Πολυτεχνείο Κρήτης

Σχολή ΗΜΜΥ

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Παράδοση 2ης εργασίας

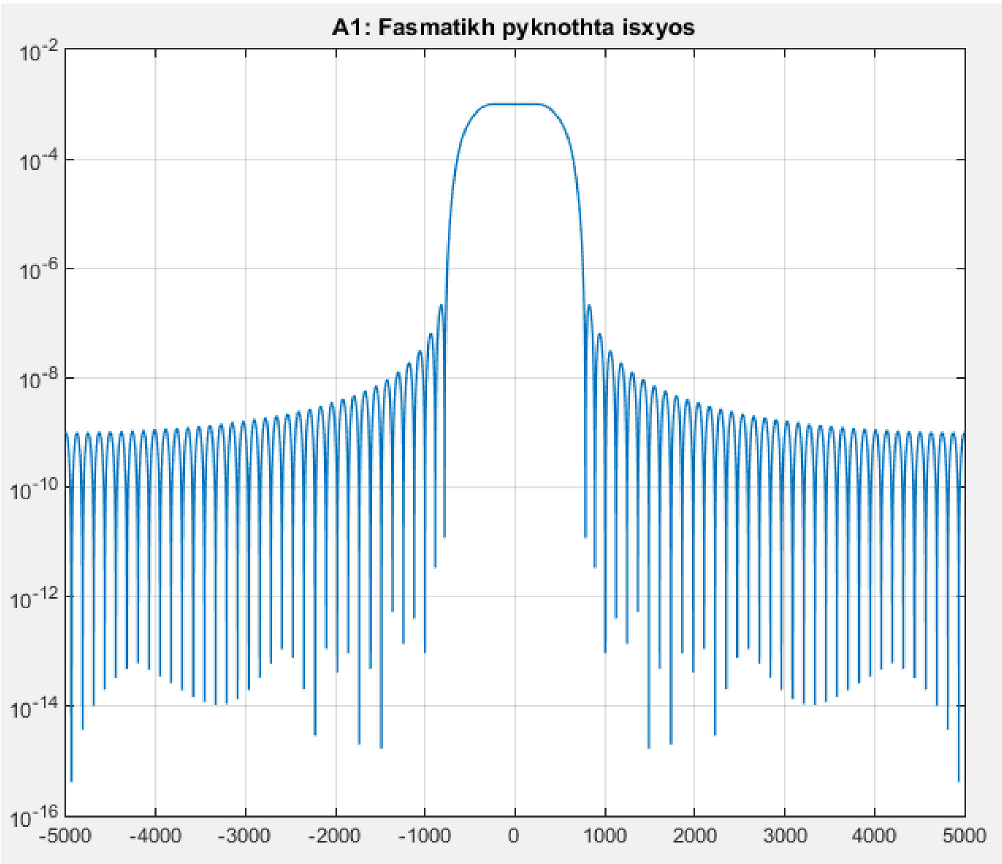
Ημερομηνία Παράδοσης: 6 Δεκεμβρίου 2021

Μονάδες 130/1000

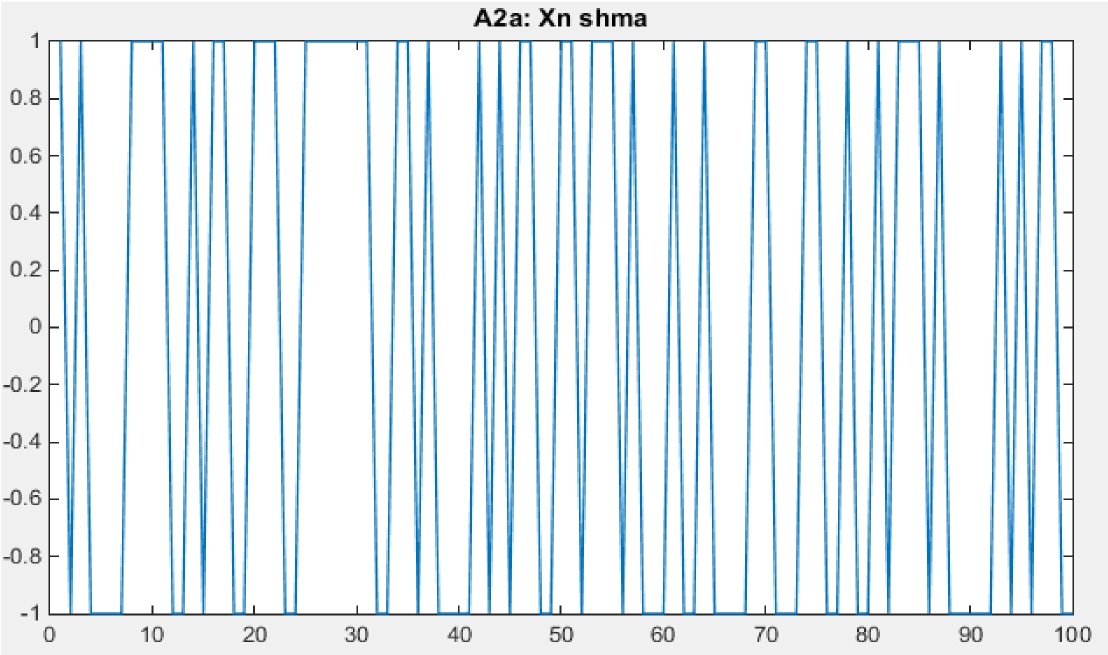
Επώνυμο	Παυλόπουλος
Όνομα	Χρήστος
ΑΜ	2018030139

Επιλέχθηκε αρκετά μεγάλο Nf (σ.σ. 16384) ώστε να μην υπάρχουν παραμορφώσεις στις φασματικές πυκνότητες ισχύος.

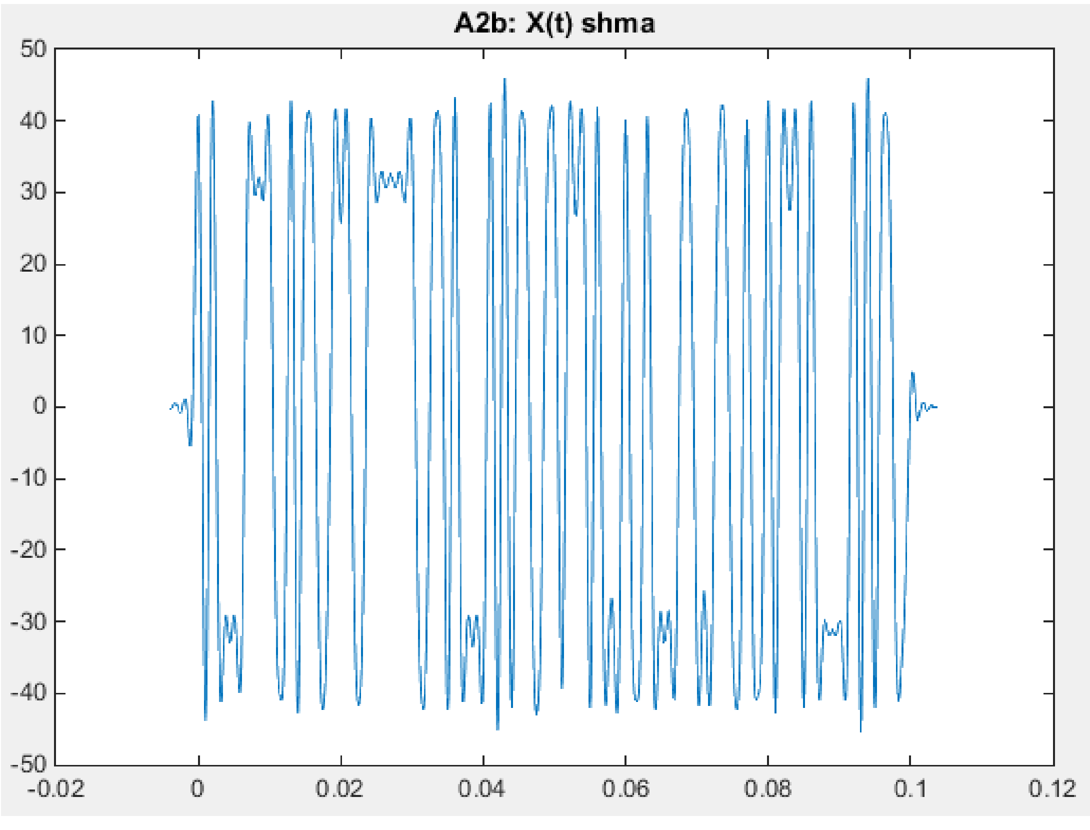
Α.1) Δημιουργήθηκε παλμός SRRC με τα δεδομένα που δόθηκαν. Μέσω της fftshift και fft παράχθηκε ο μετασχηματισμός Fourier της φ(t) και σχεδιάστηκε η φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\phi(F)|^2$ με την εντολή semilogy.



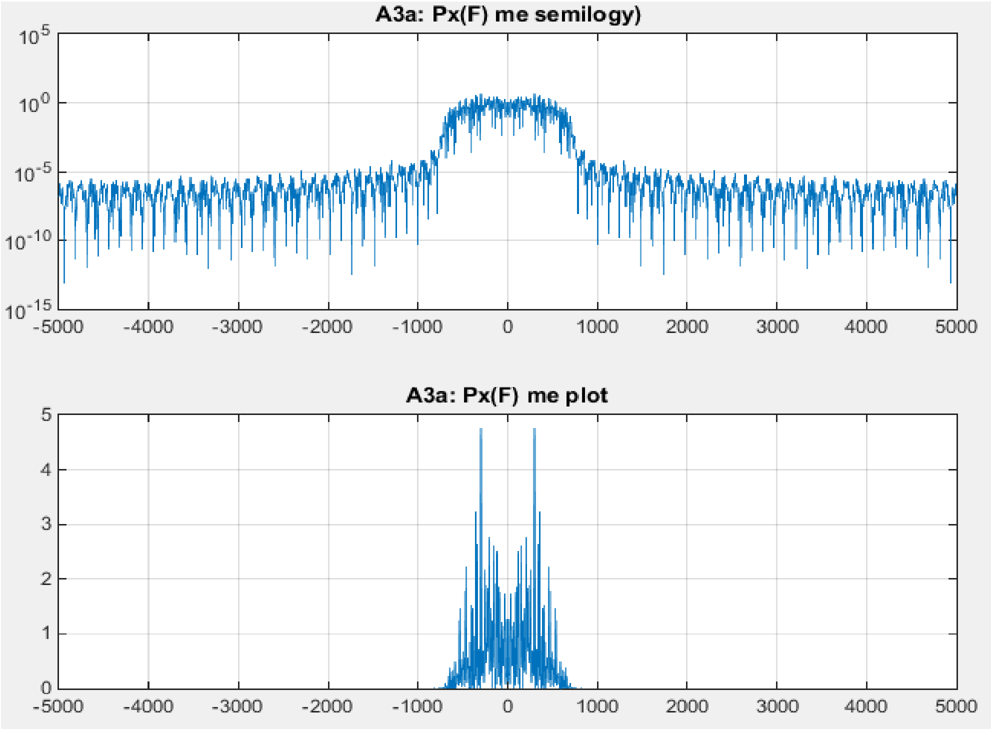
A.2) Δημιουργήθηκε ακολουθία N=100 ισοπιθανών και ανεξάρτητων bits και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση bits_to_2PAM μετατράπηκαν σε 2PAM σύμβολα και απεικονίστηκαν παρακάτω.



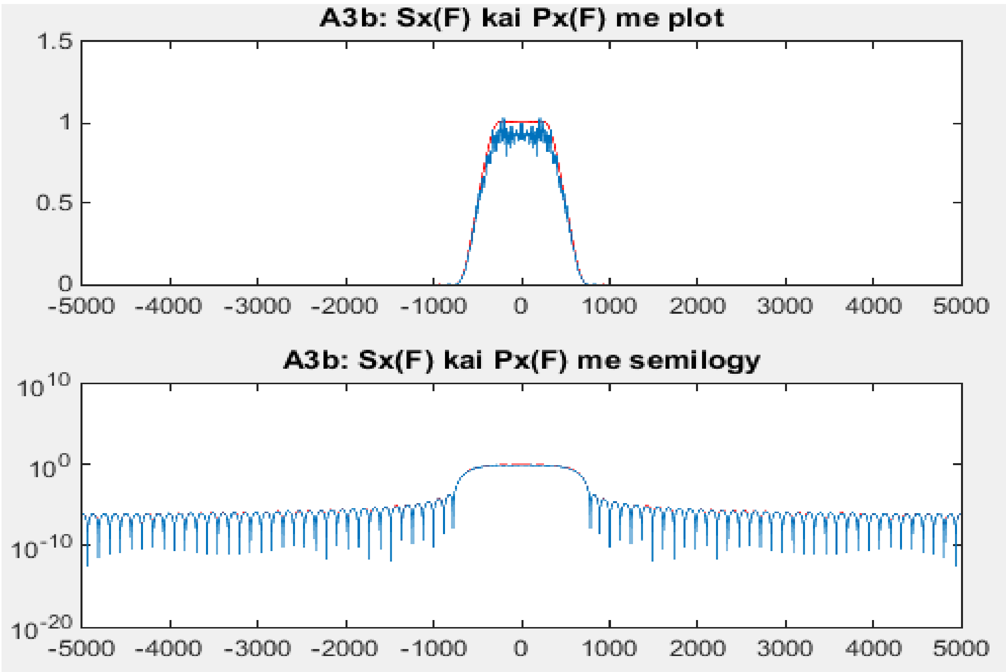
Έπειτα δημιουργήθηκε και σχεδιάστηκε το σήμα X(t) που αποτελεί την συνέλιξη του X(nTs) και φ(t). Το σήμα X(nTs) λαμβάνεται με την χρήση του upsample στο σήμα Xn.



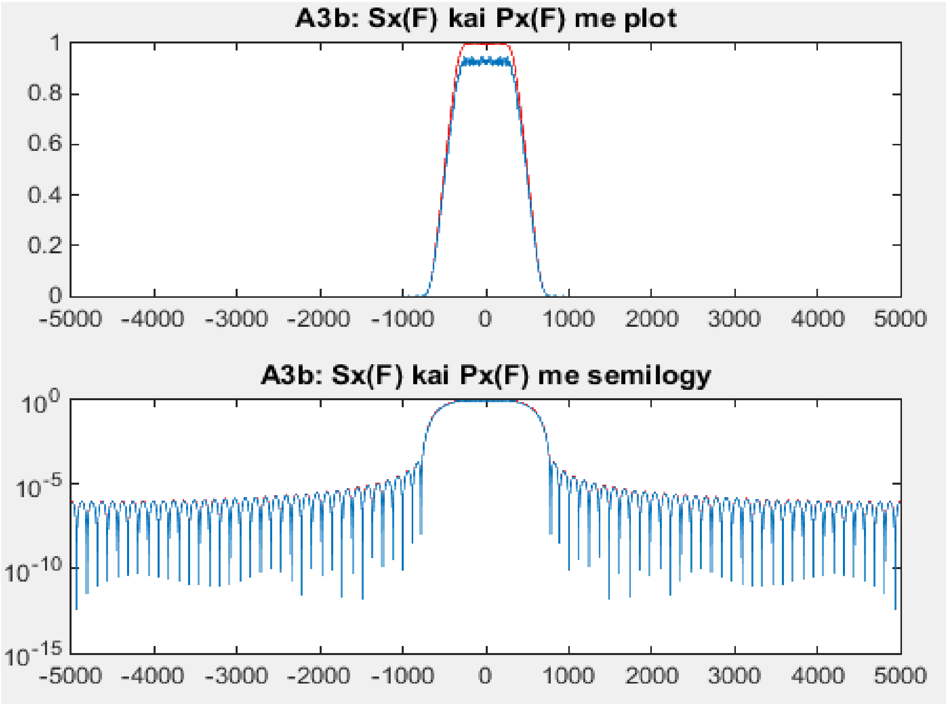
A.3) Ορίστηκε το Ttotal και υπολογίστηκε ο μετασχηματισμός Fourier του X(t) και το περιοδόγραμμα Px(F). Σχεδιάστηκε το Px(F) πρώτα με plot και ύστερα με semilogy.



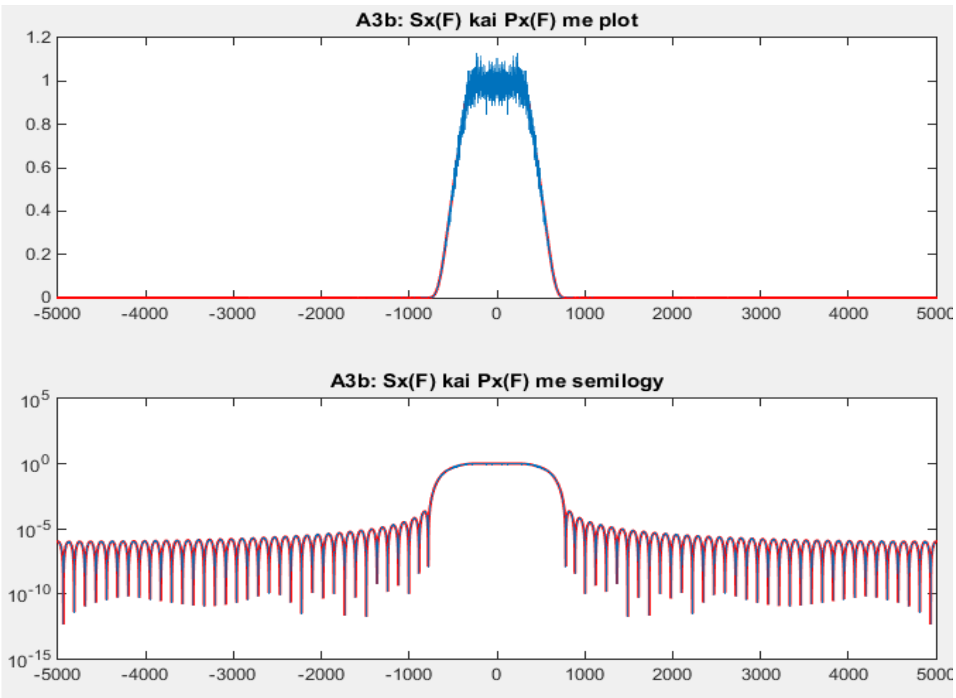
Μέσα σε μία for δημιουργούμε K υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων εκτελώντας ξανά όλη τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στα προηγούμενα ερωτήματα για να κατασκευαστεί το περιοδόγραμμα Px(F). Σε μεταβλητή αποθηκεύουμε την εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Για την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της Sx(F). Τα Pav και Sx(F) με plot και semilogy:



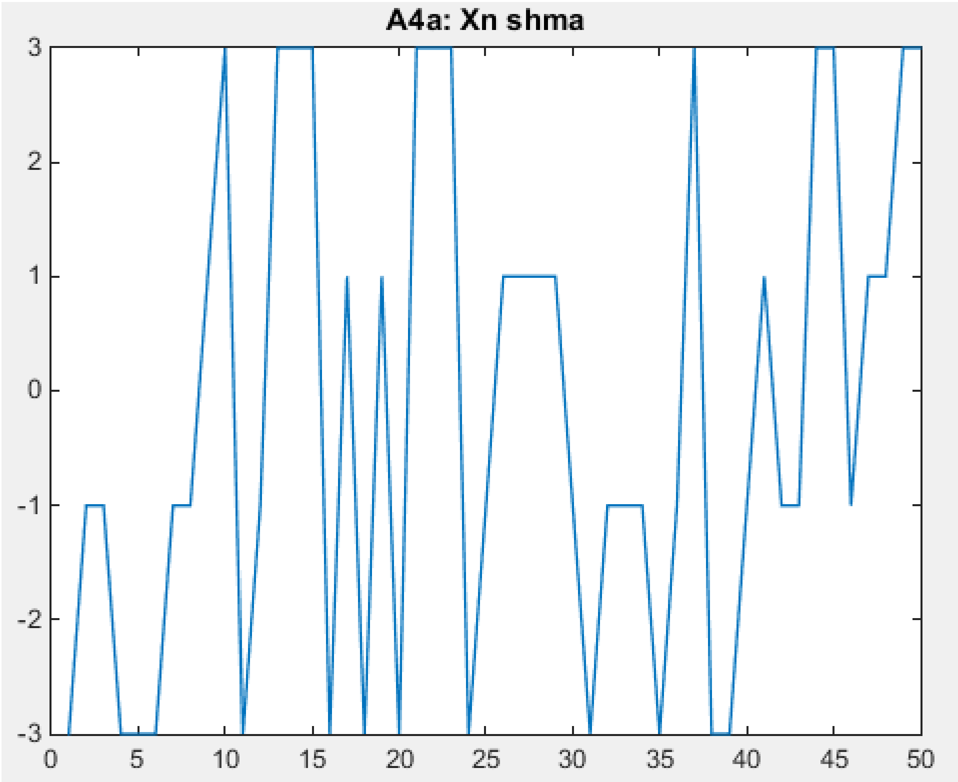
Αυξήθηκε το Κ από 500 σε 10000 και παρατηρήθηκε πως το Pav παρουσιάζει μεγαλύτερες ομοιότητες σχηματικά με τον θεωρητικό υπολογισμό της Px(F). Αυτό είναι αναμενόμενο καθότι περισσότερα δείγματα ισοδυναμούν σε μεγαλύτερη ακρίβεια και λιγότερες διακυμάνσεις.



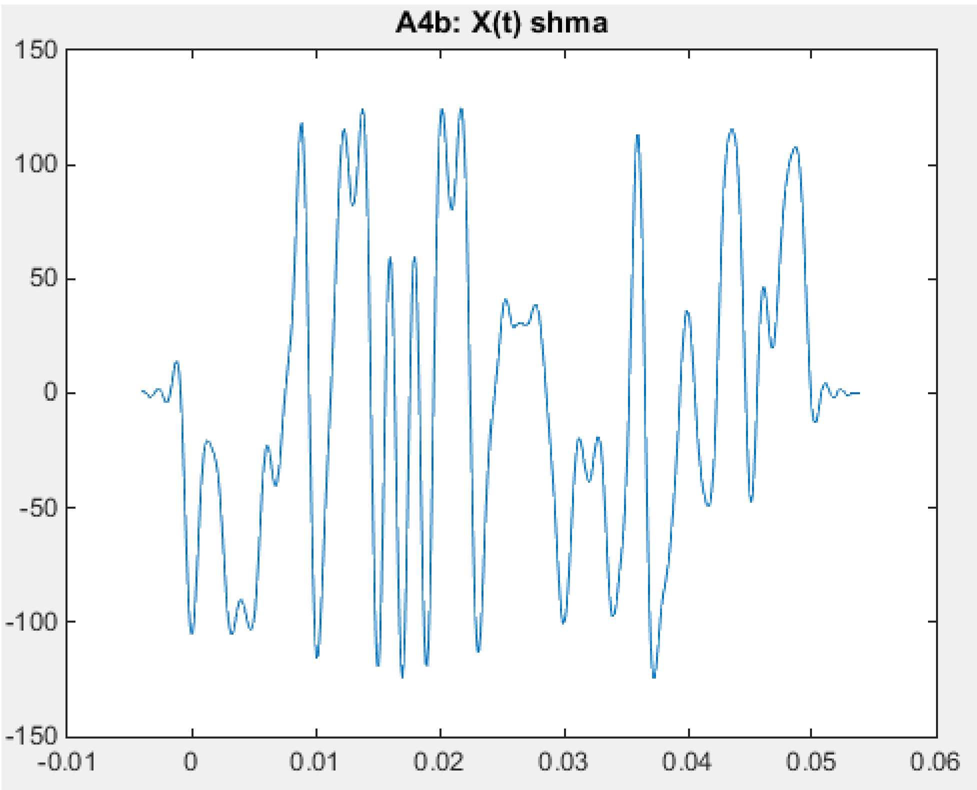
Αυξήθηκε το Ν σε 1000 ενώ το Κ επέστρεψε στην αρχική του τιμή. Παρατηρείται πως ξανά το Pav και το Px(F) παρουσιάζουν μικρότερες διακυμάνσεις κάτι που είναι αναμενόμενο καθότι απεικονίζονται περισσότερα bits που σημαίνει μείωση σφαλμάτων.



A.4) Δημιουργήθηκε η συνάρτηση bits_to_4PAM και σχεδιάστηκε με plot σε διάστημα [0,N/2 -1]



Ύστερα, με την διαδικασία που ακολουθήθηκε στο ερώτημα Α2 κατασκευάστηκε το σήμα X(t).



Αρχικά υπολογίστηκε η μέση τιμή. Σε όμοια ισοπίθανα σύμβολα ισχύει:

$P_X(X=1) = P_X(X=-1) = P_X(X=3) = P_X(X=-3) = 1/4$

Έτσι έχουμε,

$E(Xn)= \Sigma_x x^2 p_x = (1) \cdot 1/4 + (-1) \cdot 1/4 + (3) \cdot 1/4 + (-3) \cdot 1/4 = 0$

Υπολογισμός της διασποράς:

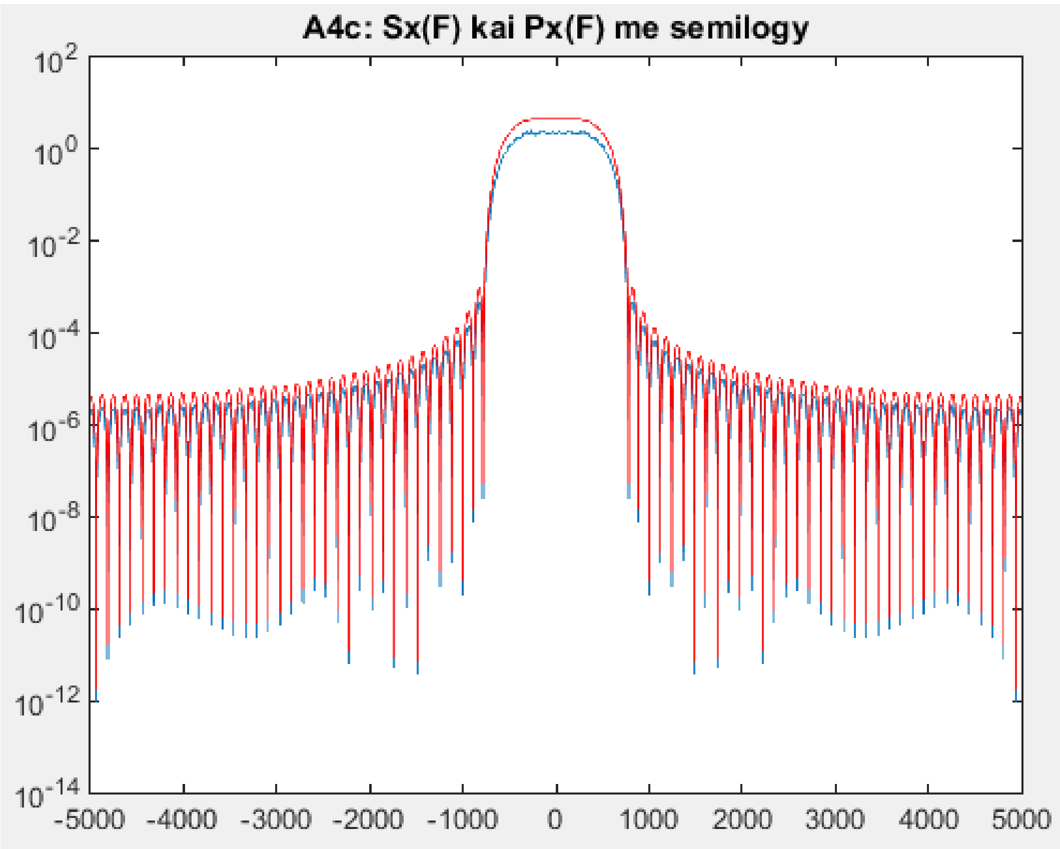
$\sigma_x^2 = E[(X_n-E(X_n))^2] = E[X_n^2] = 5$

Διότι, $E[X_n^2] = \Sigma_x x^2 p_x = (1)^2 \cdot 1/4 + (-1)^2 \cdot 1/4 + (3)^2 \cdot 1/4 + (-3)^2 \cdot 1/4 = 5$

Έτσι η φασματική πυκνότητα ισχύος ισούται με:

$$S_x(F) = \frac{\sigma_x^2}{T}|\phi(F)|^2 = \frac{5}{10^{-3}}|\phi(F)^2| = 5000|\phi(F)|^2$$

Όπως και στο A3 υπολογίστηκε η πειραματική και θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος με semilogy.



Παρατηρείται πως η απόκλιση κατά την ακολουθία 4PAM Xn είναι αρκετά μεγαλύτερη της απόκλισης κατά την 2PAM Xn. Το εύρος φάσματος της φασματικής πυκνότητας ισχύος των δυο ακολουθιών δεν αλλάζει καθότι η περίοδος παραμένει ίδια, ωστόσο το πλάτος στην μέγιστή του τιμή είναι αρκετά μεγαλύτερο στην ακολουθία 4PAM γεγονός που οφείλεται στην μεγαλύτερη διασπορά του 4PAM.

A.5) Επαναλαμβάνεται το ερώτημα Α3 αλλά με T’ = 2T και over’ = 2over.

Υπολογίστηκε η μέση τιμή. Σε όμοια ισοπίθανα σύμβολα ισχύει:

$P_X(X=1) = P_X(X=-1) = ½$

Έτσι έχουμε,

$E(Xn)= \Sigma_x x^2 p_x = (1) \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 = 0$

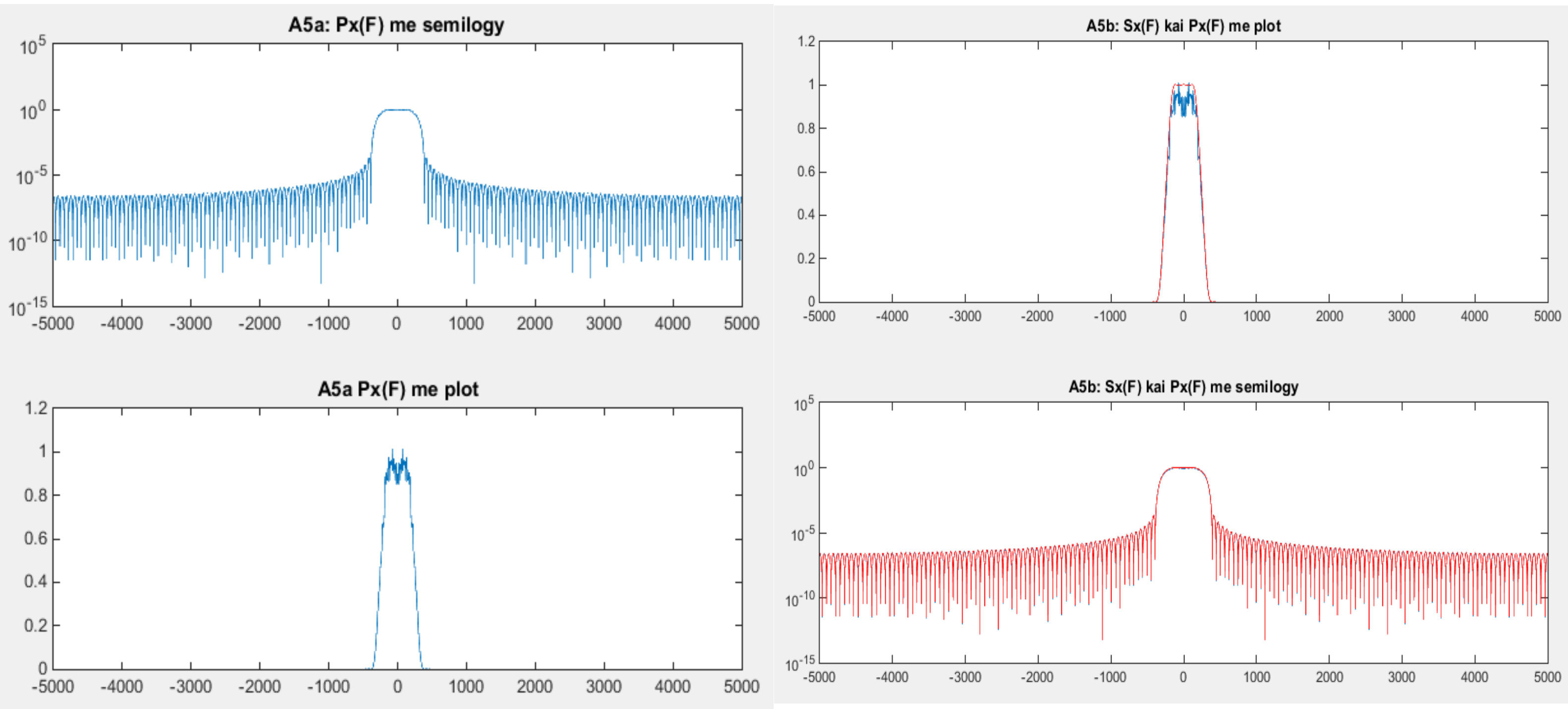
Υπολογισμός της διασποράς:

$\sigma_x^2 = E[(X_n-E(X_n))^2] = E[X_n^2] = 1$

Διότι, $E[X_n^2] = \Sigma_x x^2 p_x = (1)^2 \cdot 1/4 + (-1)^2 \cdot 1/4 = 1$

Έτσι η φασματική πυκνότητα ισχύος ισούται με:

$$S_x(F) = \frac{\sigma_x^2}{T}|\phi(F)|^2 = \frac{1}{2 * 10^{-3}}|\phi(F)^2| = 500\,|\phi(F)|^2$$



Το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση υποδιπλασιάζεται (περίπου 380 έναντι περίπου 750 στο Α3). Το αποτέλεσμα είναι λογικό και επιβεβαιώνεται από τον θεωρητικό τρόπο υπολογισμού του φάσματος $BW= \frac{a+1}{T}$

A.6) Με σταθερό εύρος φάσματος μεγαλύτερη ταχύτητα επιτυγχάνεται με την 4PAM απεικόνιση καθότι μετατρέπονται δυο bits σε ένα σύμβολο και έτσι η ακολουθία των bits θα μετατραπεί γρηγορότερα (στον μισό χρόνο).

Για ακριβό εύρος φάσματος θα επιλέγαμε την μεγαλύτερη περίοδο (άρα 2T) διότι με αυτή θα είχαμε το μικρότερο εύρος φάσματος. (W, T αντιστρόφως ανάλογα).

<u>B Μέρος</u>

B.1) α)

Αρχικά, υπολογίζεται η μέση τιμή του Y(t) E[Y(t)]= E[X(t) * cos(2πf0t+θ)]

Η μεταβλητή θ είναι ανεξάρτητη άρα έχουμε E[Y(t)]= E[X(t)] * E[cos(2πf0t+θ)]

Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής έχουμε:

$$F\theta(t)(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \alpha\nu\ \theta \in [0,2\pi] \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Άρα, $E[\cos(2\pi f_0 t+\theta)]=\int (\cos(2\pi f0t+\theta)F\theta(t)(\theta)\delta\theta)=\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f0t+\theta)\, d\theta)$

Αφού sin(0)=sin(2π)=0 έχουμε πως E[Y(t)] = 0

β)

$$E[Y(t+\tau)\ Y(t)] = E[X(t+\tau)\ \cos(2\pi f_o(t+\tau)+\Theta)\ X(t)\cos(2\pi f_o t+\Theta)]$$

Η μεταβλητή θ είναι ανεξάρτητη του Xn άρα θα είναι ανεξάρτητη και του X(t) άρα:

$$E[Y(t+\tau)\ Y(t)] = E[X(t+\tau)\ \cos(2\pi f_o(t+\tau)+\Theta)\ X(t)\cos(2\pi f_o t+\Theta)] =$$

$$= R_{xx}(t+\tau,t)E[\tfrac{1}{2}(\cos(2\pi f_o(t+\tau)+\Theta-2\pi f_o t-\Theta)+\cos(2\pi f_o(t+\tau)+\Theta+2\pi f_o t+\Theta)] =$$

$$= R_{xx}(t+\tau,t)\tfrac{1}{2}(\cos(2\pi f_o\tau) + E[\cos(2\pi f_o(2t+\tau)+2\Theta)]$$

$$= \tfrac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\cos(2\pi f_o\tau)$$

΄Αρα $R_{YY}(t+\tau,t) = E[Y(t+\tau)Y(t)] = 1/2\ R_{xx}(t+\tau,t)\cos(2\pi f_o\tau)$

Επίσης,

$Rxx(t+\tau,t) = E[X(t+\tau)X(t)] = E[\sum_{n=0}^{\infty}(Xn\Phi(t+\tau-nT))\sum_{n=0}^{\infty}(Xn\Phi(t-nT))] =$

$$=[\sum_{n=0}^{\infty}E((Xn\Phi(t+\tau-nT))(Xn\Phi(t-nT))]) =$$

$$= E[X_n^2] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\Phi(t + \tau - nT) \right) \left(\Phi(t - nT) \right) \right] =$$

$$= \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\Phi(t + \tau - nT) \right) \left(\Phi(t - nT) \right) \right] =$$

$$= R_{xx} (t + \tau + T, t + T)$$

B.2) Γνωρίζουμε για την Y(t) πως:

1. $E[Y(t)]=0$
2. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{YY}(t+ \tau,t)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $\tau = t_1 - t_2$. Επομένως, η Y (t) είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια.
   Επίσης:

3. $E[Y(t+T)] = E[X(t+T)]E[\cos(2\pi f0(t+T)+\Theta)] = E[X(t+T)]\ 0 =$
   $E[\cos(2\pi f0(t+T)+\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f 0(t+T) + \Theta) F\Theta(t)(\theta)\, d\theta =$
   $$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi f 0(t+T) + \theta)\, d\theta = 0$$
4. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{YY}(t+\tau+T, t+T)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $\tau = t_1 - t_2$ γιατί:
   $R_{YY}(t+\tau+T, t+T) = 1/2\ R_{QQ}(t+\tau+T, t+T)*\cos(2\pi f0\tau)$
   $R_{YY}(t+\tau+T, t+T) = 1/2 \cos(2\pi f0\tau) * R_{xx}(t+\tau, t)$ (από B1β)

   Άρα η Y(t) είναι κυκλοστάσιμη υπό την ευρεία έννοια

B.3) Η Y(t) είναι κυκλοστάσιμη με περίοδο T άρα η φασματική πυκνότητα ισχύος της δίνεται από τον τύπο $S_Y(F) = F(\bar{R}_Y(\tau))$

$$\bar{R}_{YY}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T R_{YY}(t+\tau, t)\, dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_T R_{YY}(t+\tau, t) \frac{1}{2} cos(2\pi f_0 \tau)\, d\tau =$$

$$\frac{1}{2T} cos(2\pi f_0 \tau) \int_T R_{xx}(t+\tau, t) =$$

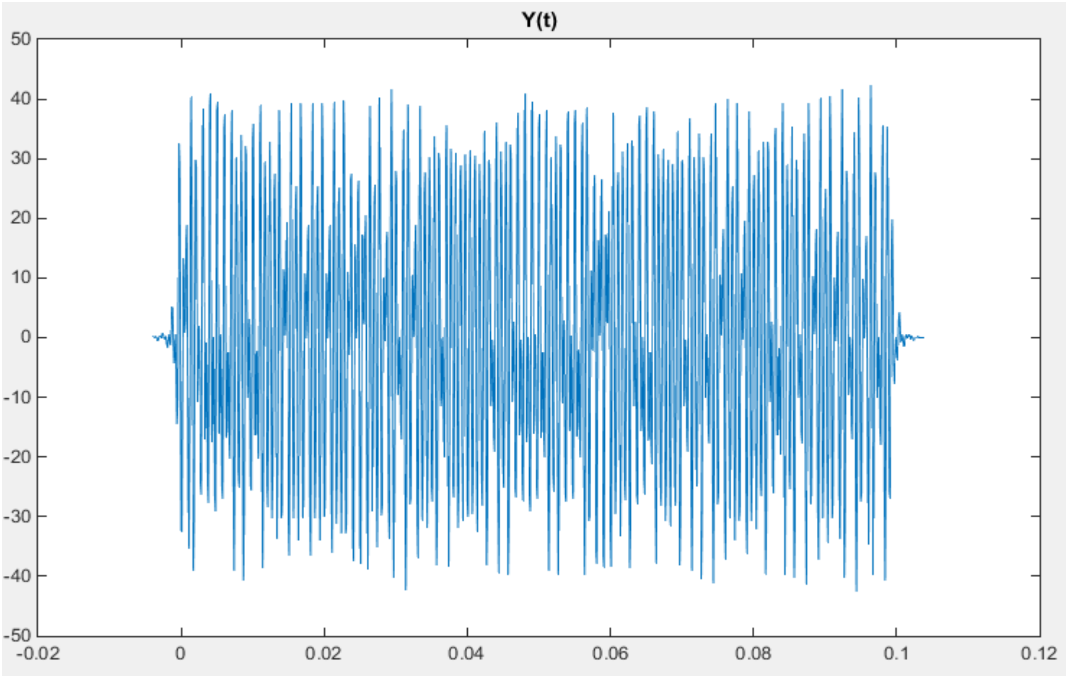
$$= \frac{1}{2} cos(2\pi f_0 \tau) \bar{R}_x(\tau)$$

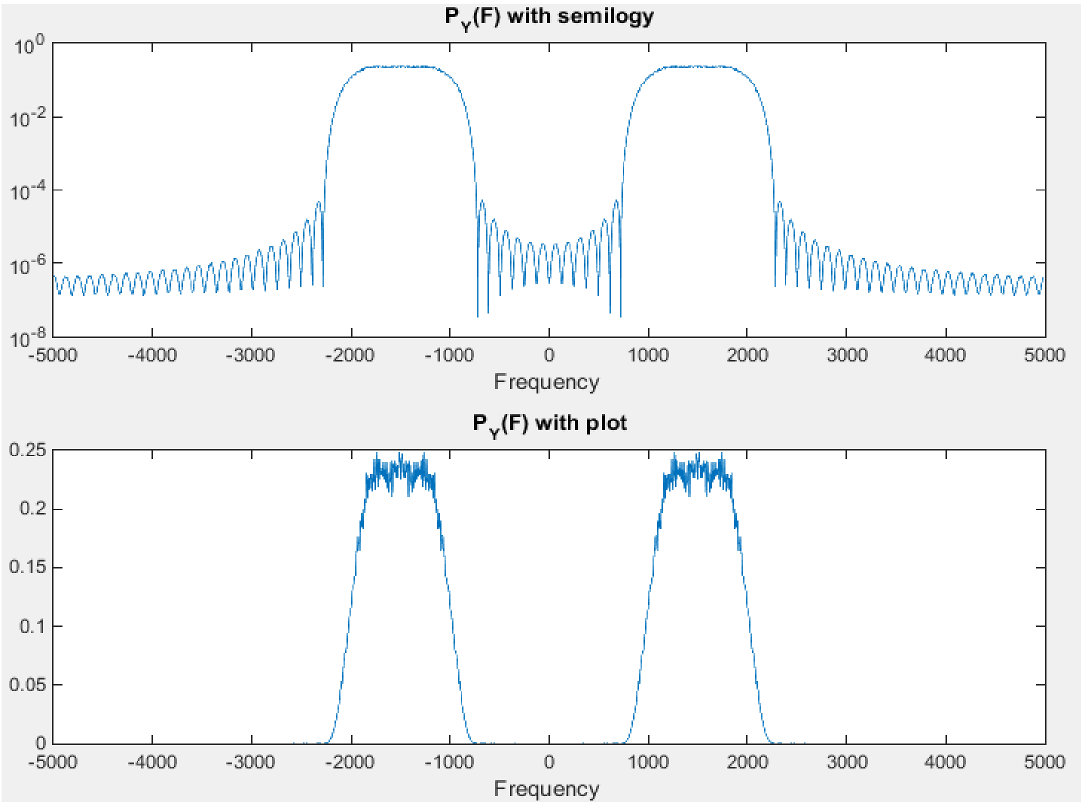
Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα για μετασχηματισμό Fourier για το συνημίτονο $\cos(2\pi f0t) \rightarrow 1/2\ (\delta(F - f_0) + \delta(F + f_0))$

Άρα,

$S_Y(F) = F\{\bar{R}_Y(t)\} = 1/2\ F\{\cos(2\pi f_0 \tau) Rx(\tau)\} = ¼\ Sx(F + f_0) + ¼\ Sx(F - f_0))$

B.4) Κατασκευάστηκε το διάνυσμα του χρόνου και το σήμα Y(t) για τυχαία συχνότητα f=1500Hz [500 < f < 4500], τυχαία μεταβλητή Θ ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [0,2π) και ύστερα υπολογίστηκε η φασματική πυκνότητα ισχύος με plot και semilogy για K=1000 δείγματα





Παρατηρώ πως το σήμα που προκύπτει από τον σχεδιασμό της φασματικής πυκνότητας ισχύος παρουσιάζεται δύο φορές. Αυτό γίνεται διότι το συνημίτονο στον τύπο της Y(t) όταν μετασχηματίζεται στο πεδίο της συχνότητας δίνει δύο σήματα με μετατόπιση 1500Hz αριστερά και 1500Hz δεξιά.

Τέλος.

ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB

```
close all; clear all; clc;

%erotima a1
%metavlites
T = 1/1000;
over=10;
A=4;
a=0.5;
Ts=T/over;
Fs=1/Ts;
Nf=16384;
N=1000;

numfig=1;
figure(numfig);

%create srrc pulse
[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a);

%fourier transform
phi_f=fftshift(fft(phi,Nf));
Phi_f=phi_f*Ts;

%frequency axis
f_axis=[-0.5:1/Nf:0.5-1/Nf];
F_axis=Fs*f_axis;

%fasmatikh pyknothta isxyos
semilogy(F_axis,abs(Phi_f).^2, 'LineWidth', 1)
title('A1: Fasmatikh pyknothta energeias');
grid on;

%erotima A2
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;

xn=bits_to_2PAM(b);
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
plot(xn,'LineWidth', 1);
title('A2a: Xn shma');
```

```
xd=1/Ts * upsample(xn,over);
td=0:Ts:N*T-Ts;

xt=Ts*conv(xd,phi);
t_conv=[t(1)+td(1):Ts:t(end)+td(end)];
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
plot(t_conv,xt);
title('A2b: X(t) shma');

%erotima a3

Ttotal=t_conv(end)-t_conv(1);

%fourier transform of xt
xf=fftshift(fft(xt,Nf));
Xf=xf*Ts;

Px=(abs(Xf).^2)/Ttotal;

numfig=numfig+1;
figure(numfig);
subplot(2,1,1);
semilogy(F_axis,Px);
title('A3a: Px(F) me semilogy)')
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(F_axis,Px);
title('A3a: Px(F) me plot');
grid on;

%erotima A3b
P=0;
kk=500;

for i=1:1:kk
    b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
    xn=bits_to_2PAM(b);
    xd=1/Ts * upsample(xn,over);
    xt=Ts*conv(xd,phi);
    xf=fftshift(fft(xt,Nf));
    Xf=xf*Ts;
    Px=(abs(Xf).^2)/Ttotal;
    P=P+Px;
    if i==kk
        Pav=P/kk;
    end
end

sx=(var(xn)/T)*(abs(Phi_f.^2));

numfig=numfig+1;
figure(numfig);
subplot(2,1,1);
plot(F_axis,sx,'r');
hold on
plot(F_axis,Pav);
```

```
hold off
title('A3b: Sx(F) kai Px(F) me plot');

subplot(2,1,2);
semilogy(F_axis,sx,'r');
hold on
semilogy(F_axis,Pav);
hold off
title('A3b: Sx(F) kai Px(F) me semilogy');

%erotima A4
%A4a
b2=(sign(randn(N/2, 2))+1)/2;

%xn shma
xn2=bits_to_4PAM(b2);

%plot xn
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
plot(xn2,'LineWidth', 1);
title('A4a: Xn shma');


%A4b
xd2=1/Ts * upsample(xn2,over);
td2=0:Ts:N*T/2-Ts;

xt2=Ts*conv(xd2,phi);
t_conv2=[t(1)+td2(1):Ts:t(end)+td2(end)];
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
plot(t_conv2,xt2);
title('A4b: X(t) shma')

%A4c
P2=0;

for i=1:1:kk
    b2=(sign(randn(N/2,2))+1)/2;
    xn2=bits_to_4PAM(b2);
    xd2=1/Ts * upsample(xn2,over);
    xt2=Ts*conv(xd2,phi);
    xf2=fftshift(fft(xt2,Nf));
    Xf2=xf2*Ts;
    Px2=(abs(Xf2).^2)/Ttotal;
    P2=P2+Px2;
    if i==kk
        Pav2=P2/kk;
    end
end

sx2=(var(xn2)/T)*(abs(Phi_f.^2));
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
semilogy(F_axis, Pav2);
hold on
semilogy(F_axis, sx2, 'r');
hold off
```

```
title('A4c: Sx(F) kai Px(F) me semilogy');


%A5
T2=2*T;
over2=over*2;

%srrc pulse and fourier transform
[phi, t] = srrc_pulse(T2, over2, A, a);
Phi_F=fftshift(fft(phi,Nf))*Ts;
f_axis=[-0.5 : 1/Nf : 0.5-1/Nf];
F_axis = Fs*f_axis;

%create n random bits xn kai xd shma
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
xn=bits_to_2PAM(b);
xd=1/Ts*upsample(xn,over2);
td=0:Ts:N*T2-Ts;

%xt shhma kai fourier
xt=Ts*conv(xd,phi);
xf=fftshift(fft(xt,Nf))*Ts;
t_conv=[t(1)+td(1):Ts:t(end)+td(end)];

Ttotal = t_conv(end)-t_conv(1);
%px
px=(abs(xf).^2)/Ttotal;

P3=0;

for i=1:1:kk
    bb=(sign(randn(N,1))+1)/2;
    Xn=bits_to_2PAM(bb);
    Xd=1/Ts*upsample(Xn,over);
    Xt=Ts*conv(Xd,phi);
    Xf=fftshift(fft(Xt,Nf));
    XF=Xf*Ts;
    Px=(abs(XF).^2)/Ttotal;
    P3=P3+Px;
    if i==kk
        Pav3=P3/kk;
    end
end

Sx=((var(xn).^2)/T2)*(abs(Phi_F.^2));

numfig=numfig+1;
figure(numfig);
subplot(2,1,1);
semilogy(F_axis, Pav3);
title('A5a: Px(F) me semilogy');
subplot(2,1,2);
plot(F_axis, Pav3);
title('A5a Px(F) me plot');

numfig=numfig+1;
figure(numfig);
subplot(2,1,1);
plot(F_axis, Pav3);
```

```
hold on
plot(F_axis, Sx, 'r');
hold off
title('A5b: Sx(F) kai Px(F) me plot');

subplot(2,1,2);
semilogy(F_axis, Pav3);
hold on
semilogy(F_axis, Sx, 'r');
hold off
title('A5b: Sx(F) kai Px(F) me semilogy');

%B


T=0.001;
over=10;
A=4;
a=0.5;
Ts=T/over;
Fs=1/Ts;
k=1000;
Nf=16384;

[phi,t]=srrc_pulse(T, over, A, a);

f_axis=[-0.5:1/Nf:0.5-1/Nf];
F_axis=Fs*f_axis;
% Fourier Transform of Phi
xf = fftshift(fft(phi, Nf)*Ts);
Px=(abs(xf)).^2;

N=100;
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
xn = bits_to_2PAM(b);
% Upsample X_2pam
Xd = (1/Ts) * upsample(xn , over);
Td = 0:Ts:N*T-Ts;
% The Sum is the convolution X and phi
Xt = conv(Xd ,phi)*Ts;
t_conv = Td (1)+t(1):Ts:Td(end)+t(end);

%500<f0<4500
f=1500;
thita = 2*pi*rand(1);
Y=Xt.*cos (2*pi*f*t_conv + thita);
% Plot Y(t)
numfig=numfig+1;
figure(numfig);
plot(t_conv ,Y);
hold on;
title('Y(t)');

hold off;
% Average Periodogram of Y(t)
PyF = 0;
```

```
for i=1:1:k
    % bit array
    b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    % bit 2pam
    xn = bits_to_2PAM(b);
    Xd = (1/Ts) * upsample(xn , over);
    % X(t)
    Xt = conv(Xd ,phi)*Ts;
    % Generate theta
    thita = 2*pi*rand (1);
    % Y(t)
    Y = Xt.*cos (2*pi*f*t_conv + thita);
    Y = fftshift(fft(Y, Nf)*Ts);
    % Periodogram
    Ttotal= t_conv(end) - t_conv (1);
    PyF = PyF + (power(abs(Y) ,2)./ Ttotal);
end
PyF_ave = PyF ./k;



numfig=numfig+1;
figure(numfig);
subplot(2,1,1)
semilogy(F_axis ,PyF_ave);
title('P_Y(F) with semilogy');
xlabel('Frequency ');

subplot(2,1,2)
plot(F_axis ,PyF_ave);
title('P_Y(F) with plot');
xlabel('Frequency ');
```

BITS TO 4PAM

```
function X = bits_to_4PAM(b)

    X=zeros(size(b));
    X(:,1) = [];

  for i=1:1:length(b)
     if b(i,1)==0 && b(i,2)==0
        X(i)=+3;
     end

     if b(i,1)==0 && b(i,2)==1
        X(i)=+1;
     end

     if b(i,1)==1 && b(i,2)==1
        X(i)=-1;
     end

     if b(i,1)==1 && b(i,2)==0
        X(i)=-3;
     end
```

```
  end
end
```