Linalg

Påbøl

25. april 2019

Kapitel 1

Linalg Noter Uge 1

1.1 Motivation

Hvorfor? Google bruger lineær algebra. Det er altid de første forslag der er de bedste. Google rangordner siderne via lineær algebra.

Eksempel 1.1. Hvis vi har grafen:

1 Refererer til 2,3,4

2 Refererer til 3,4

3 Refererer til 1

4 Refererer til side 1 og 3

Det kan repræsenteres på nabomatricen A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eller Nogle gange linkmatricen(Normaliseret)

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Vi tænker tilbage på anders and. Der var de gode udfordringer med bananer, æbler og kokosnødder

Eksempel 1.2. Vi har ligningssystemet $2x_1 + 3x_2 = 7$ og $5x_1 2x_2 = 1$
Vi skriver det op i en totalmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix} r_2 - r_1 \rightarrow r_2 \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 0 & -11 & -35 \end{bmatrix} \frac{-1}{11} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} r_1 - (-15) r_2 \rightarrow r_1$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi har nu $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Vi bruger processen fra 1.2 til at løse ligningssystemer. Vi har tre Elementære Række Operationer ERO:

1. replacement: At lægge et multiplum af en række til en anden række

2. interchange: At bytte om på rækker

3. scale: At skalere rækken som man ville en vektor

Har du løst et ligningssystem og har du en række med 0 i coefficienterne og ikke-nul i svar vektoren er ligninssystemet *inconsistent*.

Har du et ligningssystem med en coefficient der ikke kan løses. Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Så er x_3 *Frie* variable og løsningssystemet kan skrives:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 + 10x_3 &= -7 + 10t \\ x_2 &= \quad 4 - 5x_3 &= \quad 4 - 5t \\ &= &= \quad x_3 t \end{aligned}$$

En matrix er på *Rækkeechelonform* Hvis du har kørt forward og backward reduction

1.2 Opgaver

Vi har fået udleveret følgende opgave:

1.2.1 1.1 - 11

løs følgende ligningssystem med gauss-elimination:
(S) =

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 & = 3 \\ 7x_1 + 10x_2 - 4x_3 & = 4 \end{cases} \tag{1.1}$$

Vi omdanner til totalmatrice matriceform:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & -4 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Løs med gauss-elimination: Vi opstiller følgende rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & -4 & 4 \end{bmatrix} r_2 - 2r_1 = r_2, r_3 \cdot 2, r_3 - 7r_1 \to r_3 \tag{1.3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} r_3 + r_2 \to r_3 \tag{1.4}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Så har vi den øvre triangel. Vi har derfor systemet:

$$S' = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ 1x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Vi sætter $x_3 = 1$
Vi sætter $x_2 = 1 - 3(1) = 1 - 3 = -2$
Vi sætter $2x_1 = -3(-2) - (-2) = 8$ $x_1 = 4$

1.3 Gauss-jordan elimination

Pivotelement Er "Ledende indgang"
Rækkeechelonform er en matrice der opfylder følgende krav

- Alle nulrækker findes i bunden af matricen
- Det første element forskelligt fra 0 findes til højre for pivot i rækken ovenfor

Når du har benyttet forward reduction så får du en matrix på rækkeechelonform. Der er mange mulige løsninger for et givent ligningssystem

Algoritme 1.1 (Forward reduction)**.** 1. Vælg den første søjle som ikke er nulsøjlen. Denne søjle kaldes pivotsøjle

2. Vælg et vilkårligt element $p \neq 0$ i nulsøjlen. Dette er pivotelementet
   Brug evt interchange for at få den søjle op i toppen
   Skaf derefter 0 i alle elementer under pivotelementet vha rækkeoperationer

3. Betragt nu submatricen under pivotrækken og gentag step 1

Når du har benyttet backward reduction får du en matrice på *Reduceret rækkeechelonform*. Der er kun en løsning for et ligningssystem

Algoritme 1.2 (Backward reduction)**.** Lad U være en matrix på rækkeechelonform. Vælg den pivotsøjle der står længst til højre i U

1. Gang pivotrækken igennem med et tal, så pivotværdien bliver 1.
   Skaf derefter 0 på alle pladser i pivotsøjlen over pivotelementet ved at bruge rækkeoperationer.

2. Gentag processen ovenfor hver pivotsøjle i U. Stop når der ikke er flere pivotsøjler.

Kapitel 2

Matricer

2.1 Hvad er en mxn matrix

En mxn matrix er et talskema med m rækker og n søjler:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rang Rangen af en matrix A er antallet af ikke-nul-rækker i en *echelonform* af A. Rangen betegnes rank A
Kendsgerninger

1. Rangen af en matrix ændres ikke ved elementære rækkeoperationer.
2. Lad U være en rækkeechelonform af A. Da er rank A lig antallet af pivotsøjler i U
3. Lad R være en reduceret rækkeechelonform af A. Da er rank A lig antallet af ledende 1-taller i R
4. Lad A være en mxn matrix, da er $rankA \leq min(m, n)$

Theorem 2.1. Rank og løsninger til ligningssystem Lad (S) Være et ligningssystem
Lad $M = [A|b]$ være en totalmatrix. Da gælder:

1. Hvis rank $A <$ rank M så har (S) Ingen løsninger
2. Hvis rank $A =$ rank $M = n$ så har (S) netop en løsning
3. Hvis rank $A =$ rank $M < n$ så har (S) uendeligt mange løsninger

Derfor siger vi

Theorem 2.2. Kvadratiske ligninssystemer Ethvert ligningssystem med n ligninger og n ubekendte hvis kefficientmatrix A har rang n har netop en løsning

2.2 Ny notation for ligningssystemer

Et ligningssystem skrives normalt på formen

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b1$$

Vi skriver det som $Ax = b$ hvor vi tænker på at koefficientmatricen A ganges med vektoren x og hvor b er højresiden skrevet som en vektor.
Vi skriver nu

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_1nx_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Vi vil nu løse ligningen

$$Ay = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi skriver op:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

og løser med gauss

2.3 Page rank, fortsat

Vi vil give hver side i webbet en score der fortæller hvor vigtig den er. Vi giver side k scoren x_k. Hvordan skal x_k udregnes
Vi har siderne: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 2$ Vi siger hver side nu har maximalt 1 point at give ud. Hvis side j indeholder et link til side k og N_j links i alt. Så øger vi scoren for side k med x_j/N_j. Vi tæller nu udgående links: $N = [3, 2, 1, 2]$