Lineær algebra Projekt B

Christian Jacobsen

May 17, 2019

1 Opgave 1

Vi betragter den lineære transformation

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 \end{pmatrix} \quad \text{For} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

1.1 A

Vi bestemmer matricen A som opfylder $T(x) = Ax$ for alle $x \in R^5$

Vi opstiller coefficientmatricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 B

Vi lader nu $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ være en vilkårlig ukendt vektor, og vil nu finde en x således at $Ax = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 & 2 & y_1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -1 & y_3 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$$

Swap rows r0 <-> r2
Add rows r1 + 1 * r0
Add rows r2 + -2 * r0
Add rows r3 + 1 * r0
Swap rows r3 <-> r1
Rescale row r1 * 1/2

Add rows r0 + 2 * r1
Add rows r1 + 1 * r2
Add rows r0 + 3 * r2
Add rows r2 + 1 * r3
Add rows r1 + 1/2 * r3
Add rows r0 + 1 * r3
Rescale row r3 * -1/3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 3, y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & y_1 + \frac{1}{2}, y_2 - y_3 + \frac{1}{2}, y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & y_1 + y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}, y_3 \end{pmatrix}$$

1.3 C

Vi er nu blevet bedt om at bestemme en basis for ker t. Vi finder alle de vektorer der opfylder $Ax = 0$ ved at opstille en totalmatrice og løse den

Vi har tidligere udregnet A^*, altså $Ax = y$, og hvis $y = 0$ så har vi følgende vektorer opfylder $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Og for at teste det så sætter vi $t = 1$ og udregner transformationen

$$T(-11, -4, -4, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-11) - 4 \cdot (-4) + 4 + 2 \\ 11 - 2 \cdot 4 - 4 + 1 \\ -11 + 2 \cdot 4 + 4 - 1 \\ 11 - 4 \cdot 4 + 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 D

Vi vil nu gøre rede for at enhver højreinvers til T er injektiv, Altså at enhver vektor x har en og kun en tilsvarende $T(x) = y$, og vice versa.

En højreinvers S til en transformation T kan defineres af $S(T(x)) = x$.
Det er et krav for at en funktion er injektiv at hvis $S(x_1) = S(x_2)$ så må det gælde at $x_1 = x_2$.

Hvis der fandtes en ikke-injektiv funktion S så ville det være muligt at have flere forskellige x således at $S(T(x_1)) = S(T(x_2))$ hvor $x_1 \neq x_2$, og derfor er S nød til at være injektiv

2 Opgave 2

Vi betragter følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ og } v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi får så oplyst at $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ og $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ begge er baser for underrummet U

2.1 A

Vi vil nu bestemme basisskift-matricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$

Den lange måde at omdanne et koordinat fra en base til en anden, er at finde vektoren $V_b = x_1 \cdot b_1 + \cdots + x_k \cdot b_k$. Vi genkender korrekt dette som et ligningssystem og opstiller nu en formel for at beskrive en vektor med en base $[B|u] \to [I_n|V_b]$.
Vi kan udføre denne process på flere koordinater af gangen, ved at samle dem til en matrixe $[B|u_1|u_2|u_3] \to [I_n|V_{1b}|V_{2b}|V_{3b}]$

Vi opstiller matricerne $B = [u_1|u_2|u_3], C = [v_1, v_2, v_3]$
Basisskiftmatricen kan findes ved at udtrykke alle koordinaterne v_1, v_2, v_3 ved basen B, og samle dem i en matrice. Baseret på forrige udregninger kan vi så sige $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ kan findes ved at bringe $[C|B]$ på reduceret rækkeechelonform

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Swap rows r3 <-> r0
Add rows r1 + -3 * r0
Add rows r2 + -4 * r0
Add rows r3 + 5 * r0
Rescale row r1 * -1/20
Add rows r2 + 31 * r1
Add rows r3 + -46 * r1
Add rows r0 + -8 * r1
Add rows r3 + 1 * r2
Add rows r1 + 4 * r2
Add rows r0 + -2 * r2
Rescale row r2 * -5
Rescale row r0 * -1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi fjerner nulrækken, og trækker de tre højre kolonner over til en 3x3 matrice, og opstiller

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -7 & -4 \\ -16 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2 B

Vi er nu blevet bedt om at finde basisskift matricen $P_{C \leftarrow B}$. Vi ved at den er den inverse af $P_{C \leftarrow B}$
Vi opstiller

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 C

Vi opstiller nogle koordinater udtrykt ved $\mathcal{C}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$

Vi vil gerne udtrykke dem i $\mathcal{B}$ og siger derfor $P_{C \leftarrow B} \cdot x = [x]_B$

Og får vektoren $\begin{pmatrix} -4\lambda + 9 \\ -7\lambda + 17 \\ 9\lambda - 21 \end{pmatrix}$

2.4 D

Vi vil nu bestemme samtlige vektorer i underrummet U som har formen (t, t, t, t) for et tal $t \in \mathbb{R}$

Vi ved at vi kan udtrykke en vektor $v \in \mathcal{U}$ som koordinater i B. Derfor kan vi skrive alle vektorer op i B ved at udregne $[B|t] \to [I_4|[t]_B]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & t \\ -1 & 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

```
Add rows r1 + 1 * r0
Add rows r2 + -1 * r0
Add rows r3 + -1 * r0
Swap rows r1 <-> r2
Add rows r2 + 3 * r1
Add rows r3 + 1 * r1
Add rows r0 + 1 * r1
Rescale row r2 * 1/5
Add rows r3 + -3 * r2
Add rows r1 + -2 * r2
Add rows r0 + -1 * r2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5}t \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{5}t \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{5}t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5}t \end{pmatrix}$$

Og vi ser nu at ligningssystemet er inconsistent, og at der derfor ingen løsning findes

3 Opgave 3

Vi har et spil som asteroids hvor vi gerne vil rykke rundt på et rumskib, som er bestemt ved to punkter $C = (c_1, C_2)$ og $S = (s_1, s_2)$

Ved spillets start er rumskibet placeret med $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$. Vi har at ved tryk på venstre eller højre pil, roteres rumskibet om sit centrum ed en vis vinkel θ mod eller med uret. Ved tryk på op, forskydes rumskibet efter vektoren $\vec{CS}$

Vi samler de fire tal c_1, c_2, s_1, s_2 som en vektor i R^4

3.1 A

Vi vil nu bestemme en matrice F som forskyder vektoren frem. Vi opstiller matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2 B

Vis at rotationsmatricerne L_θ og R_θ er rotationsmatricer som følger:

Vi opstiller så også en formel for S. Vi har fået udleveret at efter en transformation gælder det $\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$

Ud fra det kan vi se at $C + R_\theta \cdot \vec{CS} = S$

Vi ganger først $R\vec{CS}$ sammen og får

$$R \cdot \vec{CS} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot (s_1 - c_1) - \sin\theta \cdot (s_2 - c_2) \\ \sin\theta \cdot (s_1 - c_1) + \cos\theta (s_2 - c_2) \end{pmatrix}$$

Vi udvider så paranteserne

$$S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(\cos\theta) - c_1(\cos\theta) - s_2(\sin\theta) + c_2(\sin\theta) \\ s_1(\sin\theta) - c_1(\sin\theta) + s_2(\cos\theta) - c_2(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Nu har vi så næsten parametriseret matricen, vi summere nu ligningen

$$S = \begin{pmatrix} s_1(\cos\theta) & c_1 - c_1(\cos\theta) & -s_2(\sin\theta) & +c_2(\sin\theta) \\ s_1(\sin\theta) & -c1(\sin\theta) & +s_2(\cos\theta) & c_2 - c_2(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Den opmærksomme læser har nu spottet at vi næsten har opsat en ligning for den parametriserede S. Vi sætter op med coefficienterne(og omarrangerer efter den rækkefølge de skal passe i: $c\_1c\_2s\_1s\_2$)

$$S = \begin{bmatrix} 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Og hey. Det var 100% det vi skulle vise for S. Vi har derfor matricen

$$L_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Vi får så også at vide at $R_\theta = L_{-\theta}$. Vi husker også $cos_\theta = cos_{-\theta}$. Derfor har vi

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3.3 C

Vi har nu fået udleveret en hel række af operationer udført på rumskibet. For at nå frem til den endelige position, kan vi gange transformationsmatricerne sammen som følger:

```
In [1]: var("t")
        t = 25* (pi/180)
        F = matrix([[0,0,1,0],[0,0,0,1],[-1,0,2,0],[0,-1,0,2]])
        L = matrix([
            [1,0,0,0],
            [0,1,0,0],
            [1-cos(t), sin(t), cos(t), -sin(t)],
            [-sin(t), 1-cos(t), sin(t), cos(t)],
        ])
        R = matrix([
            [1,0,0,0],
            [0,1,0,0],
            [1-cos(t),-sin(t), cos(t), sin(t)],
            [sin(t), 1-cos(t), -sin(t), cos(t)]
        ])
        P = matrix(SR, [[0],[0],[0],[1]])

In [2]: P1 = F*R*F*R*F*F*L*P

In [3]: show(N(P1, digits=3)) # Print en numerisk approximation med 3 betydende cifre
```

```
[  -0.423]
[    3.72]
[0.000366]
[    4.62]
```

3.4 D

Vi vil nu forklare hvorfor $L_\theta^{72} = I_4$. Det gælder at θ er 25°, og $L_\theta^7 2$ er det samme som at rotere $\theta \cdot 72 = 1800$ grader. Kigger vi så på L_{1800} får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tænker vi over det så ser vi at en rotation på 1800 grader, er det samme som at dreje rundt om sig selv, 5 hele gange, og at det derfor giver mening at $\cos(1800) = 1$ og $\sin(1800) = 0$