3. Différentielles – formes diff - applications

Ex. 3.1.1 calcul de diff

1) Calculer la différentielle de la fonction g définie par $g(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$

2) Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=x^4-y^2$, au point (1,2,2)

3) Une particule lancée avec une vitesse v, faisant un angle α avec l'horizontale, atteint sur un plan horizontal ayant la cote du pt de lancement, la distance : $x=\dfrac{v^2\sin 2\alpha}{g}$. Déterminer sa différentielle

Ex. 3.1.2 formes différentielles exactes (ou totales)

Dire si les formes différentielles suivantes sont des formes différentielles exactes. Dans l'affirmative, trouver les fonctions correspondantes.

1) $\omega_1 = xdy + ydx$ **2)** $\omega_2 = \dfrac{z}{x}dx + \dfrac{z-x}{y}dy - dz$ **3)** $\omega_3 = \left(2x+\dfrac{1}{x}\right)dx + \left(2+\dfrac{1}{y}\right)dy$

Ex. 3.2 Applications numériques

Soit f définie par $f(x)=\sin x$

Calculer Δf et δf pour des variations Δx, de x, autour de $x_0=0$, de : 1 rad ; 0,1 rad et 0,01 rad. En déduire l'erreur commise lorsqu'on remplace Δf par δf, i.e. $\left|\dfrac{\Delta f-\delta f}{\Delta f}\right|$

Ex. 3.3.1 "petites" variations des fonctions

*Dans les trois exercices qui suivent, on demande d'abord un **calcul exact de la variation**, puis un **calcul approché** en utilisant la notion de différentielle. **Commenter** brièvement le résultat obtenu.*

1) A la surface de la Terre, en un lieu de latitude 48,9°, l'accélération de la pesanteur est $g=9{,}807\,\mathrm{m\cdot s^{2}}$. Quelle est sa valeur 3 km plus haut, sachant que $g(h)=\dfrac{k}{(R_T+h)^2}$, $R_T = 6380$ km ?

2) la période des oscillations de faible amplitude d'un pendule de longueur ℓ est $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$

a) Calculer T pour un pendule de longueur ℓ =1m, avec g=9,807m.s^{-2}

b) Quelle est la variation de la période pour une petite variation de longueur de 1 cm ?

3) La température T_T (K / K=°C+273) à la surface de la Terre est reliée à la température de surface du soleil T_S (K) par une relation de la forme : $T_T^4 = K\dfrac{T_S^4}{D^2}$, où K=cte et D= dist. Terre-soleil = 150 10^6 km ; On donne T_T = 300K, T_S = 6000K

a) de combien faut-il se déplacer depuis la Terre pour que la T^{ure} varie de 1K ? Que peut-on prévoir sur Mars (D= 220.10^6 km) et sur Vénus (D= 108.10^6 km) ?

b) de combien varie T_S lorsque T_T varie de 1K ?

3. Différentielles – formes diff - applications

Ex. 3.1.1 calcul de diff

1) Calculer de différentielle - $g(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$ -

cours : $dg(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy$

d'où : $\boxed{dg=\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}dx+\frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}dy}$

---

2) Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=x^4-y^2$, au point (1,2,2)

Ici, $z=f(x,y)\Rightarrow dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

Le plan tan a pour éq : $(z-z_0)=4x_0^3(x-x_0)-2y_0(y-y_0)$.

Au pt (1,2,2) cette éq s'écrit : $\boxed{4x-4y-z=-6}$ CQFD

---

3) Une particule lancée à v, faisant un angle α avec l'horizontale, atteint sur un plan horizontal ayant la cote du pt de lancement, la distance :

$x=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$. Déterminer sa différentielle

$$x=f(v,\alpha,g)\Rightarrow dx=\partial_v x\,dv+\partial_\alpha x\,d\alpha+\partial_g x\,dg$$
$$=\frac{\sin 2\alpha}{g}2v\,dv+\frac{v^2}{g}2\cos 2\alpha\,d\alpha-v^2\sin 2\alpha\frac{dg}{g^2}$$

Ex. 3.1.2 diff exacte (ou totale)

Dire si les diff suivantes sont des formes diff exactes. Si oui, trouver les fonc dont elles sont les diff

1) $\omega_1=xdy+ydx$, est de la forme : $A(x,y)dx+B(x,y)dy$

diff exacte $\Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}\underset{ici}{\Leftrightarrow}\frac{\partial y}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial x}\to OK(=1)$

$\Leftrightarrow$ ω1 est une diff exacte

$\Leftrightarrow \exists f\,\big|\, df=xdy+ydx$ or $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Par identification :

$$\begin{cases}\partial_x f=y & (1)\\ \partial_y f=x & (2)\end{cases}$$

En intégrant (1) / x on trouve :

$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial x}dx+g(y)=yx+g(y)$.

On détermine g(y) en injectant le résultat dans (2) :

$\partial_y f=x+g'(y)=x\ \Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=K\in\mathbb{R}$

Par suite, la fonc. cherchée est : $\boxed{f(x,y)=xy+k\in\mathbb{R}}$

---

2) $\omega_2=\frac{z}{x}dx+\frac{z-x}{y}dy-dz$

ω2 est de la forme : $A(x,y,z)dx+B(x,y,z)dy+C(x,y,z)dz$

diff exacte $\Leftrightarrow \partial_y A=\partial_x B,\ \partial_z A=\partial_x C,\ \partial_z B=\partial_y C$

$$\left.\begin{aligned}\partial_y A&=\partial_y\left(\frac{z}{x}\right)=0\\ \partial_x B&=\partial_x\left(\frac{z-x}{y}\right)=\frac{-1}{y}\end{aligned}\right\}\ \partial_y A\neq\partial_x B\Rightarrow\omega_2\ \text{pas une diff tot}$$

---

3) $\omega_3=\left(2x+1/x\right)dx+\left(2+1/y\right)dy$

ω3 est de la forme : $A(x)\,dx+B(y)\,dy$

diff exacte $\Leftrightarrow \partial_y A=\partial_x B$; Or $\partial_y A=0=\partial_x B$ CQFD

donc $\exists f$ tq $df=\omega_3$. Or par déf. $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Par identification :

$$\begin{cases}\partial_x f=2x+1/x & (1)\\ \partial_y f=2+1/y & (2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)\Rightarrow f(x,y)=\int\partial_x f\,dx+\varphi(y)=x^2+\ln(x)+\varphi(y)\\ \text{ds (2) : }\varphi'(y)=2+1/y\Rightarrow\varphi(y)=2y+\ln(y)+k\end{cases}$$

d'où : $\boxed{f(x,y)=x^2+2y+\underbrace{\ln(x)+\ln(y)}_{\ln(xy)}+k\in\mathbb{R}}$

Ex. 3.2 A.N. Δf-df, Δx-dx

Soit $f(x)=\sin x$ .Calculer Δf et δf pour des variations Δx, de x, autour de $x_0=0$, de : 1 rad ; 0,1 rad et 0,01 rad. En déduire l'erreur commise lorsqu'on remplace Δf par δf $\left|(\delta f-\Delta f)/\Delta f\right|$

Ici, $f(x)=\sin(x)$. Si x varie de Δx, f varie de :

- $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)=\Delta\sin(x_0)}$ **(1)**

- par déf, $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

On fait l'approx : $\boxed{\delta\underbrace{f(x_0)}_{\sin(x_0)}\approx f'(x_0)\delta x=\cos(x_0)\delta x}$ **(2)**

Ici, en $x_0=0$, **(1)** s'écrit : $\boxed{\sin(\Delta x)=\Delta\sin(x)(=\Delta f)}$

Et **(2) =** $\boxed{\delta\sin(x_0)\approx\delta x}$

d'où :

Δx (rad)	1	0,1	0,01
Δsin(x0)	.841	.09983	.009998
$\delta f(x_0)$	1	0,1	0,01
$\left\|(\Delta f-\delta f)/\Delta f\right\|$	~20%	0,2%	~2.10-3 %

Ex. 3.3.1 petites variations des fonctions

1) A la surface de la Terre, en un lieu de latitude 48,9° l'accélération de la pesanteur est g = 9,807 m.s^{-2}. Quelle est sa val. 3 km plus haut, sachant que

$$g(h)=\frac{k}{(R_T+h)^2}\ ,\ R_T=6380\text{ km}$$

• *calcul exact* :

$$g(3km)=\left(\frac{6380}{6383}\right)^2\bullet 9{,}807=9{,}798\,m\cdot s^{-2}$$

• *calcul approché par utilisation d'une diff.*

Ici, on connaît $g(h_0=0)$ où $g\underbrace{(h)}_{\text{dist/sol (altitude)}}=\dfrac{k}{(R_T+h)^2}$ et on cherche : $g(h_0+\Delta h=3km)$.

Pb : Δh pas petit devant h_0 $\Rightarrow$ faire un changt de repère : posons $\underbrace{z}_{\text{dist/centre de la Terre}}=R_T+h$

alors $g(h)\to\boxed{g(z)=K/z^2}$ **(E)**

et $$\boxed{g(\underbrace{z_0}_{\text{sol}}+\underbrace{\delta z}_{\text{petite ? var° d'altitude}})\underbrace{\approx}_{\text{OK car }3\ll 6380}g(z_0)+\delta g(z_0)=g(z_0)\left[1+\left.\frac{\delta g}{g}\right|_{z_0}\right]}$$

- *passage par une diff log* :

$$\text{ici}:\textbf{(E)}\Rightarrow \ln(g)=\ln(k)-2\ln(z)\Rightarrow \left.\frac{dg}{g}\right|_{z_0}=\left.\frac{dk}{k}\right|_{z_0}-2\left.\frac{dz}{k}\right|_{z_0}$$

Notation courante en physique : "δ" pour les "petites var°".

$$\Rightarrow \left.\frac{\delta g}{g}\right|_{z_0}\approx\left.\frac{\delta k}{k}\right|_{z_0}-2\left.\frac{\delta z}{k}\right|_{z_0}=\underbrace{\left.\frac{\cancel{\delta k}}{k}\right|_{z_0}}_{\text{var de k ici=0}}\underbrace{-}_{\text{g↘ lorsque z↗ ("-")}}2\underbrace{\left.\frac{\delta z}{z}\right|_{z_0}}_{\text{var de z ici=3km}}$$

$$\boxed{A\cdot N\cdot}\quad \left.\frac{\delta g}{g}\right|_{z_0}\approx -2\frac{3}{6380}=-9{,}40\cdot 10^{-4}$$

$$\text{finalement}:\ g(z_0+\delta z_0)\approx g(z_0)\left[1+\left.\frac{\delta g}{g}\right|_{z_0}\right]$$
$$\approx 9{,}807(1-9{,}4\cdot 10^{-4})$$
$$\approx\boxed{9{,}798 m\cdot s^{-2}\approx g(3km)}$$

- *calcul direct* :

$$g\equiv g(k,z)\Rightarrow \underbrace{\delta g}_{\text{var° de g}}\approx\frac{\partial g}{\partial k}\underbrace{\cancel{\delta k}}_{\text{var° de k ici 0}}+\underbrace{\frac{\partial g}{\partial z}}_{\text{oblige à calculer k}}\underbrace{\delta z}_{\text{var° de z}}\approx-\frac{2k}{z^3}\delta z\approx\boxed{-2g_0\frac{\delta z}{R_T}\approx\delta g}$$

$$\boxed{A\cdot N\cdot}\quad g(\underbrace{z_0}_{\text{sol}}+\underbrace{\delta z}_{\text{petite ? var° d'altitude}})\underbrace{\approx}_{\text{OK car }3\ll 6380}g(z_0)+\delta g(z_0)$$
$$\approx 9{,}807\left[1-2*\frac{3}{6380}\right]\approx\boxed{9{,}798\,m\cdot s^{-2}\approx g(3km)}$$

• *Conclusion*

L'utilisation d'une diff conduit au m̂ résultat au 1/1000 près (bonne approx car "petite var°").

---

2) la période des oscillations de faible amplitude d'un pendule de longueur ℓ est $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$

a) Calculer T pour un pendule de longueur ℓ =1m, avec g=9,807m.s^{-2}

$$T=2\pi\sqrt{\ell/g}=\boxed{2{,}006s=T}$$

b) Quelle est la variation de la période pour une petite variation de longueur de 1 cm ?

• *calcul exact* :

$$\Delta T=T_{finale}-T_{initiale}=2\pi\left(\sqrt{\frac{\ell\pm 0{,}01}{g}}-\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$$

$$\boxed{A\cdot N\cdot}\quad\boxed{\Delta T^+\approx 10{,}01ms}\ \boxed{\Delta T^-\approx -10{,}06\,ms}$$

• *calcul approché par utilisation d'une diff.*

ici « petit » c'est 1cm / 1m ;

- ***passage par une diff log***:

$$\ln T=\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\ln(\ell)-\frac{1}{2}\ln(g)$$

$$\Rightarrow\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\ell}{\ell}-\frac{dg}{g}\right)\Rightarrow\delta T\approx\frac{T}{2}\left(\frac{\delta\ell}{\ell}-\underbrace{\frac{\cancel{\delta g}}{g}}_{\text{ici 0}}\right)$$

(var° de T et ℓ ds le m̂ sens)

$$\boxed{A\cdot N\cdot}\quad\delta T=\frac{2{,}006}{2}\cdot\frac{0{,}01}{1}=\boxed{0{,}01\,s=\delta T}$$

(très proche du calcul exact !)

- ***calcul direct***

$$T(\ell,g)\Rightarrow dT=\frac{\partial T}{\partial\ell}d\ell+\frac{\partial T}{\partial g}dg$$

$$\Rightarrow\delta T\approx\frac{\partial T}{\partial\ell}\delta\ell+\frac{\partial T}{\partial g}\underbrace{\cancel{\delta g}}_{\text{ici 0}}\approx\boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ell}}\delta\ell\approx\delta T}$$

$$\boxed{A\cdot N\cdot}\quad\boxed{\delta T\approx 0{,}010s}\quad\text{(idem !)}$$

3) La température T_T (K / K=°C+273) à la surface de la Terre est reliée à la T de surface du soleil T_S (K) par une relation de la forme :

$T_T^4 = k \cdot \frac{T_S^4}{D^2}$, où K=cte et D= dist. Terre soleil = 150 10^6 km

On donne T_T = 300K, T_S = 6000K

a) de combien faut-il se déplacer depuis la Terre pour que la T^{ure} varie de 1K ? Que peut-on prévoir sur Mars (D= 220.10^6 km) et sur Vénus (D= 108.10^6 km)

• *calcul exact* :

Encourager les étudiants à le faire seuls chez eux !

• *calcul approché par utilisation d'une diff.*

$$T_T^4 = k \cdot \frac{T_S^4}{D^2} \Rightarrow 4\ln T_T = \ln k + 4\ln T_S - 2\ln D$$

$$\text{d'où : } \overset{2}{\cancel{4}}\frac{\delta T_T}{T_T} \approx 0 + 4\frac{\overset{\text{ici } 0}{\cancel{\delta T_S}}}{T_S} - \overset{1}{\cancel{2}}\frac{\delta D}{D}$$

$$\Rightarrow \delta D \approx -2\frac{\overset{\text{ici } =1K}{\delta T_T}}{T_T}D \quad (\text{"-" traduit que lorsque } D\uparrow, T\downarrow)$$

$$= \boxed{1 \text{ million de km} \approx \delta D}$$

• Sur Mars, sachant que T↓ de 1K à chaque million de km, on peut prévoir une T^{ure} moyenne de l'ordre de : $300 - 70 = 230K = -43°C$

• Sr Venus, on a : $300 + 42 = 342K = 69°C$ (c'est hot !)

b) de combien varie T_S lorsque T_T varie de 1° ?

• *calcul exact* :

Encourager les étudiants à le faire seuls chez eux !

• *calcul approché par utilisation d'une diff.*

ici, seule T_T varie $\delta T_S \approx \frac{T_S}{T_T}\delta T_T = \boxed{20°C \approx \delta T_S}$