Lineær algebra: Projekt C

Afleveres: 31/05 - 2019

Lærer: Henrik^2

Christian Påbøl

1 Opgave 1

Vi betragter underrummet $\mathcal{U} = span\{u_1, u_2\}$ af $\mathbb{R}^3$ hvor

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } u_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.1 a

Bestem projektionsmatricen P for underrummet $\mathcal{U}$. Vi checker først at u_1, u_2 er en basis, ved at observere $Rank[u_1|u_2] = 2$ og at der derfor ingen frie variabler er. Så checker vi om de er ortogonale på hinanden $u_1 \perp u_2$?

$$u_1 \bullet u_2 = 49 \neq 0$$

Så vi skal finde en ortogonal eller ortonormal basis for underrummet $\mathcal{U}$. Her kan vi bruge Gram-Schmidt processen til at finde en. Vi finder frem til q_1, q_2 som er ortogonale på hinanden, og skalerer dem så med deres længde for at få vektorer af længde 1 og dermed en ortonormal basis.
Vi opstiller q_1 som u_1 og normaliserer:

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi projekterer u_2 i q_1 og trækker det fra u_2

$$q_2' = u_2 - (u_2 \bullet q_1)q_1 = u_2 - 7 \cdot (\frac{1}{7}u_1) = u_2 - u_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi Normaliserer så q_2'

$$q_2 = \frac{q_2'}{||q_2'||} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi har så et sæt $\{q_1, q_2\}$ som en ortonormal basis for underrummet $\mathcal{U}$.
Formlen for projektionsmatricen for ortonormale baser er QQ^T. hvor $Q = [q_1|q_2]$. Vi opstiller derfor

$$P_{\mathcal{U}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & -12 & 6 \\ -12 & 13 & 18 \\ 6 & 18 & 40 \end{pmatrix}$$

1.2 b

Bestem spejlingen af vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i underrummet $\mathcal{U}$

For at finde spejlingen af e_1 i $\mathcal{U}$ kan vi udregne $2Pe_1 - e_1$

$$2P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 90 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} - e_1 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 41 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1.3 c

Bestem en basis u_3 for underrummet $\mathcal{U}^\perp$.
Da dim$\mathcal{U} = 2$ må dim$\mathcal{U}^\perp = 1$. Vi skal derfor finde en vektor v hvor produktet af $u_1 \cdot v = 0$ og $u_2 \cdot v = 0$. Dette kan skrives $\mathcal{U}^T v = 0$. Vi opstiller en totalmatrice og sætter på reduceret rækkeechelonform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \to r_1 \\ r_2 - 9r_1 \to r_2 \\ -\frac{1}{7}r_2 \to r_2 \\ r_1 - \frac{2}{3}r_2 \to r_1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Vi opstiller løsningsmængden:

$$v = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Og

$$\mathcal{U}^\perp = \text{span}\left\{ \begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 1 \end{array} \right\}$$

1.4 d

Bestem forskriften for den lineære transformaion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som opfylder:

$$T(u_1) = u_2 \quad T(u_2) = u_1 \quad T(u_3) = u_3$$

Vi ser her at Ts formål er at bytte om på $u_1 \to u_2$. Dette kan også opstilles som en rækkeoperation. Vi opstiller derfor en matrice:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Som er den tilsvarende elementærmatrice for rækkeoperationen $r_1 \leftrightarrow r_2$. Vi kigger så på PU^T.[1]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 9 & -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ -\frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser her at P korrekt laver $u_1 \leftrightarrow u_2$ og lader u_3 stå uberørt, og vi siger derfor P er forskriften for T.

Det nævnes at dette ikke er en generel løsning for at finde forskriften. Blot en genvej.

2 Opgave 2

Vi betragter matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Hvor U er transponeret, da vi skal have vektorer i rækker, og ikke søjler, så de ganges sammen ind i matricen $u_{11} \cdot P_{11}$ etc.

2.1 a

Bestem en QR-faktorisering af A
For at regne en QR faktorisering af A skal vi opstille to matricer Q, R således at $QR = A$ hvor $Q = (q_1| \dots |q_j)$ fra Gram-Schmidt processen og $r_{ij} = q_i \bullet u_j$ for $i < j$ og $r_{jj} = ||u_j - r_{1j}q_1 - r_{2j}q_2 - \dots - r_{j-1,j}q_{j-1}||$
Vi udfører nu Gram-Schmidt processen på A, hvor u er søjlevektorer i A. Vi siger

$$\begin{aligned}
&r_{11} = ||u_1|| = 5 && q_1 = \tfrac{u_1}{r_{11}} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\-4\\2\\2\end{pmatrix}\\
&r_{12} = q_1 \bullet u_2 = 5 && q`_2 = u_2 - r_{12}q_1 = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\\2\end{pmatrix}\\
&r_{22} = ||q_2'|| = 5 && q_2 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\\2\end{pmatrix}\\
&r_{13} = q_1 \bullet u_3 = 10 &&\\
&r_{23} = q_2 \bullet u_3 = 0 && q_3' = u_3 - r_{13}q_1 - r_{23}q_2 = \begin{pmatrix}6\\6\\-3\\12\end{pmatrix}\\
&r_{33} = ||q_3'|| = 15 && q_3 = \tfrac{q_3'}{r_{33}} = \begin{pmatrix}2/5\\2/5\\-1/5\\4/5\end{pmatrix}\\
&r_{14} = q_1 \bullet u_4 = 3 &&\\
&r_{24} = q_2 \bullet u_4 = 2 &&\\
&r_{34} = q_3 \bullet u_4 = -1 && q_4' = u_4 - r_{14}q_1 - r_{24}q_2 - r_{34}q_3 = \begin{pmatrix}2/5\\2/5\\4/5\\-1/5\end{pmatrix}\\
&r_{44} = ||q_4'|| = 1 && q_4 = \tfrac{1}{1}q_4' = \begin{pmatrix}2/5\\2/5\\4/5\\-1/5\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

Vi har derfor matricerne $Q, R =$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.8 & 0.4 & 0.4\\ -0.8 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0.4 & 0.4 & -0.2 & 0.8\\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 15 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi efterchecker dette svar ved at checke $QR = A$

Vi betragter den vilkårlige matrice

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix}$$

Hvor produktet $d = r_{11}r_{22}r_{33}r_{44}$ er forskelligt fra nul. Vi har så fået at vide at den inverse til den matrice er:

$$R^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} r_{22}r_{33}r_{44} & -r_{12}r_{33}r_{44} & (r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22})r_{44} & -r_{12}(r_{23}r_{34} - r_{24}r_{33}) + r_{22}(r_{13}r_{34} - r_{14}r_{33}) \\ 0 & r_{11}r_{33}r_{44} & -r_{11}r_{23}r_{44} & r_{11}(r_{23}r_{34} - r_{24}r_{33}) \\ 0 & 0 & r_{11}r_{22}r_{44} & -r_{11}r_{22}r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{11}r_{22}r_{33} \end{pmatrix}$$

2.2 b

Benyt del (a) og ovenstående formel for R^{-1} til at beregne A^{-1}
Da vi har $A = QR$ kan vi opstille $A^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$. Vi udnyter så at Q er en ortogonal matrice og $Q^{-1} = Q^T$, og opstiller derfor $A^{-1}Q^T$. Vi har formlen for R^{-1} givet ovenfor, så vi skriver

$$d = r_{11}r_{22}r_{33}r_{44} = 375$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & -2/15 & -1/3 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1/15 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så opstiller vi

$$\begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & -2/15 & -1/3 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1/15 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & -0.8 & 0.4 & 0.4 \\ -0.8 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & -0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{75} & -\frac{29}{75} & -0.24 & -0.04 \\ -0.32 & -0.12 & -0.24 & 0.16 \\ \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & 0.04 & 0.04 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & -0.2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

2.3 c

Vi ser $A = (a_1|a_2|a_3|a_4)$ og $Q = (q_1|q_2|q_3|q_4)$ hvor Q er den matrix fundet i QR faktorisering i (a). Vi betragter baserne $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ og $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ for $\mathbb{R}^4$
Vi viser nu at $P_{Q\leftarrow A} = R$

Da $\mathcal{A}$ og $\mathcal{Q}$ udspænder samme rum, vil vi kunne udtrykke enhver vektor x som koordinater i både $\mathcal{A}$ og $\mathcal{Q}$. Vi skriver det $[x]_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}x, [x]_{\mathcal{Q}} = Qx$ for x udtrykt ved hhv. $\mathcal{A}$ og $\mathcal{Q}$. Da vi så har $\mathcal{A} = QR$ kan vi skrive $\mathcal{A}x = QRx$. Vi ser nu at Rx giver en ny vektor, som vi kalder x' og opskriver $\mathcal{A}x = Qx'$. Vi ser vi nu har to sæt koordinater udtrykt ved A og Q, og at du kan gå fra x til x' ved at sige $x' = Rx$. Derfor vil en vektor udtrykt ved $\mathcal{Q}$ være $R \cdot [x]_{\mathcal{A}} = [x]_{\mathcal{Q}}$

2.4 d

Vi bestemmer nu tallene $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ så vi har $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = q_1 + q_2 + q_3 - \lambda_4 q_4$
Da begge sider af lighedstegnet er lineære kombinationer af A og Q. kan vi opskrive de to som koordinater:

$$[x]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \qquad [x]_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix}$$

Vi har så fra sidste opgave at $R[x]_{\mathcal{A}} = [x]_{\mathcal{Q}}$. Vi genkender her formen $Ax = b$ fra et lineært system, og opstiller $[R|[x]_{\mathcal{Q}}]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 10 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_3 + 1r_4 \to r_3 \\ r_2 - 2r_4 \to r_2 \\ r_1 - 3r_4 \to r_1 \\ \frac{1}{15}r_3 \to r_3 \\ \frac{1}{5}r_2 \to r_2 \\ \frac{1}{5}r_1 \to r_1 \\ r_1 - 2r_3 \to r_1 \\ r_1 - 1r_2 \to r_1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5}\lambda_4 + \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{15}\lambda_4 + \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_4 \end{array}\right)$$

Og vi opstiller derfor løsningsmængden

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{5}\lambda_4 + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15}\lambda_4 + \frac{1}{15} \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

3 Opgave 3

En computers regnekraft kan måles i flops, FLoating-point Operations Per Second. Vi vil benytte lineær algebra til at beskrive hvordan supercomputeres regnekraft har udviklet sig med tiden. Vi opskriver følgende historisk data for superkomputere. Derefter opskriver vi en tabel med flops(y) over tid, samt $\ln y$.

År	Supercomputer	FLOPS
2008	IBM Roadrunner	$1.026 \cdot 10^{15}$
2009	Cray Jaguar	$1.759 \cdot 10^{15}$
2010	Tianhe-IA	$2.566 \cdot 10^{15}$
2011	Fujitsu K computer	$10.51 \cdot 10^{15}$
2012	IBM Sequoia	$16.32 \cdot 10^{15}$
2013	NUDT Tianhe-2	$33.86 \cdot 10^{15}$
2016	Sunway TaihuLight	$93.00 \cdot 10^{15}$
2018	IBM Summit	$122.3 \cdot 10^{15}$

t	y	ln y
2008	$1.026 \cdot 10^{15}$	34.564
2009	$1.759 \cdot 10^{15}$	35.104
2010	$2.566 \cdot 10^{15}$	35.481
2011	$10.51 \cdot 10^{15}$	36.891
2012	$16.32 \cdot 10^{15}$	37.331
2013	$33.86 \cdot 10^{15}$	38.061
2016	$93.00 \cdot 10^{15}$	39.071
2018	$122.3 \cdot 10^{15}$	39.345

Det giver os data der ligner en eksponentiel kurve på y-aksen og punkter der næsten ligger på linje på $\ln y$ aksen.

3.1 a

Vi vil nu benytter mindste kvadraters metode, til at bestemme forskriften for den bedste rette linie, $\ln y \approx at + b$ gennem punkterne $(t, \ln y)$.

Hvad vi vil gøre er at finde konstanter a, b og derved en funktion: $at + b = \ln y$ og opstiller et ligningssystem $Ax = y$
Da der ikke findes en ret linie gennem alle punkter $(t, \ln y)$ derfor er liningssystemet $Ax = b$ ikke konsistent. Vi vil derfor finde en vektor $\bar{x}$ der gør størrelsen $||A\bar{x} = b||$ mindst muligt. Processen der nu benyttes til at finde ligningen kaldes "mindste kvadraters metode"eller lineær regression.
Før vi går helt igang, vil vi gøre det nemmere for os selv ved at bytte t ud med t' hvor $t' = t - 2008$. Dette giver os nogle lidt mindre tal længere nede, og gør det derfor mere overskueligt. Formlen vi regner er nu $a(t - 2008) + b = \bar{y}$
Vi har fra undervisningen at der findes følgende formel for at finde $\bar{x}$:

$$(A^T A)^{-1} A^T b = \bar{x}$$

Vi skriver først A og A^T op.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 34.564 \\ 35.104 \\ 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \end{pmatrix}$$

Vi bruger en matrixudregner til at regne produktet $(A^T A)$

$$(A^T A) = \begin{pmatrix} 219 & 33 \\ 33 & 8 \end{pmatrix}$$

Og tager det inverse af det ved at bruge `COMPUTATION` fra side 78 i bogen. Vi sætter $[(A^T A)|I_2] \rightsquigarrow [I_n|(A^T A)^{-1}]$ og får:

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{663} & -\frac{11}{221} \\ -\frac{11}{221} & \frac{73}{221} \end{pmatrix}$$

Vi er nu ude i nogle wicked brøker, og sætter derfor pris på vore datalogiske forgængere der har lavet de værktøjer. Efter en kort bøn til vor frelser Dr. Richard Stallman, udregner vi nu $(A^T A)^{-1} A^T$

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{221} & -\frac{25}{663} & -\frac{1}{39} & -\frac{3}{221} & -\frac{1}{663} & \frac{7}{663} & \frac{31}{663} & \frac{47}{663} \\ \frac{73}{221} & \frac{62}{221} & \frac{3}{13} & \frac{40}{221} & \frac{29}{221} & \frac{18}{221} & -\frac{15}{221} & -\frac{37}{221} \end{pmatrix}$$

Vi tørrer svedet af pandebåndet og priser os lykkelig over næsten at være færdig. Med nyfunden respekt for matematikere før computere, opstiller vi $(A^T A)^{-1} A^T b$

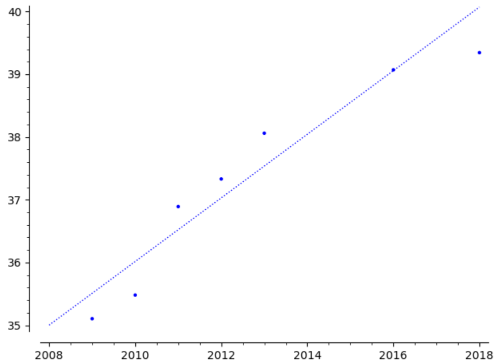
$$\begin{pmatrix} 0.506944193061840 \\ 34.8898552036199 \end{pmatrix} = \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.507 \\ 34.889 \end{pmatrix}$$

Vi opstiller derfor funktionen $\bar{y} = 0.507(t - 2008) + 34.889$. Set afbilledet på Figur 1

3.2 b

Vi skal nu begrunde at følgende forskrift tilnærmelsesvist gælder for $y = y(t)$:

$$y = y(t) \approx 1.42 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.507(t-2008)}$$



Figur 1: Plottet $\bar{y} = 0.507t' - 34.889$ samt de virkelige værdier

Hvad vi fandt tidligere var en funktion der udregnede $\ln y$. Vi kan så sige

$$\ln y = 0.507(t - 2008) + 34.889 \leftrightarrow y = e^{0.507(t-2008)+34.889}$$

Og grundet potensreglen $a^{a+b} = a^a \cdot a^b$ siger vi

$$y = e^{34.889} \cdot e^{0.507(t-2008)} = 1.42 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.507(t-2008)}$$

Og vi ser så hvordan vi kommer frem til tilnærmelsen.

3.3 c

Vi bruger nu tilnærmelsen fra (b) til at regne hvor mange flops verdens bedste computer kunne udregne i 2000 og vil kunne i 2025. Hvis da vores udregning holder stik.

$$y(2000) = 2.459 \cdot 10^{13}$$

$$y(2025) = 7.861 \cdot 10^{18}$$

Da det faktiske tal for FLOPS dengang var $7.226 \cdot 10^{12}$ ser vi at vores formel har en hvis mængde upræcision.