1 HIDRODINÂMICA

Carlos Basílio Pinheiro - Universidade Federal de Minas Gerais

Wagner Corradi Barbosa - Universidade Federal de Minas Gerais

Érico Luiz Martins Reis - Universidade Federal de Minas Gerais

APÓS O ESTUDO DESTE TÓPICO VOCÊ DEVE SER CAPAZ DE:

- Enunciar as características do escoamento de fluidos;
- Estudar as leis fundamentais desse escoamento;
- Deduzir e discutir equação da continuidade;
- Aplicar a equação de continuidade para fluidos;
- Deduzir e discutir equação de Bernoulli;
- Relacionar os efeitos da viscosidade em situações cotidianas;
- Aplicar e enunciar a lei de Poiseuille.

Nesta unidade discutiremos os fluidos em movimento, mas limitando-nos às situações mais simples, dada a grande complexidade do assunto. Nosso objetivo é introduzir os conceitos mais relevantes, tais como a equação de continuidade – que reflete a conservação da massa –, a compressibilidade, os efeitos da viscosidade, que é o atrito interno entre as partes do fluido, e a equação de Bernoulli, que reflete a conservação da energia durante o escoamento de um fluido incompressível, sem viscosidade e irrotacional

	LOCALIZAÇÃO DO ITEM NOS CAPÍTULOS E LIVROS			
Hidrodinâmica	**LIVRO**	**AUTORES**	**ED.**	**SEÇÕES**
	Física II Addison-Wesley	Sears, Zemansky, Young Freedman;	10ª	14.6
	Física 2 Addison-Wesley	Sears, Zemansky, Young	2ª	13.1,13.2,13,5 a 13.7
	Física 2 Livros Técnicos e Científicos S.A	Resnick, Halliday, Krane	4ª	18.1,18.2,18.5 e 18.6
	Física 2 Livros Técnicos e Científicos S.A	Resnick, Halliday, Krane	5ª	16.1,16,2,16.6
	The Feynman Lectures on Physics; Vol. II	Feynman, Leighton, Sands		40.2, 40.3
	Fundamentos de Física, vol.2 Livros Técnicos e Científicos S.A	Halliday, Resnick	3ª	16.8,16.9, 16.12
	Física 2 Editora Makron Books do Brasil	Keller, Gettys, Skove	1ª	15.5,15.6
	Curso de Física, vol.2 Ed. Edgard Blücher	Moysés Nussenzveig	3ª	2.1,2,2,2.6, 2.7
	Física, Vol. 2 Ed. Guanabara	Tipler	3ª	11.6
	Física 4 Reichmann e Affonso Editores	Alaor S. Chaves	1ª	42.12,43.2, 43.6,,43.8, 42.13,43.16
	Física, Fundamentos e Aplicações, Vol.2 Editora McGraw Hill	Eisberg e Lerner	1ª	16.6 e 16.7
	Física – Volume Único Addison-Wesley	Alonso e E. J. Finn	1ª	14.10

1.1 Escoamento dos Fluidos

Até aqui estudamos os fluidos em condições estáticas, sem levar em consideração qualquer tipo de movimento interno. Vamos agora apresentar algumas noções da dinâmica de fluidos.

Por escoamento de um fluido, entendemos o movimento do fluido como um todo. Um fluido pode ter seu escoamento bastante complexo, como exemplos, as correntezas de um rio ou o efeito criado pela fumaça de um objeto incandescente. Estamos interessados em estudar alguns modelos simplificados que permitem a descrição das principais propriedades do movimento dos fluidos e que podem ser utilizados para representar um fenômeno real.

Uma maneira de descrever o movimento é imaginar o fluido formado por elementos de volume muito pequenos, de modo que possamos tratar cada elemento como uma partícula. A descrição do movimento do fluido é feita determinando o vetor-posição $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z, t)$ de cada partícula, em função do tempo. Esse procedimento é uma generalização do método que foi inicialmente desenvolvido por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) para estudar a trajetória de uma partícula.

Um outro modelo para descrever o movimento do fluido foi o desenvolvido por Leonard Eüler (1707 - 1783). Nele, ao invés de definir a trajetória de cada partícula, fixamos a atenção em cada ponto $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z, t)$ do fluido e descrevemos como varia a velocidade $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ e a densidade $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ no fluido em função do tempo.

Durante o escoamento de um fluido, a trajetória de cada partícula individual define uma linha de escoamento ou linha de fluxo. Essa linha é, por definição, tal que o vetor velocidade da partícula seja tangente a ela em cada ponto do espaço ocupado pela partícula. Não pode haver o cruzamento de duas linhas de fluxo em um mesmo ponto porque, nele, haveria uma ambiguidade na direção da velocidade da partícula, com duas direções diferentes para ela. Além disso, as linhas são traçadas de forma tal que o número de linhas por unidade de área na vizinhança de um ponto é proporcional à velocidade do fluido neste ponto.

As linhas de escoamento que passam através de um elemento de área A Figura 1.1 criam um tubo denominado de tubo de escoamento. Nenhuma parte do fluido pode atravessar as paredes laterais de um tubo de escoamento, e os fluidos de diferentes tubos de escoamento não podem se misturar. Em função disso, definimos vários tipos de escoamento descritos a seguir.

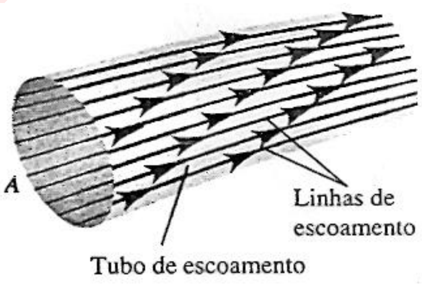


Figura 1.1: linhas de escoamento de um fluido

1.1.1 Escoamento Estacionário e Não-Estacionário

O escoamento pode ser descrito em termos de variáveis tais como pressão, densidade e velocidade, em qualquer ponto do fluido. Quando estas variáveis não dependem do tempo, esse escoamento é dito estacionário. Estas variáveis terão valores, em geral, diferentes em pontos diferentes, mas permanecerão constantes no tempo em qualquer ponto particular. Essas condições ocorrem em escoamentos a baixas velocidades e o regime é chamado de laminar.

Em escoamentos não estacionários, como por exemplo, no movimento da água em uma praia agitada, as velocidades são funções do tempo. Quando o escoamento for turbulento, como em corredeiras ou em cachoeiras, as velocidades irão variar bastante de um ponto para outro e também de um instante para outro. Dizemos, então, que o escoamento atingiu o regime turbulento.

1.1.2 Escoamento Compressível e Incompressível

Quando a densidade ρ de um fluido for constante (independente das coordenadas *x, y, z* e do tempo *t*), seu escoamento é dito ser incompressível. Os líquidos, em geral, podem ser considerados como sendo incompressíveis. Mesmo em alguns casos em que gases são altamente compressíveis, a variação da densidade pode ser insignificante e seu escoamento pode ser considerado como sendo praticamente incompressível. Por exemplo, quando um avião se desloca com velocidade bem menor do que a do som no ar, o escoamento do ar em torno das asas será aproximadamente incompressível.

1.1.3 Escoamento Viscoso e Não Viscoso

A viscosidade no movimento dos fluidos pode ser comparada ao atrito gerado no movimento dos sólidos. O atrito interno em fluidos cria tensões de cisalhamento quando há movimentos relativos entre duas camadas vizinhas do fluido, como por exemplo, no escoamento de um fluido no interior de um tubo. Um fluido ao escoar de tal maneira que nenhuma energia seja dissipada através de forças viscosas é dito ter escoamento não-viscoso. Mais dados sobre a viscosidade serão dados na seção 5.3.

1.1.4 Escoamento Rotacional e Não-Rotacional (Irrotacional)

O escoamento rotacional de um fluido é aquele em que um elemento do fluido, com centro em um ponto, possui momento angular em relação a este ponto. Isso significa que o fluido gira enquanto é transportado. Para termos uma ideia concreta disso, consideremos uma pequena roda com pás, colocada dentro de um fluido em escoamento. Se, ao acompanhar o movimento do fluido, a roda girar em torno de seu centro (o que é causado pela passagem do fluido por ela), o escoamento do fluido é rotacional. Se ela não girar, o escoamento é irrotacional.

1. ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: ESCOAMENTO

1.1 Liste pelo menos quatro exemplos de escoamento de fluidos observados em seu cotidiano e tente classificá-los de acordo com os tipos listados anteriormente. Tente considerar casos em que o fluido não seja um líquido.

1.2 Conservação da Massa: Equação da Continuidade

Uma das propriedades fundamentais do escoamento de um fluido é a da conservação de sua massa, representada pela equação da continuidade. Para deduzir esta equação, considere um fluido não viscoso e incompressível de densidade ρ em um escoamento em regime estacionário. Seja um tubo de escoamento dentro desse fluido com suas extremidades delimitadas por duas seções retas estacionárias de áreas A_1 e A_2, como mostrado na Figura 1.2. Nessas áreas, as velocidades do fluido são v_1 e v_2, respectivamente. Num pequeno intervalo de tempo dt, o fluido que estava em A_1 se desloca de uma distância $v_1 dt$, com isso, um cilindro de volume $dV_1 = A_1 v_1 dt$ escoa para dentro do tubo através da área A_1. No mesmo intervalo de tempo, um cilindro com volume $dV_2 = A_2 v_2 dt$ escoa para fora do tubo através da área A_2.

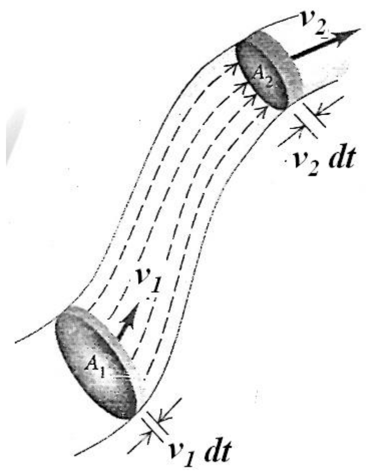


Figura 1.2: Escoamento estacionário de um fluido.

Para o interior do tubo irá fluir, então, uma massa $dm_1 = \rho A_1 v_1 dt$ através da área A_1 num intervalo de tempo dt. Da mesma forma, a massa $dm_2 = \rho A_2 v_2 dt$ flui para fora do tubo através da área A_2. No escoamento estacionário, a massa total no tubo permanece constante e, como não houve criação nem destruição de massa dentro do tubo, devemos ter que:

$$dm_1 = dm_2 \tag{1.1}$$

Ou seja,

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt \tag{1.2}$$

Como a densidade do fluido é constante e o regimento de escoamento estacionário, temos:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{1.3}$$

Essa equação é a equação da continuidade. A taxa com a qual o volume do fluido atravessa a seção reta do tubo é chamada de vazão volumétrica dV/dt dada por:

$$\frac{dV}{dt} = Av \tag{1.4}$$

A vazão volumétrica possui sempre o mesmo valor em todos os pontos ao longo de um tubo de escoamento qualquer. A medida que a área da seção reta do tubo de escoamento do fluido diminuir, a velocidade do fluido neste tubo irá aumentar e vice-versa. Em uma torneira aberta, a corrente de água que jorra se estreita à medida que ela ganha velocidade durante sua queda livre, mas a vazão dV/dt terá sempre o mesmo valor ao longo da corrente.

Quando o escoamento de um fluido não for incompressível, ou seja, com o valor de densidade variando em pontos diferentes, teremos que adaptar a equação da continuidade: para

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{1.5}$$

onde ρ_1 e ρ_2 são os valores da densidade do fluido em escoamento em pontos diferentes.

2. ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: CONTINUIDADE

2.1 O que representa a equação de continuidade? Quais são as condições necessárias para que a mesma possa ser utilizada?

2.2 Por que o jato d'água de uma torneira fica mais estreito à medida que cai?

Exemplo 1: Suponha uma torneira com ½" (0,50 polegada) de diâmetro. Determine a vazão do escoamento desta torneira sabendo que a 45mm da saída da torneira o filete de água terá uma área transversal igual a 0,35cm^2.

A vazão da torneira pode ser escrita como $V = A_i v_i$. Em geral, as torneiras comerciais têm diâmetros de ½ ou ¾ de polegada. O diâmetro de ½ polegada corresponde a 1,24cm, logo, a área é $A = \pi r^2$ = 3,14x(0,635cm)^2 = 1,27cm^2.

Da equação de continuidade, temos que: $A_i v_i = A_f v_f$ (1)

Mas também sabemos dos estudos de mecânica que, quando a água sai da torneira, sofre somente a aceleração gravitacional e podemos dizer que: $v_f^2 = v_i^2 + 2gh$ (2)

De (1), tem-se que: $(A_i v_i)^2 = \left(A_f v_f\right)^2$. Substituindo na equação (2), teremos:

$$\frac{(A_i v_i)^2}{{A_f}^2} = (v_i)^2 + 2gh$$

Explicitando para v_i

$$v_i = \sqrt{\frac{2gh{A_f}^2}{{A_i}^2 - {A_f}^2}}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2(9{,}8m/s^2)(0{,}045m)(0{,}35cm^2)^2}{(1{,}27cm^2)^2 - (0{,}35cm^2)^2}} = 28{,}6\text{cm/s}$$

Logo, a vazão será: $V = A_i v_i$. = (1,27cm^2)(28,6cm/s) = 34cm^3/s. Isso significa que, por exemplo, para encher um recipiente de 1 litro = 1dm^3 = 1000cm^3 são necessários da ordem de 30s.

Exemplo 2: A mecânica dos fluidos também tem papel extremamente importante no entendimento de processos biológicos. Por exemplo, do livro de Steven Vogel "Life in Moving Fluids" da Princeton University Press (1981):

"A área A_o da seção transversal da aorta, o maior vaso sanguíneo emergente do coração de uma pessoa normal é de aproximadamente 3cm^2. E a velocidade média v_o do sangue de uma pessoa com pressão arterial normal é da ordem de 30cm/s. O diâmetro de um vaso capilar típico é de aproximadamente 6 mícrons com velocidade de escoamento de 0,05 cm/s."

Faça uma estimativa do número de vasos capilares que uma pessoa possui.

O sangue que passa por todos os capilares a princípio é o mesmo sangue que passa pela aorta, logo, podemos usar a equação da continuidade: $A_o v_o = nA_v$, onde n é o número de capilares que a pessoa possui.

A área A dos capilares é $A = \pi(3 \times 10^{-6}m)^2 = 2{,}9 \times 10^{-11}m^2 = 2{,}9 \times 10^{-7}cm^2$. Logo:

$$n = \frac{A_o v_o}{Av} = \frac{(3{,}0cm^2)(30cm/s)}{(2{,}9 \times 10^{-7}cm^2)(0{,}05cm/s)} = 6{,}2 \times 10^9$$

Ou seja, da ordem de 6 bilhões de capilares.

1.3 A Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli relaciona pressão, velocidade e altura no escoamento de um fluido em regime estacionário. Deduzida por Daniel Bernoulli (1700 – 1782), ela é o equivalente à lei de Stevin da hidrostática e nos permite analisar o escoamento de um fluido em sistemas de encanamentos, usinas hidroelétricas e até em voo de aeronaves. Ela pode ser deduzida a partir das leis de Newton, mas, no que se segue, vamos fazê-lo utilizando a lei de conservação de energia.

Consideremos um fluido homogêneo, incompressível, não viscoso e em regime de escoamento estacionário compreendido entre as áreas de seção transversal A_1 e A_2 do tubo de escoamento, próximas dos pontos situados às alturas y_1 e y_2 em relação a um nível de referência horizontal (Figura 1.3). Sejam v_1 e v_2 as velocidades e p_1 e p_2 as pressões do fluido nesses pontos.

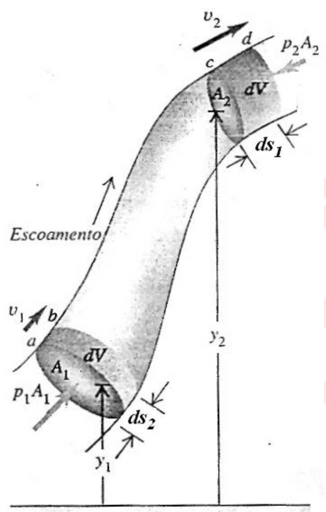


Figura 1.3: Escoamento de um fluido estacionário

Durante o intervalo de tempo dt, o elemento de volume do fluido na região entre os pontos a e b se desloca para a região compreendida entre os pontos c e d. Como o escoamento é estacionário, a porção do fluido compreendida na região entre b e c não precisa ser considerada na equação do trabalho-energia porque as condições nelas não variam. Então, tudo se passa como se, durante um deterinado intervalo de tempo a porção do fluido na região entre a e b fosse transportada para a região entre c e d. Como o fluido é incompressível e não viscoso, não existem forças dissipavas atuando no fluido e, portanto, a energia se conserva em qualquer ponto fluido, logo:

$$E_1 = E_2 \tag{1.6}$$

Dito de outra forma a soma da energia cinética, da energia potencial e do trabalho realizado por forças externas sobre a massa do fluido é constante, assim:

$$W_1 + E_{p1} + E_{c1} = W_2 + E_{p2} + E_{c2} \tag{1.7}$$

onde W_1 e W_2 são as energias do fluido devido à pressão externa nos extremos do tubo de escoamento, E_{p1} e E_{p2} são as energias potenciais gravitacionais devida à altitude do fluido e E_{c1} e E_{c2} são as energias cinéticas devida à velocidade do fluido. A força externa atua perpendicularmente ao elemento de área do fluido e, portanto, o trabalho externo W_1 é dado por:

$$W_1 = F_1 ds_1 \cos 0 \ = \ P_1 A_1 d_{s1} \tag{1.8}$$

onde P_1 é a pressão externa exercida sobre a área A_1 da massa do fluido e d_{s1} é deslocamento da massa de fluido entre os pontos a e b. O deslocamento d_{s1} na equação (1.8) pode ser reescrito em função da velocidade v_1 de escoamento do fluido e do intervalo de tempo dt decorrido no deslocamento do fluido entre a e b. Assim,

$$P_1 A_1 d_{s1} = P_1 A_1 v_1 dt_1 = P_1 V_1 = \frac{m_1 P_1}{\rho}$$

onde V_1é o volume de fluido e ρ a densidade do fluido e m_1 a massa do fluido. Assim a energia da massa do fluido em 1 é dada por:

$$E_1 = \frac{m_1 P_1}{\rho} + m_1 g y_1 + \frac{m_1 v_1^2}{2} \tag{1.9}$$

Analogamente a energia da massa do fluido em 2 é dada por:

$$E_2 = \frac{m_2 P_2}{\rho} + m_2 g y_2 + \frac{m_2 v_2^2}{2} \tag{1.10}$$

Pela equação (1.6) temos

$$\frac{m_1 P_1}{\rho} + m_1 g y_1 + \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 P_2}{\rho} + m_2 g y_2 + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

E pela equação da continuidade temos que $m_1 = m_2$, logo

$$\frac{m_1 P_1}{\rho} + m_1 g y_1 + \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 P_2}{\rho} + m_1 g y_2 + \frac{m_1 v_2^2}{2} \tag{1.11}$$

A igualdade (1.11) não depende da massa pode ser reescrita como

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho g y_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \tag{1.12}$$

A equação (1.12) é conhecida com Equação de Bernoulli. Ela é a expressão da conservação da energia por unidade de massa para um fluido homogêneo, incompressível, não viscoso em escoando em regime não rotacional e estacionário Observe que, se o fluido não estiver em movimento ($v_1 = v_2 = 0$), a equação (1.12) se reduzirá a $P_1 = \ P_2 + \ \rho g(y_2 - y_1)$ que representa a pressão hidrostática de um fluido em repouso (Lei de Stevin).

Note que cada lado da equação (1.12) só se refere a uma posição no tubo de escoamento. Assim, podemos escrever que para qualquer posição do fluido :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g y = C \tag{1.13}$$

onde C é uma constante que possui valores diferentes para tubos de escoamento diferentes. Rigorosamente, a constante C deve ser associada a uma linha de fluxo.

Os termos da equação (1.13) são conhecidos por:

$\frac{1}{2}\rho v^2$	Pressão dinâmica
$p + \rho g y$	Pressão estática

Para entender o significado da Equação de Bernoulli vamos tomar com exemplo a situação mostrada na Figura 1.4. Nela é ilustrado o escoamento estacionário indicando a mudança da velocidade do fluido quando ele adentra uma região estrangulada do tubo de escoamento. Para garantir a conservação da massa que flui através do tubo (equação (1.3)) temos que se $A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1$. O escoamento acontece sem mudança de altura e, portanto, os termos referentes variação da energia potencial da equação (1.12) são nulos. Assim

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \tag{1.14}$$

A equação (1.14) nos diz que o aumento da velocidade de escoamento e consequentemente da pressão dinâmica leva a uma redução da pressão estática sobre as paredes do tubo na mesa região. Um olhar microscópico mostra que as moléculas do fluido que entram na seção estrangulada possuem, em média, vetores velocidade com componentes paralelas ao tubo maiores que a componentes perpendiculares. Isso na prática reduz o numero de colisões por unidade de tempo e por unidade de área nas paredes da seção estrangulada e acarreta a redução efetiva da pressão estática.

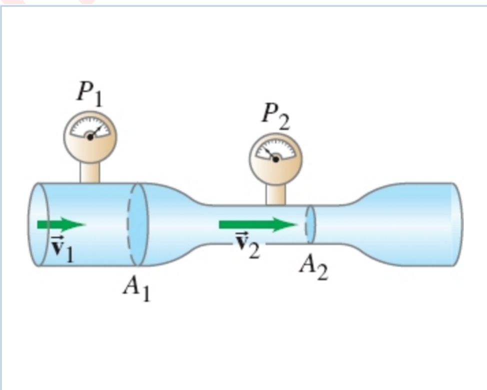


Figura 1.4: Escoamento estacionário indicando mudança da velocidade do fluido quando ele adentra na região estrangulada: $A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1$.

Exemplo 3: Segure ao mesmo tempo duas folhas de papel pela menor borda posicionando-as verticalmente. As folhas devem estar alinhadas e se distanciar aproximadamente de 5cm, permanecendo paralelas em toda sua extensão. Sopre na direção paralela às folhas (na altura da metade do seu comprimento) de modo que o ar passe por entre elas.

a) Descreva o que ocorreu.

b) Era isso que você esperava que ocorresse?

c) E se você colocasse uma outra folha por trás das duas, como se impedisse o fluxo de ar. Explique o que acontece.

Resposta Comentada:

a) As folhas ficam tão próximas quanto maior for a velocidade do ar entre elas, ou seja, quanto mais forte se sopra, mais elas se aproximam.

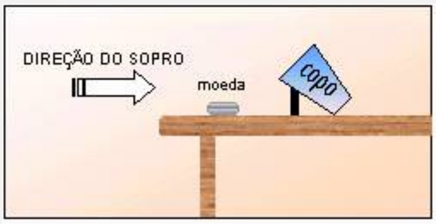
b) Sim, se considerarmos o ar em repouso na vizinhança das folhas, ao colocar em movimento o ar entre as folhas, a pressão entre elas diminui, uma vez que

$$P = P_o - \frac{1}{2}\rho v^2$$

Como a pressão entre as folhas é menor que a pressão externa, surge uma força resultante que as aproxima.

c) Nesta situação, agindo a terceira folha como obstáculo, haverá um acumulo de ar próximo a ela e um conseqüente aumento da pressão próximo à boca. Dessa forma, quando estão próximo à boca elas se aproximam e próximo à terceira folha elas se afastam.

Exemplo 4: Faça o experimento Moeda e Copo e responda às questões relacionadas.



Material: uma moeda de 1, 5 ou 10 centavos e um copo de vidro ou plástico transparente com cerca de 10cm de altura.

Montagem: Utilize uma mesa para posicionar a moeda e o copo, que devem estar afastados cerca de 2 a 3cm. Coloque a moeda deitada, a uma distância de 1 a 2cm da borda da mesa. O copo deve ser posicionado atrás da moeda, com a boca voltada para o lado da moeda e colocado com uma certa inclinação, como na figura 5.5.

Utilize um objeto qualquer para apoiar o copo, de tal forma que sua borda fique aproximadamente 2cm acima da mesa. Verifique se não há risco do copo se mover quando a moeda for soprada. Caso isto aconteça, providencie um apoio lateral para o mesmo.

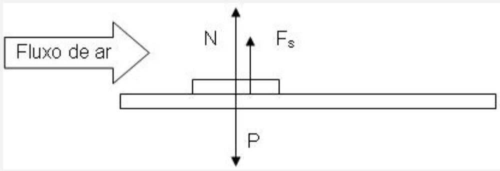
Procedimento: Dê um sopro rápido e forte, paralelamente ao topo da mesa e responda.

a) O que aconteceu com a moeda?
b) Por que a moeda se eleva?
c) Quais são as forças que atuam sobre a moeda quando você assopra?
d) Como você pode expressar o gradiente de pressão em termos da densidade do ar e da velocidade do ar soprado?
e) Estime a velocidade com que o ar deve ser soprado para que a moeda seja jogada para dentro do copo.
f) O que você acha que aconteceria se você usasse uma moeda de 1 real?

a) Quando se dá um sopro rápido e forte, paralelamente ao topo da mesa, a moeda se eleva.

b) A moeda se eleva porque ocorre uma redução na pressão na sua face superior, atuando, portanto, uma força resultante direcionada para cima.

c) Atuam na moeda a força peso (P) na vertical e direcionada para baixo, a força normal (N) na vertical e direcionada para cima e a força de sustentação (F_s) também na vertical e direcionada para cima, que é a responsável pela elevação da moeda (figura 5.6).



d) O gradiente de pressão pode ser expresso como a diferença entre a pressão que atua na face inferior da moeda e a que atua na face superior, através da equação de Bernoulli:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

Como o termo $\rho g(y_2 - y_1)$ e$v_1 = 0$*, então o gradiente fica:*

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

e) Para isso, a força de sustentação deve ser suficiente para erguer a moeda, ou seja, a velocidade deve ser tal que $(P_1 - P_2)$ *e seja capaz de gerar uma resultante que eleve a moeda, então:*

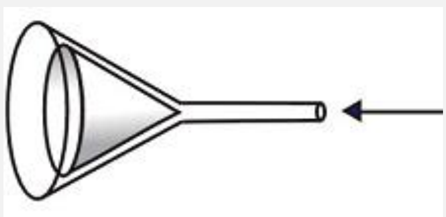
$$P_1 - P_2 = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Manipulando essas duas equações, temos:

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho \pi r^2}}$$

f) Como a velocidade que o ar deve se deslocar é diretamente proporcional à raiz quadrada da massa da moeda, tudo indica que o mesmo sopro não será capaz de levantá-la.

Exemplo 5: Explique por que não podemos remover o filtro de papel do funil na figura ao lado soprando no interior do tubo.



Ao soprar nesse sentido, o ar flui ao redor do filtro, pela parte externa, e, segundo a equação de Bernoulli, ocorre uma redução na pressão ocasionada pelo fluxo de ar, que fica menor que a pressão atmosférica. Como a pressão na parte interna do filtro é a pressão atmosférica, o filtro é empurrado por esta de volta ao funil.

Exemplo 6: De acordo com a equação de Bernoulli, um aumento na velocidade deve estar associado a uma diminuição da pressão; no entanto, quando se coloca a mão para fora da janela de um veículo em movimento tem-se a sensação de um aumento de pressão. Porque isto não contradiz a equação de Bernoulli?

A mão aberta oferece resistência ao "escoamento relativo" do ar, reduzindo, portanto, sua velocidade, o que gera um gradiente de pressão que resulta em uma força que empurra a mão no sentido contrário ao movimento do veículo e a favor do "escoamento relativo" do ar.

Exemplo 7: Algumas vezes as pessoas retiram cartas dos envelopes cortando uma pequena tira de um dos lados mais estreitos, segurando firmemente o envelope e soprando na direção da abertura. Justifique o sucesso desse método utilizando a equação de Bernoulli.

Soprando paralelamente sobre um dos lados do envelope, gera-se um gradiente de pressão que separa as duas partes do envelope, conforme a equação de Bernoulli.

Exemplo 8: Certos roedores da família dos esquilos vivem em grandes colônias em um complexo sistema de tocas que se intercomunicam. Eles se deparam com o problema de manter um suprimento de ar suficiente no interior de suas tocas para evitar a sufocação. Eles a evitam construindo montículos cônicos de terra em torno de algumas aberturas das tocas. Como funciona, em termos da equação de Bernoulli, este sistema de ventilação? Note que, devido às forças de viscosidade, a velocidade do vento junto da terra é bem menor do que a alguns centímetros acima.

Ao fazer montículos de terra em algumas das saídas das tocas, eles estão estabelecendo uma ligação dessas saídas com o ar que se move mais rápido, poucos centímetros acima do solo onde, segundo a equação de Bernoulli, a pressão é mais baixa. Nas outras saídas, que estão ao nível do solo onde o ar se move mais lentamente devido às forças de viscosidade, a pressão é mais alta. Assim, estabelecem um gradiente de pressão entre essas saídas o ar então se move a favor desse gradiente, ou seja, das saídas a "alta pressão" para as saídas a "baixa pressão", passando, portanto, por dentro das toca

3. **ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: EQUAÇÃO DE BERNOULLI**

3.1 Quais as condições do fluido em movimento que possibilitam a utilização da equação de Bernoulli?

1.3.1 – Aplicações da equação de Bernoulli: Medidor de Venturi

O tubo de Venturi é um aparato criado por Giovanni Battista Venturi para medir a velocidade do escoamento e dessa forma a vazão de um fluido incompressível através da variação da pressão durante a passagem deste fluido por um tubo de seção mais larga e depois por outro de seção mais estreita. O medidor de Venturi é mostrado de forma esquematizada na Figura 1.5a. Nele Um fluido qualquer de densidade ρ escoa por um cano de seção reta de área A. No estrangulamento, a área é reduzida para a e um tubo de um manômetro é acoplado como mostrado na figura.

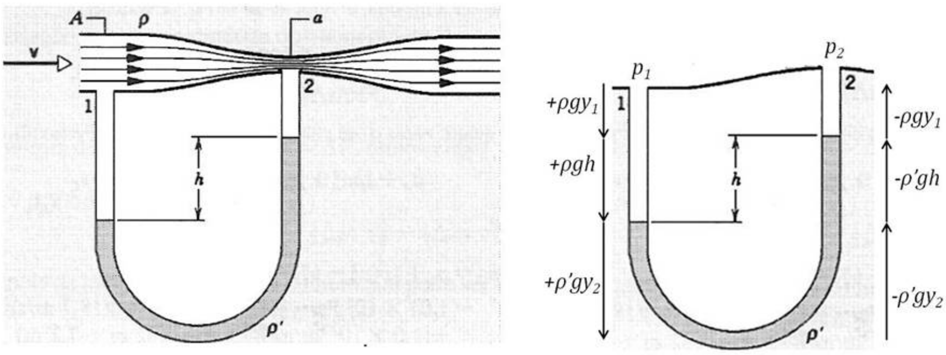


Figura 1.5: (a) Esquema de um medidor Venturi. (b) Diagrama indicando variações de pressão ao longo do medidor em função das diferenças de alturas da coluna de líquido.

O líquido contido no manômetro tem densidade ρ', podendo ser, por exemplo, mercúrio. Ao aplicar a equação de Bernoulli (1.11) nos pontos 1 e 2, temos que:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \tag{1.15}$$

Os termos que envolvem energia potencial são cancelados na equação (1.15) já que não ocorre mudança da altura do fluido. Da equação pode ser reescrita como:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho A^2 v_1^2}{2\mathrm{a}^2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \tag{1.16}$$

Colocando em evidência o quadrado da velocidade, podemos escrever a equação acima como:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{A^2 - \mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2}\right) v_1^2 \tag{1.17}$$

A diferença de pressão obtida pela equação (1.17) deve ser igual a diferença de pressão mostrada pelo manômetro da Figura 1.5b. Assim,

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2 - a^2}{a^2}\right) v_1^2 = (\rho' - \rho) g h \tag{1.18}$$

Conhecendo-se as áreas A e a e as densidade do fluido ρ que escoa e do líquido ρ' do manômetro, podemos calcular a velocidade v_1 pela expressão

$$v_1 = a\sqrt{\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} \frac{2gh}{(A^2 - a^2)}} \tag{1.19}$$

Com a ajuda de um bico Venturi, um fluxo de fluido é acelerado de forma que a pressão estática na seção estrangulada diminua e isso permite inúmeras aplicações. medidor Venturi pode ser usado como medidor de vazão em canos. A redução da pressão na parte estrangulada tem como efeito de sucção de gases e/ou líquidos de um reservatório. Esse efeito pode ser usado para atomizar líquidos (por exemplo em mangueiras de bombeiros que lançam espuma para apagam incêndios) ou para criar ambientes com vácuo.

1.3.2 – Aplicações da equação de Bernoulli: Tubo de Pitot

Tubo de Pitot — ou tubo pitot, é um dispositivo usado para medir a velocidade do fluxo de fluido. O tubo pitot foi inventado pelo engenheiro francês Henri Pitot no início do século 18 e foi modificado para sua forma moderna em meados do século 19 pelo cientista francês Henry Darcy. Tubos de Pitot são amplamente utilizados para determinar a velocidade de fluidos segundo modelos físicos simulados em laboratórios de hidráulica e aerodinâmica. São também usados em hidrologia, sendo capaz de medir indiretamente vazões em rios, canais, redes de abastecimento de água, adutoras e oleodutos.

O tubo pitot moderno mostrado na Figura 1.6 é utilizado para medir a velocidade do fluxo de ar gases. Ele é construído com dois tubos: um é o tubo de impacto (A) e o outro é o tubo estático (B). A abertura do tubo de impacto é perpendicular à direção do fluxo e a abertura do tubo estático é paralela à direção do fluxo. As duas aberturas são conectadas a um manômetro ou dispositivo equivalente para medir pequenas diferenças de pressão (ΔP). O tubo de impacto mede a pressão estática e a pressão de impacto devida à energia cinética do fluxo de ar. O tubo estático mede a pressão estática, uma vez que não há componente de velocidade perpendicular à sua abertura

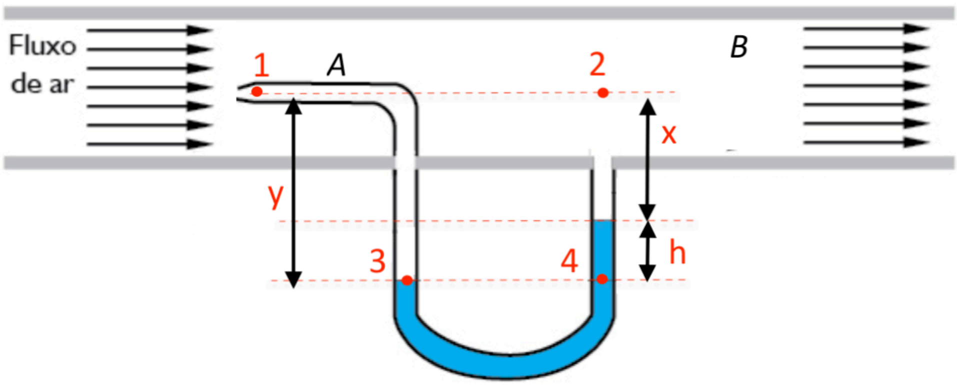


Figura 1.6: Esquema de um tubo de Pitot construído com um tubo de impacto (A) e o tubo estático (B)

Seja um gás, por exemplo, o ar, com densidade ρ escoando com velocidade v_2 e pressão P_2 no tudo estático B. A abertura em *1* no tubo de impacto A é perpendicular às linhas de corrente do escoamento e o ar não se desloca dentro desse tubo ($v_1 = 0$). Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos *1* e *2*, considerando que *1* e 2 estão à mesma altura. temos:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \qquad (1.20)$$

Logo,

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \qquad (1.21)$$

e

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \tag{1.22}$$

Se a diferença de pressão for conhecida, a velocidade do fluxo de ar (v_2) pode ser determinada pela equação (1.22). Mas diferença de pressão ΔP da equação (1.21) também pode ser calculada pelo Lei de Stevin se forem conhecidas a densidade do ar e do líquido no manômetro. Para tanto considere que as pressões nos pontos *3* e *4* são dadas respectivamente por

$$P_3 = P_1 + \rho g y$$
$$P_4 = P_2 + \rho g x + \rho_L g h \tag{1.23}$$

onde ρ_L é densidade líquido no manômetro. Pela Lei de Stevin, sabemos que as pressões nos pontos *3* e *4* são idênticas, logo:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho g\,(x - y) + \rho_L g h \tag{1.24}$$

mas pela Figura 1.6 temos que $(x - y) = -h$, logo

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (\rho_L - \rho) g h \tag{1.25}$$

e assim a equação (1.22), para o cálculo da velocidade do fluxo de ar (v_2) pode ser reescrita como:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh\,(\rho_L - \rho)}{\rho}} \tag{1.26}$$

Tubos de Pitot são usados para se medir velocidades de deslocamento de aviões e seu mal funcionamento está (infelizmente) relacionado a inúmeros acidentes. Na indústria, Tubos de PitoT são usados para medir velocidades de fluidos em dutos e tubos Neles o Tubo de Pitot pode ser inserido através de um pequeno orifício no duto com o Pitot conectado a um medidor de água de tubo em U ou algum outro medidor de pressão diferencial para determinar a velocidade do fluxo.

1.3.3 – Aplicações da equação de Bernoulli: Sustentação Dinâmica

Um avião ou um helicóptero só se mantém no ar graças à sustentação dinâmica, que é a força que atua sobre as asas ou hélice destes, devido aos seus movimentos através de um fluido (o ar). A sustentação dinâmica não tem nenhuma relação com a sustentação estática, que é o empuxo atuante sobre um balão ou um iceberg, descrita pelo princípio de Arquimedes. Exemplos de sustentação dinâmica são observados em movimentos de bolas de futebol, beisebol, tênis e golfe. A sustentação dinâmica faz com que uma bola encurve a trajetória lateralmente ou que suba ou desça em relação à trajetória parabólica, causado pela rotação da bola ao se deslocar no ar.

Na Figura 1.7a, são mostradas linhas de corrente para o escoamento estacionário do ar em torno de uma bola que não gira. A Figura 1.7b mostra as linhas de corrente do ar arrastado em torno de uma bola em rotação rápida. Essa camada de ar é arrastada graças à viscosidade do ar.

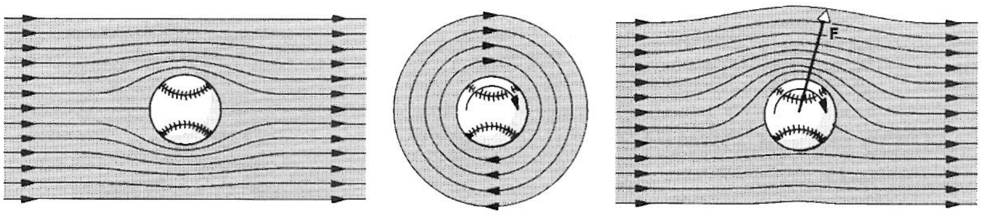


Figura 1.7: linhas de corrente para o escoamento estacionário do ar em torno de uma bola que não gira

A Figura 1.7c mostra o efeito resultante quando se combina o escoamento estacionário (translação da bola através do ar) e a circulação (rotação da bola). Observe que as duas velocidades se somam na parte superior e se subtraem na parte inferior. Note que, a partir do espaçamento das linhas de corrente resultantes, a velocidade do ar embaixo da bola é menor do que acima dela. De acordo com a equação de Bernoulli, a pressão do ar abaixo da bola deve ser maior do que acima da bola, resultando em uma ação de força de sustentação dinâmica **F** sofrida pela bola que aponta para cima.

A sustentação nas asas de um avião também segue o mesmo princípio. A Figura 1.8 mostra como as linhas de corrente atuam em torno da seção reta de uma asa. Na figura, a corrente de ar passa pela asa da esquerda para a direita. Observe que a velocidade da corrente de ar na parte de cima é maior do que na parte de baixo da asa, através dos espaçamentos das linhas de escoamento, que são menores em cima. Temos então que $v_1 > v_2$ e, pela equação de Bernoulli, P_1 P p_2, criando assim uma sustentação dinâmica **F** apontada para cima, exercida pelo ar sob a asa.

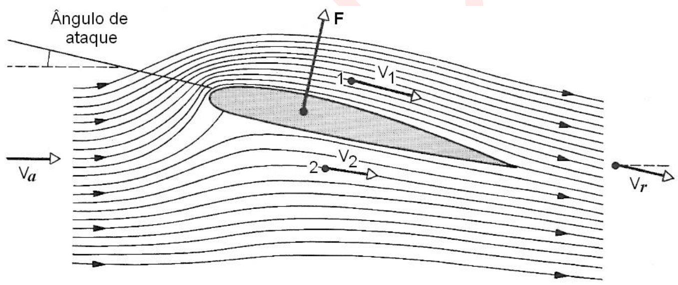
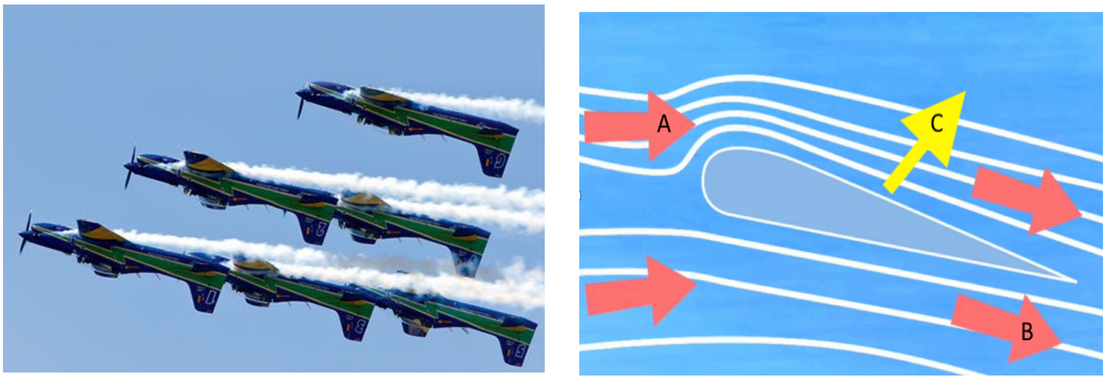


Figura 1.8: linhas de corrente para o escoamento estacionário do ar em torno das asas de um avião.

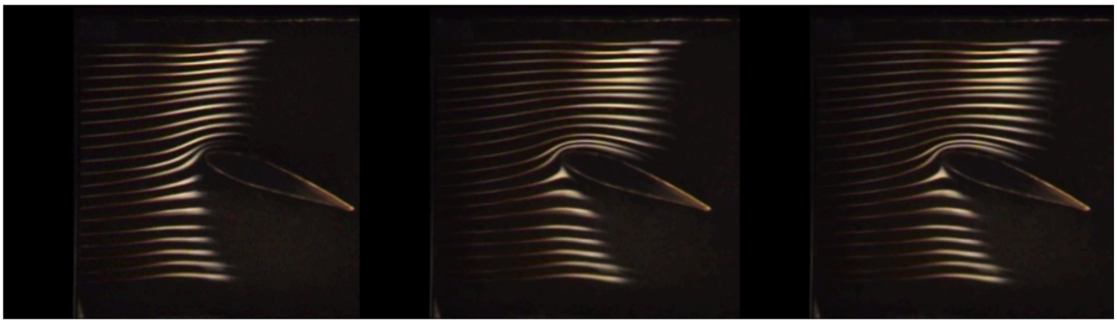
Deves se enfatizado que a equação de Bernoulli sozinha não é capaz de explicar adequadamente a sustentação dinâmica das asas de um avião. Isso pode ser exemplificado pela observação da Figura 1.9a que mostra aviões voando com posição invertida, na qual a força resultante da diferença de pressão dinâmica aparece para baixo. Nessa configuração, o voo é explicado pela conservação de momento. Note na Figura 1.9b que o vento muda sua trajetória inicial **A** quando colide sobre as asas, ganhando momento para baixo **B**. Para conservar o momento total do sistema, que não possui momento vertical, as asas se deslocam para cima, direção **C**, o que contribui para a sustentação no voo nessa condição.



(a) (b)

Figura 1.9: (a) Aviões voando em sentido posição invertida. (b) Esquema indicando direção inicial do vento (A), do vento após colidir com a asa do avião (B) e a direção do momento da asa para garantir a conservação do momento.

Finalmente ainda é importante mencionar que a o esquema representado na Figura 1.8, mostrando massas de ar de se deslocando acima e abaixo das asas e atingindo o final da asa ao mesmo tempo não é realista. O ar na parte de cima de fato viaja muito mais rapidamente conforme mostrado na Figura 1.9 que registram o ar viajando em torno de uma asa em um túnel de vento



(a) (b) (c)

Figura 1.10: Registro do vento se deslocando por uma asa em um túnel d e vento.

4. **ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: EQUAÇÃO DE BERNOULLI**

4.1 Sempre que possível, os aviões decolam e pousam de frente para o vento. Por quê?

4.2 Um furacão consiste num vórtice de ar girando rapidamente. Por que a pressão é sempre muito menor no centro do que na periferia? Como esta condição explica o grande poder destrutivo do furacão?

4.3 Dê exemplos da utilização da equação de Bernoulli para explicar fenômenos que fazem parte do seu cotidiano

1.4 Viscosidade

Além das forças externas que podem atuar sobre um fluido, como por exemplo, a força da gravidade, há uma força interna que corresponde ao atrito no deslizamento de camadas fluidas umas sobre as outras. Essencialmente, essa força interna nada mais é do que a resistência ao movimento dos átomos e moléculas desse fluido quando o mesmo é colocado em movimento. Esse atrito interno gerado em um fluido é chamado de viscosidade. Os efeitos da viscosidade são muito importantes para o escoamento através de tubos, para o movimento de transportes marítimos, para a lubrificação de diversas partes das máquinas, montagem das linhas de produção de envase de líquidos como bebidas, produtos de limpeza e higiene pessoal como cremes e shampoos, e muitas outras aplicações.

Para termos uma ideia sobre o efeito da viscosidade, imaginemos um paralelepípedo de fluido limitado por duas placas paralelas de área A, separadas por uma distância l. A placa inferior é fixa e a placa superior se move com velocidade v, sob ação de uma força externa F (Figura 1.11). De acordo com a segunda lei de Newton, isso acontece porque há uma força de resistência do fluido sobre a placa, impedindo que ela seja acelerada pela força externa.

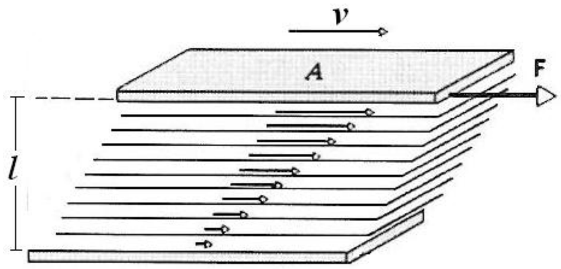


Figura 1.11: Ilustração do diagrama de velocidades das placas paralelas de fluido se deslocando sob ação de uma força F.

A experiência mostra que um fluido real, em contato com um sólido, tem uma fina camada de moléculas que, por efeito de forças intermoleculares, prendem-se à superfície de contato com o sólido. Essa camada de moléculas permanece em repouso em relação ao sólido. Então, quando a placa se move, o fluido em contato com ela é arrastado com a mesma velocidade da placa e, por sua vez, arrasta uma camada de fluido ligada a ela, e assim por diante, até a camada mais inferior. Essa, por estar em contato com a placa inferior, que não está se movendo, permanece em repouso junto com ela. A variação da velocidade com a altura nos mostra que as diversas camadas do fluido se deslocam umas sobre as outras. Quando o deslocamento é feito dessa forma (conforme indicado pelas setas na Figura 1.11), o escoamento do fluido é chamado de laminar. À medida que a placa superior se move, o fluido sofre uma contínua deformação de cisalhamento. Nos sólidos, a deformação de cisalhamento é proporcional à tensão de cisalhamento. Já nos fluidos, a deformação de cisalhamento cresce sem limite com a tensão aplicada.

Viscosidade, ou coeficiente de viscosidade η, é formalmente definido como a relação entre a tensão de cisalhamento F/A e a taxa de variação da deformação de cisalhamento dv/dl,

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dl} \tag{1.27}$$

onde η é uma constante e representa a viscosidade do fluido e, portanto, a facilidade de escoamento do fluido sob ação de uma tensão de cisalhamento. Para uma dada tensão de cisalhamento, quanto maior for a viscosidade, menor é a velocidade de escoamento. Conforme mostrado na Figura 1.11, se medirmos a velocidade do fluido entre as placas, veremos que ela cresce linearmente com a altura y no fluido, desde o valor zero junto da placa inferior ao valor junto à placa móvel $v(y)$. Podemos, então, escrever que $\frac{dv}{dl} = \frac{v_0}{l}$, logo.

$$\int_o^{v(y)} dv = \int_0^y \frac{v_0}{l} dl \implies v(y) = \frac{v_0}{l}\, y \tag{1.28}$$

A viscosidade dos fluidos depende fortemente da temperatura, aumentando para os gases e diminuindo para os líquidos à medida que a temperatura aumenta. Na tabela abaixo, são apresentados valores típicos para a viscosidade de diferentes fluidos. Sua unidade no sistema internacional SI é: 1 (N.m/m^2)/(m/s) = 1N.s/m^2 = 1 Pa.s. A fração 10^{-1}Pa.s é conhecida como Poise.

Tabela 1: Viscosidade de alguns fluidos

Fluidos	Viscosidade (Pas.s)
Glicerina (20 °C)	1,50
Óleo Lubrificante (0 °C)	0,11
Óleo Lubrificante (20 °C)	0,03
Sangue (37 °C)	4,00 x 10^{-3}
Água (20 °C)	1,00 x 10^{-3}
Água (90 °C)	0,32 x 10^{-3}
Gasolina (20 °C)	2,90 x 10^{-4}
Ar (20 °C)	1,80 x 10^{-5}
CO_2 (20 °C)	1,50 x 10^{-5}

1.4.1 Lei de Poiseuille

A Lei de Poiseuille, também conhecida por lei de Hagen-Poiseuille, nos dá a descrição da velocidade de escoamento de um fluido viscoso através de um tubo cilíndrico. Ela é muito importante em engenharia hidráulica (as tubulações de água e esgoto são projetadas usando-a) e em medicina (o escoamento de sangue nas veias e artérias, assim como em tubos de drenagem, obedecem a essa lei). Para deduzi-la, seja um tubo cilíndrico de seção reta de raio R, com um fluido viscoso passando dentro dele (figura 5.4). Para velocidades pequenas, o escoamento é laminar. No regime estacionário, o fluido escoa através de um dado comprimento L do cilindro devido à diferença de pressão $(p_1 - p_2)$ nas duas áreas limites do comprimento L do tubo. Seja, então, um volume cilíndrico do fluido, de raio r e comprimento l, cujo eixo coincide com o do tubo. Sobre ele atua uma força:

$$\mathrm{F} = (p_1 - p_2)\pi r^2 \tag{1.29}$$

devida à diferença de pressão entre as áreas transversais do fluido. Essa força atua sobre a área lateral do cilindro que constitui o fluido e provoca uma tensão de cisalhamento. Como a área lateral do cilindro de fluido é $2\pi rL$, a tensão de cisalhamento é:

$$\frac{F}{A} = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi rL} = \frac{(p_1 - p_2)}{2L}\, r \tag{1.30}$$

A Figura 1.12 mostra o vetor velocidade de escoamento laminar de um fluido viscoso passando no interior de um tubo cilíndrico. A velocidade de escoamento é máxima no centro e mínima sobre as paredes dele.

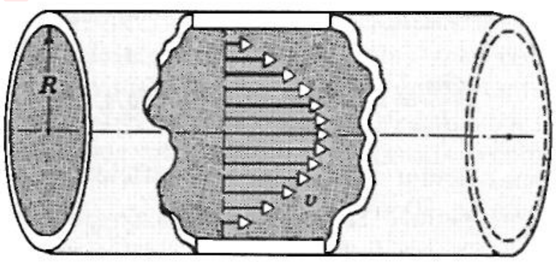


Figura 1.12: Ilustração do diagrama de velocidades de cascas cilíndricas de fluido se deslocando sob ação de uma força F.

Assim, a derivada da velocidade em relação à distância ao eixo é negativa e a lei de Newton para a viscosidade nos dá, então:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)}{2L\eta}r \qquad (1.31)$$

Integrando esta equação em relação a r, de $r = r$ até $r = R$, obtemos:

$$\int_0^R dv = v(R) - v(r) = -\frac{(p_1 - p_2)}{2L\eta}\int_r^R rdr \qquad (1.32)$$

Como, para $r = R, v(R) = 0$, a expressão acima fica:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4L\eta}(R^2 - r^2) \qquad (1.33)$$

Nessa equação, p_1 e p_2 são as pressões nas extremidades do tubo de comprimento L e R é o raio do tubo. Vemos, então, que o escoamento sempre ocorrerá no sentido da diminuição da pressão.

Em qualquer ponto do fluido, a velocidade é proporcional à variação da pressão por unidade de comprimento $(p_1 - p_2)/L$, ou simplesmente dp/dx. A vazão volumétrica através do tubo é encontrada considerando um tubo cilíndrico de raio interno r, raio externo $r + dr$ e área de seção reta $dA = 2\pi rdr$. A vazão volumétrica através do cilindro é obtida integrando o produto $v(r)dA$ em que dA é o elemento de área compreendido entre os cilindros de fluido de raios r e $r + dr$, do centro até as bordas do cilindro:

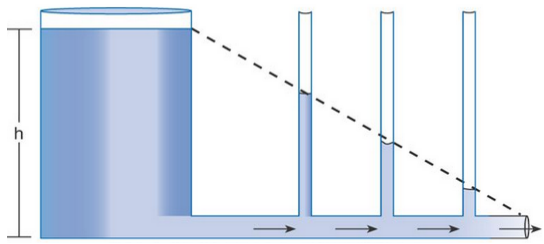
$$\mathrm{V} = \int_0^R v\,(2\pi rdr) = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2L\eta}\int_0^R (R^2 - r^2)r\,dr \qquad (1.34)$$

que dá a equação de Poiseuille:

$$V = \frac{\pi\,R^4}{8\,\eta}\frac{(p_1 - p_2)}{L} \qquad (1.35)$$

A vazão é proporcional à queda de pressão por unidade de comprimento, inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade e cresce com a quarta potência do raio do tubo.

Exemplo 9: A altura do líquido nos piezômetros indica que a pressão cai ao longo do conduto, mesmo se este tiver seção transversal uniforme e o líquido que escoa seja incompressível, como na figura ao lado. Explique.



Considerando as condições iniciais impostas pelo enunciado: seção transversal uniforme e fluido incompressível, podemos concluir que a velocidade é constante. Dessa forma, para explicarmos a queda de pressão ao longo do conduto teremos que considerar os efeitos da viscosidade. Observamos que o fluido não perde energia cinética, pois a velocidade permanece constante. Entretanto, podemos observar, através da queda de pressão ao longo do conduto, que o fluido perde energia potencial. Logo, de acordo com a lei de conservação da energia, a energia potencial perdida pelo fluido deve ser transformada em outra forma de energia, nesse caso específico, ela é transformada em energia interna (que poderia ser observada pelo aumento de temperatura do fluido) devido aos efeitos da viscosidade.

1.4.2 5Lei de Stokes:

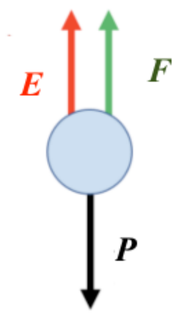
Para uma esfera de raio r que se move com velocidade v através de um fluido com viscosidade η sujeita a uma força F, supondo um escoamento laminar, temos:

$$F = 6\pi\eta r v \tag{1.36}$$

Esse resultado é utilizado em várias situações onde é observada uma partícula se movendo através de um fluido, como, por exemplo, o ar. Robert Millikan (1868-1953), no final do século XIX, utilizou este método para determinar os raios de pequenas gotas de óleo carregadas eletricamente, medindo a velocidade terminal das gotas no ar. Desta forma, ele conseguiu determinar a carga do elétron como 1,6x10^{-19}C, ganhando o prêmio Nobel em física em 1923 pelo seu trabalho.

Exemplo 10: Deduza a expressão para a velocidade terminal v_t de uma esfera de raio r e densidade ρ caindo sob a ação da força gravitacional em um fluido de viscosidade η e densidade ρ', supondo que o escoamento seja laminar e que a lei de Stokes é válida.

A definição de velocidade terminal é tal que a soma das forças sobre o corpo ou partícula deverá ser zero. Temos, agindo sobre a esfera, o empuxo, a viscosidade e a força de atração gravitacional:



$$\sum F_y = \mathrm{E} + \mathrm{F} - \mathrm{P}$$

$$\sum F_y = \rho' g V + F_{visc.} - mg$$

$$\sum F_y = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v_t - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho')$$

Exemplo 11: Com qual velocidade uma gota de água esférica de 0,3 mm de raio que cai de uma nuvem situada a 5,0 km de altura atinge a superfície? Considere a densidade do ar constante e igual a 1,201 Kg/m^3 igual, a densidade da água igual a 1000 Kg/m^3 e a viscosidade do ar igual a 1,800 x 10^{-5} poise

Conforme indicado no diagrama, a gota esférica sofre a ação de três forças: peso (P), viscosidade(F) e empuxo (E) tal que: $P = E + F$

O peso é dado por $P = mg = \rho_e V_e g$

o volume da gota esférica é $V_e = 4/3\pi r^3$ e ρ_e é a densidade da esfera.

O empuxo é dado por: $E = \rho_{ar} V_e g$

A força relacionada à viscosidade é dada pela Lei de Stoken

$$F = 6\pi\eta r v$$

Onde η é a viscosidade do ar. Assim

$$v = \frac{2}{9}\frac{gr^2}{\eta}(\rho_e - \rho_{ar})$$

E subsistindo os valores do problema temos:

$$v = \frac{2}{9}\frac{10 \times (0{,}3 \times 10^{-3})^2}{1{,}800 \times 10^{-5}}(1000 - 1{,}201)$$

$$v = 11\ m/s$$

1.5 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1.5.1. A água que escoa por um cano de 20cm de diâmetro passa por uma região de estrangulamento de 10cm de diâmetro. Se a velocidade na parte regular for de 2m/s, determinar:

(a) a velocidade no estrangulamento

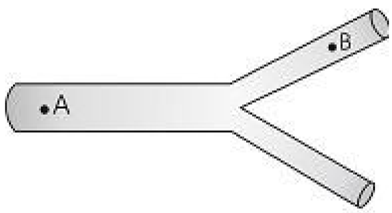
(b) a taxa de descarga em litros por segundo.

1.5.2. A tubulação que chega a um chuveiro tem 1 polegada de diâmetro. Suponha uma velocidade de escoamento de 4m/s.

(a) Calcule a vazão da água.

(b) Se a ducha tem 64 furinhos com diâmetro de aproximadamente 1,0mm, calcule a velocidade com a qual a água sai de cada furo da ducha.

1.5.3. No ponto A da figura ao lado, a pressão manométrica é 75kPa e a velocidade da água fluindo nesse tubo de 50mm de diâmetro é de 1,7m/s. O tubo se bifurca em dois tubos menores, cada um com diâmetro de 25mm. (a) Quais são as vazões em A e em B? (b) Qual é a velocidade no ponto B? (c) Qual é a pressão manométrica em B? Suponha fluxo não turbulento e altura constante.



1.5.4. Em certo ponto de um tubo, a velocidade de escoamento da água é de 2m/s e a pressão manométrica, $1{,}5\times10^4$Pa acima da atmosférica. Determine a pressão manométrica em um segundo ponto de linha de seção reta metade da do primeiro, 68cm abaixo do primeiro.

1.5.5. Um vento de 5m/s sopra paralelamente à superfície externa de uma janela de 2m por 3m. Estime a força resultante sobre a janela devida à diferença de pressão do ar entre as superfícies interna e externa. Admita que a diferença de pressão seja devida ao fluxo não turbulento de um fluido não-viscoso, incompressível. Considere a densidade do ar é 1,201 Kg/m^3

1.5.6. Que pressão manométrica é requerida nos condutos de uma cidade para que o jato de uma mangueira de incêndio possa alcançar uma altura de 20m?

1.5.7. Água a 20 ºC flui através de um cano de 1,0cm de raio. Se a velocidade de escoamento no centro for de 10cm/s, calcule a queda de pressão, devido à viscosidade, ao longo de um trecho do cano de 2m de comprimento.

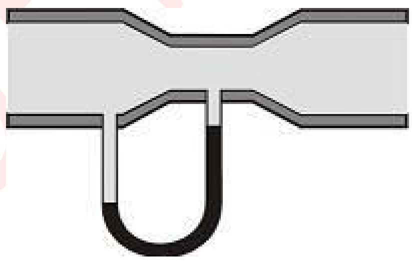
1.6 PROBLEMAS

1.6.1 Um rio de 21 m de largura e 4,3 m de profundidade drena uma região de 8.500 km^2 de área onde a precipitação pluviométrica média é 48 cm/ano. Um quarto desta água retorna à atmosfera por evaporação, mas o restante permanece no rio. Qual a velocidade média da água do rio?

1.6.2 Imagine a água escoando em um tubo de seção reta variável. Em um determinado ponto, a seção reta tem área igual a 0,10 m^2 e a velocidade do fluido é igual a 2,00 m/s. Aplicando a equação da continuidade, obtenha a velocidade do fluido nos pontos para os quais a seção reta possui área igual a (a) 0,15 m^2 (b) 0,07m^2 (c) Calcule o volume de água descarregada por uma extremidade aberta do tubo em 1 hora.

1.6.3 Considere dois riachos que se juntam para formar um rio. Um dos riachos tem largura de 8,2m, profundidade de 3,4 m e velocidade de escoamento de 2,3 m/s. O outro riacho possui 6,8m de largura, 3,2 m de profundidade e escoa a 2,6 m/s. A largura do rio é de 10,7 m e a velocidade de seu escoamento é de 2,8 m/s. Qual sua profundidade?

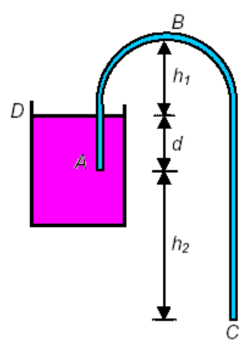
1.6.4 A seção do tubo mostrado na figura ao lado tem área transversal de 40cm^2 nas partes mais largas e 10cm^2 na garganta. Descarrega-se 30 litros de água no tubo em 5,0s. Determine: (a) as velocidades nas partes mais larga e mais estreita; (b) a diferença de pressão entre essas partes; (c) a diferença de altura entre as colunas de mercúrio no tubo em Uc



1.6.5 Em um furacão, o ar (considere a densidade do ar é 1,201 Kg/m^3) sopra sobre o telhado de uma casa a 110 km/h. (a) Qual a diferença de pressão entre o interior e o exterior da casa que tende a arrancar o teto? (b) Qual o módulo da força devida a esta diferença de pressão sobre um teto de 93 m^2?

1.6.6 Suponha que a arteriosclerose reduza de um fator 2 o raio do canal em uma artéria do coração. Admitindo que o sangue seja um fluido newtoniano e que o fluxo seja laminar, responda: (a) O que acontece com a pressão na artéria? (b) Qual é a variação da força sobre as paredes da artéria? Faça o esboço da situação inicial e da final, indicando as forças presentes no sistema. (c) O que pode acontecer se o diâmetro da artéria continuar sendo reduzido (d) De que fator o coração deve aumentar a diferença de pressão na artéria para manter a taxa de fluxo constante?

1.6.7 Um sifão é um dispositivo para remover líquidos de um recipiente que não pode ser tombado. Ele funciona como mostra a figura ao lado. O tubo deve ser inicialmente cheio, mas tão logo isto tenha sido feito, o líquido escoará até que seu nível paire abaixo da abertura do tubo em A. O líquido tem densidade r e viscosidade desprezível.

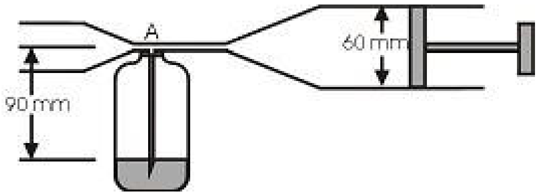


(a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C?

(b) Qual é a pressão no líquido no ponto máximo B?

(c) Qual é a maior altura possível h_1, a que um sifão pode fazer subir a água?

1.6.8 O nebulizador de inseticida da figura abaixo tem uma bomba com diâmetro de 60 mm. O nível do inseticida está a 90 mm abaixo do tubo de entrada A. O tubo em A tem 2 mm de diâmetro. Estime a velocidade mínima com que o êmbolo deve ser empurrado, para que o jato de ar na extremidade contenha, de fato, inseticida. Admita que o inseticida tenha a densidade da água e que o fluxo de ar seja incompressível e não-turbulento. Considere a densidade do ar igual a 1,201 kg/m^3.



1.6.9 Na figura abaixo temos uma vista em corte das camadas superiores da Terra. A superfície da Terra é dividida em várias camadas rígidas chamadas placas, que deslizam (lentamente!) sobre uma camada inferior "pastosa" chamada astenosfera. Veja na figura abaixo o valor de algumas dimensões típicas. Admita que a velocidade da placa rígida na figura é v = 48mm/ano, e que a base da astenosfera não se move. Calcule a tensão de cisalhamento na base da placa. A viscosidade do material da astenosfera e 40,0 Pa.s. Ignore a curvatura da terra.

1.6.10 Suponha que um avião atravesse uma região tal que o ar passando horizontalmente pela sua asa tenha uma velocidade de 100 m/s na superfície de cima e 90 m/s na de baixo. Se a asa pesar 3000N e tiver uma área de 3,6 m^2, qual a força efetiva sobre a mesma? A densidade do ar é 0,0012 g/cm^3.

1.6.11 Demonstre que a velocidade terminal de uma esfera de densidade ρ_e pode ser escrita como:

$$v_t = \frac{[2(\rho_e - \rho)r^2 g]}{9\eta}$$

onde η representa a viscosidade e ρ, a densidade do meio e calcule a velocidade terminal com que uma bolha de CO_2 de 1mm de diâmetro de desloca em água a 4 ºC. Considere a densidade do CO_2 igual a 1,978 kg/m^3 e a viscosidade e a densidade da água iguais a 1,518 X 10^{-3} Pa.s e 1, 000 g/cm^3 respectivamente. O valor obtido é condizente com observações cotidianas?

1.6.12 Uma esfera de latão com massa igual a 0,35g cai com velocidade terminal igual a 5cm/s em um líquido desconhecido. Sabendo que a densidade do líquido é igual a 2900kg/m^3, qual é sua viscosidade?

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

1. ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: ESCOAMENTO

1.1 Liste pelo menos quatro exemplos de escoamento de fluidos observados em seu cotidiano e tente classificá-los de acordo com os tipos listados anteriormente. Tente considerar casos em que o fluido não seja um líquido.

- O escoamento do gás que sai do botijão, passa pela mangueira e chega ao fogão pode ser classificado como: estacionário, incompressível, não viscoso e não-rotacional.

- O escoamento de água pela tubulação de uma casa pode ser classificado como: estacionário, incompressível, não viscoso e irrotacional.

- O escoamento de água de uma banheira, onde se forma um vórtice pode ser classificado como: não estacionário, incompressível, não viscoso e não-rotacional.

- O escoamento de um rio, que flui com pequena velocidade, pode ser classificado como: estacionário, incompressível, não viscoso e irrotacional.

- O movimento de placas tectônicas ao longo de milhares de anos pode ser aproximado por um escoamento estacionário, incompressível, não viscoso e não-rotacional.

- Os deslizamentos de terra em montanhas também são descritos pelos modelos de hidrodinâmica e, em geral, considera-se que o escoamento é rotacional e não estacionário, mas dependendo das condições do deslizamento pode ser incompressível, ou compressível, viscoso ou não viscoso.

2. **ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: CONTINUIDADE**

2.1 O que representa a equação de continuidade? Quais são as condições necessárias para que a mesma possa ser utilizada?

A equação de continuidade representa a lei de conservação da massa na dinâmica dos fluidos. Para que a mesma possa ser utilizada, algumas condições devem ser atendidas. São elas:

- Não deve haver fontes e/ou sumidouros entres os pontos de aplicação da equação.

- O escoamento deve ser estacionário, não viscoso e incompressível

2.2 Por que o jato d'água de uma torneira fica mais estreito à medida que cai?

Observando a equação de continuidade (Av = constante), concluímos que em um escoamento onde a velocidade for maior, a área de seção transversal deve ser menor. Dessa forma, estando o jato d'água sob ação da gravidade, o mesmo é acelerado e tem sua área de seção transversal diminuída ao longo da queda, sendo essa diminuição proporcional ao aumento de velocidade

3. **ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: EQUAÇÃO DE BERNOULLI**

3.1 Quais as condições do fluido em movimento que possibilitam a utilização da equação de Bernoulli?

A equação de Bernoulli na forma convencional, sem a introdução de parâmetros que indiquem a variação de energia potencial do fluido (compressibilidade), resistência ao escoamento (viscosidade) ou mesmo variação na energia cinética de rotação das moléculas do fluido, pode ser utilizada se o escoamento for ideal, ou seja, irrotacional, não viscoso e incompressível. Sendo o escoamento irrotacional, pode-se analisar quaisquer dois pontos do escoamento em qualquer linha de fluxo, ou seja, o escoamento não precisa, nesse caso, ser estacionário

4. **ATIVIDADES PARA AUTO AVALIAÇÃO: EQUAÇÃO DE BERNOULLI**

4.1 Sempre que possível, os aviões decolam e pousam de frente para o vento. Por quê?

Ao decolar e pousar contra o vento os aviões podem realizar essas manobras a uma velocidade menor, tendo em vista que a velocidade relativa do vento pode ser subtraída da velocidade que é realmente necessária para que o gradiente de pressão sobre as asas possibilite tais manobras

4.2 Um furacão consiste num vórtice de ar girando rapidamente. Por que a pressão é sempre muito menor no centro do que na periferia? Como esta condição explica o grande poder destrutivo do furacão?

Sabe-se, pela equação de Bernoulli, que quando temos um fluido em movimento, sua pressão é menor do que se ele estivesse parado. Com isso, como o furacão consiste em ar girando a grande velocidade, no vórtice a pressão é menor, as massas de ar que se encontram em volta são então forçadas pelo gradiente de pressão a se deslocarem de encontro ao vórtice, gerando fortes ventos à sua volta. Chegando ao vórtice, como o furacão toca o solo as massas só podem subir, a grande velocidade conforme a equação da continuidade. Se imaginarmos o vórtice como um tubo de diâmetro muito menor que sua vizinhança, o fluxo tem que se manter. Isso explica as pressões bem menores que a pressão atmosférica que freqüentemente são registradas no centro dos furacões e também o grande poder de destruição desses sistemas, uma vez que o ar se desloca para cima, as massas que chegam ao vórtice simplesmente arrancam as casas do solo

4.3 Dê exemplos da utilização da equação de Bernoulli para explicar fenômenos que fazem parte do seu cotidiano

Pequenas "bombas" de remédios para insetos, incluindo os aerossóis; o formato das asas dos carros utilizados em corridas; trajetórias curvas de bolas quando lançadas com grandes velocidades; tubos de encanamentos em residências

RESPOSTAS: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1.5.1. A água que escoa por um cano de 20cm de diâmetro passa por uma região de estrangulamento de 10cm de diâmetro. Se a velocidade na parte regular for de 2m/s, determinar:

(a) a velocidade no estrangulamento.

Pela equação da continuidade temos que velocidade em *a* e *b* são relacionadas por

$$A_a v_a = A_b v_b$$

$$\pi r_a^2 v_a = \pi r_b^2 v_b$$

$$v_b = \frac{r_a^2}{r_b^2} v_a = 4v_a = 8\ m/s$$

(b) a taxa de descarga em litros por segundo.

$$V = A_a v_a = A_b v_b = \pi r_a^2 v_a = \pi r_b^2 v_b = 3{,}14 \times (10 \times 10^{-2})^2\ m^2 \times 2m/s = 63\ litros\ /s$$

1.5.2. A tubulação que chega a um chuveiro tem 1 polegada de diâmetro. Suponha uma velocidade de escoamento de 4m/s.(a) Calcule a vazão da água (b) Se a ducha tem 64 furinhos com diâmetro de aproximadamente 1,0mm, calcule a velocidade com a qual a água sai de cada furo da ducha.

(a) Pela equação da continuidade temos:

$$V = A_a v_a = \pi r_a^2 v_a = 3{,}14 \times (1{,}27 \times 10^{-2})^2\ m^2 \times 4\ m/s = 2{,}03\ litros\ /s$$

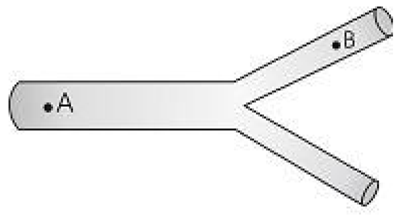
(b) Pela equação da continuidade temos que em cada furinho a vazão será :

$$V_F = \frac{V}{64} = \frac{2{,}03\ l/s}{64} = 0{,}032\frac{l}{s} = 3{,}2 \times 10^{-5}\ m^3/s$$

Logo

$$v_F = \frac{V_F}{A_F} = \frac{3{,}2 \times 10^{-5}\ m^3/s}{3{,}14\ \times (0{,}5 \times 10^{-2})^2\ m^2} = 0{,}4\ m/s$$

1.5.3. No ponto A da figura ao lado, a pressão manométrica é 75kPa e a velocidade da água fluindo nesse tubo de 50mm de diâmetro é de 1,7m/s. O tubo se bifurca em dois tubos menores, cada um com diâmetro de 25mm.



(a) Quais são as vazões em A e em B?

A resposta deste subitem vem da equação da continuidade. Em A, temos que a vazão é dada por:

$$V_a = A_a v_a \Rightarrow R_a = \pi r^2 v_a = 3{,}14 \times (25 \times 10^{-3} m)^2 \times 1{,}7 \frac{m}{s} = 3{,}3 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

(b) Qual é a velocidade no ponto B?

Pela equação da continuidade, temos que em B o fluxo deve ser a metade do fluxo em A, já que a áre da seção reta neste ponto é a metade daquela do ponto A, então:

$$V_b = \frac{V_a}{2} = 1{,}65\ m^3/s$$

$$V_b = \frac{V_b}{A_b} = \frac{1{,}65 \frac{m^2}{s}}{3{,}14 \times (12{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = 3{,}4 \frac{m}{s}$$

(c) Qual é a pressão manométrica em B? Suponha fluxo não turbulento e altura constante.

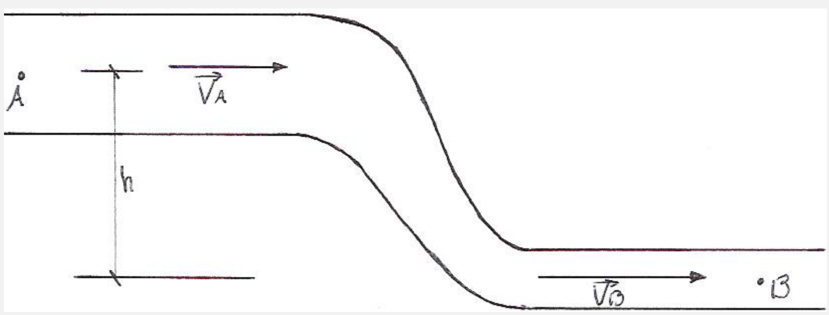
A pressão pode ser encontrada pela equação de Bernoulli, lembrando que a pressão no ponto A é a pressão manométrica

$$P_a + \frac{\rho v_a^2}{2} = P_b + \frac{\rho v_b^2}{2} \Rightarrow P_b = P_a + \frac{\rho}{2}(v_a^2 - v_b^2)$$

$$P_b = 75Kpa + \frac{1000 \frac{Kg}{m^3}}{2}(1{,}7^2 - 3{,}4^2) m^2/s^2$$

$$P_b = (75000 - 4335) pa = 70{,}7\ Kpa$$

1.5.4. Em certo ponto de um tubo, a velocidade de escoamento da água é de 2m/s e a pressão manométrica, 1,5x10[4]Pa acima da atmosférica. Determine a pressão manométrica em um segundo ponto de linha de seção reta metade da do primeiro, 68cm abaixo do primeiro.



O enunciado já diz que a pressão indicada em A é a pressão manométrica, portanto pode-se aplicar a equação de Bernoulli e chegar diretamente à pressão manométrica em B, então:

$$P_a + \frac{\rho v_a^2}{2} + \rho g y_a = P_b + \frac{\rho v_b^2}{2}\rho + \rho g y_b$$

$$P_b = P_a + \frac{\rho}{2}(v_a^2 - v_b^2) - \rho g(y_a - y_b)$$

$$A_a v_a = A_b v_b \Rightarrow v_b = \frac{A_a v_a}{A_b} = 2v_a$$

$$P_b = P_a + \frac{\rho}{2}(v_a^2 - 4v_a^2) - \rho g \Delta y$$

$$P_b = 1{,}50 \times 10^4 \text{ Pa} + \frac{1000\ kgm^{-3}}{2}(4-16)m^2/s^2 + \frac{1000kg}{m^3} \times 10\ m/s^2 \times 0{,}68m$$

$$P_b = 1{,}58 \times 10^4 \text{ Pa}$$

1.5.5. Um vento de 5m/s sopra paralelamente à superfície externa de uma janela de 2m por 3m. Estime a força resultante sobre a janela devida à diferença de pressão do ar entre as superfícies interna e externa. Admita que a diferença de pressão seja devida ao fluxo não turbulento de um fluido não-viscoso, incompressível. Considere a densidade do ar é 1,201 Kg/m^3.

A solução vem diretamente da aplicação da equação de Bernoulli, sabendo que a força é o produto da pressão pela área:

$$P_a + \frac{\rho v_a^2}{2} = P_b + \frac{\rho v_b^2}{2}$$

onde P_a e v_a são a pressão e a velocidade do vento dentro da casa, sendo que v_a vale zero; P_b e v_b são a pressão e a velocidade do vento fora da casa.

$$\Delta P = P_a - P_b = \frac{\rho}{2}(v_b^2 - v_a^2) = \frac{\rho}{2}v_b^2$$

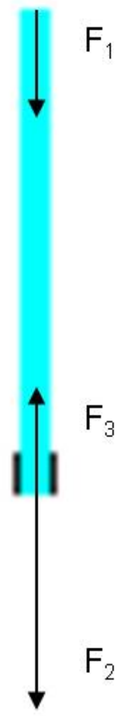
$$\Delta P = \frac{1{,}201}{2}\frac{Kg}{m^3} \times 25\ \frac{m^2}{s^2} = 15 \text{ Pa}$$

$$F = A_{janela}\Delta P$$

$$F = (3 \times 2)m^2 \times 15 \text{ Pa} = 90\ N$$

1.5.6. Que pressão manométrica é requerida nos condutos de uma cidade para que o jato de uma mangueira de incêndio possa alcançar uma altura de 20m?

A forma mais simples para se resolver este problema parece ser não em termos da equação de Bernoulli, mas sim em termos da segunda lei de Newton. Imaginando uma coluna vertical de água que a pressão manométrica dentro do tubo por onde ela sai tem que ser capaz de sustentar, conforme a figura abaixo.



F_1 é a força que a pressão atmosférica faz na coluna d'água:

$$F_1 = AP_0$$

F_2 é o peso da coluna d'água:

$$F_2 = mg = \rho V g = \rho A h g$$

F_3 é a força que a pressão no interior do tubo faz para sustentar a coluna:

$$F_3 = AP$$

No equilíbrio

$$F_3 = F_1 + F_2$$

$$AP = AP_0 + \rho A h g$$

$$P = P_0 + \rho h g$$

Mas o enunciado pede a pressão manométrica, então,

$$P = \rho h g = 1000\frac{kg}{m^3} \times 10\frac{m}{s^2} \times 20\,m = 2{,}0 \times 10^5\ Pa$$

1.5.7. Água a 20 ºC flui através de um cano de 1,0cm de raio. Se a velocidade de escoamento no centro for de 10cm/s, calcule a queda de pressão, devido à viscosidade, ao longo de um trecho do cano de 2m de comprimento.

$$v(r) = \Delta P \frac{(R^2 - r^2)}{4\eta L}$$

$$\Delta P = \frac{v 4\eta L}{(R^2 - r^2)}$$

$$\Delta P = \frac{0{,}1\frac{m}{s} \times 4 \times (1 \times 10^{-3})\ \text{Pa.s} \times 2\,m}{((0{,}01)^2 - (0)^2)\,m^2}$$

$$\Delta P = 8\,Pa$$

RESPOSTAS: PROBLEMAS

1.6.1 Um rio de 21m de largura e 4,3m de profundidade drena uma região de 8.500km^2 de área onde a precipitação pluviométrica média é 48cm/ano. Um quarto desta água retorna à atmosfera por evaporação, mas o restante permanece no rio. Qual a velocidade média da água do rio?

Iremos utilizar a equação de continuidade nesse problema. Para isso, faremos as seguintes considerações: a densidade pluviométrica = 48 cm/ano = 1,5 x 10 $^{-8}$ m/s; a área da região que recebe a chuva é 8500Km^2 = 8,5 x 10^7 m^2; a área de seção transversal do rio = 21m x 4,3m = 90,3m^2. Logo, pela equação da continuidade onde $v_2$velocidade média do rio, e lembrando que apenas ¾ da água precipitada permanece no rio, temos:

$$\frac{3}{4} \times 8{,}5 \ \times 10^{7} \ m^{2} \ 1{,}5 \ \times \ 10^{-8} \frac{m}{s} = \ v_{2} \ 90{,}3 \ m^{2}$$

$$v_{2} = 0{,}011 \ m/s$$

1.6.2 Imagine a água escoando em um tubo de seção reta variável. Em um determinado ponto, a seção reta tem área igual a 0,10m^2 e a velocidade do fluido é igual a 2m/s. Aplicando a equação da continuidade, obtenha a velocidade do fluido nos pontos para os quais a seção reta possui área igual a (a) 0,15 m^2 (b) 0,07m^2 (c) Calcule o volume de água descarregada por uma extremidade aberta do tubo em 1 hora.

A equação da continuidade diz que:

$$A_{1} v_{1} = \ A_{2} v_{2}$$

Logo na seção reta de 0,150 m^2 a velocidade de escoamento vale

$$v_{1} = \frac{0{,}10 \ m^{2} \ \times \ 2{,}00 \ m/s}{0{,}15 \ m^{2}} = 1{,}33 \ m/s$$

Logo na seção reta de 0,07 m^2 a velocidade de escoamento vale

$$v_{1} = \frac{0{,}10 \ m^{2} \ \times \ 2{,}00 \ m/s}{0{,}07 \ m^{2}} = 2{,}86 \ m/s$$

O volume de água descarregada por uma extremidade aberta do tubo em 1 hora é o mesmo em todos os casos e vale:

$$V = 0{,}10 \ m^{2} \times \ 2{,}00 \frac{m}{s} = 0{,}15 \ m^{2} \times \ 1{,}33 \ \frac{m}{s} = 0{,}07 \ m^{2} \times \ 2{,}86 \ \frac{m}{s} = 720 \ m^{3}/hora$$

1.6.3 Considere dois riachos que se juntam para formar um rio. Um dos riachos tem largura de 8,2m, profundidade de 3,4m e velocidade de escoamento de 2,3 m/s. O outro riacho possui 6,8m de largura, 3,2m de profundidade e escoa a 2,6m/s. A largura do rio é de 10,7m e a velocidade de seu escoamento é de 2,8m/s. Qual sua profundidade?

A equação da continuidade diz que a vazão se conserva, logo:

$$V_{rio} = V_{riachos}$$

$$A_{rio} v_{rio} = \ A_{R1} v_{R1} + \ A_{R2} v_{R2}$$

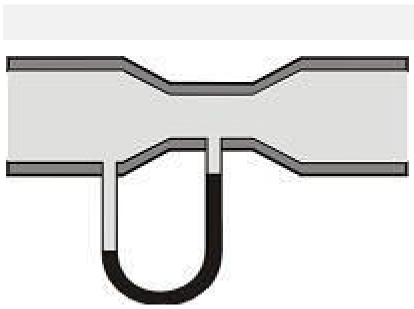
$$P_{rio} L_{rio} v_{rio} = \ P_{R1} L_{R1} v_{R1} + \ P_{R2} L_{R2} v_{R2}$$

Onde A, P e L são área, largura e profundidade respectivamente.

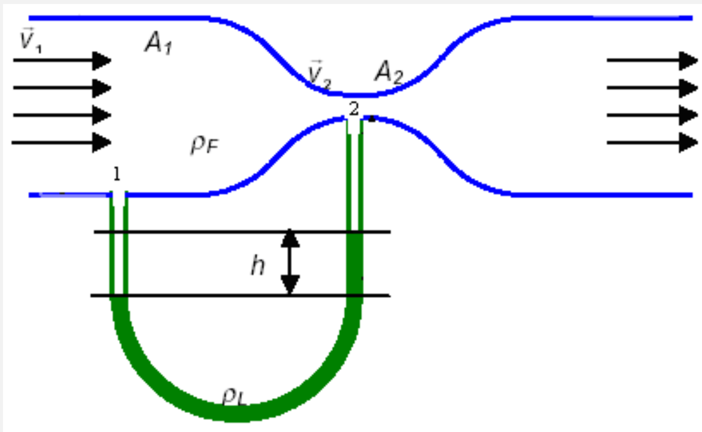
$$P_{rio} = \frac{P_{R1} L_{R1} v_{R1} + \ P_{R2} L_{R2} v_{R2}}{L_{rio} v_{rio}}$$

$$P_{rio} = \frac{3{,}4 \ m \times 8{,}3 \ m \times 2{,}3 \ m/s + \ 3{,}2 \ m \times \ 6{,}8 \ m \times 2{,}6 \ m/s}{10{,}7 \ m \ \times \ 2{,}8 \ m/s} = 4{,}0 \ m$$

1.6.4 A seção do tubo mostrado na figura ao lado tem área transversal de $40cm^2$ nas partes mais largas e $10cm^2$ na garganta. Descarrega-se 30 litros de água no tubo em 5,0s. Determine: (a) as velocidades nas partes mais larga e mais estreita; (b) a diferença de pressão entre essas partes; (c) a diferença de altura entre as colunas de mercúrio no tubo em Uc



Todas as respostas podem ser obtidas da aplicação direta da equação da continuidade e da equação de Bernoulli. Observe a imagem abaixo



a) Se 30 litros são descarregados no tubo em 5s, foram, portanto, 6 litros por segundo, ou seja:

$$V = 6\frac{litros}{s} = 6{,}0 \times 10^{-3}\frac{m^3}{s} = constante$$

Então, se a vazão V é constante, as velocidades v_1 e v_2 vêm diretamente da equação da continuidade:

$$V = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{V}{A_1} = \frac{6{,}0 \times 10^{-3}\frac{m^3}{s}}{4{,}0 \times 10^{-3}\, m^2} = 1{,}5\frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{V}{A_2} = \frac{6{,}0 \times 10^{-3}\frac{m^3}{s}}{1{,}0 \times 10^{-3}\, m^2} = 6{,}0\frac{m}{s}$$

b) A diferença de pressão virá diretamente da aplicação da equação de Bernoulli, sabendo que o fluido em escoamento é a água:

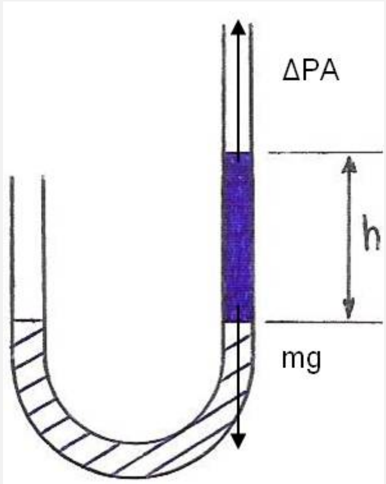
$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\rho_{água}}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1000\frac{kg}{m^3}}{2}\left[(6{,}0\frac{m}{s})^2 - (1{,}5\frac{m}{s})^2\right] = 16{,}875\ Kpa$$

c) Sabendo que o líquido no tubo em U é o mercúrio e, já tendo em mãos a diferença de pressão, pode-se aplicar a segunda lei de Newton e o princípio de Arquimedes ao líquido no tubo em U, ou, não possuindo a diferença de pressão, manipular algebricamente a equação da continuidade e a equação de Bernoulli para chegar ao mesmo resultado. Vamos fazer das duas formas:

Aplicando a segunda lei de Newton à massa de mercúrio em destaque, temos:

$$\Delta PA = mg = \rho_M Ahg$$

$$h = \frac{\Delta P}{\rho_M g} = \frac{16{,}875\ Kpa}{\left(13{,}6 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}\right) \times 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = 12{,}7 \times 10^{-2} m$$



Manipulando-se algebricamente a equação de Bernoulli e a equação da continuidade chegamos a uma expressão para h:

$$h = \frac{v_1^2\, \rho_H (A_1^2 - A_2^2)}{2g A_2^2 (\rho_M - \rho_H)}$$

Substituindo os valores e realizando as contas, temos que:

$$h = \frac{(1{,}5\ m/s)^2 \times 1000 \frac{kg}{m^3} \times [(4{,}0 \times 10^{-3}\ m^2)^2 - (1{,}0 \times 10^{-3}\ m^2)^2]}{2 \times 9{,}8 \frac{m}{s^2} \times (1{,}0 \times 10^{-3}\ m^2)^2 \times (13{,}6 \times 10^3 - 1{,}0, \times 10^3) \frac{kg}{m^3}} = 13{,}7 \times 10^{-2} m$$

1.6.5 Em um furacão, o ar (considere a densidade do ar é 1,201 Kg/m^3) sopra sobre o telhado de uma casa a 110 km/h.

(a) Qual a diferença de pressão entre o interior e o exterior da casa que tende a arrancar o teto?

(b) Qual o módulo da força devida a esta diferença de pressão sobre um teto de 93 m^2?

Usando a equação de Bernoulli e considerando que o ar dentro da casa está parado e que não existe variação do potencial (deslocamento de massas entre alturas diferentes) temos que:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\rho_{ar}}{2} v_2^2 = \frac{1{,}201 \frac{kg}{m^3}}{2} \left(\frac{110 \times 10^3}{3600} \frac{m}{s}\right)^2 = 1{,}12\ Kpa$$

$$F = A\Delta P = 1{,}12 \times 10^3\ pa \times 93\ m^2 = 1{,}04 \times 10^5\ N$$

Ou seja, se o telhado estiver solto e pesar menos que 10000 Kg, ele pode ser ejetado da casa pela força exercida pelo ar dentro da casa.

1.6.6 Suponha que a arteriosclerose reduza de um fator 2 o raio do canal em uma artéria do coração. Admitindo que o sangue seja um fluido newtoniano e que o fluxo seja laminar, responda:

(a) O que acontece com a pressão na artéria?

(b) Qual é a variação da força sobre as paredes da artéria? Faça o esboço da situação inicial e da final, indicando as forças presentes no sistema.

(c) O que pode acontecer se o diâmetro da artéria continuar sendo reduzido?

(d) De que fator o coração deve aumentar a diferença de pressão na artéria para manter a taxa de fluxo constante?

(a) A pressão arterial P_A , pensando do ponto de vista de um fluido escoando (sangue), é obtida da diferença entre a pressão no interior da artéria caso o sangue estivesse estático e a pressão dinâmica, ou seja

$$P_A = P_{estática} - \frac{\rho_{sangue}}{2} v_{sangue}^2$$

Lembrando que a massa de fluido incompressível transportado se conserva, temos que

$$vA = C$$

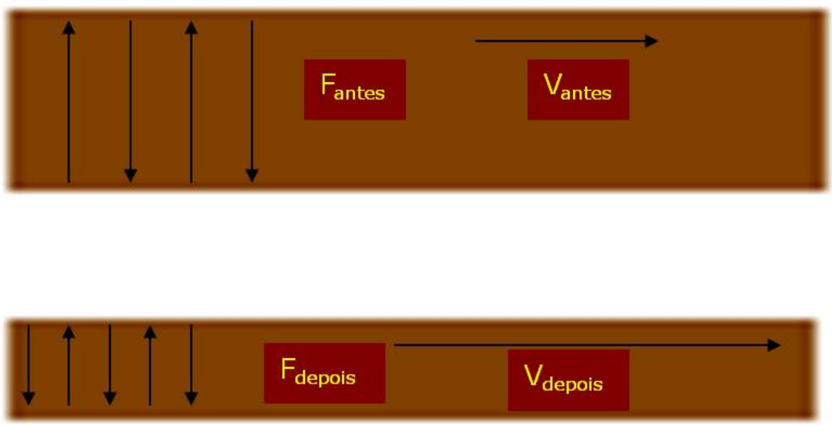
Onde C = constante. Logo

$$v = \frac{C}{A}$$

Como o raio da artéria vai diminuir de um fator 2 e como a área se encontra no denominador da equação acima, podemos concluir que a velocidade de escoamento do sangue vai aumentar de um fator de 4. Logo, a pressão arterial vai reduzir já que a pressão dinâmica será aproximadamente 8 vezes menor em relação à pressão normal

(b) A figura abaixo mostra uma ilustração da artéria antes e depois da redução de seu diâmetro devido à arteriosclerose. A variação da força devido à mudança da pressão dinâmica será

$$F = PA$$



$$F_{antes} = \left[\frac{\rho_{sangue}}{2}\left(\frac{C}{A}\right)^2\right] A$$

$$F_{depois} = \left[\frac{\rho_{sangue}}{2}\left(\frac{4C}{A}\right)^2\right] \frac{A}{4}$$

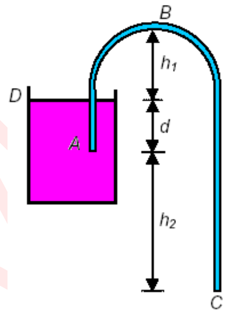
$$\Delta F = F_{depois} - F_{antes} = -3\left[\frac{\rho_{sangue}}{2}\left(\frac{C}{A}\right)^2\right]A$$

E portanto, conclui-se que a força do sangue sobre a parede da artéria se reduz de um fator igual a 3 a força antes do redução do diâmetro.

(c) Caso o raio da artéria continue diminuindo a pressão interna diminuirá até que o raio da artéria tenda a zero i.e até que a artéria seja completamente obstruída.

(d) Para restabelecer a pressão arterial inicial, o coração deve aumentar a pressão estática de um fator de 1/3

1.6.7 Um sifão é um dispositivo para remover líquidos de um recipiente que não pode ser tombado. Ele funciona como mostra a figura ao lado. O tubo deve ser inicialmente cheio, mas tão logo isto tenha sido feito, o líquido escoará até que seu nível paire abaixo da abertura do tubo em A. O líquido tem densidade r e viscosidade desprezível.



(a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C?

(b) Qual é a pressão no líquido no ponto máximo B?

(c) Qual é a maior altura possível h_1, a que um sifão pode fazer subir a água?

(a) Da equação de Bernoulli, vem que

$$P_D + \frac{\rho}{2}v_D^2 + \rho g(d + h_2) = P_C + \frac{\rho}{2}v_C^2 + 0$$

A altura em C vale zero, a velocidade em D será muito menor, que a velocidade em C, tendendo a zero. Além disso, P_D e P_C estão em contato com a atmosfera, logo $P_D = P_C = P_o$, então a equação acima fica:

$$P_D - P_C + \rho g(d + h_2) = \frac{\rho}{2}v_C^2$$

$$v_c = \sqrt{2g(d + h_2)}$$

b) Mais uma vez vamos utilizar a equação de Bernoulli, da seguinte forma:

$$P_D + \frac{\rho}{2}v_D^2 + \rho g(d + h_2) = P_B + \frac{\rho}{2}v_B^2 + \rho g(d + h_1 + h_2)$$

Assim, fazendo $v_D = 0$, $v_B = v_C$ e $P_D = P_o$, temos

$$P_B = P_o - \frac{\rho}{2}(\sqrt{2g(d + h_2)})^2 - \rho g h_1$$

$$P_B = P_o - \rho g(d + h_1 + h_2)$$

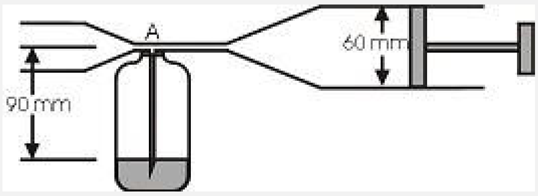
c) Esta é uma questão de limite. Pede-se o limite de h1 quando PB tende a zero, então:

$$h_1 = \frac{P_B - P_o + \rho g(d + h_2)}{-\rho g}$$

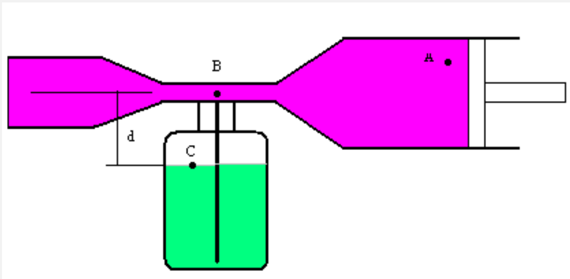
$$\lim_{P_B \to 0} h_1 = \frac{P_B - P_o + \rho g(d + h_2)}{-\rho g} = \frac{P_o}{\rho g} - (d + h_2)$$

Os valores da pressão atmosférica e da densidade da água não serão substituídos por simplicidade, já que de qualquer forma teremos uma resposta em função de d e h_2. Essa equação vale para qualquer líquido

1.6.8 O nebulizador de inseticida da figura abaixo tem uma bomba com diâmetro de 60 mm. O nível do inseticida está a 90 mm abaixo do tubo de entrada A. O tubo em A tem 2 mm de diâmetro. Estime a velocidade mínima com que o êmbolo deve ser empurrado, para que o jato de ar na extremidade contenha, de fato, inseticida. Admita que o inseticida tenha a densidade da água e que o fluxo de ar seja incompressível e não-turbulento. Considere a densidade do ar é 1,201 Kg/m^3.



Veja a figura abaixo:



A diferença de pressão entre os pontos A e B deve ser tal que possa elevar uma coluna de inseticida a uma altura de 90mm. Aplicando-se a equação da continuidade para os pontos A e B, temos que:

$$A_A v_A = A_B v_B$$

$$v_A = \frac{A_B v_B}{A_A}$$

Da equação de Bernoulli aplicada aos pontos B e C, obtém-se:

$$P_B + \frac{\rho_{ar}}{2} v_B^2 + \rho_{ar} g y_B = P_C + \frac{\rho_{agua}}{2} v_c^2 + \rho_{agua} g y_C$$

Porém, $P_D = P_C = P_o$, $y_B = 0$ e $v_C = 0$, logo

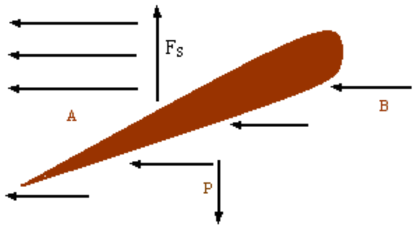
$$v_B = \sqrt{\frac{2\rho_{agua} g y_C}{\rho_{ar}}} = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 90 \times 10^{-3}}{1{,}201}} = 38{,}3\ m/s$$

A velocidade mínima que o êmbolo deve ser empurrado vale.

$$v_A = \frac{A_B v_B}{A_A} = \frac{\pi (1{,}0 \times 10^{-3})^2\ m^2 \times 38{,}3\ m/s}{\pi (30{,}0 \times 10^{-3})^2 m^2} = 0{,}043\ m/s$$

1.6.9 Suponha que um avião atravesse uma região tal que o ar passando horizontalmente pela sua asa tenha uma velocidade de 100 m/s na superfície de cima e 90 m/s na de baixo. Se a asa pesar 3000N e tiver uma área de 3,6 m^2, qual a força efetiva sobre a mesma? A densidade do ar é 0,0012 g/cm^3.

Sabe-se que a força é o produto entre a pressão exercida e a área e que a pressão varia conforme a velocidade de escoamento do fluido. Nesse caso, a resultante ficará da seguinte forma



$$\vec{R} = \vec{F_s} - \vec{P}$$

Em que $\vec{R}$ será o módulo da força resultante, $\vec{P}$ o módulo da força peso e $\vec{F}$ o módulo da força de sustentação que será obtida da equação de Bernoulli

$$\vec{F_s} = \Delta PA = \frac{\rho_{ar}}{2}(v_B^2 - v_A^2)A$$

$$\vec{F_s} = \frac{1{,}200}{2} Kg/m^3 \times \left[\left(100\frac{m}{s}\right)^2 - \left(90\frac{m}{s}\right)^2\right] \times 3{,}6\, m^2 = 4104\, N$$

$$\vec{R} = 4104 - 3000 = 1014\, N$$

1.6.10 Na figura abaixo temos uma vista em corte das camadas superiores da Terra. A superfície da Terra é dividida em várias camadas rígidas chamadas placas, que deslizam (lentamente!) sobre uma camada inferior "pastosa" chamada astenosfera. Veja na figura abaixo o valor de algumas dimensões típicas. Admita que a velocidade da placa rígida na figura é v = 48 mm/ano, e que a base da astenosfera não se move. Calcule a tensão de cisalhamento na base da placa. A viscosidade do material da astenosfera e 40,0 Pa.s. Ignore a curvatura da terra.

De acordo com a definição de tensão de cisalhamento “Força tangente ($F_{||}$) à superfície de um material dividida pela área (A) sobre a qual ela atua”, temos que $F_{||}$ será igual à força de arrasto viscosa que atua sobre a base da placa rígida, logo

$$Tensão\ de\ cisalhamento = \frac{\eta A v}{DA} = \frac{\eta v}{D}$$

Onde A é a área da base da placa, v é a velocidade da placa, D é a altura de material da astenosfera e η é a viscosidade do material da astenosfera. Inserindo os dados do problema na equação anterior, chegamos ao seguinte resultado

$$Tensão\ de\ cisalhamento = \frac{40{,}0\ \mathrm{Pa.s.}\times\ 1{,}56 \times\ 10^{-9}\mathrm{m/s}}{190\ \times\ 10^3\ m} = 3{,}2\ \times\ 10^{-13} N/m^2$$

1.6.11 Demonstre que a velocidade terminal de uma esfera de densidade ρ_e pode ser escrita como:

$$v_t = \frac{[2(\rho_e - \rho)r^2 g]}{9\eta}$$

onde η representa a viscosidade e ρ, a densidade do meio e calcule a velocidade terminal com que uma bolha de CO_2 de 1mm de diâmetro de desloca em água a 4 ºC. Considere a densidade do CO_2 igual a 1,978 kg/m^3 e a viscosidade e a densidade da água iguais a 1,518 X 10^{-3} Pa.s e 1, 000 g/cm^3 respectivamente. O valor obtido é condizente com observações cotidianas?

O empuxo sobre a bolha é dado por $E = \rho g V$, onde $V = \ 4/3\pi r^3$ e ρ é a densidade da água. Pela equação de Stokes temos que $F_v = 6\pi\eta r v_t$. O peso da bolha de gás é dado por $P = m\ g = \rho_e V_e g = \frac{4}{3}\rho_e g \pi r^3$. Somando as forças que atuam na bolha

$$E + F_v - P = 0$$

$$\frac{4}{3}\rho g \pi r^3 + 6\pi\eta\ r v_t - \frac{4}{3}\rho_e g \pi r^3 = 0$$

$$v_t = \frac{[2(\rho_e - \rho)r^2 g]}{9\eta}$$

Substituindo os valores das propriedades físicas fornecidos no problema temos:

$$v_t(CO_2) = \left|\frac{[2 \times (1{,}978\ kg/m^3 - 1000\ kg/m^3)\ \times\ 0{,}25\ \times\ 10^{-6}\ m^3 \times\ 9{,}8\ m/s^2]}{9\ \times\ 1{,}518\ \times\ 10^{-3}\ \mathrm{Pa.s}}\right| = 0{,}29\ m/s$$

1.6.12 Uma esfera de latão com massa igual a 0,35 g cai com velocidade terminal igual a 5,00 cm/s em um líquido desconhecido. Sabendo que a densidade do líquido é igual a 2,90 x 10^3 kg/m^3, qual seria sua viscosidade?

A densidade do latão vale 8,73 x 103 Kg/m³, logo o raio de uma esfera possuindo 0,35 g de latão vale

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \times \frac{0{,}35\ \times 10^{-3}\ Kg}{8{,}73\ \times 10^3 kg/m^3}} = 0{,}0021\ m$$

Usando a equação de velocidade terminal derivada da lei de Stokes, temos:

$$\eta = \frac{[2(\rho_e - \rho)r^2 g]}{9 v_t} =$$

$$\eta = \left|\frac{[2 \times (8{,}73\ - 2{,}90\ )\ \times 10^3\ kg/m^3 \times\ 4{,}50\ \times\ 10^{-6}\ m^3 \times\ 9{,}80\ m/s^2]}{9\ \times\ 5{,}00\ \times\ 10^{-2} m/s}\right| = 1{,}14\ \mathrm{Pa.s}$$