:

Afleveres:

Lærer:

Problemformulering: *text*

Christian Påbøl

20. maj 2019

Indhold

1 1

Lineære systemer

1.1 1.1 - At løse lineære ligninssystemer

Lineært system:

$$a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

Definition 1.1: Inconsistent, consistent, solving

Hvis et lineært system (S) *ikke har nogen løsning, kalder vi* (S) *inkonsistent. Hvis* (S) *har en eller flere løsninger kalder vi det konsistent. At løse* (S) *betyder at finde løsningssættet til* (S) *eller at bedømme* (S) *som inkonsistent*

Example 1.1: Forward Elimination, Replacement

Vi kigger på det følgende system

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & E_1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 & E_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 & E_3 \end{cases}$$

Vi løser E_1 for den ledende ukendte x_1 som følger:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

Og den bliver substitueret ind i alle ligninger under E_1. Vi får som følger

$$(S)\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = +1 & E_1 \\ -4x_2 - 3x_3 = -2 & E_2 \\ +4x_2 + 8x_3 = +1 & E_3 \end{cases}$$

De to substitutioner har nu elimineret den ukendte x_1 fra elle ligninger under E_1.
Processen at "løse"ligninger vha. substitution kan komineres ind i en operation kaldet Replacement.
Det skrives sådan:
Ligning E_2 minus 2 gange E_1 $E_2 - 2E_1$

Definition 1.2: Ekvivalente lineære systemer

XTo lineære systemer $(S), (S)''$ er ekvivalente hvis $(S)''$ er resultatet af en eller flere elementære ligningsoperationer på (S) og vi skriver $(S) \sim (S)'$ for at vise ekvivalæns

Theorem 1.1: Fundamental egenskab af ekvivalente ligningssystemer

vis (S) og $(S)'$ er to ekvivalente lineære systemer så har de præcis samme løsningssæt.

Det er nemt at vise at enhver EEOs handling på et lineært system ikke ændrer løsningen til det lineære system. Derfor, hvis $(S) \sim (S)'$, så er enhver løsning til (S) også en løsning til $(S)'$. Det bemærkes at der for hver EEO findes en invers EEO og derfor kan du finde tilbage til (S) fra $(S)'$ som følger

$$\begin{array}{cccccc} & \textbf{EEO} & \rightarrow & \textbf{Invers EEO} & \rightarrow (S) \\ (S) & E_i - mE_j \rightarrow E_i & \rightarrow (S)' & E_i + mE_j \rightarrow E_i & \rightarrow (S) \\ (S) & E_i \leftrightarrow E_j & \rightarrow (S)' & E_i \leftrightarrow E_j & \rightarrow (S) \\ (S) & cE_i \rightarrow E_i & \rightarrow (S)' & \frac{1}{c}E_i \rightarrow E_i & \rightarrow (S) \end{array}$$

Definition 1.3: Matrix, rækkevektor, kolonnevektor

Lad m og n være positive tal. En mxn vektor er en rektangulær array af $m \cdot n$ tal, arrangeret i m rækker og n kolonner. Tal i en matrix kaldes indgange.
En $mx1$ (m rækker en kolonne) kaldes en kolonnevektor

Matricer er noteret ved store bogstaver $A, B, C, \ldots M, N$ og vektorer $a, b, c, \ldots, u, v$

Definition 1.4: Rækkeekvivalenthed i matricer

To matricer M og M' kaldes rækkeekvivalente hvis der er en finit sekvens af elmentære rækkeoperationer der ændrer en matrix til den anden matrix. Vi skriver $M \sim M'$ når det er tilfældet

Example 1.2: Solving a Linear System using Matrices

Vi bruger nu Gauss-Jordan elimination til at løse 3x4 systemet nedenfor. Opstiller ligninssystemet og den tilhørende matrix

$$(S)\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 17x_4 \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 7 & 17 & 23 \end{bmatrix}$$

$r_2 - 3r_1, r_3 - 5r_1, r_3 - r_2$

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Vi ser her at ligningssystemet er konsistent, da der ikke er nogen rækker $[0, 0, 0, 0, b]$. *Vi laver bagudelimination(Skalerer pivot til 1 imens)*
$r_2 - r_3, r_1 - 3r_3, \frac{1}{2}r_2 \to r_2, r_1 - r_2$

$$M^* \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -27.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -13.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet ser således sådan ud:

$$S^* \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = -27.5 \\ 1x_3 = -13.5 \\ 1x_4 = 15 \end{cases}$$

Der er her uendeligt mange løsninger på S, som kan opskrives:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-27.5 - 2t, t, -13.5, 15)$$

1.2 1.2 Echelonformer og rank

Definition 1.5: Row echelon form

En matrix U er i rækkeechelonform hvis følgende er mødt

(a) *Alle ikkenul rækker i U ligger over enhver nulrække*

(b) *Den første ikkenul indgang(pivot) i en ikke-nulrække ligger til højre for enhver pivot i rækken direkte over den*

Definition 1.6: Reduceret rækkeechelonform

En matrix er i reduceret rækkeechelonform hvis to kriterier er mødt

(a) *Matricen allerede er i echelonform*

(b) *I enhver pivotsøjle har pivotværdien 1, og alle andre indgange i søjlen er nul*

Theorem 1.2: Uniqueness of reduced row echelon forms

Enhver Matrice M har en reduceret rækkeechelonform M^* der er unik

Definition 1.7: Lineære systemer i øvretriangulære former

Et lineært system er i øvre triangulær form, hvis dens augmenterede matrice er i echelonform
Et lineært system er i reduceret trekantsform hvis dens augmenterede matrice er i Reduceret rækkeechelonform

Definition 1.8: Matricers Rank

Lad A være en mxn matrice. Ranken af A denoteret "rank A"er antal ikkenul rækker i en echelonform af A. Vi skriver $rankA = r$

Vi observerer mht. Rank, at da ikke-nulrækker i en matrix på rre ligger over alle nulrækker og enhver ikke-nulrække har en pivotsøjle. Derfor kan det siges at for matrix R, U hvor U er en rækkeechelonform af S

$$\begin{aligned} r &= antal\ ikkenulrækker\ i\ \mathrm{U} \\ &= Antal\ pivotsøjler\ i\ \mathrm{U}\ og\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

Vi ser

$$rank\ A \leq m \qquad rank\ A \leq n$$

Fra det konkluderer vi

$$rank\ A \leq min\{m, n\}$$

Theorem 1.3: Klassificering af løsninger

Lad (S) være et m x n lineært løsningsystem, repræsenteret af sit m x (n+1) augmenterede matrix $M = [A|b]$. *Så er der kun et af følgende cases der kan opstå*

Case a Hvis rank $A <$ rank M så er (S) inkonsistent

Case b Hvis rank $A =$ rank $M = n$ så er der en og kun en løsning

Case c Hvis rank $A =$ rank $M < n$ Så er der uendeligt mange løsninger til (S)

Theorem 1.4: Underdeterminerede lineære systemer

t mxn *lineært system hvor* $m < n$ *er enten inkonsistent eller har uendeligt mange løsninger. Hvis* $rank\ A = m$ *så har* S *uendelig mange løsninger, for hver kolonne af konstanter* b

Theorem 1.5: Kvadratiske lineære systemer

n n x n lineært system hvor $rank\ A = n$ *har en og kun en unik løsning for hver kolonne af konstanter* b

2 2 Matricer

2.1 Matrix Algebra

Definition 2.1: Lighed i matricer

To M x n matricer $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ *er ens hvis det gælder*

$$A_{ij} = B_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, m\}, \{0 \ldots, n\}$$

Definition 2.2: Matrix Addition

ummen af to mxn matricer er den mxn *matrice* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. *Den er parvid*

Definition 2.3: Scalar multiplication

Lad $A = [a_{ij}]$ *være en m x n matrix. Matrixen* $sA = [sa_{ij}]$

Theorem 2.1: Algebraiske regler for addition og smul

Der gælder følgende regler for matriverne A, B, C der er i $\mathbb{R}^{mxn}$ Lad O være m x n nulmatricen og lad s, t være enhver reel skalar.

1. *A + B = B + A*
2. *(A + B) + C = A + (B + C)*
3. *A + O = A*
4. *A + (-A) = O = -A + a*
5. *s(A + B) = sA + sB*
6. *(s + t) A = sA + tA*
7. *s(tA) = t(sA) = (st)A*
8. *1A = A*

Definition 2.4: Matrix Multiplikation

Lad $A = [a_{ij}]$ være en mxn matrice og lad $B = [b_{ij}$ være en nxp matrice. Produktet AB er en mxp matrice $C = [c_{ij}]$ hvor det gælder at c_{ij} indgangen i C er summen af rækken A_i gange kolonnen B_j. Så det er

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Også kaldet række gange kolonne multiplikation

Theorem 2.2: Unikhed af identitetsmatrice

Der er kun en identitetsmatrice I_n i et sæt af $\mathbb{R}^n$ kvadratmatricer.

Definition 2.5: Blockmatricer

Definitionen af en blockmatrice er at du fucked hvis du får en

Definition 2.6: Symmetri, skewsymmetri

En n x nvmatrixe A er kaldet symmetrisk hvis $A^T = A$ og skewsymmetrisk hvis $A^T = -A$

2.2 Inverser

Definition 2.7: Inverse af en kvadratisk matrix

En n x n matrix A er invertibel hvis der er en n x n matrix X som opfylder følgende krav:

$$AX = I_n \quad \text{og} \quad XA = I_n$$

Theorem 2.3: Inverser er unikke

Lad X være en invers af n x n matricen A. Så er X den eneste matrice der opfylder ligningen fra deg 2.7

Definition 2.8: Højreinvers, Venstreinvers

n matrix X kaldes højreinvers for nxn matricen A, hvis $AX = I_n$ og venstreinvers hvis $XA = I_n$

Example 2.1: En computationel tilgang til at finde inverser

Vi observerer den kvadratiske matrix A i sættet $\mathbb{R}^{3x3}$ vist på venstre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Som skridt et kigger vi efter en højreinvers til A; altså en matrixe $AX = I_3$. Vi skriver den ukendte matrix X og identitetsmatricen I i form af kolonnevektor $X = [x_1 x_2 x_3]$ og $I = [e_1 e_2 e_3]$ Og overvejer at løse $AX = I$. Bruger vi matrix-kolonnevektor vector mult, får vi

$$AX = A[x_1 x_2 x_3] = [Ax_1 \ Ax_2 \ Ax_3] = [e_1 \ e_2 \ e_3] = I_3$$

Og ved at sætte ligheder i den tredie lighed, får vi

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad Ax_3 = e_e$$

Så at løse $AX = I$ er det samme som at løse tre lineære systemer med samme coefficientmatrix A, for løsninger x_1, x_2, x_3. Ligninger løses nu simultant ved at forme matricen $[A|I_3]$ og reducere A til sin reducerede form A^*. Vi har

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{gathered} \sim \\ r_2 - 2r_1 \to r_2 \\ r_3 - 3r_1 \to r_3 \\ \tfrac{1}{5}5_2 \to r)2 \\ r_3 - 6r_2 \to r_3 \\ r_1 + 2r_2 \to r_2 \\ -\tfrac{1}{4}r_3 \to r_3 r_1 - r_3 \to r_1 \\ \sim \end{gathered}$$

$$[A|I_3]^* = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{5}{20} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & -\frac{5}{20} \end{array}\right]$$

Vi har derfor vores højreinvers

$$X = [x_1 x_2 x_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{5}{20} \\ -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} & 0 \\ \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & -\frac{5}{20} \end{bmatrix}$$

Udregningen viser os at $A^* = I_3$ og derfor $rankA$, hvilket antyder at enhvert system der kan der kan laves til identitetsmatricen uden inkonsistens, har en unik løsning, og X er derfor en unik højreinvers for A. Det er generelt nok til at vi kan sige

Example 2.2: Computation

Givet en n x n matrice A således at rank $A = n$. giver reduktionen

$$[A|I_n] \sim [I_n|X]$$

en unik højreinvers til A

Theorem 2.4: En unik højreinvers er også en venstreinvers

Hvis A er kvadratisk og der er en unik matrix X så $AX = I_n$ så er $XA = I_n$ og X er derfor $X = A^{-1}$

Theorem 2.5: Rankg og invertibilitet

Lad A være en n x n matrix. Hvis rank $A = n$ så er a invertibel

Theorem 2.6: E

n x n matrix A er invertibel, hvis og kun hvis $rank A = n$

Definition 2.9: Elementarmatricer

en mxm matrice E kaldes elementær hvis det er resultatet af at udføre en enkelt elementaroperation på identitetsmatricen

Theorem 2.7: Elementarrækkeroperationer og matrixmultiplikation

Gå ud fra at en enkelt rækkeoperation er udført på en mxn matrix A, og resultatet er B. Hvis E er den elementarmatrice tilsvarende til den udført på A så gælder det $EA = B$

Theorem 2.8: Elementarmatricer er invertible

For enhver elementarmatrice E eksisterer der en tilsvarende elementarmatrice F så $FE = EF = I$ og derfor $F = E^{-2}$

Example 2.3: Operationer på inverse

Lad A B være nxn matricer.

- *Hvis A er invertibel så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1}$*
- *Hvis A og B er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*
- *Hvis A er invertibel, så er sA invertibel for enhver $s \neq 0$ og*

$$(sA)^{-1} = s^{-1}A^{-1}$$

- *A er invertibel hvis og kun hvis A^T er invertibel, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*

Theorem 2.9: Kvadratisk Matrix invertibility

Lad A nxn og I identitetsmatricen. De følgende udsagn er ekvivalente

- *A er invertibel*
- *Der er en matrix X så $XA = I$*
- *Ligningen $Ax = b$ har en unik løsning x for hver b*
- *Ligningen $Ax = 0$ har kun nulløsningen $Ax = 0$*
- *Rank $A = n$*
- *Den reducerede rækkeechelonform af A er I*
- *A er produkt af elementarmatricer*
- *Der er en matrix X således at $AX = I$*

Theorem 2.10: Existenskriterier for Venstre- og højreinverser

Lad A være en mxn matrice så rank $A = r$

- *A har en højreinvers hvis og kun hvis $r = m$ og $m \leq n$*
- *B har en venstreinvers hvis og kun hvis $r = n$ og $n \leq m$*

3 3 Vectors

3.1 Vektorrum

Definition 3.1: Rum i $\mathbb{R}^n$

Det reele talsystem er denoteret af symbolet $\mathbb{R}$. For hvert positivt tal $n = a, 2, \ldots$ noterer symbolet $\mathbb{R}^n$ settet af alle $nx1$ matricer, med reele indgange. Et object i $\mathbb{R}^n$ kaldes en kolonnevektor, og dens indgange kaldes komponenter

Theorem 3.1: Algebraiske regler af Vector Algebra

Lad u, v, w være vektorer i $\mathbb{R}^n$, 0 den unikke nulvektor og s, t enhver reel skalar. Så gælder følgende regler:

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $v + 0 = v$
4. $v + (-v) = 0$
5. $s(u + v) = su + sv$
6. $(s + t)v = sv + tv$
7. $s(tv) = t(sv) = (st)v$
8. $1v = v$

Definition 3.2: Underrum

Lad sættet $\mathcal{U}$ være et sæt med et eller flere vektorer i $\mathbb{R}^n$. Så er $\mathcal{U}$ et underrum hvis de følgende kriterier er mødt:

1. *Hvis u og v er i $\mathcal{U}$ så tilhører $u + v$ også $\mathcal{U}$.*
   Man siger de holder under addition
2. *Hvis u er i $\mathcal{U}$ så er $su \in \mathcal{U}$*
   Lukket under skalarmultiplikation

Definition 3.3: Lineær combination. Span

Hvis $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ er et sæt af vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $x_1, x_2, \ldots, x_k$ er et sæt af skalarer så er udtrykket

$$X_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$$

Kaldet en lineær kombination af $v_1, v_2 \ldots$ ved skalarerne x_k. Sættet af lineære kombinationer som $x_{\ldots}$ der rækker over alle mulige reelle værdier, kaldes span af $v_1, v_2, \ldots v_k$ og er denoteret

$$span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \quad Eller \quad span\mathcal{S}$$

Theorem 3.2: Spannet af et set af vektorer er et underrum

Hvis $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ er et sæt af vektorer i $\mathbb{R}^n$ så er span S et underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition 3.4: Udspændende sæt

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad S være et finit underrum af $\mathcal{U}$. Hvis span $S = \mathcal{U}$ så er S et omspændende sæt af $\mathcal{U}$

3.2 Lineær uafhængighed, baser, dimension

Definition 3.5: Lineær uafhængighed, afhængighed

Et sæt af vektorer $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *er lineært uafhængige hvis ligningen* $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = 0$ *kun har nulløsningen*

$$x_1, x_2, \ldots, x_k = (0, 0, \ldots, 0)$$

S er lineært afhængigt hvis ligningen har en ikkenulløsning, hvor ihvertfald en af skalarerne x *er ikkenul*

Theorem 3.3: Karakterisering af lineær afhængighed

Et sæt af vektorer $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *er lineært afhængigt hvis og kun hvis ihvertfald en vektor er en lineær kombination af andre vektorer i* S

Theorem 3.4: Lineært afhængige kolonner, rank

Lad $A = [v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_k]$ *være en nxk matrix. Så er følgende udsagn ekvivalente*

- *Kolonner i* A *er lineært afhængige*
- *rank* $A = k$

Theorem 3.5: Invertibilitet og lineær afhængighed

En n x n matrix er invertibel hvis og kun hvis dens kolonner er lineært uafhængige

Theorem 3.6: Antallet af vektorer i et lineært uafhængigt sæt

Hvis sættet $s = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *er lineært afhængigt, så er* $k \leq n$

Vigtige fakta:

- Ethvert set S i $\mathbb{R}^n$ der indeholder nulvektoren er lineært afhængigt
- Et set $S = \{v\}$ der indeholder en enkelt ikkenulvektor v er uafhængigt
- To vektorer i $\mathbb{R}^n$ er et afhængigt sæt hvis og kun hvis en vektor er en skalarmultipel af den anden
- Ethvert underset af lineært uafhængige vektorer er lineært uafhhængige
- Et endeligt sæt af vektorer der indeholder et lineært afhængigt underset er lineært afhængigt

Definition 3.6: Baser

Lad $\mathcal{U}$ *være et underrum af* $\mathbb{R}^n$*. En basis for* $\mathcal{U}$ *er et underset* $\mathcal{B}$ *af* $\mathcal{U}$ *så at (a) B er lineært uafhængigt og (b)* $\mathcal{B}$ *udspænder* $\mathcal{U}$

Theorem 3.7: At konstruere en basis

Hvis U er et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad S være et finit underrum af U. Så er der to muligheder.

- *Hvis S udspænder $\mathcal{U}$. Hvis en vektor i S er en lineærkombination af en anden vektor i S så kan v slettes fra S til at forme et underrum S' af S som stadigvæk udspænder U. Processen kan derfor gentages indtil et lineært underset $\mathcal{B}$ af S er fundet så span $\mathcal{B} = \mathcal{U}$*
- *Hvis S er lineært uafhængigt. Hvis S ikke udspænder $\mathcal{U}$ så er der en vektor v i $\mathcal{U}$ som ikke er i span S. Sættet er stadigvæk lineært uafhængigt. Gentag ad infinitum til du har sættet $\mathcal{B}$*

Theorem 3.8: Unik repræsentering

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ være en base for $\mathcal{U}$. Så er enhver vektor v i $\mathcal{U}$ skrevet på kun en måde som lineær kombination hvor skalarerne er unikke.
Altså kan alle punkter i $\mathcal{U}$ repræsenteres af en og kun en skalarvektor x ganget med $\mathcal{B}$

Definition 3.7: Koordinater

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{B}$ være en base $b_1 \dots b_k$. Med enhver vektor v i $\mathcal{U}$ er der en associeret unikt sæt af skalarer $x_1 \dots x_k$ kaldet koordinater af v relativt til B og skrives

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Theorem 3.9: Antallet af basisvektorer

Lad U være et underrum og lad B og C være to baser for U. Så er der lige mange vektorer i B og C

Definition 3.8: Dimension

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Antallet af vektorer k i en basis af U kaldes dimensionen af U. Vi siger at U er K-dimensionel og skriver dim $U = k$.

Theorem 3.10: Konstruering af baser af kendt dimension

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ så $dim\mathcal{U} = k$

- *Et subset $\mathcal{B}$ af $\mathcal{U}$, bestående af k lineært uafhængige vektorer spanner automatisk $\mathcal{U}$*
- *Et subset $\mathcal{B}$ af $\mathcal{U}$ bestående af k vektorer der spanner $\mathcal{U}$ er automatisk lineært uafhængig*

3.3 Nulrum, kolonnerum og rækkerum

Definition 3.9: Nulrummet af en matrice

Lad A være en m x n matrice. Sættet af alle vektorer x i $\mathbb{R}^n$ der passer på løsningen $Ax = 0$ er kaldet nulrummet og noteres Null A

Theorem 3.11: Basis for nulrummet

Lad A være en m x n matrix med rank $A = r$ og lad (S) være det homogene lignings system defineret af $Ax = 0$. Den generelle løsning x til (S) kan skrives som en lineær kombination af $n - r$ lineært uafhængige vektorer $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$

$$xt_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_{n-r}v_{n-r}$$

Hvor $t_1, t_2, \dots t_{n-r}$ er n-r uafhænigge parametre der svarer til de frie variabler i systemet (S). Sættet $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_{n-r}\}$ er en baiss for null A og dimensionen af null A er n-r

Theorem 3.12: Beskrive løsningssæt til lineære systemer

Lad et konsistent m x n løsningssystem (S) være skrevet i matrixform $Ax = b$ og lad S være settet af løsninger til (S). Så består S af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ af typen $x = x_p + x_h$ hvor x_p er en løsning for (S) og x_h dækker over alle vektorer i null A

Definition 3.10: Søjlerummet af en matrix

Lad A være en mxn matrice. Underrummet $\mathbb{R}^M$ udspændt af kolonnerne i A kaldes søjlerummet af A og kaldes col A

Theorem 3.13: Base af søjlerum

Lad A være en m x n matrice med rank $A = r$. De r pivotkolonner i A former en basis for col A og dimensionen af col A er r

Definition 3.11: Rækkerummet af en matrice

Lad A være en m x n matrice. Underrummet af $\mathbb{R}^n$ udspændt af rækkerne i A kaldes rækkerummet af A og noteres af row A

Theorem 3.14: Basis for rækkerummet

Hvis A er en m x n matrice med rank $A = r > 0$ så er sættet $\mathcal{B}$ af r ikkenul rækkevektorer (transponeret) i den reducerede form A^* af A er en basis for row A og row A har dimensionen r. hvis rank $A = 0$ så er søjlerummet $A = \{0\}$

Theorem 3.15: Transponeret rank

$rank\ A = rank\ A^T$