Rapport

Påbøl

30. maj 2019

Kapitel 1

Uge 2: 30/04

1.1 Kvadratiske matricer

En NxN matrix D er en diagonalmatrix hvis $d_i j = 0$ for $i \neq j$

Enhedsmatricen I_n er denne nxn diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Inversible matricer

En nxn matrice er invertibel hvis der findes en nxn matrix så

$$XA = AX = I_n$$

Altså hvis både AX og XA giver identitetsmatricen
Hvis både X_1 og X_2 er inverse til A så gælder:

$$X_2 = X_2 I_n = X_2(AX_1) = (X_2 A)X_1 = I_n X_1 = X_1$$

Derfor er den inverse matrice entydigt bestemt og betegnes A_{-1}
En invertibel matrix A kaldes også regulær, ellers kaldes den singulær
Hvis A er invertibel så har ligningen $Ax = y$ netop en løsning $x = A^{-1}y$

1.2.1 Theorem p. 85

Hvis A og B er invertible så er AB også invertibel og der gælder $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Hvis A er invertibel så er A^T også invertibel og $(A^T)^{-1} = A$
Hvis A er invertibel så er A^{-1} også invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$
Hvis A er invertibel og $S \neq 0$ så er sA også invertibel og $s^{-1}A^{-1} = (sA)^{-1}$

1.2.2 Def 2.8

En NxN matrix X er højreinvers til A hvis $AX = I_n$
Hvis $XA = I_n$ er X venstreinvers

1.2.3 Theorem 2.4

Hvis der findes netop en matrice X som er en højreinvers til A så er X også venstreinvers til A og dermed $X = A^{-1}$

1.3 Bestemmelse af invers ved rækkeoperationer

Lad A være en NxN matrice og lad $I = I_n$

1. Opskriv nmatricen $[A|I]$
2. Bring matricen $[A|I]$ til reduceret rækkeechelonform
3. Hvis den reducerede rækkeechelonform er $[I|X]$ da er $A^-1 = X$ hvis ikke da er A ikke invertibel

Kapitel 2

07/05

2.1 Vekrorrummet Rn

Der gælder pene rægneregler
Multiplikation er ikke heeeeelt simpelt

En mægde V hvis elementer er vektorer med

- Vektoraddition, $VxV \to V, (u, v) \to u + v$
- Skalarmultiplikation $RV \to V, (s, u) \to su$

Mængden $V = R^n$ er et reelt vektorrum

VI holder os fra abstrakte vektorrum Men alt hvad vi skal lære om R^n gælder også i et abstrakt vektorrum V

2.2 Underrum

Pæne delmængder i $\mathbb{R}^n$
En delmængde $u \subseteq \mathbb{R}^N$ har tre krav
Nulvektorern skal ligge i u
For alle $u, v \in u$ gælder også $u + v \in u$
For alle $s \in \mathbb{R}$ og $u \in U$ gælder det $su \in U$
Eksempler er: $U = \{(0, 0)\}, U =$ en linie gennem 0,0, $U = \mathbb{R}$

Hvad kan man bruge underrum til? Principal component analysis. Der tilnærmer man et højdimensionalt datasæt med et lavdimensionalt underrum.

Eksempel 2.1. *Vi går til* $\mathbb{R}^4$*.*
$u = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\} \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 2$ *og* $x_2 + x_3 + x_4 = 0$
Vi opstiller følgende operation

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = 0$$

Da $A0 = 0$ *gælder* $0 \subseteq U$
Hvis $u,v \subset u$ *gælder* $Au = 0$ *og* $Av = 0$*. Matrixregning giver*

$$A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$$

og dermed gælder $u + v \subset U$
Lad $s \in \mathbb{R}$*. Det gælder at* $s(u+v) \subset U$ *og da*

$$A(su) = sAu = s \cdot 0 = 0$$

2.3 Span

Lad $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \in \mathbb{R}$. Sæt
$spanS = span\{v_1, \ldots, v_k\} = \{x_1v_1, \ldots x_kv_k | x_{1\ldots k} \in \mathbb{R}\}$ dvs span S er mængden af alle linearkombinationer af v.
I planen $\mathbb{R}^2$ er spannet hele planen

Eksempel 2.2. *Vi betragter i* $\mathbb{R}^3$ *vektorerne*

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = (3,4,5), v_3 = (7,8,9)$$

Vektoren u tilhører span(v1,v2,v3) hvis der findes koefficineter x_n *så det giver u*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss jordangiver så til sidst et ligninssystem med en fri variabel. Altså der er uendeligt mange løsninger. Altså $u \in spanv_1, v_2, v_3$

Derfra ser vi følgende. u ligger i spannet hvis

- u tilhører spannet.
- ligningssystemet $Ax = u$ har mindst en løsning

Theorem 3.2
Span er et underrum
Def 3.4
Lad u være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $s \subseteq U$ være en endelig delmængde. Man siger at S udspænder U hvis span S = U

2.4 Lineær uafhængighed

Vi har de tre vektorer fra tidligere. De udspænder en 2d plan i $\mathbb{R}^3$. Men vektor $v_3 \in spanv_1, v_2$ Altså er v_3 overflødig. Derfor er de lineært afhængige

Definition 3.5 Lineær uafhængighed
Et set $S = \{v_1 \dots v_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ kaldes afhængige hvis den eneste løsning til ligningen $x_1v_1 + \cdots + x_kv_k = 0$ er $x_1 = x_k = 0$. Ellers er de lineært afhængige.

Eksempel 2.3. *Det kan skrives som*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som på rre har en fri variabel, altså har de uendelig mange løsninger så de er Lineært afhængige

Bemærk: Hvis $v_4 \in \mathbb{R}^3$ er en vilkårlig vækrot da er $v1, v_2, v_3, v_4$ også lineært afhængige, da vi bare kan bruge den gamle løsning og sætte $x_4 = 0$

Sætter du det op på totalmatriceform ved du at hvis $rankA < k$ er systemet afhængigt

En konsekvens af det er
Theorem 3.5 Lad nxn er invertibel hvis og kun hvis søjlerne er lineært uafhængige.

Derudover så:
Theorem 3.6 $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^3$ er lineært uafhængige da $k \leq n$ eller fem vektorer i $\mathbb{R}^4$ skal være uafhængige

Derudover siger vi. i et afhængigt. Der findes mindst en vektor v_i i spannet v_1, v_k

2.5 Baser

Lad u være et underrum af rn. en endelig delmængde $B \subseteq U$ kaldes en basis for U hvis: B er lineært uafhængigt og $spanB = U$

2.5.1 Standardbasen for $\mathbb{R}^n$ har en basis

Hvis $U \neq 0$ så har U uendeligt mange forskellige baser

Antallet af vekrorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt

Kapitel 3

09/05

3.1 Koordinater

Man skal have n retninger.

Definition 3.7 og Theorem 3.8
Lad $B = \{b_1, ..., b_k\}$ være en ordnet basis for et underrum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Til hvert $v \in U$ findes entydigt bestemte tal $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ så

$$v = x_1 b_1 + \cdots + x_k b_k$$

Vektoren med disse tal kaldes koortinaterne for v mht. basen B

$$[V]_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Altså kan vi for ethvert punkt udspændt af B kan vi opskrive det på koordinatform vha. B Vi kan finde koordinaterne til en vektor u ved at sætte dem op på et ligningssystem Da:

$$v = x_1 b_1 + \cdots + x_k + b_k$$

$$[B|u] \rightarrow [I_n|V_b]$$

3.1.1 Basisskiftmatricen

Kan omregne fra et koordinatsystem til et andet. Lad der være to ordnede baser b, c Fra et og samme underrum $u \subseteq \mathbb{R}$. Basisskiftmatricen fra c til b er med notation fra 7.32 defineret ved $P_{b \leftarrow c}$ omreg
Vigtigt: $[v]_b = P_{B \leftarrow C}[v]_c$

Eksempel 3.1. *Vi betragter to ordnede baser C, B*
Vi udregner så alle koordinater til kollonner i C og lægger dem i matricen.
Derved får vi Basisskiftmatricen $P_{B \leftrightarrow C}$
Så hvis vi har en vekrot $[v]_c$ kan vi udtrykke at $P \cdot [v]_c = [v]_b$

Øvelse

Vi har to baser:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Og en udleveret basisiskiftmatrice

$$P_{B \leftarrow E} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi vil nu udtrykke $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ som koordinater i b
Vi Ganger nu vektoren met matricen

$$Pv = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Derfor har vi

$$9 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Den inverse til basisskift matrice

VI betrakter at $P_{B \leftarrow C}$ er invertibel, og dens inverse $P_{b \leftarrow C}^{-1} = P_{c \leftarrow b}$
Så for at finde basisskift fra $P_{x \leftarrow E}$ kan vi bare finde den inverse matrice x
Vi kigger fra nu af på matrixen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2 Nulrum

Null space på eng.
Nulrum er hvor det gælder $nullA = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$

3.3 Søjlerummet

Column space. Lad A være en mxn matrix. Søjlerummet af A er $colA = span\{allesøjleriA\}$
Vi kigger på rre for A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der er dog to afhængige variable. Vi finder de søjler hvor der står pivoter, altså vi skal beholde søjle 3 og fem og får

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Som er vores basis
Vi ser så at dimensionen af Søjlerummet er 3dimensionelt $dim(col(A)) = rank(A)$

3.4 Rækkerum

Lad A være en MxN matrix, rækkerummet af A er row $A = span\{$alle m rækkevektorer i$A\}$

Sætter vi på rækkeechelonform. Så kan vi sige at alle nonzero rækker er vores span(som vektorer)
Vi får at dimensionen af $rowA = rankA$
Vi får at basis er de rækker hvori der befinder sig pivoter

3.5 Lineære transformationer

Lineære transformationer
En funktion $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ som respekterer plus og Skalarmultiplikation

Matrixtransformationer $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ givet ved $T_A(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$
Enhver matrixtransformation er lineær
3.18 Omvendt: Enhver lineær transformation er en matrixtransformation

Eksempel 3.2. *Lad θ være en vinkel og lad $R_0 : R^2 \to \mathbb{R}^2$ være den funktion der roterer et punkt i planen vinklen θ mod uret omkring origo. Det er geometrisk klart at R_θ er en lineær transformation. Det at rotere respekterer plus og Skalarmultiplikation. Derfor siger sætning 3.18 at vi har en skjult matrice tilsvarer den*

Vi tager de to standardvektorer e_1, e_2. Roterer vi de to med θ

$$A_\theta = (R_\theta(e_1)|R_\theta(e_2)) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Eksempel 3.3. *Vi kigger på spejling*
Vi ser at

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.5.1 Sammensætning af lineære transformationer

Lad der være givet to lineære transformationer $T(x) = Ax$ og $S(y) = By$
Den sammensatte transformation $S \circ T = S(T(x)) = S(Ax) = B(Ax)) = (BA)x$

Eksempel 3.4. *Vi betragter nu både spejling og rotation med vinklen 40 Vi har så $(S \circ R)$ roterer en vector 40 og spejler den*
Vi har så $(R \circ S)$ Spejler en vector og roterer med 40

3.6 Kerne

Lad kernen af t være den lineære transformation $x \in \mathbb{R}^n | T(x) = 0$
Kernen er injektiv hcis $kerT = \{0\}$
Kernen er surjektiv hvis alle vektorer bliver ramt af t

Rotationsmatricen er både injektiv og surjektiv.
Injektiv: Det vil sige alle vektorer der roteres og ender i nul er $(0, 0)$. Logik though
Surjektiv: Alle vektorer kan roteres over i$(Rot_{-40}(Rot_{40}(x)) == x)$

Hvis en lineær transformation både er injektiv og surjektiv(Bijektiv) dette svarer til at matricen A er invertibel. Den inverse lineære transformation er da $A^{-1}x$ hvor A er transformationsmatricen

Kapitel 4

14/05

4.1 Prikprodukt

Prikproduktet for to vektorer u, v er $u_1 * v_1 + u_2 \bullet gv_2 + \cdots + u_n \bullet gv_n = u \bullet gv$
Vi har $s(u \bullet gv) = su \cdot sv$

4.1.1 Norm

Normen af en vektor er $||v|| = \sqrt{v \bullet v}$ Se pyth

Regneregler:

- $||v|| \geq 0$ og $||v|| = 0$ netop hvis $v = 0$
- $||cv|| = |c|||v||$
- $|u \bullet v \leq ||u||||v||$ Cauchy Schwarz ulighed
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (Trekantsuligheden)

4.2 enhedsvektor

En vektor $u \in \mathbb{R}$ kaldes en enhedsvektor hvis $||u|| = 1$
For en vilkårlig vektor $u \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ er den normerede vektor:

$$u' = \frac{u}{||u||}$$

4.3 Euklidisk afstand

Den euklidiske afstand mellem to vektorer i $\mathbb{R}^n$ defineres som:

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

4.4 Vinklen mellem to vektorer

For u, v i $\mathbb{R}^2$ eller i $\mathbb{R}^3$ kan man vha. cosinusrelationerne vise

$$\cos \Theta = \frac{u \bullet v}{||u||||v||}$$

4.5 Ortogonale vektorer og pythagoras

For vinklen Θ mellem to vektorer u og v har man:

$$\Theta = 90 \quad \cos \Theta = \frac{u \bullet v}{||u||||v||} = 0 \Leftrightarrow u \bullet v = 0$$

Definition 4.5, to vektorer u, v i $\mathbb{R}^n$ kaldes orthogonale hvis $u \bullet v = 0$ Der skrives $u \perp v$.

Theorem x.xx: Gælder det $u \perp v \in \mathbb{R}^n$ så gælder det at $||u+v||^2 == ||u||^2 + ||v||^2$
Er to vektorer orthogonale, så gælder det at

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Da pythagoras sætning kan bruges på trekanten udspændt over de to retvinklede vektorer

4.6 Ortogonal projektion

Definition 4.6
Lad $u \neq 0$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ og lad $U = span u$ være underrummet udspændt af u
For enhver vektor v i $\mathbb{R}^n$ defineres nu:

- Den ortogonale projektion af v på U er givet ved:

  $$proj_U(v) = \frac{v \bullet u}{||u||^2} u$$

- Komponenten af v ortogonal på U er en vektor der går vinkelrat fra U til v

  $$comp_U(v) = v - proj_u(v) = v - \frac{v \bullet u}{||u||^2} u$$

- Spejlingen af v i U er givet ved:

  $$refl_U(V) = 2proj_U(v) - v = 2\frac{v \bullet u}{||u||^2} u - v$$

4.6.1 øvelse

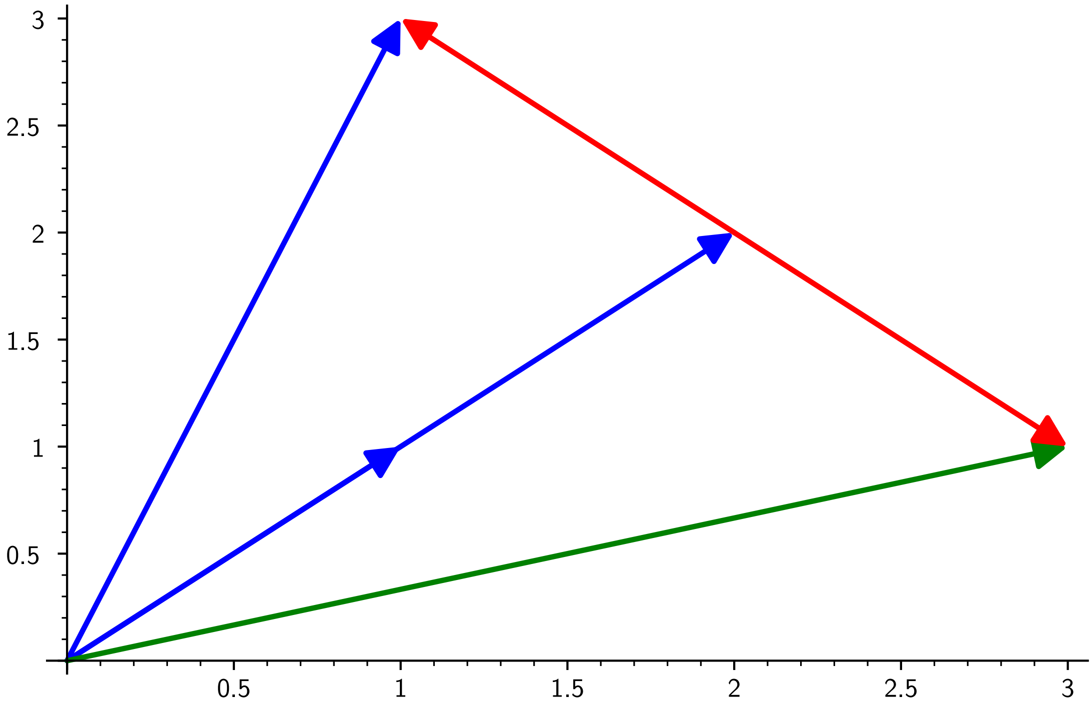
$$U = span u = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vi har $u \bullet v = 4$ Vi har $||u|| = \sqrt{2} \Leftrightarrow ||u||^2 = 2$

$$proj_U(v) = \frac{4}{2}u = 2u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$comp_U(v) = v - proj_U(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



4.7 Projektionsmatricen

Det er keometrisk klart at $proj_U, comp_U, refl_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er lineære transformationer. Derfor findes nxn matricer er

- P - Projektionsmatricen for U
- C - Komponentmatricen for U
- R - Spejlingsmatricen for U

Projektionsmatricerne

$$P = \frac{uu^T}{u^T u}$$

Fordi uu^T er en søjlevektor gange rækkevektor får vi en matrice. u^T er række gange søjle, og derfor en skalar. Derfor får vi matrice divideret med skalar

$$C = I - P$$

$$R = 2P - I$$

4.8 Ortonormale baser

Et set af vektorer u_k kaldes

- Parvist ortogonale hvis $u_i \bullet u_j = 0$ for alle $i \neq j$
- Parvist ortonormale hvis $u_i \bullet u_j = 0$ for alle $i \neq j$ og $||u_i|| = 1$ for alle i

Ethvert sæt S af parvist ortogonale ikke-nul vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige
En ortogonal/ortonormal basis for et underrum U af $\mathbb{R}^n$ er en basis B for U hvori vektorerne er parvist ortogonale/ortonormale
Hvis vi har en ortogonal base B så kan vi udregne koordinater:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{v \bullet u_1}{||u_1||^2} \\ \dots \\ \frac{v \bullet u_k}{||u_k||^2} \end{pmatrix}$$

4.9 Ortogonale Matrice

Vi har en matrix A og søjlerne i A er parvist ortonormale hvis og kun hvis $A^T A = I_K$ altså hvis A^T er venstre-invers til A

En kvatratisk matrix Q kaldes ortogonal hvis søjlerne i Q er parvist ortonormale altså hvis $Q^T Q = I_n$. Det gælder for den ortogonale matrice Q gælder $Q^{-1} = Q^T$

Ortogonale matricer bevarer prikprodukt: $Qu \bullet Qv = u \bullet v$.

4.9.1 Ortogonale lineære transformationer

Hvis vi har en lineær transformation hvor transformationsmatricen er ortogonal så får vi
Længden af den vektor vi starter med, og den transformerede vektor så bevarer de længden.
Typisk: Rotationer og spejlinger

Kapitel 5

16/05

5.1 Ortogonal komplement

Definition:
To underrum u og v af $\mathbb{R}^n$ kaldes ortogonale hvis enhver vektor i u er ortogonal på enhver vektor i V dvs $u \bullet v = 0 \forall u \in U, v \in V$

Thm 4.8:
Lad $U = \text{span}\{u_1, \ldots, u_p\}$ og $V = \text{span}\{v_1, \ldots, v_q\}$ For at checke om underrum er ortogonale er det nok at checke 'frembringersæt'. Altså hvis du har to baser $U = \{u_1, u_2\}, V = \{v_1, v_2, v_3\}$ skal vi bare checke

$$u_1 \bullet v_1 = u_2 \bullet v_1 = u_1 \bullet v_2 = u_2 \bullet v_2 = u_1 \bullet v_3 = u_2 \bullet v_3 = 0$$

Def 4.11
Lad U være et underrum af $\mathbb{R}^n$ det ortogonale komplement $U^\perp$ til U består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i U: Det gælder

- $U^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$
- $U^\perp \cap U = \{0\}$
- $(U^\perp)^\perp = U$

Ortogonal komplementet til en linie er et plan

Thm 4.10. For enhver matrix A Gælder

$$(rowA)^\perp = nullA$$

$$(colA)^\perp = nullA^\perp$$

$$(nullA)^\perp = rowA$$

Vi har også $dimU + dimU^\perp = n$ hvor n er fra $\mathbb{R}^n$

5.2 Ortogonal projektion

Vi har lært en-dimensionel projektion(eg vektor til vektor)
Vi skal nu projektere generelt
Den ortogonale projektion af v på U er

$$proj_U(v) = \frac{v \bullet u_1}{||u_1||^2 u_1} + \cdots + \frac{v \bullet u_k}{||u_k||^2 u_k}$$

$$comp_U(v) = v - proj_U(v)$$

5.3 Gram-Schmidt processen

Gram-schmidt kan lave et ortogonalbasis til en ortonormalbasis
Lad $u_1, \ldots, u_n$ være lineært uafhængige vektorer, og dermed en basis for underrummet $U = spanu_1 u_n$. Vi normaliserer så

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$$

MANGLER

5.4 QR faktorisering

Det er en måde at skrive en matrix som et produkt af to pæne matrixer, vi definerer u som søjler i A
Man laver Gram-Schmidt, og holder styr på tallene r_{ij}

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{u_1}{r_{11}}$$

$$q_2 = \frac{u_2 - (u_2 \bullet q_1)q_1}{||u_2 - (u_2 \cdot q_1)q_1} = \frac{u_2 - r_{12}q_1}{r_{22}}$$

Så har vi r_{ij}

$$A = QR = (q_1|q_2|\ldots|q_n)\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1j} \\ 0 & r_{22} & \ldots r_{2j} & \end{pmatrix}$$

5.5 Mindste kvadraters metode

fFor en mxn matrix A betragter vi et lineært ligningssystem $Ax = b$, hvori der er mange ligninger med få ubekendte. Hvis ligningssystemet er inkonsistent, så efterspørger vi i stedet den vektor x som gør størrelsen $||b - Ax||$ mindst muligt. Altså den x der kommer tættest på b
Thm 4.13 viser at vi skal vælge $x = \bar{x}$ hvor $A\bar{x} = proj_{colA}(b)$
For $\bar{x}$ gælder altså at $b - A\bar{x}$ er ortogonal til søjlerummet. Derfor ved vi at $A^T(b - A\bar{x}) = 0$ Den søgte vektor $\bar{x}$ tilfredsstiller altså følgende ligningssystem $A^T A\bar{x} = A^T b$ Vi får så næsten altiD(praktisk altid)

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Altså den vektor $\bar{x}$ der kommer tættest på at løse ligningssystemet

Et eksempel på brug kunne være en samling datapunkter med tilsvarende x,y koordinater, vi har nu mange datapunkter(ligninger $y = ax+b$) og to ubekendte a, b)

Kapitel 6

forlasning 11

6.1 Diagonalisering af matricer

Det drejer sig om ligningen

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

En nxn matrix kaldes diagonaliserbar hvis der findes en matrix P og en diagonalmatrix som opfylder $P^{-1}AP = D$. Matricen $A-(1,1,)(-2,4)$ er diagonaliserbar fordi $P = (1,1)(1,2)$ og $D = (2,0)(0,3)$

6.2 Lidt teori

Vi antager at A er diagonaliserbar n x n matrix, dcs $P^{-1}AP = D$. Vi kan rykke lidt rundt og forgange med P på begge sider $P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$ og vi bemærker $Av_1|\ldots|Av_n) = AP = PD = (\lambda_1 v_1|\ldots|\lambda_n v_n)$ Vi konkluderer at

- λ er en egenværdi for A med tilhørende egenvektor v.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer i A

Theorem 6.1. *6.4 Lad A være en n x n matrix med k indbyrdes forskellige komplekse egenværdier. Vælg for hver $1 \leq i \leq k$ en basis B_i for egenrumet $E_{\lambda_i} = Null(A - \lambda_i I)$ så er mængden $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ lineært uafhængig og der gækder: A er diagonaliserbar og antallet af vektorer i $B = n$*

6.3 En metode

Lad A være en n x n matrix med indbyrdes forskellige komplekse egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ hvor $k \leq n$

- Vælg basis $B_1 = v_1, \ldots, v_{g_{\lambda_1}}$ for $E_{\lambda_1} = Null(A - \lambda_1 \cdot I)$

- ...
- Vælg basis $B_k = v_1, \ldots, v_{g_{\lambda_k}}$ for $E_{\lambda_k} = Null(A - \lambda_k \cdot I)$

Vi opstiller så de baser som søjler i en

6.4 Øvelse

Vi får en matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Og vil bestemme P og D. Vi bruger sage

```
sage: a = matrix(SR,2,2,[2,3,3,2])
sage: a.eigenvalues()
[5, -1]
sage: a - (5*identity_matrix(2))
[-3  3]
[ 3 -3]
sage: (a - (5*identity_matrix(2))).rref()
[ 1 -1]
[ 0  0]
sage: b1 = vector([1,1])
sage: (a + identity_matrix(2))
[3 3]
[3 3]
sage: (a + identity_matrix(2)).rref()
[1 1]
[0 0]
sage: b2 = vector([-1,1])
sage: P = matrix(SR,2,2,[b1,b2]).T
sage: P
[ 1 -1]
[ 1  1]
sage: P.inverse()*a*P
[ 5  0]
[ 0 -1]
```

Og så har vi fundet P og D