2. Intégrales de surface (suite et fin)

Calculer les intégrales de surface

3) $I_1 = \iint_{\Sigma_1} y\, d\sigma$, où $\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z = x + y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\right\}$

4) $I_2 = \iint_{\Sigma_2} \sqrt{z}\, d\sigma$ où $\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0\right\}$

5) $I_3 = \iint_{\Sigma_3} \frac{z}{x^2 + y^2} d\sigma$ où $\Sigma_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \le z \le a\right\}$

6) $I_4 = \iint_{\Sigma_4} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ où $\Sigma_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \le z \le 3\right\}$

3. Intégrales triples

Utiliser le système de coordonnées le plus adapté pour calculer les intégrales suivantes :

1) $K_1 = \iiint_{\mathcal{V}_1} x^2 y \sin(z)\, dx\, dy\, dz$, où $\mathcal{V}_1 = [0,1] \times [1,2] \times [0,4]$

2) $K_2 = \iiint_{\mathcal{V}_2} z \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, où $\mathcal{V}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1\right\}$

3) $K_3 = \iiint_{\mathcal{V}_3} z\, dx\, dy\, dz$, où $\mathcal{V}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}$

4) $K_4 = \iiint_{\mathcal{V}_4} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dx\, dy\, dz$, où $\mathcal{V}_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \le z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ 0 \le z\right\}$

5) $K_5 = \iiint_{\mathcal{V}_5} z\, dx\, dy\, dz$, où $\mathcal{V}_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1\right\}$

2. Intégrales de surface (suite et fin)

3) l'intégrale de surface $I = \iint_\Sigma y\,d\sigma$, où $[\Sigma]$ est la surface d'éq $z = x + y^2$ avec $\underbrace{0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 2}_{\mathcal{D} \text{ est le rect } [0,1]\times[0,2]}$

→ ici on utilise les cartésiennes (comme au 2)) :

$$I = \iint_\Sigma y\,d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\, y\sqrt{1+1+4y^2} = \int_0^1 dx\sqrt{2}\underbrace{\int_0^2 dy\, y\sqrt{1+2y^2}}_{\int \frac{du}{4}\sqrt{u} = \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}\left[(1+2y^2)^{3/2}\right]_0^2 = \boxed{\frac{13\sqrt{2}}{3} = I}$$

---

4) $I_2 = \iint_{\Sigma_2} \sqrt{z}\,d\sigma$ où $[\Sigma_2]$ est la demi-sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

$[\Sigma_2]$ étant une demi-sphère de rayon R, il est naturel d'utiliser les coord. sphériques. *(l'élém. de surf.)* $d\sigma$ est donné par (cf 2.1) : $d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ ($r = R = Cte$)

$$\left(d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dR\,\vec{e}_r + R d\theta\,\vec{e}_\theta + R\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$

D'autre part, pour $[\Sigma_2]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ indépendamment l'un de l'autre. Enfin, en coord. sphér. , $z = R\cos\theta$ (cf Annexe 4) D'où :

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} \sqrt{z}\,d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \sqrt{R\cos\theta}\; R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= R^{5/2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{\cos\theta}\,\sin\theta$$

$$= 2\pi R^{5/2}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{1/2}\,(-)\,d(\cos\theta) \quad \left(\text{et } \int u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + K\right)$$

$$= 2\pi R^{5/2}\left[-\frac{(\cos\theta)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{4\pi}{3}R^{5/2} = I_2}$$

---

5) $I_3 = \iint_{\Sigma_3} \frac{z}{x^2+y^2}\,d\sigma$ où $[\Sigma_3]$ est le cylindre à base circulaire d'éq. $x^2+y^2 = R^2$, $0 \le z \le a$

$[\Sigma_3]$ étant un cyl. A base circulaire de rayon R, les coord cyl sont indiquées. $d\sigma$ est donné par (déjà vu): $d\sigma = R\,d\theta dz$

D'autre part, pour $[\Sigma_3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [0, a]$ indépendamment l'un de l'autre. Enfin, on se souvient qu'en coord. cyl. , $x^2+y^2 = R^2$. D'où :

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z}{R^2}\underbrace{R\,dz\,d\theta}_{d\sigma} = \frac{2\pi}{R}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a = \boxed{\frac{\pi a^2}{R} = I_3}$$

---

6) l'intégrale de surface $I = \iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$ sur le cylindre d'éq. $x^2+y^2 = a^2$ avec $0 \le z \le 3$.

Σ étant un cyl à base circulaire, ce sont les coord cylindriques qui sont indiquées ...

→ l'élément de surface en coordonnées cylindiques (déjà vu):

$\boxed{d\sigma = \rho\, d\varphi dz}$ $\left(d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z\right)$

puis, comme $\rho = a$ sur la surface du cylindre :

$$I(\Sigma\text{=cylindre}) = \iint_\Sigma \underbrace{(x^2+y^2}_{a^2}+z^2)\underbrace{d\sigma}_{a d\varphi dz} = \iint_\Sigma (a^2+z^2)\,a\,d\varphi\,dz$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\int_0^3 dz\,(a^2+z^2)a = \boxed{6\pi a(a^2+3) = I}$$

3. Intégrales triples

Utiliser le syst. de coord. le plus adapté pour calculer :

1) $K_1 = \iiint_{\mathcal{V}_1} x^2 y \sin(z)\, \underbrace{dxdydz}_{\substack{dV \\ \text{(élém de vol du} \\ \text{3ème ordre)}}}$ où $\mathcal{V}_1 = [0,1]\times[1,2]\times[0,4]$

(parallélépipède rectangle)

$\Downarrow$

coordonnées cartésiennes

$K_1 = \int_0^1 x^2\,dx \int_1^2 y\,dy \int_0^4 \sin(z)dz$ (on peut seult si $\mathcal{V}$ = parallé. rect et f = g(x)·h(y)·z(z))

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[-\cos(z)\right]_0^4$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4-1}{2}\cdot(-\cos(4)+1) = \boxed{\frac{1}{2}(1-\cos(4)) = K_1}$

---

2) $K_2 = \iiint_{\mathcal{V}_2} z\exp(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

où $\mathcal{V}_2 = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big| \underbrace{\underbrace{1\le x^2+y^2\le 4}_{\substack{\text{deux disques ds pl. // xOy} \\ \text{(R=1 et R=2)}}}, \underbrace{0\le z\le 1}_{\text{z varie}}}_{\text{deux cyl. à base circul. concentriques}} \Big\}$

$\mathcal{V}_2$ est compris entre les cyl. d'axes z et de rayons 1 et 2 d'une part, et d'autre part, au dessus du plan z=0 et au dessous du plan z=1. **(*faire un dessin* !)**

Etant donné que f est à sym cylindrique (= f(ρ,z) , où $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$) et que $\mathcal{V}_2$ est cylindrique, il est judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques car ds ce syst de coord, l'int triple se ramènera à un prod de 3 int simples. En cyl:

$\rightarrow \mathcal{V}_2' = \left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| 1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 1\right\}$

• ***Comment exprimer dV en coord. cylindriques ?***

Nous avons vu que l'on obtenait une surf élém. en × les compos. des deux vect. tan à la surf du déplact élém.
Nous admettrons que l'on peut retrouver le **vol élém du 3ème ordre (dV)** en × les 3 compos du déplact élém.

Ainsi en cyl : $\overrightarrow{dOM} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

$\Rightarrow \boxed{dV = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz}$

$K_2 = \iiint_{\mathcal{D}_2'} z\exp(\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_1^2 e^{\rho^2}\rho\,d\rho}$

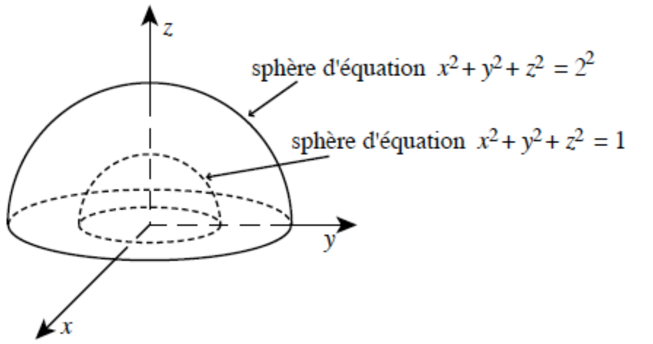
$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[e^{\rho^2}\right]_1^2 = \boxed{\frac{\pi}{2}(e^4-e) = K_2}$ $\left(\int_1^2 e^{\rho^2}\frac{d(\rho^2)}{2}\right)$

---

3) $K_3 = \iiint_{\mathcal{V}_3} z\,dx\,dy\,dz$

où $\mathcal{V}_3 = \Big\{x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big| \underbrace{z\ge 0, \underbrace{1\le x^2+y^2+z^2\le 4}_{\substack{\text{entre 2 sphères} \\ \text{(de r=1 et r=2)}}}}_{\text{entre 2 demi-sphères}} \Big\}$

$\mathcal{V}_3$ est le volume compris entre les deux demi-sphères représentées ci-dessous :



Etant donnée la sym sphér., si on utilise les coord. sphériques , l'int triple se ramènera à un prod de trois int simples ...

En sphér : $\overrightarrow{dOM} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$. Donc :

$\boxed{dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}$ et :

$\mathcal{V}_3' = \Big\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \Big| \underbrace{0\le\theta\le\pi/2}_{\text{(angle polaire)}},\ \underbrace{0\le\varphi\le 2\pi}_{\substack{\text{(angle azimutal)} \\ \text{(ds plan horizontal)}}},\ 1\le r\le 2\Big\}$

$K_3 = \iiint_{\mathcal{V}_3} z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{V}_3'} r\cos\theta\,\underbrace{r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi}_{dV}$

$= \int_1^2 r^3\,dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\theta)d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{-\cos(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi$

$= \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \boxed{\frac{15\pi}{4} = K_3}$

---

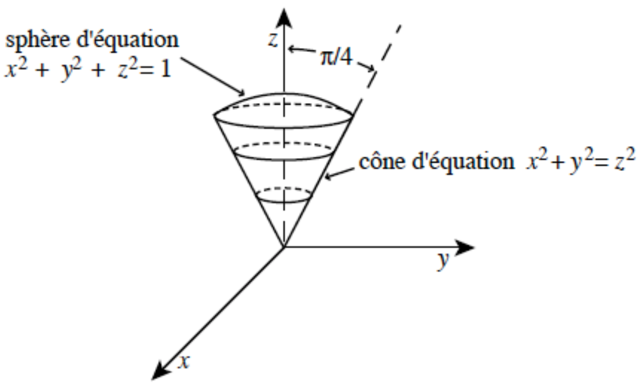
4) $K_4 = \iiint_{\mathcal{V}_4} (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dx\,dy\,dz$

où $\mathcal{V}_4 = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, \underbrace{x^2+z^2\le z^2}_{\text{intérieur d'un cône}^{(1)}},\ \underbrace{x^2+y^2+z^2\le 1}_{\text{intérieur d'une sphère de rayon 1}},\ \underbrace{0\le z}_{\text{demi-espace}} \Big\}$

(1)On rappelle (p.16 du poly) que $x^2+y^2=z^2(\tan\alpha)^2$ est l'éq d'un cône de révol de sommet O et d'axe de révol Oz (α est l'angle polaire en coord. sphér. , désigné par θ ds le poly)

Il en résulte :

$\mathcal{V}_4$ est la région contenue... à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1, à l'intérieur du cône d'équation $y^2+z^2=z^2$ et au dessus du plan horizontal d'éq $z=0$:



Ici, étant donnée la sym sphér, si on utilise les coord sphériqu l'int triple se ramène à un prod de 3 int simples. On a :

$\mathcal{V}_4' = \Big\{(r,\ \underbrace{\theta,\varphi}_{\text{angles polaire et azimutal}})\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le \underbrace{\pi/4}_{\text{car } \tan\theta=1},\ 0\le \underbrace{\varphi}_{\text{angle azimutal}} \le 2\pi \Big\}$

$$K_4 = \iiint_{\mathcal{V}_4} (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,\underbrace{dxdydz}_{dV} = \iiint_{\mathcal{V}_4'} (r^2)^{3/2}\,\underbrace{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}_{dV}$$

$$= \int_0^1 r^5\,dr \int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\cdot 2\pi = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{6}\pi = K_4}$$

---

5) $K_5 = \iiint_{\mathcal{V}_5} z\,dx\,dy\,dz$

où $\mathcal{V}_5 = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, \underbrace{\underbrace{x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0}_{\text{déf le premier octant}},\ \underbrace{x+y+z\le 1}_{\text{eq. d'un plan}}}_{\text{tétraèdre ds le premier octant}} \Big\}$

ici pas de simplification liée à la symétrie !

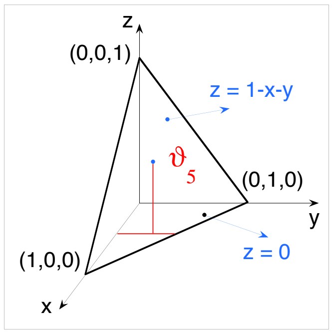
Dans ce cas : cours $\Rightarrow$ il faut dessiner, non seult $\mathcal{D}_5$ (projection de Σ_5 sur xOy), mais aussi Σ_5 (enveloppe de $\mathcal{V}_5$).

<u>Dessinons</u> Σ_5 *(enveloppe de $\mathcal{V}_5$)*

Il suffit de dessiner le plan $x+y+z=1$ dans le premier octant.

Sur le dessin, on voit que Σ_5 est un tétraèdre dont :

- la frontière inférieure est le plan $z=0$
- la frontière supérieure est le plan $x+y+z=1$ (ou $z=1-x-y$) .



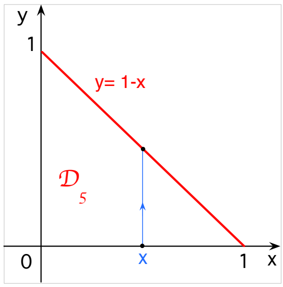
Donc, une // (Oz) coupe Σ_5 en 2 pts :

$z_{min}(x,y)=0$ et

$z_{max}(x,y)=1-x-y$

d'où : $K_5 = \iint_{\mathcal{D}_5}\left(\int_0^{1-x-y} z\,dz\right)dx\,dy$

- D'autre part, on voit sur le graphe que $\mathcal{D}_5$ (proj de Σ_5 sur (xOy)) est un triangle délimité par (O,I,J), pour lequel si on fixe x $(x\in[0,1])$ alors y varie entre 0 et $1-x$ (en z=0 on a 0=1-x-y)



d'où :

$$K_5 = \iiint_{\mathcal{V}_5} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} z\,dz\right)dy\right)dx$$

$$\underset{\text{notation phys (Russe)}}{=} \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} z\,dz$$ (pour enlever les parenthèses)

att : ce n'est pas un prod de 3 int. simples !

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{24} = K_5}$$