2. Intégrales de Riemann généralisées

Ex. 2.1.a exemples élémentaires

Dire si les intégrales suivantes sont généralisées ou non, convergentes ou non (justifier !). On donnera l'allure des fonctions à intégrer.

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt \quad , \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \quad , \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt \quad , \quad I_4 = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad I_5 = \int_{+1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \sin x\,dx \quad , \quad I_7 = \int_0^{\pi/2} \tan(x) \quad , \quad I_8 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \quad , \quad I_9 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Ex. 2.1.b Autres exemples

Même question qu'au 2.1.a (sauf qu'on on ne demande pas l'allure des fonctions à intégrer) pour :

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \quad , \quad J_2 = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Arc}\tan x}{1+x^2}\,dx \quad , \quad J_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}} \quad , \quad J_4 = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx \quad , \quad J_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}}$$

3. Exemples d'applications des intégrales

Ex. 3.1 longueur d'un arc de courbe

a) Déterminer la longueur de l'arc de la courbe d'équation $y = x^{3/2}$, compris entre les pts d'abscisse $x = 0$ et $x = 4/3$

b) Retrouver la valeur du périmètre d'un cercle de rayon R (en cartésiennes)

Ex. 3.2 calcul de volume (symétrie de révolution)

Utiliser une intégrale simple pour calculer le volume :

a) d'une sphère de rayon R

b) d'un cône droit ayant une base circulaire de rayon R et une hauteur h

c) d'un ellipsoïde de révolution défini par : $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, où $0 < a < c$

2. Intégrale de Riemann généralisée (~1h30)

(pour les intégrales généralisées, on ne s'intéresse qu'au cas particulier où l'on est capable de calculer une primitive de la fonc. à intégrer : l'intégrale se ramène alors à un calcul de limite en un point, ou à l'infini)

Ex. 2.1.a exemples élémentaires

Dire si les int. suivantes sont géné. ou non, conv. ou non (justifier !). On donnera l'allure des fonct. à intégrer.

(Si trop long, n'en faire que 3-4 (dont I_8 et I_9) et leur laisser le reste à la maison)

1) $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt$ *(leur demander l'allure de e^{-t})*

C'est une int géné car on intègre jusqu'à l'∞ une fonc continue (type b du cours) et

$$I_1 = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x = \boxed{1 = I_1}$$

(I_1 est donc conv et converge vers 1)

---

2) $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ *(leur demander l'allure de $t^{-1/2}$ – $f''>0 \Rightarrow$ fonc convexe)*

C'est bien une int géné car $1/\sqrt{t}$ est continue sur]0,1], diverge en 0+ (type a du cours) et

$$I_2 = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0}\left(2-2\sqrt{x}\right) = \boxed{2 = I_2}$$

(I_2 est donc conv et converge vers 2)

---

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ *(leur demander l'allure de t^{-2} – $f''>0 \Rightarrow$ fonc convexe)*

C'est bien une int géné car $1/t^2$ est continue sur]0,1], diverge en 0^+ (type a du cours) et

$$I_3 = \lim_{x\to 0}\left[-1/t\right]_x^1 = \lim_{x\to 0}\left(1/x - 1\right) = \boxed{+\infty = I_3}$$

(I_3 est donc div)

---

4) $I_4 = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (allure de ...) (converge ssi $\alpha<1$)

---

5) $I_5 = \int_{+1}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (allure de ...) (converge ssi $\alpha>1$)

---

6) $I_6 = \int_0^{+\infty} \sin x\,dx$

(sinus n'a pas de limite à l'∞ $\Rightarrow I_6$ ne peut pas conv)

$I_7 = \int_0^{\pi/2}\tan(x)$ (diverge)

---

8) $I_8 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

Ressemble à une int géné (pb en 0 ?) mais ce n'est pas une int géné :

En effet : $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_0 \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow$ la fonc ne diverge pas en 0 (on peut la prolonger par continuité) : c'est donc une intégrale simple (donc convergente !)

(ne pas essayer de la calculer ...)

---

9) $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ (converge vers π)

Ex. 2.1.b Autres exemples

$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$,

(par parties – Introduire la notation : $\left[\ \right]_a^{\infty}$ en insistant bien que c'est un ***calcul de limite*** !).

On trouve aisément $\boxed{1 = J_1}$

$J_2 = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{1+x^2}dx$

$\left(\int UdU\right)$. On arrive à : $\boxed{J_2 = \frac{3\pi^2}{32}}$

$J_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}}$ (att : pb en 0 et en $\frac{\pi}{2}$)

J_3 est de la forme $\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$. On arrive à : $\boxed{J_3 = 0}$

! $J_4 = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$

ressemble à une int géné (pb en 0 et 1 ?) mais ce n'est pas une ! En effet :

- en 0 : $f \underset{0}{\sim} \frac{-1}{\ln x} \underset{0^+}{\to} 0^+$
- en 1 : posons $t = x-1$. Alors $t \underset{x\to 1}{\to} 0$ et $f(t) = \frac{t}{\ln(1+t)} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1$

(ne pas essayer de la calculer l'int : (trop) difficile !)

$J_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{2+e^{2x}}$ $\left(\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Artan}\left(\frac{u}{a}\right)\right)$

$\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} = J_5\right)$

3. Exemples d'applications (~45')

Ex. 3.1 longueur d'un arc de courbe

a) long. de l'arc de la courbe d'éq. $y = x^{3/2}$, compris entre les pts d'abscisse $x = 0$ et $x = 4/3$

(faire un dessin ! rappeler l'allure de x^p pour p>1 et p<1)

Cours : $L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Ici : $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$

2 possibilités (simples) pour le calcul de l'intégrale :

1) poser $1+\frac{9}{4}x = t^2$ (***pour lever la racine***)

ou 2) poser $u = 1+(9/4)x$ (***car racine ici pas un pb puisque presque de la forme*** $\int \sqrt{u}\, du$) (tabulée)

On arrive aisément à $\boxed{L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{56}{27} \text{ (× unité de longueur)}}$

---

b) Retrouver la valeur du périmètre d'un cercle de rayon R (en cartésiennes)

⚠ éq. cartés. d'un cercle de rayon R (centré en O) :

$x^2+y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$ (2 demi-cercles ou 4 quarts si val >0)

ici : $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} \Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}$ d'où

$$L_{cercle} = 2\int_{-R}^{R}(\ldots)dx = 4\underbrace{\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx}_{\text{att : c'est une int généralisée !}}$$

$$= 4R\int_0^R \frac{d(x/R)}{\sqrt{1-(x/R)^2}} = 4R \lim_{t\to R^-}\left[\text{Arc}\sin(x/R)\right]_0^t = \ldots$$

Ex. 3.2 volume (symétrie de révolution)

Utiliser une int. simple pour calculer le vol. :

a) d'une sphère de rayon R

idée : exprimer S(x) (1 seule var : x) puis $V = \int_{x_{min}}^{x_{max}} S(x)dx$

L'aire d'une section obtenue par un plan perp. à (Ox) est :

$$S\left(x\in[-R,R]\right) = \overbrace{\underbrace{\pi\, r^2(x) = \pi\,(y^2+z^2)(x)}_{\text{tjrs vrai : lié à la sym de révolution autour de Ox ; Pb : exprimer r(x) ou y et z en fonc de x}}}^{\text{ds le plan (yOz)}} \quad \text{et } dV = S(x)dx$$

• ***1ère méthode : à l 'aide d'une fig.ds le plan (xOy)*** (x>0 et y>0 suffit – puis sym !)

(faire un dessin !)

Sur le plan (xOy) on a : $R^2 = x^2 + r^2$

Soit : $r^2 = R^2 - x^2$ d'où : $V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx = \ldots$

• ***2ème méthode : calcul analytique***

de l'éq. d'une sphère de rayon R, centrée en 0 :

$x^2+y^2+z^2 = R^2$, on tire : $x^2+y^2 = R^2-z^2$

(on retombe sur le calcul précédent)

---

b) d'un cône base de rayon R et une hauteur h

idée : tjrs le m̂ principe : exprimer S(x) ~~(1 seule var : z)~~ puis $V = \int_{x_{min}}^{x_{max}} S(x)dx$

faire dessin (sym /Ox)

L'aire d'une section obtenue par un plan perp. à (Ox) est :

$S\left(x\in[0,h]\right) = \pi\, r^2(x) = \pi\,(y^2+z^2)(x)$ et $dV = S(x)dx$

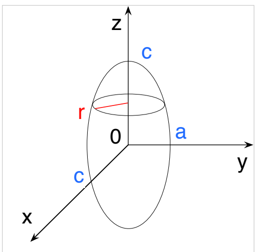
Dans le quart de plan (xOy) (x>0 et y>0) , on a un demi-cône. On voit que :

$\frac{x}{h} = \frac{r}{R}$ (Thalès) $\Leftrightarrow r(x) = \frac{R}{h}x$

d'où : $V = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 x^2 dx = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \boxed{\frac{1}{3}\pi R^2 h = V_{cône}}$

---

c) d'un ellipsoïde de révolution (ballon de rugby !) déf par: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$



(maison si pas le temps !)

(cf ch3 – fonctions de plusieurs variables)

$$(c) \Leftrightarrow x^2+y^2 = \underbrace{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}_{r^2(z)}$$

(***erreur*** : "a" et non "c" sur Ox)

⇒ pour $-c \le z \le c$ donné, on reconnaît l'éq. d'un cercle

Pb : ici, on n'a pas une sym de rév autour de (Ox) mais de (Oz) …

⇒ 2 façons de procéder : soit on réécrit l'éq. avec la sym de révol autour de Ox $\left(\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2} = 1\right)$, soit on réécrit la formule du cours, pour une sym autour de 0z (permutation circulaire)

$$\left(V = \frac{4}{3}\pi a^2 c\right)$$

Rem : si a=c (sphère) on a bien $V = 4/3\,\pi a^3$