KØBENHAVNS UNIVERSITET
INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Ekstraopgaver til Lineær Algebra i Datalogi

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)

Indhold

1 Opgaver **1**
Ligningsløsning, rækkeoperationer, rank og nullity 1
Baser, basisskift, span og lineær (u)afhængighed 4
Lineære transformationer 6
Ortogonalt komplement, ortogonal projektion og Gram–Schmidt 7
Determinanter 9
Egenværdier, egenvektorer og diagonalisering 10

2 Vejledende løsninger **12**

Kapitel 1

Opgaver

Ligningsløsning, rækkeoperationer, rank og nullity

Opgave X.1 (løsning på s. 12). Betragt ligningssystemet

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Lad $\mathbf{A}$ være koefficientmatricen, lad $\mathbf{b}$ være konstantsøjlen og lad $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$ være totalmatricen (eng. *the augmented matrix*) for ligningssystemet (S).

(a) Bestem den reducerede rækkeechelonform for totalmatricen $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$.

(b) Bestem samtlige løsninger til ligningssystemet (S).

Opgave X.2 (løsning på s. 13). Betragt den invertible matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skriv $\mathbf{A}^{-1}$ som et produkt af elementærmatricer (eng. *elementary matrices*).

(b) Skriv $\mathbf{A}$ som et produkt af elementærmatricer.

Opgave X.3 (løsning på s. 14). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$.

(b) Bestem rank $\mathbf{A}$ og nullity $\mathbf{A}$.

Opgave X.4 (løsning på s. 15). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den inverse til matricen **A**.

(b) Bestem en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ som opfylder $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Opgave X.5 (løsning på s. 16). Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0\,. \end{cases}$$

(a) Omform totalmatricen (eng. *the augmented matrix*) for ligningssystemet til en matrix på reduceret rækkeechelonform.

(b) Bestem samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave X.6 (løsning på s. 17). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den reducerede rækkeechelonform for **A**.

(b) Bestem rank **A** og nullity **A**.

Opgave X.7 (løsning på s. 18). Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 + ax_4 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Lad a være ukendt. Omform totalmatricen (eng. *the augmented matrix*) for ligningssystemet ved at bruge rækkeoperationerne $2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ og $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$.

Afgør endvidere om ligningssystemet har nogen løsninger for $a = 5$.

(b) Lad $a = 4$.

Omform totalmatricen til en matrix på reduceret rækkeechelonform.

Bestem derefter samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave X.8 (løsning på s. 19). Betragt ligningssystemet

$$
(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+6x_3} + 4x_4 = 10 \end{cases}
$$

Lad $\mathbf{A}$ være koefficientmatricen, lad $\mathbf{b}$ være konstantsøjlen og lad $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$ være totalmatricen (eng. *the augmented matrix*) for ligningssystemet (S).

(a) Bestem den reducerede rækkeechelonform for totalmatricen $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$.

(b) Bestem samtlige løsninger til ligningssystemet (S).

Baser, basisskift, span og lineær (u)afhængighed

Opgave X.9 (løsning på s. 20). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$ (søjlerummet for $\mathbf{A}$).

(b) Bestem en basis for $\operatorname{null}\mathbf{A}$ (nulrummet for $\mathbf{A}$).

Opgave X.10 (løsning på s. 21). Betragt følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses, at $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ og $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ begge er (ordnede) baser for et og samme underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestem basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, dvs. den matrix $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ som opfylder

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{for alle} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

(b) Skriv vektoren $\mathbf{x} = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$ som en linearkombination af vektorerne $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

Opgave X.11 (løsning på s. 22). Betragt i $\mathbb{R}^4$ følgende vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi betegner med $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ standardbasisvektorerne i $\mathbb{R}^4$. Det oplyses, at den reducerede række-echelonform for matricen $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{e}_1)$ er givet ved:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Skriv $\mathbf{e}_1$ som en linearkombination af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(b) Ligger $\mathbf{e}_2$ i $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$? Begrund svaret.

Opgave X.12 (løsning på s. 23). Det oplyses, at den reducerede rækkeechelonform for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{er givet ved} \qquad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en basis for $\operatorname{col} \mathbf{A}$ (søjlerummet for $\mathbf{A}$).

(b) Bestem en basis for $\operatorname{null} \mathbf{A}$ (nulrummet for $\mathbf{A}$).

Opgave X.13 (løsning på s. 24). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en basis for $\operatorname{col} \mathbf{A}$ (søjlerummet for $\mathbf{A}$).

(b) Bestem $\operatorname{null} \mathbf{A}$ (nulrummet for $\mathbf{A}$).

Lineære transformationer

Opgave X.14 (løsning på s. 25). Betragt den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den 2×3 matrix $\mathbf{A}$ som opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestem en basis for kernen af T.

Opgave X.15 (løsning på s. 26). Betragt de lineære transformationer $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ og $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem matricer $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ som opfylder hhv.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \\ T(\mathbf{y}) &= \mathbf{B}\mathbf{y} \quad \text{og} \\ (T \circ S)(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestem en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ som opfylder $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave X.16 (løsning på s. 27). Betragt den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den 3×2 matrix $\mathbf{A}$ som opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Afgør om T er injektiv (eng. *one-to-one*).
Afgør om T er surjektiv (eng. *onto*).
(*Vink:* Svarene kan aflæses fra den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$.)

Ortogonalt komplement, ortogonal projektion og Gram–Schmidt

Opgave X.17 (løsning på s. 28). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\mathbf{A}$ er en ortogonal matrix og bestem den inverse til $\mathbf{A}$.

(b) Bestem determinanten af $\mathbf{A}$.

Opgave X.18 (løsning på s. 29). Betragt underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ af $\mathbb{R}^4$ hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en basis for $\mathcal{U}$.

(b) Bestem en basis for $\mathcal{U}^\perp$ (det ortogonale komplement til $\mathcal{U}$).

Opgave X.19 (løsning på s. 30). Det oplyses, at vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ givet ved

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige. Lad $\mathcal{U}$ være underrummet $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestem en ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

(b) Bestem den ortogonale projektion $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_3)$ af vektoren $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\mathcal{U}$.

Opgave X.20 (løsning på s. 31). Det oplyses, at vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^4$ givet ved

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige. Lad $\mathcal{U}$ være underrummet $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestem en ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

(b) Bestem den ortogonale projektion $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ af vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\mathcal{U}$.

Opgave X.21 (løsning på s. 32). Betragt underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ af $\mathbb{R}^3$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem projektionsmatricen for $\mathcal{U}$, altså den 3×3 matrix $\mathbf{P}$ som opfylder $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestem en basis for $\mathcal{U}^{\perp}$ (det ortogonale komplement til $\mathcal{U}$).

Opgave X.22 (løsning på s. 33). Betragt vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

samt underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestem projektionsmatricen for $\mathcal{U}$, altså den 3×3 matrix $\mathbf{P}$ som opfylder $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(*Vink:* Vis først, at vektorerne $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er ortogonale. Det kan desuden være en regneteknisk fordel at sætte $1/3$ eller $1/9$ uden for parentes.)

(b) Skriv vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som en sum $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ hvor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{y} \in \mathcal{U}^{\perp}$.

Opgave X.23 (løsning på s. 34). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\mathbf{A}$ er en ortogonal matrix og bestem den inverse til $\mathbf{A}$.

(b) Bestem determinanten af $\mathbf{A}$.

Determinanter

Opgave X.24 (løsning på s. 35). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem determinanten af $\mathbf{A}$.

(b) Bestem determinanten af $2\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$.

Opgave X.25 (løsning på s. 36). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses, at $\det \mathbf{A} = 8$.

(a) Bestem determinanten af den inverse matrix til $\mathbf{A}$.

Lad $\mathbf{B}$ være den matrix der fremkommer ved at udføre følgende tre rækkeoperationer på $\mathbf{A}$:

$$-5\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_4 \,.$$

(b) Bestem determinanten af $\mathbf{B}$.

Opgave X.26 (løsning på s. 37). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & 1001 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at determinanten af $\mathbf{A}$ er lig med -30.

(b) Betragt ligningen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Brug Cramer's formler til at bestemme x_4.

Egenværdier, egenvektorer og diagonalisering

Opgave X.27 (løsning på s. 38). Betragt følgende matrix og vektorer:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer for $\mathbf{A}$, og bestem de tilhørende egenværdier.

Det oplyses, at matricen $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ er invertibel med invers

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem matricen $\mathbf{A}^7$.

Opgave X.28 (løsning på s. 39). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem samtlige (reelle eller komplekse) egenværdier for $\mathbf{A}$.

(b) Bestem en egenvektor for $\mathbf{A}$ (efter eget valg).

Opgave X.29 (løsning på s. 40). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem egenværdierne for $\mathbf{A}$.

(b) Diagonalisér $\mathbf{A}$, dvs. bestem en invertibel matrix $\mathbf{P}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{D}$ så $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Opgave X.30 (løsning på s. 41). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor for $\mathbf{A}$ og bestem den tilhørende egenværdi.

(b) Det oplyses, at $\mathbf{A}$ har $\lambda = 4$ som egenværdi. Bestem en basis for det tilhørende egenrum E_λ.

Opgave X.31 (løsning på s. 42). Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Det oplyses, at $\lambda = 0$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$.

Bestem alle egenvektorer hørende til denne egenværdi.

(b) Bestem det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ og find derefter samtlige egenværdier for $\mathbf{A}$.

Opgave X.32 (løsning på s. 43). Betragt følgende matrix og vektorer:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer for $\mathbf{A}$, og bestem de tilhørende egenværdier.

Det oplyses, at matricen $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ er invertibel med invers

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem matricen $\mathbf{A}^7$.

Kapitel 2

Vejledende løsninger

Løsning af Opgave X.1. Vi har

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

(a) Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{M}^*$ for $\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right) &\xrightarrow{\substack{4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 2 & 16 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 2 & 16 & 18 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -10\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -32 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{-\frac{1}{8}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\substack{3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) = \mathbf{M}^*.
\end{aligned}$$

(b) Fra matricen $\mathbf{M}^*$ aflæses, at samtlige løsninger til ligningssystemet (S) er givet ved:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Løsning af Opgave X.2. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) De fire elementære rækkeoperationer

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

viser, at man (fx) har

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A} = \mathbf{I}_3\,.$$

Derfor gælder

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Det følger af ovenstående, at

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Løsning af Opgave X.3. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*.$$

(b) Den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$ har $r = 2$ ikke-nul rækker, og dermed er

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} = r = 2\,.$$

Matricen $\mathbf{A}$ har $n = 3$ søjler, og dermed er

$$\operatorname{nullity} \mathbf{A} = n - r = 3 - 2 = 1\,.$$

Løsning af Opgave X.4. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Rækkeoperationerne

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}_3] = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
&\xrightarrow[\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3]{-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\mathbf{r}_1\leftrightarrow\mathbf{r}_2}
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3]{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2]{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

viser, at

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi har

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Løsning af Opgave X.5. Totalmatricen for ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{er} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

(a) Vha. rækkeoperationer bestemmes den reducerede rækkeechelonform for totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{6\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

(b) Løsningerne til ligningssystemet aflæses fra del (a) til:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -23 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Løsning af Opgave X.6. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$ findes ved at udføre rækkeoperationerne:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 1 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Da der er 2 ledende 1-taller i den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$, så gælder:

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2\,.$$

Da matricen $\mathbf{A}$ har 5 søjler gælder $\operatorname{rank}\mathbf{A} + \operatorname{nullity}\mathbf{A} = 5$. Heraf fås:

$$\operatorname{nullity}\mathbf{A} = 5 - 2 = 3\,.$$

Løsning af Opgave X.7. (a) Vha. de angivne rækkeoperationer omformes totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3]{2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & 1 \end{array}\right).$$

Hvis $a = 5$ er tredje række en nulrække i koefficientmatricen, men ikke i totalmatricen, så der er ikke nogen løsninger til ligningssytstemet for $a = 5$.

(b) Vha. de angivne rækkeoperationer omformes totalmatricen videre for $a = 4$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3]{2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\mathbf{r}_j\to\mathbf{r}_j\ (j=1,2,3)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{-10\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Løsningerne til ligningssystemet aflæses derfor til:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Løsning af Opgave X.8. Vi har

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{M} = [\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

(a) Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{M}^*$ for $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 2 & 18 & 22 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 18 & 22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[10\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & -22 & 22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{22}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2]{-3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \mathbf{M}^*.$$

(b) Fra matricen $\mathbf{M}^*$ aflæses, at samtlige løsninger til ligningssystemet (S) er givet ved:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Løsning af Opgave X.9. Vi benytter først rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3 \\ -\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*.$$

(a) Pivot 1-tallerne i $\mathbf{A}^*$ står i første og anden søjle, og de tilsvarende søjler i den oprindelige matrix $\mathbf{A}$ udgør derfor en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$. Dvs.

$$\text{En basis for } \operatorname{col}\mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Fra den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$ aflæses, at ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi konkluderer derfor, at

$$\text{En basis for } \operatorname{null}\mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.10. Vi har givet vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ fra $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ til $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er givet ved

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \big([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} \,\big|\, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} \big).$$

For at bestemme koordinaterne $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ til vektoren $\mathbf{v}_1$ i basen $\mathcal{B}$ skal vi løse ligningen:

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{dvs.} \qquad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ved at opskrive denne ligning på matrixform og udføre rækkeoperationerne:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[5\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2]{-2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

finder man $x_1 = -1$ og $x_2 = 1$, og dermed er $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tilsvarende viser operationerne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[5\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2]{-2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

at $[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vi har hermed fundet

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vektoren $\mathbf{x} = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$ har i basen $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ koordinaterne $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vi har nu

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

og dermed gælder $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + 11\mathbf{u}_2$.

Løsning af Opgave X.11. (a) Den reducerede rækkeechelonform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

for matricen $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{e}_1)$ viser, at $-t\mathbf{v}_1 + 2t\mathbf{v}_2 - t\mathbf{v}_3 + t\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Med $t = 1$ fås:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 .$$

(b) Vektoren $\mathbf{e}_2$ ligger ikke i $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ fordi sættet $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2\}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$. Dette er tilfældet netop hvis matricen $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{e}_2)$ ved rækkeoperationer kan omformes til enhedsmatricen. Følgende udregninger viser, at dette faktisk er tilfældet:

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4.$$

Løsning af Opgave X.12. Det oplyses, at den reducerede rækkeechelonform for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{er givet ved} \qquad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Pivot 1-tallerne i den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ står i første og tredje søjle, og de tilsvarende søjler i den oprindelige matrix $\mathbf{A}$ udgør derfor en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$. Dvs.

$$\text{En basis for } \operatorname{col}\mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Fra den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ aflæses, at ligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Vi konkluderer derfor, at

$$\text{En basis for } \operatorname{null}\mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.13. Vi benytter først rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4]{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4]{-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{-3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*.$$

(a) Pivot 1-tallerne i $\mathbf{A}^*$ står i første, anden og tredje søjle, og de tilsvarende søjler – som i dette tilfælde er alle søjlerne – i den oprindelige matrix $\mathbf{A}$ udgør derfor en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$. Dvs.

$$\text{En basis for } \operatorname{col}\mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Fra den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$ aflæses, at ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har nulløsningen. Vi konkluderer derfor, at

$$\operatorname{null}\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.14. (a) Da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

er matricen **A** givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Idet $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ gælder $\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A}$. Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \xrightarrow{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{1}{3}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*. \end{aligned}$$

Fra den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$ aflæses, at ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi konkluderer derfor, at

$$\text{En basis for } \ker T = \operatorname{null} \mathbf{A} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.15. (a) For den lineære transformation S har vi:

$$S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\qquad\text{dvs.}\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

For den lineære transformation T har vi:

$$T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-y_2\\y_1+y_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\qquad\text{dvs.}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

For den lineære transformation $T\circ S$ har vi $(T\circ S)(\mathbf{x})=T(S(\mathbf{x}))=T(\mathbf{A}\mathbf{x})=\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$, dvs.

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

(b) For at bestemme en vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ som opfylder $(T\circ S)(\mathbf{x})=\mathbf{C}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ skal vi finde en løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{C}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\qquad\text{dvs.}\qquad\begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer findes den reducerede rækkeechelonform for totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}0&1&2\\2&1&4\\1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\mathbf{r}_1\ \leftrightarrow\ \mathbf{r}_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\2&1&4\\0&1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right).$$

Heraf aflæses, at $x_1=1$ og $x_2=2$ er (eneste) løsning, så

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Løsning af Opgave X.16. (a) Da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{er} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi finder den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\ ]{\substack{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\ ]{\substack{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\ ]{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*. \end{aligned}$$

Det fremgår, at $\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$, så T *er* injektiv.

Det fremgår også, at $\operatorname{ran} T = \operatorname{col} \mathbf{A}$ har dimension 2, så T er *ikke* surjektiv (der gælder altså ikke, at $\operatorname{ran} T = \mathbb{R}^3$).

Løsning af Opgave X.17. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Matricen **A** er kvadratisk og dens søjler udgør et ortonormalt sæt – derfor er **A** en ortogonal matrix. Der gælder dermed

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Rækkeoperationerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_4 \leftrightarrow \mathbf{r}_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

viser, at $1 = \det \mathbf{I} = (-1)^5 \det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$, og dermed gælder

$$\det \mathbf{A} = -1\,.$$

Løsning af Opgave X.18. Vi betegner med $\mathbf{A}$ matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

og har da $\mathcal{U} = \operatorname{col}\mathbf{A}$ samt $\mathcal{U}^{\perp} = (\operatorname{col}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

(a) Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{A}^*$ for $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_4+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_4+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_4+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_1\leftrightarrow\mathbf{r}_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*.$$

Pivot 1-tallerne i $\mathbf{A}^*$ står i første og anden søjle, og de tilsvarende søjler i den oprindelige matrix $\mathbf{A}$ udgør derfor en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$. Vi konkluderer:

$$\text{En basis for } \mathcal{U} = \operatorname{col}\mathbf{A} \text{ er} \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

(b) Vi benytter rækkeoperationer til at bestemme den reducerede rækkeechelonform $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^*$ for $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ -2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3 \\ -\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^*.$$

Heraf aflæses:

$$\text{En basis for } \mathcal{U}^{\perp} = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \text{ er} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.19. Vi har givet de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Gram-Schmidt proceduren anvendt på $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ giver, at vektorerne

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\|}$$

udgør en ortonormal basis for underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Idet $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$ er den første vektor i den ortonormale basis givet ved:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dernæst beregnes

$$\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = 5,$$

hviket giver

$$\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1 \ = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Idet $\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 12^2} = 13$ er den anden vektor i den ortonormale basis givet ved:

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\|} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Den ortogonale projektion af $\mathbf{e}_3$ på $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ er givet ved

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_3) \ = \ (\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 \ = \ 0 + \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \ = \ \frac{12}{169} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Løsning af Opgave X.20. Vi har givet de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Gram–Schmidt proceduren anvendt på $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ giver, at vektorerne

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\|}$$

udgør en ortonormal basis for $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Idet $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2$ er den første vektor i den ortonormale basis givet ved:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dernæst beregnes

$$\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2,$$

hvilket giver

$$\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Idet $\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2} = 6$ er den anden vektor i den ortonormale basis givet ved:

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{q}_1\|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Da $\mathbf{v} \bullet \mathbf{q}_1 = 0$ og $\mathbf{v} \bullet \mathbf{q}_2 = 1$ er den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ givet ved

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \;=\; (\mathbf{v} \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 \;=\; 0\mathbf{q}_1 + 1\mathbf{q}_2 \;=\; \mathbf{q}_2 \;=\; \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Løsning af Opgave X.21. Vi har givet underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ af $\mathbb{R}^3$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Vi beregner

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 10.$$

Projektionsmatricen for $\mathcal{U}$ er derfor givet ved

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T}}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi betegner med $\mathbf{A}$ matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathcal{U} = \operatorname{col}\mathbf{A}$ gælder $\mathcal{U}^\perp = (\operatorname{col}\mathbf{A})^\perp = \operatorname{null}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Matricen

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

er allerede på reduceret rækkeechelonform, og vi aflæser, at løsningerne til ligningen $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er givet ved

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed gælder:

$$\text{En basis for } \mathcal{U}^\perp = \operatorname{null}\mathbf{A}^\mathsf{T} \text{ er } \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning af Opgave X.22. Vi har givet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ hvor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Vektorerne $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er ortogonale, da $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = 0$. Derfor vil de normerede vektorer

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

udgøre en ortonormal basis for $\mathcal{U}$. Vi sætter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen er så givet ved

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Som $\mathbf{x}$ skal vi bruge

$$\mathbf{x} = \operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (= \mathbf{u}_1),$$

og som $\mathbf{y}$ skal vi bruge

$$\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsning af Opgave X.23. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Matricen $\mathbf{A}$ er kvadratisk og dens søjler udgør et ortonormalt sæt – derfor er $\mathbf{A}$ en ortogonal matrix. Der gælder dermed

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Rækkeoperationerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 \\ -\mathbf{r}_5 \to \mathbf{r}_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

viser, at $1 = \det \mathbf{I} = (-1)^4 \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}$, og dermed gælder

$$\det \mathbf{A} = 1\,.$$

Løsning af Opgave X.24. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Ved udvikling af determinanten efter første søjle fås:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-12) + (-1) \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -1\,. \end{aligned}$$

(b) Regneregler for determinanten giver:

$$\det(2\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}) = 2^3(\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}})(\det \mathbf{A}) = 8(\det \mathbf{A})^2 = 8 \cdot (-1)^2 = 8\,.$$

Løsning af Opgave X.25. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Da $\det \mathbf{A} = 8$ (oplyses) gælder $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = 1/\det \mathbf{A} = 1/8$.

(b) Sammenhængen mellem rækkeoperationer og determinanter er som følger:

- Ved at udføre $-5\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ ændres determinanten med en faktor 1 (dvs. ændres ikke).
- Ved at udføre $\frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ ændres determinanten med en faktor $\frac{1}{2}$.
- Ved at udføre $\mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_4$ ændres determinanten med en faktor -1.

Derfor gælder:

$$\det \mathbf{B} = (-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \det \mathbf{A} = (-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = -4.$$

(Vi bemærker, at det faktisk ikke er vigtigt at vide hvordan matricen $\mathbf{A}$ ser ud.)

Løsning af Opgave X.26. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & 1001 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinanten udregnes ved at opløse efter tredje søjle:

$$\det \mathbf{A} = 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 0 = 3 \cdot (-3 - 6 - 1) = -30\,.$$

(b) Cramer's formel giver:

$$x_4 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 90 \end{pmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot 90 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 9\,,$$

idet determinanten af 4×4-matricen beregnes ved at opløse efter 4. søjle.

Løsning af Opgave X.27. Vi har givet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$ er $\mathbf{v}_1$ egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 0$.

Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ er $\mathbf{v}_2$ egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_2 = 1$.

Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$ er $\mathbf{v}_3$ egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_3 = 2$.

(b) Matricen $\mathbf{A}$ har tre forskellige egenværdier og derfor vil $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ diagonalisere $\mathbf{A}$. Vi har altså $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, hvor

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^7 = \mathbf{P}\mathbf{D}^7\mathbf{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 128 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 129 & -130 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -126 & 124 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Løsning af Opgave X.28. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ for matricen $\mathbf{A}$ er givet ved

$$p(\lambda) \;=\; \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \;=\; \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \;=\; (\lambda-2)(\lambda-2) - (-1)\cdot 1 \;=\; \lambda^2 - 4\lambda + 5\,.$$

Diskriminanten for $p(\lambda)$ er $D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -4$ og $p(\lambda)$ har derfor de komplekse rødder

$$\lambda_1 \;=\; \frac{-(-4) - \sqrt{-4}}{2} = 2 - i \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{-(-4) + \sqrt{-4}}{2} = 2 + i\,.$$

Egenværdierne for $\mathbf{A}$ er altså $\lambda_1 = 2 - i$ og $\lambda_2 = 2 + i$.

(b) Følgende rækkeoperationer på matricen $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\;-i\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1\;} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\;-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2\;} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at (fx) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektor for $\mathbf{A}$ (hørende til egenværdien $\lambda_1 = 2 - i$).

Løsning af Opgave X.29. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ for matricen $\mathbf{A}$ er givet ved

$$p(\lambda) \;=\; \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) \;=\; \begin{vmatrix} \lambda+5 & 4 \\ -8 & \lambda-7 \end{vmatrix} \;=\; (\lambda+5)(\lambda-7)-(-8)\cdot 4 \;=\; \lambda^2-2\lambda-3\,.$$

Diskriminanten for $p(\lambda)$ er $D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16$ og $p(\lambda)$ har derfor rødderne

$$\lambda_1 \;=\; \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2} \;=\; -1 \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2} \;=\; 3\,.$$

Egenværdierne for $\mathbf{A}$ er altså $\lambda_1=-1$ og $\lambda_2=3$.

(b) Følgende rækkeoperationer på matricen $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en basis for egenrummet $E_{\lambda_1}=\text{null}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})$.

Følgende rækkeoperationer på matricen $\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8}\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ er en basis for egenrummet $E_{\lambda_2}=\text{null}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})$. Matricerne

$$\mathbf{P}=\big(\mathbf{v}_1\big|\mathbf{v}_2\big)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

opfylder derfor $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}$.

Løsning af Opgave X.30. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Vi har

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 8\mathbf{v}.$$

Det viser, at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ og at den tilhørende egenværdi er $\lambda = 8$.

(b) Vi har

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorerne $\mathbf{x}$ findes som løsninger til ligningssystemet $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvis totalmatrix er

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Denne totalmatrix bringes på reduceret rækkeechelonform vha. følgende rækkeoprationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi aflæser, at løsningen til ligningssystemet $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er givet ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Det betyder, at en basis for egenrummet E_4 er givet ved

$$\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Løsning af Opgave X.31. Vi har givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) For at bestemme egenvektorerne hørende til $\lambda = 0$ opskrives totalmatricen

$$[\mathbf{A} - 0\mathbf{I}|\mathbf{0}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5-0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Denne omformes til reduceret rækkeechelonform, som er

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Heraf aflæses egenvektorerne som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad t, s \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Det karakteristiske polynomium er:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-5 & -5 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} \lambda-5 & -5 \\ -2 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda((\lambda-5)(\lambda-2)-10) \\ &= \lambda(\lambda^2-7\lambda) \\ &= \lambda^2(\lambda-7). \end{aligned}$$

Heraf følger det, at egenværdierne er $\lambda = 0$ (en dobbeltrod) og $\lambda = 7$.

Løsning af Opgave X.32. Vi har givet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$ er $\mathbf{v}_1$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = -1$.

Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_2$ er $\mathbf{v}_2$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_2 = 0$.

Idet $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = 1\mathbf{v}_3$ er $\mathbf{v}_3$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_3 = 1$.

(b) Matricen $\mathbf{A}$ har tre forskellige egenværdier og derfor vil $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ diagonalisere $\mathbf{A}$. Vi har altså $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, hvor

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er $\mathbf{D}^7 = \mathbf{D}$ og det følger at

$$\mathbf{A}^7 = \mathbf{P}\mathbf{D}^7\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}.$$