Lineær algebra Projekt B

Christian Jacobsen

May 17, 2019

1 Opgave 1

Vi betragter den lineære transformation

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 \end{pmatrix} \quad \text{For} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

1.1 A

Vi bestemmer matricen A som opfylder $T(x) = Ax$ for alle $x \in R^5$

Vi opstiller coefficientmatricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 B

Vi lader nu $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ være en vilkårlig ukendt vektor, og vil nu finde en x således at $Ax = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 & 2 & y_1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -1 & y_3 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$$

Swap rows r0 <-> r2
Add rows r1 + 1 * r0
Add rows r2 + -2 * r0
Add rows r3 + 1 * r0
Swap rows r3 <-> r1
Rescale row r1 * 1/2

Add rows r0 + 2 * r1
Add rows r1 + 1 * r2
Add rows r0 + 3 * r2
Add rows r2 + 1 * r3
Add rows r1 + 1/2 * r3
Add rows r0 + 1 * r3
Rescale row r3 * -1/3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 3, y_1 + y_2 - 3, y_3 + y_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & y_1 + \frac{1}{2}, y_2 - y_3 + \frac{1}{2}, y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & y_1 + y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}, y_2 - \frac{1}{3}, y_3 \end{pmatrix}$$

1.3 C

Vi er nu blevet bedt om at bestemme en basis for ker t. Vi finder alle de vektorer der opfylder $Ax = 0$ ved at opstille en totalmatrice og løse den

Vi har tidligere udregnet A^*, altså $Ax = y$, og hvis $y = 0$ så har vi følgende vektorer opfylder $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Og for at teste det så sætter vi $t = 1$ og udregner transformationen

$$T(-11, -4, -4, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-11) - 4 \cdot (-4) + 4 + 2 \\ 11 - 2 \cdot 4 - 4 + 1 \\ -11 + 2 \cdot 4 + 4 - 1 \\ 11 - 4 \cdot 4 + 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 D

Vi vil nu gøre rede for at enhver højreinvers til T er injektiv, Altså at enhver vektor x har en og kun en tilsvarende $T(x) = y$, og vice versa.

En højreinvers S til en transformation T kan defineres af $S(T(x)) = x$.
Det er et krav for at en funktion er injektiv at hvis $S(x_1) = S(x_2)$ så må det gælde at $x_1 = x_2$.

Hvis der fandtes en ikke-injektiv funktion S så ville det være muligt at have flere forskellige x således at $S(T(x_1)) = S(T(x_2))$ hvor $x_1 \neq x_2$, og derfor er S nød til at være injektiv