w szczególności dotyczące związku wartości wskaźnika z dokładnością przybliżenia funkcji f za pomocą wielomianu L_n (wykresy funkcji błędu $e_n := f - L_n$ mile widziane); w roli funkcji testowych można m. in. wziąć $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P2.17. Skonstruować ***naturalną funkcję sklejaną III stopnia*** s, interpolującą daną funkcję f w $n+1$ parami różnych punktach przedziału $[a, b]$. Obliczyć błąd

$$E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a, b]$. Wykonać obliczenia dla kilku par wartości n i N oraz dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \le x \le \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \le x \le 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi, \pi]$.

P2.18. Dla danej krzywej parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \le t \le b)$ możemy skonstruować następującą ***krzywą sklejaną interpolacyjną***. Dla wybranych: $n \in \mathbb{N}$ oraz $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ obliczamy $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, a następnie konstruujemy naturalne funkcje sklejane interpolujące III stopnia $s_x(t)$, $s_y(t)$. Poszukiwana krzywa sklejana ma przedstawienie parametryczne $x = s_x(t)$, $y = s_y(t)$ $(a \le t \le b)$. Wykonać obliczenia m.in. dla krzywej zwanej *serpentyną*: $x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} t$, $y = \sin 2t$ $(-\frac{1}{2}\pi \le t \le \frac{1}{2}\pi)$.

P2.19. Skonstruować ***naturalną funkcję sklejaną III stopnia*** s, interpolującą daną funkcję f w $n+1$ równoodległych punktach przedziału $[a, b]$. Obliczyć błąd

$$\hat{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a, b]$. Wykonać obliczenia dla kilku par wartości n i N oraz m.in. dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \le x \le \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \le x \le 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi, \pi]$.

P2.20. Obliczyć ***przybliżoną wartość całki*** $\int_a^b f(x)\,dx$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1 + x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1 + x)}{(1 - x)(3 + x)} \sin \pi(1 + x).$$

P2.21. Dla danej zamkniętej krzywej parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \le t \le b;\ x(a) = x(b),\ y(a) = y(b))$ skonstruować następującą ***okresową krzywą sklejaną interpolacyjną***. Dla wybranych: $n \in \mathbb{N}$ oraz $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ obliczamy $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, a następnie konstruujemy okresowe funkcje sklejane interpolujące III stopnia $\tilde{s}_x(t)$, $\tilde{s}_y(t)$. Poszukiwana krzywa sklejana ma przedstawienie parametryczne $x = \tilde{s}_x(t)$, $y = \tilde{s}_y(t)$ $(a \le t \le b)$. Wykonać obliczenia m.in. dla okręgu, elipsy i danych z tabeli 1.

P2.22. Na papierze milimetrowym narysować (jednym pociągnięciem!) kontur ulubionego zwierzątka. Wybrać n (np. 10 lub 20) punktów na otrzymanej linii i ponumerować je:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n). \tag{8}$$

Odtworzyć w przybliżeniu zadaną linię, stosując jeden lub oba z następujących pomysłów:

(a) podzielić ciąg (8) na takie podciągi, żeby każdy z nich zawierał punkty leżące na wykresie pewnej funkcji; uzyskać przybliżoną postać linii wzorcowej łącząc wykresy przybliżeń tych funkcji;
(b) potraktować linię jako krzywą parametryczną $[x(t),\, y(t)]$, gdzie t jest parametrem przebiegającym przedział $[1,\, n]$, tak więc $x_i = x(i)$, $y_i = y(i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$; zrekonstruować funkcje $x(t)$, $y(t)$ stosując interpolację.

$(3.7, 6.4)$	$(3.2, 6.7)$	$(2.7, 6.5)$	$(2.1, 6.4)$	$(1.7, 6.0)$	$(1.1, 5.9)$	$(0.7, 5.7)$	$(0.4, 5.7)$
$(0.4, 5.4)$	$(0.5, 5.0)$	$(0.3, 4.6)$	$(0.6, 4.3)$	$(0.6, 4.0)$	$(0.7, 3.7)$	$(0.6, 3.2)$	$(0.8, 2.9)$
$(0.8, 2.6)$	$(0.6, 2.4)$	$(0.8, 2.3)$	$(0.9, 2.4)$	$(1.1, 2.2)$	$(1.4, 2.1)$	$(1.8, 2.0)$	$(1.7, 1.8)$
$(1.9, 1.4)$	$(2.2, 1.5)$	$(2.1, 1.8)$	$(2.7, 1.6)$	$(2.6, 1.4)$	$(3.3, 1.3)$	$(3.5, 0.9)$	$(3.7, 0.6)$
$(3.9, 0.8)$	$(4.2, 0.7)$	$(4.3, 0.4)$	$(4.5, 0.5)$	$(4.7, 0.7)$	$(5.0, 0.6)$	$(5.5, 0.8)$	$(5.9, 0.6)$
$(6.2, 0.4)$	$(6.4, 0.3)$	$(6.3, 0.7)$	$(6.5, 1.2)$	$(6.8, 1.7)$	$(7.2, 2.0)$	$(7.1, 2.2)$	$(7.2, 2.4)$
$(6.8, 2.8)$	$(6.7, 3.2)$	$(6.8, 3.6)$	$(6.4, 3.9)$	$(6.2, 4.2)$	$(6.9, 4.5)$	$(6.8, 5.1)$	$(6.6, 5.6)$
$(6.5, 6.0)$	$(6.1, 6.2)$	$(5.5, 6.1)$	$(5.0, 6.2)$	$(4.6, 6.2)$	$(4.1, 6.3)$	$(3.7, 6.0)$	$(3.4, 6.1)$
$(3.2, 6.5)$	$(3.7, 6.4)$						

TABELA 1. Tajemnicza krzywa, zawarta w kwadracie $[0, 7.5] \times [0, 7.5]$

Rozważyć wariant zadania, w którym punkty (8) są podawane w pliku tekstowym. Sprawdzić działanie programu dla danych z tabeli 1.

P2.23. Niech będą dane: liczba naturalna n, węzły $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b)$ oraz funkcja f określona w przedziale $[a,\, b]$. Punkty

$$\tau_0 := t_1, \quad \tau_i := \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \quad (1 \le i \le n-1), \quad \tau_n := t_n$$

nazywamy ***przegubami***. Dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna taka ***interpolująca funkcja sklejana DRUGIEGO stopnia*** $\sigma \in C^1[a,\, b]$, że 1^o w każdym podprzedziale $[t_i,\, t_{i+1}]$ jest $\sigma \equiv q_i \in \Pi_2$ $(1 \le i \le n-1)$ oraz że 2^o $\sigma(\tau_k) = f(\tau_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Dla $x \in [t_i,\, t_{i+1}]$ $(1 \le i \le n-1)$ funkcja σ wyraża się wzorem

$$\sigma(x) = f(\tau_i) + \frac{1}{2}(m_{i+1} + m_i)(x - \tau_i) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_i)^2,$$

gdzie $h_i := t_{i+1} - t_i$, a wielkości $m_i := \sigma'(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stanowią rozwiązanie układu równań

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \qquad (1 \le i \le n).$$

(Przyjmujemy, że $h_0 := h_n := m_0 := m_{n+1} := 0$). Skonstruować funkcję sklejaną σ dla kilku wartości n oraz m. in. dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \le x \le \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \le x \le 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5,\, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi,\, \pi]$. W każdym wypadku obliczyć błąd

$$\Delta_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - \sigma(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N (np. 101) równoodległych (lub wybranych losowo) punktów przedziału $[a,\, b]$.

P2.24. Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, danej liczby rzeczywistej τ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna taka funkcja S_τ, zwana ***naprężoną funkcją sklejaną interpolacyjną***, że 1^o $S_\tau \in C^2[a, b]$, 2^o $S_\tau(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; 3^o w każdym z podprzedziałów $(x_k,\, x_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ funkcja S_τ spełnia warunek ${S_\tau}^{(4)}(x) - \tau^2 S_\tau''(x) = 0$; 4^o ${S_\tau}''(a) = {S_\tau}''(b) = 0$. Można wykazać, że dla $x \in [x_k,\, x_{k+1}]$ $(0 \le k \le n-1)$ funkcja S_τ wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_\tau(x) \;=\; & \{M_k \sinh[\tau(x_{k+1} - x)] + M_{k+1} \sinh[\tau(x - x_k)]\} / \sinh(\tau h_k) \\ & + [f(x_k) - M_k]\,(x_{k+1} - x)/h_k + [f(x_{k+1}) - M_{k+1}]\,(x - x_k)/h_k, \end{aligned}$$

gdzie $h_k := x_{k+1} - x_k$, a wartości $M_i := S_\tau''(x_i)/\tau^2$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ otrzymuje się jako rozwiązanie układu równań

$$\alpha_{i-1}M_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i)M_i + \alpha_i M_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \qquad (1 \le i \le n-1;\ M_0 = M_n = 0),$$

gdzie z kolei

$$\alpha_i := 1/h_i - \tau/\sinh(\tau h_i), \quad \beta_i := \tau\cosh(\tau h_i)/\sinh(\tau h_i) - 1/h_i, \quad \gamma_i := f[x_i,\, x_{i+1}].$$

Zrealizować powyższy algorytm i sprawdzić go dla wielu wartości parametru τ (im większe τ, tym krzywa $y = S_\tau$ jest mocniej naprężona; jeśli $\tau \approx 0$, krzywa ta przypomina wykres naturalnej funkcji sklejanej interpolującej).

LITERATURA: D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005, s. 333–335.