Game Theory and Its Application

Assignment2

Student ID: 311551140 Name: 陳品竣

Q1~Q5 使用同樣的情境下去處理，差別在於每題的 payoff 不同，先任意玩 100 回合，之後利用 fictitious play 進行 10000 回合來觀察會不會收斂到 NE。以下為 source code:

```
belief1_l = rand() % 101;
belief1_r = 100 - belief1_l;
belief2_l = rand() % 101;
belief2_r = 100 - belief2_l;

payoff1_l = belief1_l * u_r1c1_l + belief1_r * u_r1c2_l;
payoff1_r = belief1_l * u_r2c1_l + belief1_r * u_r2c2_l;
payoff2_l = belief2_l * u_r1c1_r + belief2_r * u_r2c1_r;
payoff2_r = belief2_l * u_r1c2_r + belief2_r * u_r2c2_r;
```

這邊前 100rounds 的 belief 用 random 產生，然後先做第一次的 payoff 更新。

```cpp
// 10000 rounds
for(int i = 0; i < 10000; i++)
{
    if(payoff1_l > payoff1_r)
    {
        belief2_l++;
        record1.push_back(0);
    }
    else if(payoff1_r > payoff1_l)
    {
        belief2_r++;
        record1.push_back(1);
    }
    else if(payoff1_l == payoff1_r)
    {
        choose = rand() % 2;
        if(choose == 0)
        {
            belief2_l++;
            record1.push_back(0);
        }
        else
        {
            belief2_r++;
            record1.push_back(1);
        }
    }
```

```
if(payoff2_l > payoff2_r)
{
    belief1_l++;
    record2.push_back(0);
}
else if(payoff2_r > payoff2_l)
{
    belief1_r++;
    record2.push_back(1);
}
else if (payoff2_l == payoff2_r)
{
    choose = rand() % 2;
    if(choose == 0)
    {
        belief1_l++;
        record2.push_back(0);
    }
    else
    {
        belief1_r++;
        record2.push_back(1);
    }
}
```

```
// update
payoff1_l = belief1_l * u_r1c1_l + belief1_r * u_r1c2_l;
payoff1_r = belief1_l * u_r2c1_l + belief1_r * u_r2c2_l;
payoff2_l = belief2_l * u_r1c1_r + belief2_r * u_r2c1_r;
payoff2_r = belief2_l * u_r1c2_r + belief2_r * u_r2c2_r;
```

這裡的迴圈進行的是 10000rounds 中每輪 player 依照當前 payoff 來做 best response，player1 及 player2 選完後同時更新 payoff。

```
if(i == 9999)
{
    cout << "1's belief : (" << belief1_l << "," << belief1_r << ")" << endl;
    cout << "2's belief : (" << belief2_l << "," << belief2_r << ")" << endl;
}
```

在第 10000rounds 時印出當前 belief，也就是 fictitious play 後得到的 strategy 比例。

Q1.

	c_1	c_2
r_1	(-1,-1)	(1,0)
r_2	(0,1)	(3,3)

此問題經由 fictitious play 後會收斂到(r2,c2)，由表格可看出 player1 選擇 r2、player2 選擇 c2，會是各自的 payoff 比選另一個 strategy 更高，所以一定會收收斂到(r2,c2)。將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 pure strategy NE(r2,c2)。

```
This is Q1's result.
1's belief : (45,10046)
2's belief : (57,10034)
```

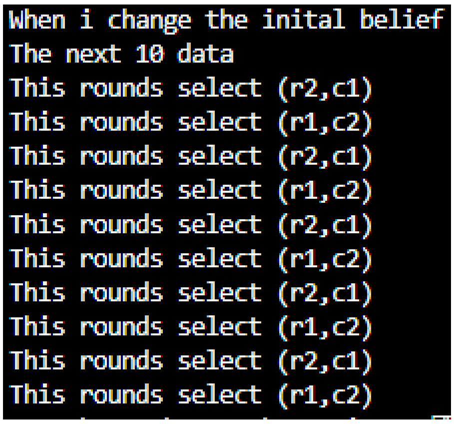
Q2.

	c_1	c_2
r_1	(2,2)	(1,0)
r_2	(0,1)	(3,3)

當 r1 及 c1 的機率分布大於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c1)，當 r1 及 c1 的機率分布小於 r2 及 c2 時則會收斂到(r2,c2)，當 r1 的機率分布大於 r2 且 c1 的機率分布小於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，當 r1 的機率分布小於 r2 且 c1 的機率分布大於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，以上的例子都是收斂到 pure strategy NE，但若 initial belief 為下列例子

1’ s Belief	2’ s Belief
(0.5,1)	(1,0.5)

此時會發現最後結果會在(r1, c2)以及(r2, c1)之間跳來跳去不會收斂，以下為接下來 10 rounds 中 player1, player2 各 rounds 選擇的 strategy 累計所更新的 belief。



```
When i change the inital belief
The next 10 data
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
```

當再將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，$P(r1)=\frac{1}{2}, \ P(r2)=\frac{1}{2}, \ P(c1)=\frac{1}{2}, \ P(c2)=\frac{1}{2}$。

```
1's belief : (4996.5,4996)
2's belief : (4996,4996.5)
```

Q3.

	c_1	c_2
r_1	(1,1)	(0,0)
r_2	(0,0)	(0,0)

此問題經由 fictitious play 後會收斂到(r1,c1)，不會收斂到另一個 NE(r2,c2)，由此表格可看出 player1 選擇 r1、player2 選擇 c1，能使各自的 payoff 比選擇另一個 strategy 更高，所以會收斂到(r1,c1)，唯一的例外(極低可能)是前 100 回合中，player1 全都選 r2、player2 全都選 c2，此種情況會造成接下來的 fictitious play 也只會選擇 r2 及 c2。將 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 pure strategy NE(r1,c1)。

```
This is Q3's result.
1's belief : (10006,85)
2's belief : (10081,10)
```

Q4.

	c_1	c_2
r_1	(0,1)	(2,0)
r_2	(2,0)	(0,4)

$$P(r_1) = \frac{4}{5}, P(r_2) = \frac{1}{5}\ for\ player\ 1\ and\ P(c_1) = \frac{1}{2}, P(c_2) = \frac{1}{2}\ \ for\ palyer\ 2.$$

此題經由 fictitious play 後會收斂到 mixed strategy NE，將 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，各 strategy 機率分布與原先 mixed strategy NE 相同。

```
This is Q4's result.
1's belief : (4939,5152)
2's belief : (8056,2035)
```

Q5.

	c_1	c_2
r_1	(0,1)	(1,0)
r_2	(1,0)	(0,1)

此題沒有 pure-strategy NE，但是有 mixed-strategy NE:

$$P(r_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(r_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(c_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(c_2) = \frac{1}{2}$$

此題經由 fictitious play 後會收斂到 mixed strategy NE，將 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，各 strategy 機率分布與原先 mixed strategy NE 相同。

```
This is Q5's result.
1's belief : (5100,4991)
2's belief : (5025,5066)
```

Q6 之後每題的 initial belief 皆不同，會在各題內補充，每題有使用兩種 case，一種是跟前五題一樣的前 100 輪 random，後 10000 輪 fictitious play，另一種是使用特定的 initial belief，觀察接下來 10 輪中每輪 player1 及 player2 所選擇的 strategy，以下 source code 就不特別列出與前五題相似的部分，以下為 source code:

```
int flag1,flag2;
```

```
if(payoff1_l > payoff1_r)
{
    belief2_l++;
    record1.push_back(0);
    flag1 = 1;
}
else if(payoff1_r > payoff1_l)
{
    belief2_r++;
    record1.push_back(1);
    flag1 =2;
}
```

```
if(payoff2_l > payoff2_r)
{
    belief1_l++;
    record2.push_back(0);
    flag2 = 1;
}
else if(payoff2_r > payoff2_l)
{
    belief1_r++;
    record2.push_back(1);
    flag2 = 2;
}
```

使用 flag 來記錄當前 round，player1 及 player2 所選擇的 strategy。

```
cout << "This rounds select (r" << flag1 << "," << "c" << flag2 << ")" << endl;
```

將當前 round 的 strategy 印出並觀察。

Q6.

	c_1	c_2
r_1	(10,10)	(0,0)
r_2	(0,0)	(10,10)

此題的 initial belief 影響之後結果甚巨，若 initial belief 選擇與前 5 題相似，當 r1 及 c1 的機率分布大於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c1)，當 r1 及 c1 的機率分布小於 r2 及 c2 時則會收斂到(r2,c2)，當 r1 的機率分布大於 r2 且 c1 的機率分布小於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，當 r1 的機率分布小於 r2 且 c1 的機率分布大於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，以上的例子都是

收斂到 pure strategy NE，但若 initial belief 為下列例子

1’ s Belief	2’ s Belief
(0.05, 1)	(1, 0.05)

此時會發現最後結果會在(r1, c2)以及(r2, c1)之間跳來跳去不會收斂，以下為接下來 10 rounds 中 player1, player2 各 rounds 選擇的 strategy 累計所更新的 belief。

```
belief1_l = 0.05;
belief1_r = 1;
belief2_l = 1;
belief2_r = 0.05;
```

```
When i change the inital belief
The next 10 data
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
```

當再將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，$P(r1) = \frac{1}{2},\ P(r2) = \frac{1}{2},\ \ P(c1) = \frac{1}{2},\ P(c2) = \frac{1}{2}$。

```
1's belief : (4996.5,4996)
2's belief : (4996,4996.5)
```

Q7.

	c_1	c_2
r_1	(0,0)	(1,1)
r_2	(1,1)	(0,0)

此題的 initial belief 影響之後結果甚巨，若 initial belief 選擇與前 5 題相似，當 r1 及 c1 的機率分布大於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c2)或是(r2,c1)，當 r1 及 c1 的機率分布小於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c2)或是(r2,c1)，當 r1 的機率分布大於 r2 且 c1 的機率分布小於 c2 時最後也會收斂到(r2,c1)，當 r1 的機率分布小於 r2 且 c1 的機率分布大於 c2 時最後也會收斂到(r1,c2)，以上的例子都是收斂到 pure strategy NE，但若 initial belief 為下列例子

1’s Belief	2’s Belief
(1, 0.5)	(1, 0.5)

此時會發現最後結果會在(r1, c1)以及(r2, c2)之間跳來跳去不會收斂，以下為接下來 10 rounds 中 player1, player2 各 rounds 選擇的 strategy 累計所更新的 belief.

```
belief1_l = 1;
belief1_r = 0.5;
belief2_l = 1;
belief2_r = 0.5;
```

```
When i change the inital belief
The next 10 data
This rounds select (r2,c2)
This rounds select (r1,c1)
This rounds select (r2,c2)
This rounds select (r1,c1)
This rounds select (r2,c2)
This rounds select (r1,c1)
This rounds select (r2,c2)
This rounds select (r1,c1)
This rounds select (r2,c2)
This rounds select (r1,c1)
```

當再將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，$P(r1) = \frac{1}{2}, \ P(r2) = \frac{1}{2}, \ \ P(c1) = \frac{1}{2}, \ P(c2) = \frac{1}{2}$。

```
1's belief : (4996.5,4996)
2's belief : (4996,4996.5)
```

Q8.

	c_1	c_2
r_1	(3,2)	(0,0)
r_2	(0,0)	(2,3)

此題的 initial belief 影響之後結果甚巨，若 initial belief 選擇與前 5 題相似，當 r1 及 c1 的機率分布大於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c1)，當 r1 及 c1 的機率分布小於 r2 及 c2 時則會收斂到(r2,c2)，當 r1 的機率分布大於 r2 且 c1 的機率分布小於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，當 r1 的機率分布小於 r2 且 c1 的機率分布大於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，以上的例子都是收斂到 pure strategy NE，但若 initial belief 為下列例子

1’ s Belief	2’ s Belief
(0.5,1)	(1,0.5)

此時會發現最後結果會在(r1, c2)以及(r2, c1)之間跳來跳去不會收斂，以下為接下來 10 rounds 中 player1, player2 各 rounds 選擇的 strategy 累計所更新的 belief.

```
belief1_l = 0.5;
belief1_r = 1;
belief2_l = 1;
belief2_r = 0.5;
```

```
When i change the inital belief
The next 10 data
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
```

當再將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy NE，$P(r1) = \frac{1}{2},\ P(r2) = \frac{1}{2},\ P(c1) = \frac{1}{2},\ P(c2) = \frac{1}{2}$。

```
1's belief : (4996.5,4996)
2's belief : (4996,4996.5)
```

Q9.

	c_1	c_2
r_1	(3,3)	(0,2)
r_2	(2,0)	(1,1)

此題的 initial belief 影響之後結果甚巨，若 initial belief 選擇與前 5 題相似，當 r1 及 c1 的機率分布大於 r2 及 c2 時則會收斂到(r1,c1)，當 r1 及 c1 的機率分布小於 r2 及 c2 時則會收斂到(r2,c2)，當 r1 的機率分布大於 r2 且 c1 的機率分布小於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，當 r1 的機率分布小於 r2 且 c1 的機率分布大於 c2 時最後也會收斂到(r1,c1)或是(r2,c2)，以上的例子都是收斂到 pure strategy NE，但若 initial belief 為下列例子

1’ s Belief	2’ s Belief
(0.5,1)	(1,0.5)

此時會發現最後結果會在(r1, c2)以及(r2, c1)之間跳來跳去不會收斂，以下為接下來 10 rounds 中 player1, player2 各 rounds 選擇的 strategy 累計所更新的 belief.

```
belief1_l = 0.5;
belief1_r = 1;
belief2_l = 1;
belief2_r = 0.5;
```

```
When i change the inital belief
The next 10 data
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r1,c2)
This rounds select (r2,c1)
This rounds select (r1,c2)
```

當再將此 initial belief 跑 10000 筆時，可以發現會收斂到 mixed strategy

NE，$P(r1) = \frac{1}{2}, \ P(r2) = \frac{1}{2}, \ \ P(c1) = \frac{1}{2}, \ P(c2) = \frac{1}{2}$。

```
1's belief : (4996.5,4996)
2's belief : (4996,4996.5)
```

Q10.

False，fictitious play 不一定會能收斂到 pure strategy NE，以下為反例子:

	C1	C2
R1	(1,0)	(1,0)
R2	(0,0)	(0,0)

在此情況之下，NE 會是(R1,C1),(R1,C2)這兩個點，但是透過 fictitious play，player1 會收斂到 R1 這個 strategy，而 player2 卻會在 C1、C2 這兩個 strategy 跳來跳去，因為他的 payoff 都會是 0，所以不會收斂。

以下為此用前五題的 random initial 方式跑出的統計結果:

```
This is Q10's result.
If use the random inital belief
1's belief : (4989,5102)
2's belief : (10025,66)
```

可以發現會收斂到 mixed strategy NE，$P(r1) = 1$ $P(r2) = 0$ $P(c1) = \frac{1}{2}$,

$P(c2) = \frac{1}{2}$。