Chapitre 1

Système à deux niveaux

1.1 Représentation, sphère de Bloch

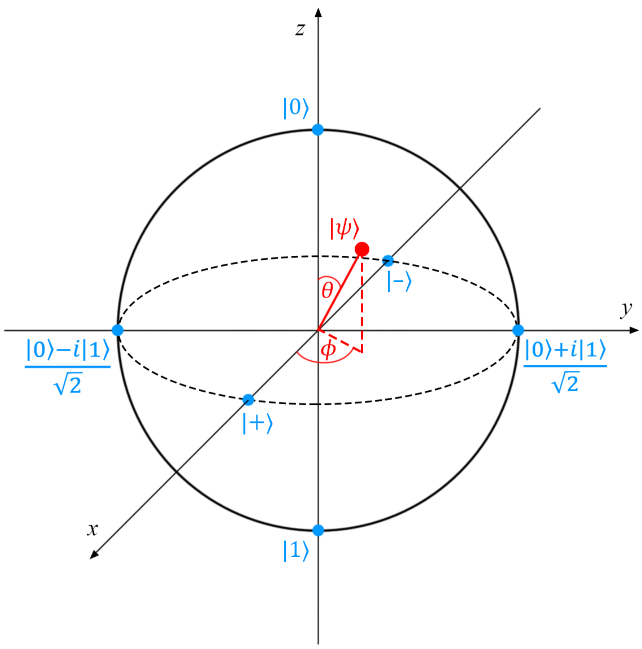


FIGURE 1.1 – $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\,|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}\,|1\rangle$

On va prendre le formalisme des spins (qui ne correspond pas au dessin mais bon).

Ta base de base va être $\{|-\rangle, |+\rangle\}$, les vecteurs propres de S_z, et

— $|+\rangle_x = \dfrac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt(2)}$ $\quad |-\rangle_x = \dfrac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt(2)}$

— $|+\rangle_y = \frac{|+\rangle + i\,|-\rangle}{\sqrt(2)}$ $\quad |-\rangle_y = \frac{|+\rangle - i\,|-\rangle}{\sqrt(2)}$

Avec $S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Pour un vecteur quelconque sur la sphère de Bloch (état pur), $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\,|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}\,|-\rangle$.

Le truc à retenir c'est que $|\psi\rangle$ est le vecteur $|+\rangle_{\mathbf{u}}$où $\mathbf{u}$ est la direction dans la sphère de Bloch.

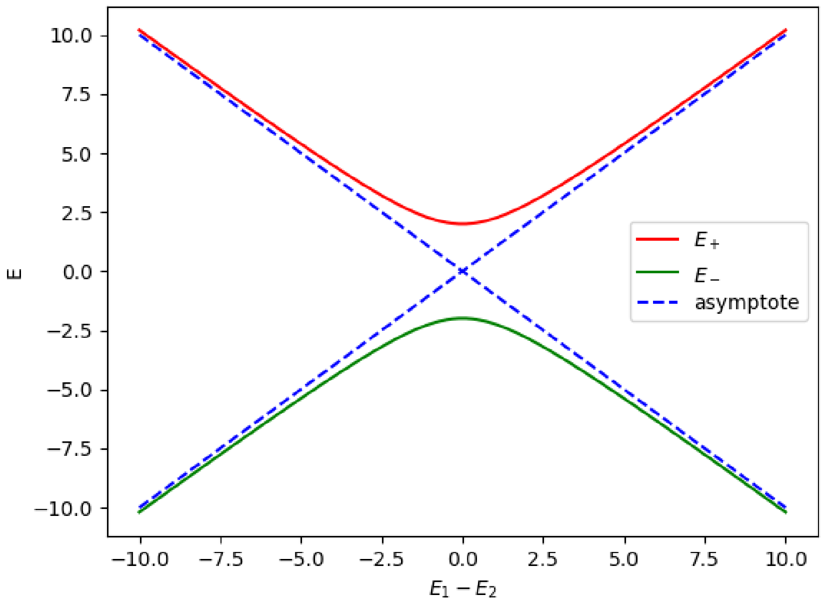
1.2 Évolution d'un système à 2 niveaux

Ton Hamiltonien va être typiquement de la forme $H = H_0 + H_1$ avec

— $H_0 = \hbar \begin{pmatrix} -\omega_0/2 & 0 \\ 0 & \omega_0/2 \end{pmatrix}$ (l'ordre de la base c'est $\{|-\rangle\,, |+\rangle\}$). Pour un spin, ca va venir du champ magnétique selon z : $-M.B_0$, donc $\omega_0 = \gamma B_0$. Dans le cas d'un atome c'est simplement le niveau d'énergie de l'électron.

— H_1 est le terme de couplage, dont on ne retiendra que les termes non-diagonaux. On traitera une perturbation statique, et une perturbation (quasi)résonnante à ω_0 (Rabi).

1.2.1 Perturbation statique : anti-croisement



Hamiltonien indépendant du temps, on diagonalise. E_1 et E_2 sont les énergies propres de H_0, $E_\pm$ celles de $H = \begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{21} & E_2 \end{pmatrix}$

On trouve :

— $E_\pm = \frac{E_1 - E_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2}$

— $|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}\,|\psi_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}\,|\psi_2\rangle$
— $|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}\,|\psi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}\,|\psi_2\rangle$
— Avec $\tan\theta = 2\frac{|W_{12}|}{E_1 - E_2}$ et $W_{12} = e^{i\phi}|W_{12}|$

En particulier, on voit que pour 2 niveaux dégénérés, le fait qu'il existe un couplage entre les deux va lever la dégénérescence, et créer un état de plus basse énergie, donc plus stable (d'où la stabilité des cycles aromatiques, genre benzène).

1.2.2 Perturbation sinusoïdale : Rabi

La perturbation peut être un champ magnétique transverse oscillant à ω pour un spin, une onde électromagnétique pour un système atomique, ou n'importe quel couplage sinusoïdal ne faisant intervenir que des termes hors-diagonal.

On a alors $H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$ où ω_1 correspond à l'intensité du couplage, et ω la pulsation de l'oscillation.

On va passer dans le référentiel tournant par la transformation $U = \begin{pmatrix} -e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$

H devient alors $\tilde{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}$ (A revoir) qui est indépendante du temps, donc on résout, on repasse dans le référentiel classique et on trouve que, pour un état initialement en $|+\rangle$, la probabilité de passage dans l'état $|-\rangle$ vaut :

$$\mathcal{P}_{+-}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2}\sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2}\,\frac{t}{2}\right) \tag{1.1}$$

On retrouve l'évolution temporelle, sinusoïdale à la fréquence de Rabi $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2}$ (le /2 vient du fais que tu as un sinus carré, qui oscille donc deux fois plus vite qu'un sinus normal. Tu fais donc une période en $2\pi/\Omega$.)

On retrouve également la Lorentzienne pour l'amplitude maximale en fonction du désaccord.