

2PY104 Mécanique avancée

Cahier de TD avec corrigés
Ne pas distribuer aux étudiants
2e Semestre 2021

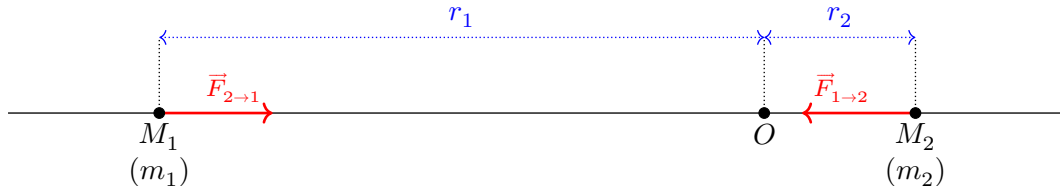
TD 1 : Le problème à deux corps

1.1 Étoile double

On considère deux étoiles, formant dans l'espace, une étoile double isolée. Ces deux étoiles décrivent des orbites circulaires autour du centre de gravité de l'ensemble. On observe que les rayons des orbites sont dans un rapport 4, que la distance entre les étoiles est de 80 u.a. et que leur période de révolution est de 342 années. Calculer la masse de chaque étoile en fonction de la masse du Soleil.

Correction 1.1

- Soient M_1 et M_2 les centres de masse de ces deux étoiles, de masses respectives m_1 et m_2 . Soit O le centre de masse du système constitué par les deux étoiles, dont la masse est égale à $M = m_1 + m_2$. Notons r_1 et r_2 les distances OM_1 et OM_2 , et supposons que M_1 est l'étoile la plus éloignée de O , on a donc $r_1 = 4r_2$.



La définition du centre de masse donne la relation : $m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow m_2 = 4m_1$. De plus la troisième loi de Kepler donne :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

où r est la distance $M_1 M_2$ et T , la période de révolution des deux étoiles. Or la période de révolution de la Terre autour du Soleil est $T_{TS} = 1$ an et la distance Terre-Soleil est de 1 unité astronomique ($D = 1$ u.a.). D'après la troisième loi de Kepler, on a donc (la masse de la Terre étant beaucoup plus petite que celle du Soleil) :

$$\frac{D^3}{T_{TS}^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{M}{M_S} = \left(\frac{r}{D}\right)^3 \times \left(\frac{T_{TS}}{T}\right)^2$$

On trouve donc que $M = 4,38M_S = m_1 + m_2 = 5m_1$. On en déduit que $m_1 = 0,88M_S$ et $m_2 = 3,50M_S$.

1.2 La limite de Roche

La comète Shoemaker-Levy9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour éclater en morceaux. Le but de cet exercice est de comprendre, à l'aide d'un modèle simple, l'origine de la fragmentation. On se place dans le référentiel jupiterocentrique R_J que l'on supposera galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposée sphérique et homogène.

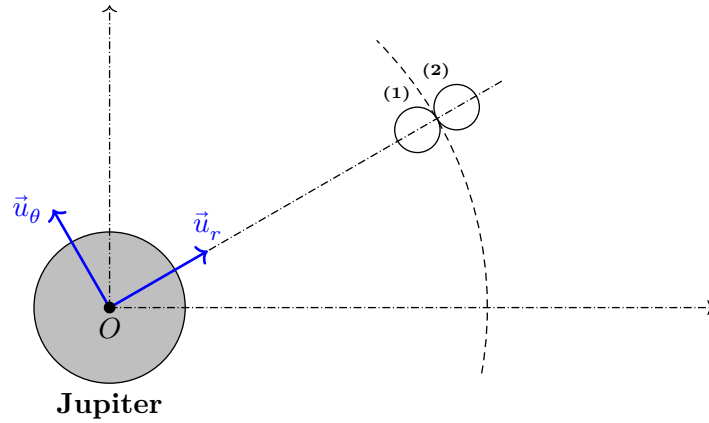


FIGURE 1.1 : Attention à l'écartèlement gravitationnel !

Données numériques : rayon de Jupiter $R_J = 71400$ km ; masse de Jupiter $M_J = 1,91 \times 10^{27}$ kg ; constante de gravitation $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m².kg⁻².

Notre modèle est le suivant. Un objet spatial (comète, satellite...) est constituée de deux sphères identiques de masses $m (\ll M_J)$ et de rayons a , homogènes de masse volumique μ . L'ensemble est en orbite circulaire de rayon r autour de Jupiter (voir figure 1.1) et conserve sa disposition au cours de la rotation (centre de Jupiter, centres des sphères et leur point de contact restent alignés). On fait enfin l'hypothèse que les deux sphères (1) et (2) ne sont liées entre elles que par leur *seule attraction gravitationnelle mutuelle*.

1. Où se situe de le centre de gravité de notre objet ? Justifier que le mouvement de son centre de gravité est circulaire uniforme.
2. Exprimer la vitesse angulaire de rotation ω en fonction de r et des données.
3. Représenter sur un schéma le bilan des forces qui s'exercent sur la sphère (1).
4. Exprimer analytiquement la force gravitationnelle que la sphère (2) exerce sur la sphère (1).
5. Simplifier l'expression analytique de la force gravitationnelle que Jupiter exerce sur la sphère (1) en effectuant un développement limité au premier ordre en $\epsilon = \frac{a}{r}$.
6. Exprimer l'accélération centripète de la sphère (1) en fonction de ω , r et a .
7. Démontrer que la composante \bar{N}_{12} sur \vec{u}_r de l'action de contact exercée par la sphère (2) sur la sphère (1) peut s'exprimer sous la forme

$$\bar{N}_{12} = \frac{GM_J m}{r^2} \left[3\epsilon - \frac{m}{4M_J} \frac{1}{\epsilon^2} \right]. \quad (1.1)$$

8. À quelle condition les deux sphères demeurent en contact ? En déduire que le contact entre les deux sphères est rompu lorsque la distance r devient inférieure à r_{lim} (r_{lim} est appelée limite de Roche). Exprimer r_{lim} en fonction de R_J en fonction de μ_J (masse volumique de Jupiter) et μ .
9. Faire l'application numérique lorsque $\mu \simeq 900$ kg.m⁻³ (de quelle masse volumique s'agit-il?).
10. En réalité, les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'est produite lorsque celle-ci est arrivée à une distance $r_0 = 1,5R_J$ de Jupiter. Proposer une explication.
11. Expliquer le présence des anneaux de Saturne ($R_S \simeq 60000$ km et $M_S \simeq 5,7 \times 10^{26}$ kg) à l'aide de cette théorie. Le rayon de l'anneau le plus proche vaut 75 000 km. Un calcul plus complet effectué par Roche en 1850 donne un préfacteur numérique de 2.45 dans la formule de r_{lim} trouvée en réponse à la question 8. En utilisant cette valeur du préfacteur, estimer la masse volumique des débris qui forment cet anneau.

Correction 1.2

1. Le centre de gravité G (barycentre des masses) est par raison de symétrie situé au point de contact des deux sphères. En effet, l'objet est homogène. Le centre de gravité se situe sur les éléments de symétrie de l'objet.

Le mouvement du centre de gravité est circulaire de rayon r . On peut donc en déduire ses vecteurs vitesse \vec{v}_G et accélération \vec{a}_G :

$$\overrightarrow{OG} = r \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G = r\omega \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G = -r\omega^2 \vec{u}_r + r\dot{\omega} \vec{u}_\theta$$

où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de l'objet. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à l'objet :

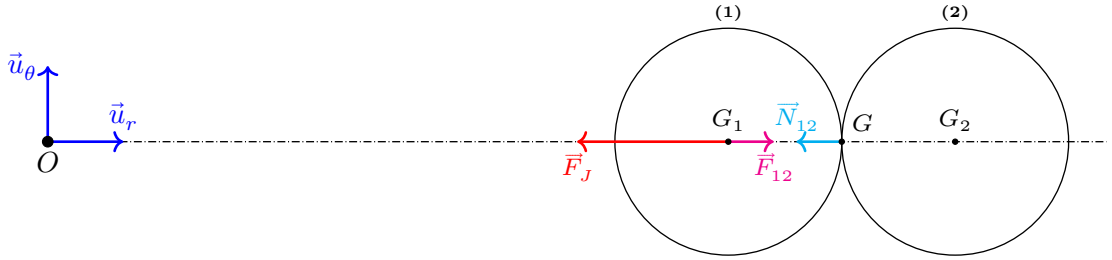
$$2m(-r\omega^2 \vec{u}_r + r\dot{\omega} \vec{u}_\theta) = -\frac{G2mM_J}{r^2} \vec{u}_r$$

En projetant cette relation sur \vec{u}_θ , on trouve $\dot{\omega} = 0$. La vitesse angulaire est constante. La norme de la vitesse l'est donc également : $\|\vec{v}\| = r|\omega|$. Le mouvement est bien circulaire uniforme.

2. En projetant cette relations sur \vec{u}_r , on trouve :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_J}{r^3}}$$

3. Les forces qui s'exercent sur la sphère (1) sont \vec{F}_J , la force gravitationnelle de Jupiter, \vec{F}_{12} , la force gravitationnelle de la sphère (2), et \vec{N}_{12} , l'action de contact de la sphère (2).



4. La force gravitationnelle que la sphère (2) exerce sur la sphère (1) est égale à :

$$\vec{F}_{12} = +\frac{Gm^2}{(2a)^2} \vec{u}_r$$

5. Exprimons \vec{F}_J en fonction de $\epsilon = \frac{a}{r}$ ($\ll 1$) :

$$\vec{F}_J = -\frac{GmM_J}{(r-a)^2} \vec{u}_r = -\frac{GmM_J}{r^2(1-\epsilon)^2} \vec{u}_r \simeq -\frac{GmM_J}{r^2} (1+2\epsilon) \vec{u}_r$$

6. L'accélération centripète de la sphère (1) est :

$$\vec{a}_{G_1} = -(r-a)\omega^2 \vec{u}_r$$

7. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la sphère (1) :

$$m\vec{a}_{G_1} = -m(r-a)\omega^2 \vec{u}_r = \vec{F}_J + \vec{F}_{12} + \vec{N}_{12}$$

Projetons cette relation sur \vec{u}_r :

$$\vec{N}_{12} = -m(r-a)\omega^2 + \frac{GmM_J}{r^2} (1+2\epsilon) - \frac{Gm^2}{(2a)^2} = ma \frac{GM_J}{r^3} + \frac{2\epsilon GmM_J}{r^2} - \frac{Gm^2}{4a^2}$$

car $r\omega^2 = \frac{GM_J}{r^2}$. On a finalement :

$$\vec{N}_{12} = \frac{GmM_J}{r^2} \left(\frac{a}{r} + 2\epsilon - \frac{mr^2}{4M_J a^2} \right) = \frac{GmM_J}{r^2} \left(3\epsilon - \frac{m}{4M_J \epsilon^2} \right)$$

8. La sphère (2) appuie sur la sphère (1) si $\bar{N}_{12} < 0$. Il y a donc rupture si :

$$\bar{N}_{12} = \frac{GmM_J}{r^2} \left(3\epsilon - \frac{m}{4M_J} \frac{1}{\epsilon^2} \right) \geq 0 \Rightarrow \epsilon \geq \sqrt[3]{\frac{m}{12M_J}} \Rightarrow r \leq a \sqrt[3]{\frac{12M_J}{m}}$$

La limite de Roche est donc égale à :

$$r_{\text{lim}} = a \sqrt[3]{\frac{12M_J}{m}} = R_J \sqrt[3]{\frac{12\mu_J}{\mu}} = 2,29 R_J \sqrt[3]{\frac{\mu_J}{\mu}}.$$

9.

$$r_{\text{lim}} = 2,29 R_J \sqrt[3]{\frac{\mu_J}{\mu}} = 2,29 R_J \sqrt[3]{\frac{1250}{900}} = 2,6 R_J$$

car la masse volumique de Jupiter est égale à :

$$\mu_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{1,91 \times 10^{27}}{\frac{4}{3}\pi \times 71400^3 \times 10^9} = 1250 \text{ kg.m}^{-3}$$

La masse volumique de l'objet est égale à celle de la glace.

10. Le modèle ne tient compte que de la cohésion gravitationnelle, et pas de la cohésion assurée par les forces intermoléculaires.
11. Les anneaux de Saturne seraient des objets célestes disloqués sous l'action des forces de marée. La limite de Roche est égale à :

$$r_{\text{lim}} = 2,45 R_S \sqrt[3]{\frac{\mu_S}{\mu}}$$

La masse volumique de l'anneau le plus proche de Saturne est donc :

$$\mu = \mu_S \left(\frac{2,45 R_S}{r_{\text{lim}}} \right)^3 = 630 \times \left(\frac{2,45 \times 60000}{75000} \right)^3 = 4700 \text{ kg.m}^{-3}$$

car la masse volumique de Saturne est égale à :

$$\mu_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \frac{5,7 \times 10^{26}}{\frac{4}{3}\pi \times 60000^3 \times 10^9} = 630 \text{ kg.m}^{-3}$$

1.3 Transfert de Hohmann

On considère la mise en orbite géostationnaire (OGS) autour de la Terre d'une navette spatiale de masse m déjà en orbite à basse altitude (OBA), c'est à dire à une hauteur négligeable devant le rayon de la Terre. La navette (voir la figure en dessous, qui n'est pas à l'échelle) accélère pendant une courte durée au voisinage du point P (périgée) : $\mathbf{v}_{\text{OBA}} \rightarrow \mathbf{v}_P$. Puis elle se déplace librement sur la trajectoire elliptique C (orbite de transfert) afin d'atteindre l'apogée avec la vitesse \mathbf{v}_A . On utilisera les valeurs numériques suivantes : rayon de la Terre, $R = 6400 \text{ km}$; champ gravitationnel à la surface terrestre, $g_0 = GM/R^2 \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$; constante universelle de gravitation, $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$. Enfin, on rappelle que l'orbite géostationnaire se situe à une distance $r \simeq 6,6R$ du centre de la terre, soit une altitude de $36\,000 \text{ km}$.

1. Pour quelle raison l'orbite de transfert C est-elle donnée par une ellipse unique et non par une famille d'ellipses possibles ?
2. Calculer le demi-grand axe a de C .
3. Calculer l'excentricité e de C .
4. Exprimer l'énergie cinétique au périgée en fonction des distances et des masses r, R, M et m (avant l'accélération qui change l'orbite).

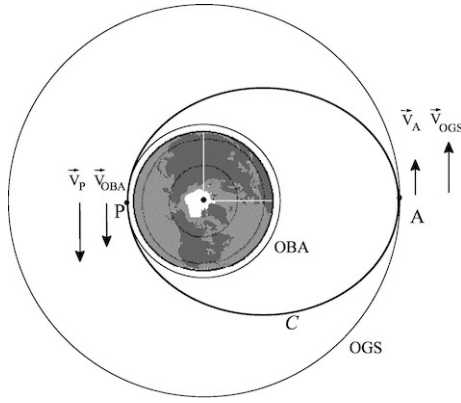


FIGURE 1.2 : Transfert de Hohmann

5. Calculer la vitesse v_P au périgée pour atteindre l'orbite de transfert. S'agit-il bien d'une accélération ?
6. À l'aide de la conservation du moment cinétique, L , calculer la vitesse à l'apogée, v_A . Quelle accélération faut-il prévoir pour atteindre l'orbite géostationnaire ?
7. Enfin, quelle est la durée du voyage sur l'orbite de transfert ?

Correction 1.3

1. La géométrie du transfert fixe périgée et apogée de l'ellipse C , respectivement à une distance

$$r_- \equiv R_{\text{OBA}} \quad (1.2)$$

$$r_+ \equiv R_{\text{OGS}} \quad (1.3)$$

du foyer (centre de la Terre). La donnée de ces distances fixe de façon unique tous les paramètres de l'ellipse : excentricité e et semi-latus rectum p , ou a et b les demi-axes. Les relations entre ces quantités qui seront utiles sont

$$e = \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} \quad (1.4)$$

$$p = \frac{2r_+r_-}{r_+ + r_-} \quad (1.5)$$

$$\text{ou} \quad p^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \quad (1.6)$$

Ces relations se déduisent simplement de l'équation de l'ellipse (dans la géométrie de la figure)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

qui donne

$$r_+ = \frac{p}{1 - e}$$

$$r_- = \frac{p}{1 + e}$$

2. $a = \frac{r_+ + r_-}{2}$
3. L'expression de e est donnée en (1.4).
4. Avant l'accélération le vaisseau est sur une orbite circulaire pour laquelle la "force" centrifuge compense la force de gravitation. On en déduit

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \text{où} \quad R = r_- = R_{\text{OBA}} \quad (1.7)$$

d'où

$$v_{\text{OBA}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{\alpha}{mr_-}}. \quad (1.8)$$

5. Au périégée il faut accélérer pour passer de l'orbite basse à C puisque

$$v_P = \sqrt{\frac{GMp}{r_-^2}} = v_{\text{OBA}} \sqrt{\frac{p}{r_-}} > v_{\text{OBA}}. \quad (1.9)$$

En effet au périégée et à l'apogée d'une ellipse $\dot{r}(t) = 0$ et la vitesse est orthogonale au rayon vecteur $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$. Par conséquent

$$\vec{v} = \frac{L}{mr} \vec{u}_\theta \quad (1.10)$$

et

$$E_c = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{\alpha p}{2r^2} \quad \text{où} \quad r = r_\pm \text{ et } L = \|\vec{L}\|. \quad (1.11)$$

Dans (1.11) on a utilisé $p = \frac{L^2}{\alpha m}$, expression que l'on retrouve facilement en comparant l'énergie totale au périégée et à l'apogée

$$E = \frac{L^2}{2mr_+^2} - \frac{\alpha}{r_+} = \frac{L^2}{2mr_-^2} - \frac{\alpha}{r_-}. \quad (1.12)$$

et en utilisant (1.6).

6. À partir de (1.12) on trouve immédiatement une expression comparable à (1.9) pour la vitesse à l'apogée

$$v_A = \sqrt{\frac{GMp}{r_+^2}} = v_{\text{OGS}} \sqrt{\frac{p}{r_+}} < v_{\text{OGS}}, \quad (1.13)$$

qui indique qu'il faut accélérer une seconde fois pour effectuer le transfert de C à l'orbite géostationnaire.

7. Le temps de transfert est égal à la demi-période T de l'orbite elliptique C qui est donnée par le troisième loi de Kepler :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 10.5 \text{ Heures} \quad (1.14)$$

1.4 Théorème de Bertrand (d'après Arnold)

On considère un système à deux corps de masse réduite μ , de potentiel central $U(r)$, d'énergie mécanique E et de moment cinétique \vec{L} . On utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour décrire la dynamique du système dans le plan orthogonal à \vec{L} .

1. Rappeler la relation entre L, μ, r et $\dot{\theta}$.
2. Rappeler la relation entre $E, U(r), L, \mu$ et \dot{r} .
3. Dans le cas où le mouvement est borné, montrer que l'angle $\Delta\theta$ entre le péri-centre (distance minimale r_{\min} entre les deux corps) et l'apo-centre (distance maximale r_{\max} entre les deux corps) s'exprime sous la forme de l'intégrale suivante

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (1.15)$$

Pour la suite, on rappelle que $\int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$.

4. Montrer que l'angle $\Delta\theta_c$ pour une orbite quasi-circulaire de rayon r_c s'écrit

$$\Delta\theta_c \simeq \pi \frac{L}{r_c^2} \frac{1}{\sqrt{\mu U''_{eff}}} = \pi \sqrt{\frac{U'}{3U' + r_c U''}} \quad (1.16)$$

où on a introduit la notation $f^{n'} = \left(\frac{d^n f}{dr^n} \right)_{r=r_c}$.

Indice : on pourra effectuer un développement limité à l'ordre convenable de $U_{eff}(r)$ au voisinage de r_c .

5. Pour quels types de potentiels centraux $\Delta\theta_c$ est-il indépendant du rayon de l'orbite r_c ? Montrer qu'il s'agit de potentiels de la forme $U(r) = ar^\alpha$ avec $\alpha \geq -2$ et $\alpha \neq 0$ ou d'un potentiel logarithmique. Exprimer $\Delta\theta_c$ en fonction de α et vérifier que $\Delta\theta_{\text{Newton}} = \pi$ et $\Delta\theta_{\text{harm}} = \frac{\pi}{2}$.

Indice : on se convaincra que ces potentiels vérifient l'équation $\frac{U'}{3U' + rU''} = \text{const.} \geq 0$.

6. Pour faciliter les calculs dans les questions suivantes, on effectue le changement de variable $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{L^2}{2\mu r^2}$. Montrer que $\Delta\theta$ s'exprime alors comme

$$\Delta\theta = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{k} dx}{\sqrt{2(E - W_{eff}(x))}} \quad (1.17)$$

où

$$W_{eff}(x) = U\left(\frac{L}{\sqrt{\mu k}} \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.18)$$

7. On pose $U(r) = ar^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Montrer que

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \Delta\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (1.19)$$

Indice : on effectuera le changement de variable $y = \frac{x}{x_{max}}$.

8. On pose $U(r) = -ar^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 2$. Montrer que

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Delta\theta = \frac{\pi}{2 - \beta}. \quad (1.20)$$

Indice : on effectuera le changement de variable $u^2 = \frac{k}{a}x^{2-\beta}$.

9. Conclure sur les seuls potentiels centraux dont les orbites sont fermées.

Correction 1.4

- Conservation du moment cinétique : $L = \mu r^2 \dot{\theta}$.
- Conservation de l'énergie mécanique : $E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$. On pose $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$.
- On a

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dr} &= \frac{d\dot{\theta}}{d\dot{r}}, \\ &= \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(r))}}, \\ &= \frac{L}{\sqrt{2\mu r^2}} \frac{1}{\sqrt{(E - U_{eff}(r))}}. \end{aligned}$$

en choisissant arbitrairement le sens direct pour le parcours de la trajectoire. On obtient le résultat mentionné par intégration entre les bornes r_{min} et r_{max} .

4. On injecte

$$U_{eff}(r) \simeq U_{eff}(r_c) + \frac{dU_{eff}(r)}{dr} \Big|_{r=r_c} (r - r_c) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{eff}(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_c} (r - r_c)^2 + \dots$$

dans (1.15). Par définition des trajectoires circulaires, $\frac{dU_{eff}(r)}{dr} \Big|_{r=r_c} = U' - \frac{L^2}{\mu r_c^3} = 0$ car elles correspondent au minimum du potentiel effectif. En posant

$$\delta E = 2E - 2U_{eff}(r_c) \quad \text{et} \quad (1.21)$$

$$u = \sqrt{\frac{U''_{eff}}{\delta E}} (r - r_c), \quad (1.22)$$

on obtient :

$$\Delta\theta_c \simeq \frac{L}{r_c^2 \sqrt{\mu}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\delta E - U''_{eff}(r - r_c)^2}} = \frac{L}{r_c^2 \sqrt{\mu}} \frac{1}{\sqrt{U''_{eff}}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

soit le premier résultat demandé. *Remarque* : les bornes d'intégration deviennent ± 1 car il s'agit des valeurs annulant le dénominateur, ce qui est la définition de r_{min} et r_{max} (distances où \dot{r} s'annule).

Ensuite on remarque que puisque $U' = \frac{L^2}{\mu r_c^3}$ alors $\frac{L}{\sqrt{\mu r_c^2}} = \sqrt{\frac{U'}{r_c}}$ tandis que $U''_{eff} = U'' + \frac{3L^2}{\mu r_c^4} = U'' + 3\frac{U'}{r_c}$. On obtient la seconde égalité en injectant ces relations dans la première.

5. En faisant varier L par exemple on peut changer le rayon de la trajectoire circulaire. Pour que $\Delta\theta_c$ ne dépende plus de r_c , il faut donc que le quotient $\frac{U'}{3U' + r_c U''}$ ne dépende plus de r_c dans un certain intervalle donc que $U(r)$ vérifie une équation du genre $\frac{U'}{3U' + r U''} = K > 0$ (la constante est positive car le quotient figurait sous une racine carrée). On en déduit que $\frac{U''}{U'} = \frac{1-3K}{K} \frac{1}{r}$. On pose $\alpha - 1 = \frac{1-3K}{K}$, c'est-à-dire $K = \frac{1}{\alpha+2}$. Il vient $\ln U' = (\alpha - 1) \ln r + c$, soit $U'(r) = br^{\alpha-1}$. Si $\alpha = 0$ on obtient $U(r) = b \ln r$. Sinon $U(r) = \frac{b}{\alpha} r^\alpha = ar^\alpha$. Comme $K > 0$, le quotient $\frac{1-3K}{K} > -3$ et $\alpha > -2$.

Dans les deux cas on en déduit que :

$$\Delta\theta_c = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + 2}} \quad (1.23)$$

avec $\alpha = 0$ pour le cas \ln , $\alpha = 2$ pour un potentiel harmonique et $\alpha = -1$ pour un potentiel Newtonien.

6. On pose $\frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} k x^2$ soit $x = \frac{L}{\sqrt{\mu k}} \frac{1}{r}$ d'où $-\frac{L}{\mu r^2} dr = \sqrt{\frac{k}{\mu}} dx$. En injectant dans la formule (1.15), on obtient le résultat demandé (évidemment x_{min} correspond à r_{max} et x_{max} correspond à r_{min}).
7. On se place dans l'hypothèse où $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \rightarrow \infty$. Avec le changement de variable mentionné, on a $W_{eff}(x = y x_{max}) = \frac{1}{2} k x_{max}^2 W_{eff}^*(y)$ avec $W_{eff}^*(y) = y^2 + \frac{2}{k x_{max}^2} U\left(\frac{L}{\sqrt{\mu k}} \frac{1}{y x_{max}}\right)$. Si $E \rightarrow \infty$, cela impose $x_{max} \simeq \sqrt{\frac{2E}{k}} \rightarrow \infty$ et $y_{min} = \frac{x_{min}}{x_{max}} \rightarrow 0$. Par ailleurs, $W_{eff}^*(y) = y^2 + a \left(\frac{L^2}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{E^{\frac{2+\alpha}{2}}} \frac{1}{y^\alpha}$. Lorsque E augmente, le terme $a \left(\frac{L^2}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{E^{\frac{2+\alpha}{2}}} \frac{1}{y^\alpha}$ devient négligeable devant le terme y^2 sauf au voisinage de $y = 0$, dans un intervalle de plus en plus réduit : à la limite, $W_{eff}^*(y) \simeq y^2$ presque partout avec une singularité en $y = 0$. Finalement, (1.17) donne (puisque $dx = x_{max} dy = \sqrt{\frac{2E}{k}} dy$ et que $W_{eff} = E W_{eff}^*(y)$)

$$\Delta\theta \simeq \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{dy}{\sqrt{(W_{eff}^*(y_{max}) - W_{eff}^*(y))}} \simeq \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (1.24)$$

8. On a $2[E - W_{eff}(x)] = 2E - kx^2 + 2a\left(\frac{L}{\sqrt{\mu k x}}\right)^{-\beta} = 2E - kx^2 + bx^\beta$ où $b = 2a\left(\frac{\sqrt{\mu k}}{L}\right)^\beta$.

Dans la limite où $E \rightarrow 0$, l'équation 1.17 devient

$$\Delta\theta = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sqrt{k}dx}{\sqrt{bx^\beta - kx^2}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{k}{b}} \frac{1}{x^{\beta/2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{b}x^{2-\beta}}}. \quad (1.25)$$

Si on pose $u^2 = \frac{k}{b}x^{2-\beta}$, on a $2udu = (2-\beta)\frac{k}{b}x^{1-\beta} = (2-\beta)\sqrt{\frac{k}{b}}\frac{u}{x^{\beta/2}}dx$. On a donc $\sqrt{\frac{k}{b}}\frac{dx}{x^{\beta/2}} = \frac{2du}{2-\beta}$. L'équation (1.25) se réécrit

$$\Delta\theta = \int_0^1 \frac{2du}{2-\beta} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2-\beta}. \quad (1.26)$$

9. Pour obtenir des orbites fermées, on doit avoir $\Delta\theta = 2\pi\frac{m}{n}$ de telle sorte qu'après $2n$ occurrences au plus, on retrouve l'apo-centre ou le péri-centre à la même position angulaire (le facteur 2 provient du fait que l'écart entre deux apo-centres ou péri-centres successifs est de $2\Delta\theta$).

D'après la question 5, cela n'est possible sur un intervalle non nul de conditions initiales si et seulement si $U = ar^\alpha$ ($\alpha \geq -2$) ou $U = b \ln r$ (cas $\alpha = 0$). Dans les 2 cas, $\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+2}}$.

Si $\alpha > 0$, le potentiel effectif a la forme d'une cuvette de potentiel et on peut fixer arbitrairement des valeurs aussi élevées que possible de l'énergie et conserver un mouvement borné. En étudiant la limite $E \rightarrow +\infty$ (question 6) et en faisant le constat qu'on peut créer des trajectoires circulaires d'énergie arbitrairement grande, on a la double égalité $\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+2}} = \frac{\pi}{2}$ donc seul $\alpha = 2$ est possible. On a alors $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ qui convient.

Si $\alpha < 0$, le potentiel effectif s'annule quand $r \rightarrow +\infty$ et il faut conserver une énergie négative pour avoir un mouvement borné. La question 7 donne dans la limite $E \rightarrow 0^-$, $\frac{\pi}{\sqrt{2+\alpha}} = \frac{\pi}{2-\beta} = \frac{\pi}{2+\alpha}$ car $\beta = -\alpha$ soit $\alpha = -1$ et $\Delta\theta = \pi$ qui convient.

Le cas $\alpha = 0$ donne $\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ incommensurable.

Finalement, on retrouve que les seuls potentiels centraux dont les trajectoires puissent être fermées sont le potentiel harmonique et le potentiel Newtonien.

1.5 Les lois de Kepler à partir de celles de l'oscillateur harmonique, Transmutation des forces (d'après Arnold)

1.5.1 L'oscillateur plan

On étudie ici le mouvement dans le plan d'une masse m attachée à un ressort de raideur k . On se place dans le plan complexe centré au point fixe de ressort et on pose $w = x + iy$. On notera $\gamma = \text{Arg}(w)$ la phase de l'oscillateur, τ le temps de l'oscillateur et w' la variation temporelle de la position de l'oscillateur, soit $w' = \frac{dw}{d\tau}$.

1. Quel est le type de la trajectoire ?
2. Écrire L_{osc} le moment cinétique de l'oscillateur en fonction des paramètres du problème. Est-ce une constante du mouvement ?
3. Exprimer T_{osc} la période du mouvement en fonction des paramètres du problème.
4. Exprimer l'énergie mécanique de l'oscillateur E_{osc} en fonction de w et w' , puis en fonction des paramètres géométriques de la trajectoire. Est-ce une constante du mouvement ?

Correction 1.5.1

1. $w'' = -\Omega^2 w$ soit $w(\tau) = a \cos \Omega\tau + ib \sin \Omega\tau$ avec, $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a et b étant des constantes d'intégration qui dépendent des C.I. ($a = x_0$ et $b = \frac{v_0}{\Omega}$). Il s'agit d'une ellipse centrée en 0 et de demi-axes a et b .
2. Pour tout mouvement à force centrale, le moment cinétique est une constante du mouvement et s'écrit ici $L_{\text{osc}} = m|w|^2 \frac{d\gamma}{d\tau}$.

3. $T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\Omega}$.
4. L'énergie est bien évidemment aussi ici une constante du mouvement et s'écrit $E_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m(|w'|^2 + \Omega^2|w|^2) = \frac{1}{2}m\Omega^2(a^2 + b^2)$.

1.5.2 Géométrie complexe

Soit $u = \rho e^{i\phi}$ un point du plan complexe tel que $\rho > 1$.

1. On introduit la transformation de Zhukovsky tel que $u \mapsto w = u + \frac{1}{u}$. Montrer qu'elle transforme un cercle de rayon $\rho > 1$ centré à l'origine dans le u -plan en une ellipse dont le centre est à l'origine du w -plan et dont on spécifiera les demi-axes a et b ($a > b$) en fonction de ρ . Où se trouvent les foyers de cette ellipse ? Quel type de loi de force centrale présente de telles trajectoires ?
2. On introduit maintenant la transformation de Levi-Civita $w \mapsto z = w^2$. Quelle est l'image de l'ellipse précédente ? Où se trouve ses foyers ? Expliciter ses demi-axes A et B ($A > B$) en fonction de ρ . Quel type de loi de force centrale possède de telles trajectoires ?
3. On pose $\theta = \text{Arg}(z)$ et $\gamma = \text{Arg}(w)$. Quel est le rapport en γ et θ ? Quand w fait un tour, combien en fait z ?

Correction 1.5.2

1. $w = (\rho + \rho^{-1})\cos\phi + i(\rho - \rho^{-1})\sin\phi$. Ellipse de centre O et de demi-axes $a = (\rho + \rho^{-1})$ et $b = (\rho - \rho^{-1})$. Ses foyers sont en $c^2 = a^2 - b^2$ soit ± 2 . cf. première partie oscillateur harmonique plan.
2. $z = 2 + (\rho^2 + \rho^{-2})\cos 2\phi + i(\rho^2 - \rho^{-2})\sin 2\phi$. Ellipse de centre 2 et de demi-axes $A = (\rho^2 + \rho^{-2})$ et $B = (\rho^2 - \rho^{-2})$. On a aussi $C^2 = A^2 - B^2 = 4$ donc un foyer en l'origine. loi de Kepler
3. $\gamma = 2\theta$. Quand w fait un tour, z en fait deux. En particulier, les z-périhélie et aphélie sont les points images des extrémités des respectivement petit et grand axes de l'ellipse w .

1.5.3 Transmutation entre les loi de Hooke et de Kepler

On appelle t le temps pour la trajectoire dans le z -plan et on notera $[\dots]$ l'action de l'opérateur $\frac{d}{dt}[\dots]$. Le moment cinétique écrit donc :

$$L_{\text{kep}} = m|z|^2 \frac{d\gamma}{dt} = m|z|^2 \dot{\gamma} \quad (1.27)$$

On cherche à retrouver la loi de force centrale à laquelle z est soumis telle que $L_{\text{kep}} = L_{\text{osc}}$ et $z = w^2$, c'est-à-dire la loi de force centrale donnant des ellipses dont l'un des deux foyers est au centre du champ de force.

1. Montrer que cela implique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2|w|^2} \frac{d}{d\tau} \quad (1.28)$$

2. En partant de :

$$w'' = -\Omega^2 w \quad (1.29)$$

montrer qu'on obtient bien :

$$\ddot{z} = -GM \frac{z}{|z|^3} \quad (1.30)$$

où on explicitera GM en fonction de E_{osc} .

3. Inversement, en partant de (1.30), retrouver (1.29). On explicitera Ω^2 en fonction de E_{kep} .
4. Utiliser la loi des aires pour exprimer T_{kep} en fonction de T_{osc} et des paramètres des trajectoires, a, b, A , et B .
5. En déduire la 3^{ème} loi de Kepler.

Correction 1.5.3

1. $I_{\text{kep}} = I_{\text{osc}} = m|w|^2 \frac{d\gamma}{d\tau} = m|z|^2 \frac{d\theta}{dt}$ avec $\theta = 2\gamma$ d'où le résultat.
 2. $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2w\bar{w}} \frac{dw^2}{d\tau} = \frac{w'}{w}$ d'où $\ddot{z} = -\frac{1}{2w\bar{w}^3} (|w'|^2 + \Omega^2 |w|^2) = -\frac{w^2}{|w|^6} E_{\text{osc}}$ soit le résultat demandé avec $E_{\text{osc}} = \frac{GM}{m}$.
 3. Inversement, $w = \sqrt{z}$ et $\frac{d}{d\tau} = 2\sqrt{z}\bar{z} \frac{d}{dt}$ d'où $w' = \bar{z}^{1/2} \dot{z}$ et $w'' = 2\left(\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + \bar{z}\ddot{z}\right) z^{1/2}$ d'où le résultat en posant $\Omega^2 = -2E_{\text{kep}} = +\frac{GM}{A}$.
 4. La loi des aires donne $\pi ab T_{\text{osc}} = \pi AB T_{\text{kep}}$ soit $T_{\text{kep}} = \frac{AB}{ab} T_{\text{osc}}$. Or $B = ab$ et $T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\Omega}$.
On retrouve bien $T_{\text{kep}} = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{GM}}$.
-

1.5.4 Généralisation

Soient 2 forces centrales dans les variables w et z , suivant respectivement des lois de puissance en a et A (avec des constantes $-C_w$ et $-C_z$) dont les trajectoires dans le plan complexe coïncident par la transformation $z = w^\alpha$. On prendra $m = 1$ pour simplifier les expressions. En notant τ et t les temps respectifs sur chaque trajectoire, on a donc :

$$|w|^2 \frac{d}{d\tau} = \alpha |z|^2 \frac{d}{dt} \quad (1.31)$$

1. En vous inspirant du paragraphe précédent, montrer que cela implique que :

$$(a+3)(A+3) = 4 \quad (1.32)$$

2. Montrer qu'on retrouve la transmutation du paragraphe précédent entre les lois de Hooke et de Kepler.
-

Correction 1.5.4

1. On a :

$$w'' = -C_w w |w|^{a-1} \quad (1.33)$$

$$E_w = \frac{1}{2} |w'|^2 + C_w \frac{|w|^{a+1}}{a+1} \quad (1.34)$$

et

$$\ddot{z} = -C_z z |z|^{A-1} = -C_z w^\alpha \bar{w}^{\frac{\alpha(A-1)}{2}} \bar{w}^{\frac{\alpha(A-1)}{2}} \quad (1.35)$$

Or d'après (1.31), on a :

$$\frac{1}{dt} = \frac{1}{\alpha} w^{1-\alpha} \bar{w}^{1-\alpha} \frac{d}{d\tau} \quad (1.36)$$

D'où $\dot{z} = \bar{w}^{1-\alpha} w'$ et

$$\ddot{z} = 2E_w \frac{1-\alpha}{\alpha} w^{1-\alpha} \bar{w}^{1-2\alpha} \quad (1.37)$$

en utilisant (1.33) et (1.34) si $\frac{2}{a+1} = \frac{1}{\alpha-1}$ soit

$$\alpha = \frac{a+3}{2} \quad (1.38)$$

.

L'expression (1.37) est de la forme (1.35) pour $\alpha \frac{A-1}{2} = 1 - 2\alpha$ soit

$$2 = \alpha(A+3) \quad (1.39)$$

Les équations (1.38) et (1.39) donne directement le résultat demandé.

2. Pour la loi de Hooke, on a $a = 1$ et on retrouve bien $\alpha = 2$ et $A = -2$ soient respectivement la transformation de Levi-Civita et la loi de Kepler.
-

TD 2 : Collisions

2.1 Collision d'un ion He^+ avec un atome d'hélium

Un ion He^+ de masse m et de vitesse \mathbf{v}_1 entre en collision avec un atome d'hélium au repos. On suppose que les masses de l'atome et de l'ion sont identiques. Après le choc, la vitesse de l'ion est \mathbf{v}'_1 et elle fait un angle de 30° avec \mathbf{v}_1 . La vitesse \mathbf{v}'_2 de l'atome fait un angle de -45° avec \mathbf{v}_1 .

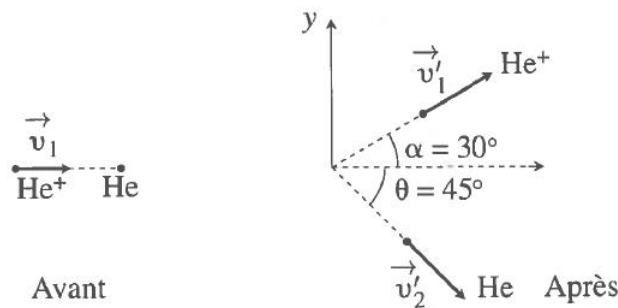


FIGURE 2.1 : Collision d'un ion He^+ avec un atome d'hélium

1. Déterminer les normes des vitesses \mathbf{v}'_1 et \mathbf{v}'_2 ainsi que la quantité d'énergie perdue au cours de la collision, en fonction de l'énergie cinétique initiale.

Correction 2.1

1. La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_2$$

La projection sur Ox donne pour les valeurs algébriques :

$$v_1 = v'_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + v'_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La projection sur Oy donne :

$$0 = v'_1 \frac{1}{2} - v'_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne :

$$v'_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} v_1$$

$$v'_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} v_1$$

L'énergie perdue dans la collision est l'opposé de la variation d'énergie cinétique, soit :

$$\Delta E_c = -(\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 - \frac{1}{2}mv_1^2)$$

soit :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_1^2[1 - \frac{6}{(1 + \sqrt{3})^2}] = 0.196E_{c1}$$

2.2 Choc mou

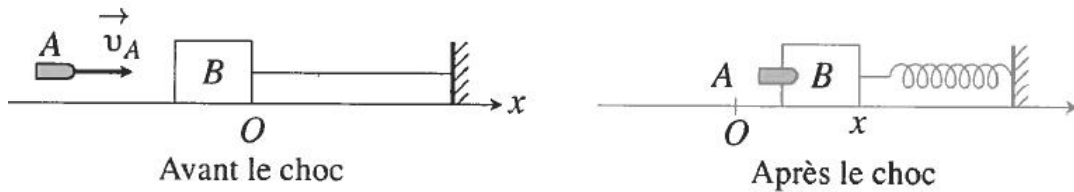
Une balle A de masse m est tirée dans la direction d'un cube B de bois de masse M posé sur un plan horizontal. La réaction normale au plan équilibre le poids de B. Un ressort de coefficient d'élasticité k , limite le déplacement du cube (voir figure).

1. Juste avant le choc, la balle a une vitesse \mathbf{v}_A . Le choc est supposé mou, la balle entre dans le bois et l'ensemble se déplace dans la direction Ox en comprimant le ressort. Quelle est la vitesse \mathbf{v}_B du cube de bois et de la balle immédiatement après le choc ?
2. Le glissement sur le plan se fait sans frottement. Quelle est la distance d de compression du ressort ?
3. Le plan horizontal exerce maintenant sur l'ensemble (A+B) une force de frottement \mathbf{f} horizontale opposée au déplacement, proportionnelle à la masse totale et à la distance parcourue x . On pose

$$\mathbf{f} = -\alpha(M + m)x\mathbf{u}_x$$

Quelle est la distance d_M parcourue par l'ensemble (A+B) en fonction de v_A , α , k , m et M

Correction 2.2



1.

FIGURE 2.2

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\mathbf{v}_A = (m + M)\mathbf{v}_B$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{v}_B = \frac{m}{m + M}\mathbf{v}_A$$

2. Écrivons la conservation de l'énergie mécanique du système $A + B +$ ressort. On évalue l'énergie cinétique après le choc, pour les deux masses :

$$E_c = \frac{1}{2}(M + m)v_B^2$$

et l'énergie potentielle du ressort $E_p = 0$.

Lorsque le ressort est comprimé au maximum, l'énergie cinétique des masses est nulle et l'énergie potentielle du ressort est $E_p = \frac{1}{2}kd^2$.

La conservation de l'énergie mécanique du système s'écrit :

$$\frac{1}{2}(M + m)v_B^2 = \frac{1}{2}kd^2$$

ce qui conduit à :

$$d = v_B \left(\frac{M+m}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{mv_A}{\sqrt{k(m+M)}}$$

3. Le poids \mathbf{P} et la réaction \mathbf{R} se compensent. Les seules forces qui agissent sur l'ensemble (A+B) sont la force du ressort et la force de frottement :

$$\mathbf{F}_1 = -kx \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\alpha(M+m)x \mathbf{i}$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant où la balle entre dans le

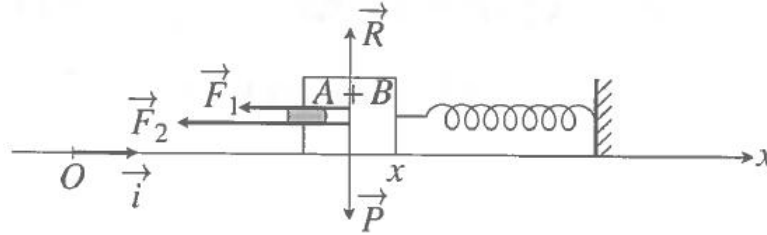


FIGURE 2.3

cube et l'instant où le ressort est comprimé au maximum :

$$\Delta E_C = -\frac{1}{2}(M+m)v_B^2 = \int_0^{d_M} (-kx - \alpha(M+m)x) dx \quad (2.1)$$

soit :

$$\frac{1}{2}(M+m)v_B^2 = (k + \alpha(M+m)) \frac{d_M^2}{2} \quad (2.2)$$

On en déduit :

$$d_M = v_n \left(\frac{M+m}{k + \alpha(M+m)} \right)^{0.5} \quad (2.3)$$

$$d_M = mv_A ((M+m)(k + \alpha(M+m)))^{-0.5} \quad (2.4)$$

2.3 Coefficient de restitution

Deux particules de masses m_1 et m_2 sont mobiles sans frottements sur un axe horizontal Ox et peuvent entrer en collisions. On désigne par v_1 et v_2 leurs vitesses avant le choc et par v'_1 et v'_2 leurs vitesses algébriques après le choc. Ce choc peut être décrit par un coefficient de restitution défini par :

$$v'_2 - v'_1 = -e(v_2 - v_1)$$

1. Déterminer les vitesses v'_2 et v'_1 après le choc en fonction des masses, de e et de v_1 et v_2 . Examiner les cas particuliers $e = 1$ et $e = 0$.
2. On se place dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}_g des deux particules. Quel est la vitesse du mobile fictif avant le choc ? et après le choc ? Quelle est la variation d'énergie cinétique du système au cours du choc dans \mathcal{R}_g ?

1. La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

La projection sur Ox donne pour les valeurs algébriques :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

En utilisant la relation définissant e dans l'énoncé, on peut trouver v'_1 et v'_2 :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 (v'_1 - e(v_2 - v_1))$$

soit :

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} [v_1(m_1 - em_2) + v_2(m_2 + m_2e)]$$

at

$$v'_2 = v'_1 - e(v_2 - v_1)$$

$$v'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [v_1 m_1 (1 + e) + v_2 (m_2 - em_1)]$$

• Dans le premier cas où $e = 1$:

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} [v_1(m_1 - m_2) + 2v_2 m_2]$$

$$v'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [2v_1 m_1 + v_2(m_2 - m_1)]$$

• Dans le cas où $e = 0$:

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} [v_1 m_1 + v_2 m_2]$$

$$v'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [v_1 m_1 + v_2 m_2] = v'_1$$

Après le choc les deux particules sont collées l'une à l'autre après le choc : *il s'agit d'un choc totalement mou.*

2. Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}_G , l'étude du système de deux particules se ramène à l'étude du mobile fictif P affecté de la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, repéré par rapport au barycentre G par le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{GP}$. Sa vitesse est donc :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

L'énergie cinétique de P est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu v^2$$

C'est aussi l'énergie cinétique du système dans le référentiel barycentrique. La vitesse de P avant le choc est $v_2 - v_1$ et après le choc $v'_2 - v'_1$. La variation d'énergie barycentrique s'écrit donc :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \mu (v'_2 - v'_1)^2 - \frac{1}{2} \mu (v_2 - v_1)^2 = \frac{1}{2} \mu (v_2 - v_1)^2 (e^2 - 1)$$

2.4 Choc élastique et détermination de la masse du neutron

On considère deux particules ponctuelles de masses m_1 et m_2 . La particule de masse m_1 est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_1 selon l'axe Ox d'un repère xOy lié à un référentiel galiléen. Elle percute une masse m_2 initialement au repos et située en O. On suppose le choc élastique et on notera θ_1 et θ_2 les angles que font les vitesses v'_1 et v'_2 avec Ox après le choc.

1. Établir les équations permettant d'exprimer v'_1 et v'_2 et θ_2 en fonction de v_1 , θ_1 , m_1 et m_2 .

On suppose maintenant que $\theta_1 = 0$.

1. Donner les expressions de v'_1 et v'_2 en fonction de v_1 , m_1 et m_2 .
2. Soit E_1 l'énergie cinétique de la particule (1) avant le choc et E'_2 celle de la deuxième particule après le choc. Calculer E_1 en fonction de m_1 et v_1 , puis E'_2 en fonction de E_1 , m_1 et m_2 . Examiner les 3 cas : $m_1 = m_2$, $m_1 \ll m_2$, $m_1 \gg m_2$. Dans ce dernier cas, que dire du rapport des vitesses après le choc ?

On bombarde avec des neutrons de masses m et de vitesses \mathbf{v} des cibles contenant des atomes d'hydrogène ou d'azote au repos. On mesure les vitesses v'_N et v'_p des noyaux d'azote et des protons émis dans la direction $\theta_2 = 0$.

1. Montrer que l'on peut déduire de ces mesures une valeur approchée de la masse du neutron sachant que l'expérience a donné un rapport des vitesses qui vaut $\frac{v'_p}{v'_N} = 7.5$. On adoptera $\frac{m_N}{m_p} = 14$.

Correction 2.4

1. La conservation de la quantité de mouvement s'applique pour tout type de collision. Ici le choc est élastique : il y a en plus conservation de l'énergie cinétique. Faisons une figure : La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

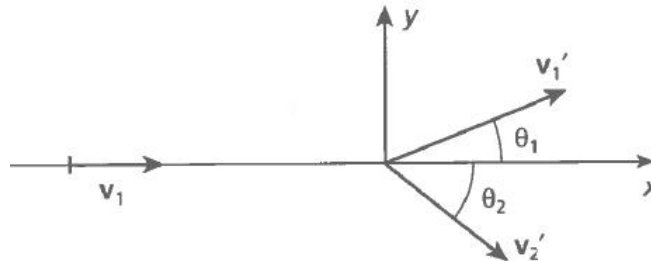


FIGURE 2.4 : Détermination de la masse du neutron

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (2.5)$$

La conservation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$m_1 v_1^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 \quad (2.6)$$

On projette la première équation selon Ox et Oy, ce qui donne :

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \theta_1 + m_2 v'_2 \cos \theta_2$$

$$0 = m_1 v'_1 \sin \theta_1 + m_2 v'_2 \sin \theta_2$$

Ces deux équations et la conservation de l'énergie cinétique permettent de déterminer v'_1 , v'_2 et θ_2 .

2. Dans le cas où $\theta_1 = 0$, cad pour un choc direct, $\theta_2 = 0$, on a :

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2v'_2$$

et

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2v'^2_2$$

ce qui conduit à

$$v_1 + v'_1 = v'_2$$

$$v_1 - v'_1 = \frac{m_2}{m_1}v'_2$$

d'où :

$$2v_1 = v'_2(1 + \frac{m_2}{m_1})$$

et

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

et

$$v'_1 = v'_2 - v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

On voit que si $m_1 > m_2$, la particule (1) continue dans le même sens. Sinon, il y a rebond.

3. Énergies cinétiques : On a $E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ et $E'_2 = \frac{1}{2}m_2v'^2_2 = \frac{1}{2}m_2(\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2})^2$ soit :

$$E'_2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}E_1$$

On peut donc étudier les 3 cas pour les masses :

- si $m_1 = m_2$, alors $E'_2 = E'_1$: toute l'énergie de la particule incidente est transférée à la cible.
 - Si $m_1 \gg m_2$, on a alors $E'_2 \simeq (\frac{4m_2}{m_1})E_1 \ll E_1$: le projectile perd très peu d'énergie et le mouvement de la particule incidente est très peu modifié, et on a $v'_2 \simeq 2v_1$.
 - Si $m_1 \ll m_2$, $E'_2 \simeq (\frac{4m_1}{m_2})E_1 \ll E_1$; on observe un rebond du projectile qui conserve presque toute son énergie.
4. Application au bombardement des atomes d'hydrogène ou d'azote par des neutrons de masses m_n . Soit m_p la masse du proton et m_N la masse de l'azote.

On a : $v'_p = \frac{2m_nv}{m_n+m_p}$ et $v'_N = \frac{2m_nv}{m_n+m_N}$

On forme le rapport des vitesses : $\frac{v'_p}{v'_N} = \frac{m_n+m_N}{m_n+m_p}$ d'où l'on déduit le rapport des masses :

$$\frac{m_n}{m_p} = (\frac{m_N}{m_p} - \frac{v'_p}{v'_N}) \frac{1}{\frac{v'_p}{v'_N} - 1},$$

ce qui implique : $m_n \simeq m_p$.

[FM : L'application numérique donne $m_n = m_p$ aux décimales données. De plus, prendre $\frac{m_N}{m_p} = 14$ n'est-il pas dire déjà $m_n \simeq m_p$? Ne serait-il pas plus intéressant de ré-écrire l'exo par exemple en demandant aux étudiants de trouver l'atome x tel que $\frac{v'_p}{v'_x} = 7.5$?] *Rappel des ordres de grandeur :*

La masse du proton et du neutron sont respectivement : $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg et $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg., ce qui conduit à un rapport :

$$\frac{m_p}{m_n} = 0.9986$$

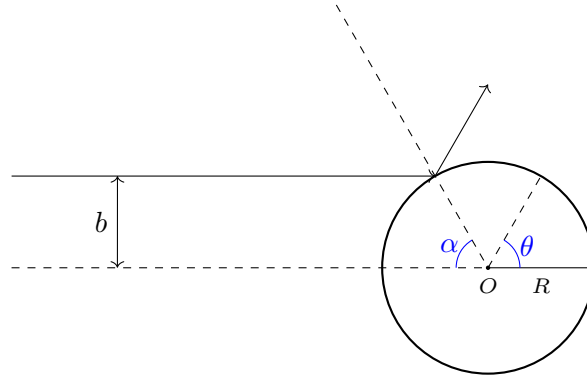


FIGURE 2.5 : Collision d'une particule ponctuelle sur une sphère dure, $\theta = \pi - 2\alpha$

2.5 Collision d'une particule sur une sphère dure

1. Calculer la section efficace différentielle pour la collision d'une particule ponctuelle avec une sphère dure dans l'angle solide $d\Omega$ (cf. Fig. 2.5). Calculer la section efficace totale pour vérifier votre résultat.
2. Calculer la section efficace totale pour la collision de deux sphères dures de même rayon (l'une étant initialement au repos) (cf. Fig. 2.6 b). Note : l'angle θ de la trajectoire après le choc est encore donné par $\pi - 2\alpha$.

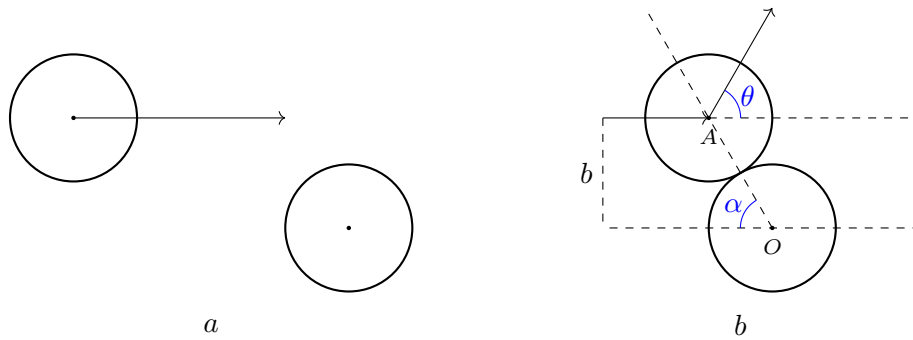


FIGURE 2.6 : Collision de deux sphères dures de rayon R : a) avant, b) pendant la collision.

3. Application à la théorie cinétique des gaz : On considère un volume V rempli de particules (considérées comme des sphères dures) à température T et de densité de particules n . Comme on s'intéresse seulement aux ordres de grandeur, on considère que la vitesse moyenne de déplacement d'une particule est

$$v_{th} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}},$$

k_B étant la constante de Boltzmann. On veut calculer le libre parcours moyen ℓ des particules et le temps caractéristique entre deux collisions τ_c . Dans ce but on calculera successivement

- (a) le volume V_t dans lequel une particule du gaz est susceptible d'avoir une collision avec une autre particule du gaz et qu'elle balaie pendant le temps t ,
- (b) le nombre moyen de particules du gaz dans V_t ,
- (c) le temps τ_c minimal pour qu'il y ait en moyenne au moins une collision,
- (d) le libre parcours moyen ℓ . Votre résultat doit être indépendant de la température.
- (e) Exprimer ℓ en fonction de la pression P et de la température T .
- (f) Application numérique : On considère que la masse molaire de l'air est de 30 g/mol (plus précisément : 28 g/mol pour le diazote et 32 g/mol pour le dioxygène) et que le rayon des molécules est de 2 Å. Calculer, à température et pression ambiantes, v_{th} , τ_c et ℓ .

Correction 2.5

1. Supposons un courant incident de particules (en particules par mètre carré et par seconde) égal à n . Il y aura $n2\pi b db$ particules par seconde avec un paramètre d'impact entre b et $b+db$. Ces particules seront déviées avec un angle compris entre θ et $\theta+d\theta$, avec $b = R \cos \frac{\theta}{2}$ et donc $db = \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = \frac{1}{2} R \sin \frac{\theta}{2} d\theta$. En remplaçant, on voit que le nombre de particules par seconde déviées entre θ et $\theta + d\theta$ est

$$n\pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = n \frac{1}{2} \pi R^2 \sin \theta d\theta$$

. Ces particules se répartissent uniformément dans l'angle solide présent entre les angles θ et $\theta + d\theta$, dont la mesure est $2\pi \sin \theta d\theta$. Donc, le nombre de particules par seconde déviées dans un angle solide infinitésimal $d\Omega$ dans la direction θ est donné par $n d\sigma = n \frac{1}{2} \pi R^2 \sin \theta d\theta \times \frac{d\Omega}{2\pi \sin \theta d\theta} = n \frac{1}{4} R^2 d\Omega$ et il n'y a plus qu'à diviser par n . La section efficace totale est

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \frac{R^2}{4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \pi R^2. \quad (2.7)$$

2. La relation entre le paramètre d'impact b et α devient

$$b = 2R \sin \alpha. \quad (2.8)$$

Les résultats de la question 1. s'appliquent donc en remplaçant R par $2R$.

3. (a) Si la section efficace de collision de deux particules du gaz est σ on aura $V_t = v_{th} t \sigma$,
 (b) Si n est la densité du gaz, il y aura en moyenne nV_t particules dans le volume V_t .
 (c) il y aura au moins une particule en moyenne dans ce volume si $nV_t > 1$, on en déduit $nV_{\tau_c} = 1$, soit $\tau_c = \frac{1}{nv_{th}\sigma}$.
 (d) Par conséquent $\ell = v_{th}\tau_c = \frac{1}{n\sigma}$ qui effectivement ne dépend pas de T .
 (e) On a $n = \frac{P}{kT}$ d'où $\ell = kT/\sigma P \sim \frac{1}{P}$.
 (f) Application numérique : On trouve $v_{th} = 450$ m/s, $\ell = 80$ nm (wikipédia dit 68 nm) et $\tau_c = 0,18$ ns.

2.6 Section efficace d'ionisation à la Thomson

Dans un article célèbre et encore fréquemment cité, J.J. Thomson¹ (celui qui a découvert l'électron en 1897) utilise la théorie classique des collisions pour calculer la section efficace d'ionisation de l'hydrogène par bombardement d'électrons d'énergie E_2 . Il fait essentiellement l'hypothèse que l'électron lié se comporte comme une cible fixe. Si l'énergie transférée par la collision est supérieure à l'énergie de liaison I (13,6 eV pour l'hydrogène), l'électron atomique sera libéré. Ce résultat purement classique donne le bon ordre de grandeur (mais pas mieux) lorsque l'énergie de l'électron incident est telle que $1 \leq \frac{E_2}{I} \leq 100$. Dans le référentiel du laboratoire, on pose \mathbf{p}_2 l'impulsion de l'électron incident de masse m_2 et \mathbf{p}'_2 son impulsion après la collision. Toutes les quantités après la collision seront affectées d'un prime. Toujours dans le référentiel du laboratoire, on pose \mathbf{p}'_1 l'impulsion de l'électron atomique de masse m_1 ² cible après la collision. Par hypothèse, son impulsion avant la collision est $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$. On introduit l'impulsion réduite $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ où $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ est la coordonnée relative et $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ la masse réduite, et $\mathbf{p}' = m\dot{\mathbf{r}}'$.

1. Justifier pourquoi sur la Fig. (2.7), $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_2$ et pourquoi A, B et C se trouvent sur un demi-cercle. Justifier également la position des vecteurs \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 sur cette figure. Donner la quantité de mouvement des 2 électrons dans le référentiels du centre de masse et faire un croquis de la collision dans le référentiel du laboratoire et du centre de masse en y indiquant les angles θ_1, θ_2 et χ .

1. Phil.Mag., 23 (1912).

2. Il est évident qu'ici $m_1 = m_2 = m_{e1}$.

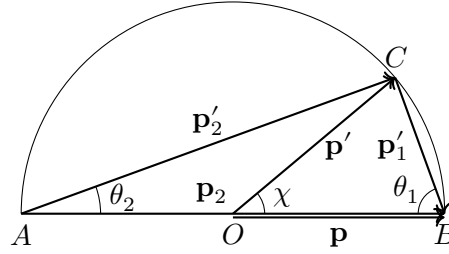


FIGURE 2.7 : Collision d'un électron incident d'impulsion \mathbf{p}_2 sur un électron atomique « fixe » (particule 1). \mathbf{p}'_2 est l'impulsion après collision de la particule incidente dans le référentiel du laboratoire.

2. Soit E_2 l'énergie de l'électron incident dans le référentiel du laboratoire. Calculer l'énergie cinétique E'_1 de l'électron cible après collision en fonction de E_2 et de l'angle de diffusion χ dans le référentiel du centre de masse.
3. Pour le potentiel de Coulomb, on rappelle que la relation entre χ et le paramètre d'impact b est donnée par

$$\tan \frac{\chi}{2} = \frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.9)$$

Soit I l'énergie d'ionisation. Quelle est la valeur maximale b_I que peut prendre le paramètre d'impact b pour que la collision provoque l'ionisation de l'atome d'hydrogène ? On donnera b_I^2 en fonction de α , I et E_2 .

4. Calculer la section efficace totale d'ionisation σ_I .
5. Vérifier votre résultat en exprimant $d\sigma$ dans la formule de Rutherford en fonction de l'énergie acquise par la particule cible E'_1 calculée en 2 et en vérifiant que $\sigma_I = \int_I^{E_2} d\sigma(E_1)$. Justifier les limites d'intégration. On rappelle la formule de Rutherford, cf section 2.3.3 du poly de cours,

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (2.10)$$

Correction 2.6

1. Comme pour tout problème à deux corps, il est utile de remplacer les impulsions \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 par la quantité de mouvement totale $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M\dot{\mathbf{R}}$ et la quantité de mouvement réduite $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Ici \mathbf{R} est la coordonnée du centre de masse, $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ est la coordonnée relative. Notons que dans ce problème on a $m = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$. En utilisant ces notations on vérifie rapidement que l'énergie cinétique totale s'écrit

$$E_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (2.11)$$

La conservation de la quantité de mouvement donne

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}', \quad (2.12)$$

tandis que le caractère élastique de cette collision implique

$$E_c = E'_c. \quad (2.13)$$

On obtient donc facilement

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{conservation de la quantité de mouvement, cible fixe, et (2.12),} \quad (2.14)$$

$$\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}'\| \quad \text{choc élastique : (2.11) et (2.13).} \quad (2.15)$$

On en déduit

$$\mathbf{p} = m(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) = \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_2,$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= m(\dot{\mathbf{r}}'_2 - \dot{\mathbf{r}}'_1) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_1) - \mathbf{p}'_1 \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1.
\end{aligned}$$

2. Un examen de la figure 2.7 donne immédiatement, en découpant le triangle isocèle OBC en deux triangles rectangles identiques,

$$\sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{p}'_1\|}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{\|\mathbf{p}'_1\|}{\|\mathbf{p}_2\|}, \quad (2.16)$$

soit

$$E'_1 = \sin^2 \frac{\chi}{2} E_2. \quad (2.17)$$

3. L'énergie transférée à l'électron atomique doit être égale ou supérieure à l'énergie d'ionisation I (13,6 eV pour l'hydrogène). Cette condition fixe une valeur maximale b_I du paramètre d'impact b , qui correspond à une valeur minimale χ_I de l'angle χ . En vertu de (2.17) et (2.9), elle est donnée par

$$I = \sin^2 \frac{\chi_I}{2} E_2 = \frac{\tan^2 \frac{\chi_I}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\chi_I}{2}} E_2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + b_I^2 m^2 v_2^4} E_2 = \frac{E_2}{1 + \left(\frac{b_I E_2}{\alpha}\right)^2}, \quad (2.18)$$

soit

$$b_I^2 = \frac{\alpha^2}{E_2^2} \left(\frac{E_2}{I} - 1 \right). \quad (2.19)$$

4. Par conséquent, la section efficace d'ionisation est

$$\sigma_I = 2\pi \int_0^{b_I} b db = \pi b_I^2 = \frac{\pi \alpha^2}{E_2^2} \left(\frac{E_2}{I} - 1 \right). \quad (2.20)$$

5. La réponse à la question 2 nous a donné $E'_1 = E_2 \sin^2(\chi/2)$ (cf. (2.17)), d'où $dE'_1 = E_2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2) d\chi$. En remplaçant directement dans la formule de Rutherford pour $d\sigma$ et en utilisant $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi = 4\pi \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi$, on trouve

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2E_2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \pi \left(\frac{\alpha}{E_2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2} d\chi}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} = \frac{\pi \alpha^2}{E_2} \frac{dE'_1}{E_1'^2}. \quad (2.21)$$

L'électron incident perd au maximum une énergie E_2 et cette perte d'énergie doit être au minimum I pour qu'il y ait ionisation, d'où

$$\sigma_I = \int_I^{E_2} d\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{E_2} \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{E_2} \right). \quad (2.22)$$

TD 3 : Équations de Lagrange

3.1 Bille sur un cerceau tournant

Une bille de masse m est libre de glisser sans frottement sur un cerceau de rayon r , tournant autour d'un axe vertical à vitesse angulaire ω . Sa position sur le cerceau est caractérisé par un angle θ , comme indiqué sur la figure 3.1.

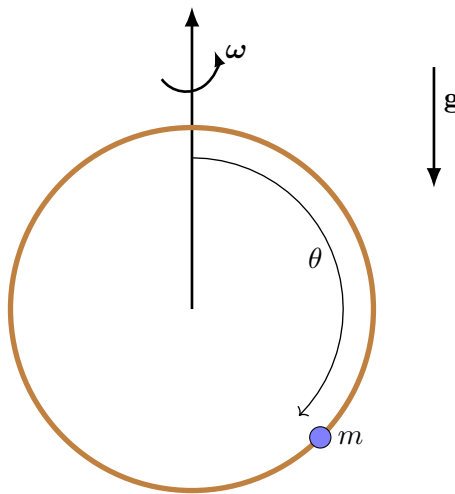


FIGURE 3.1 : Bille sur un cerceau tournant.

1. Déterminer le Lagrangien et les équations du mouvement (que l'on ne demande pas d'intégrer).
2. Trouver les points d'équilibre θ_0 de la bille si sa vitesse initiale le long du cerceau est nulle. Dans quel intervalle de valeurs doit se trouver le rapport $g/(r\omega^2)$ pour qu'il existe un point d'équilibre $\theta_0(\omega)$ qui dépend de ω ?
3. Vers quelle valeur tend cette solution $\theta_0(\omega)$, quand $\omega \rightarrow \infty$?
4. Etudier la stabilité de tous les points d'équilibre trouvés précédemment. On distinguera si nécessaire les deux cas : $g > r\omega^2$ et $g < r\omega^2$.

Correction 3.1

1. La position de la masse m sur la sphère balayée par le cerceau peut être donnée par ses coordonnées sphériques r, θ, φ avec $\mathbf{r} = r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$. Mais r et $\varphi = \omega t + \varphi(0)$, sont fixés l'un et l'autre par les données du problème. Le système n'a donc qu'un degré de liberté $\theta \in [0, \pi]$. On trouve donc pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2 \theta \omega^2.$$

et son énergie potentielle à une constante près est

$$V = mgr \cos \theta.$$

Pour $L = T - V$, l'équation de Lagrange est

$$mr^2\ddot{\theta} - mr^2 \sin \theta \cos \theta \omega^2 + mgr \sin \theta = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution analytique en terme de fonctions élémentaires.

2. On cherche θ_0 tel que $\ddot{\theta}(t) = 0$, soit

$$\sin \theta (\cos \theta - \frac{g}{\omega^2 r}) = 0.$$

Lorsque la vitesse angulaire de rotation est suffisamment petite, $g/\omega^2 r > 1$, il n'y a que deux positions d'équilibre : $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \pi$. Par contre pour de plus grandes vitesses angulaires de rotation du cerceau, $g/\omega^2 r \leq 1$, il existe une nouvelle position d'équilibre qui dépend de ω

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{\omega^2 r}; \quad \theta_0 = \arccos \frac{g}{\omega^2 r}; \quad \theta_0 \in [0, \pi].$$

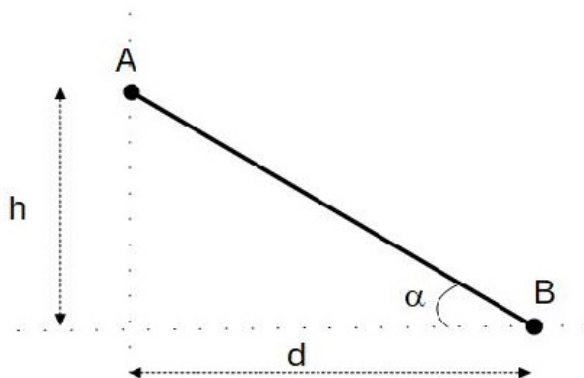
3. Considérons la solutions dépendante de ω . Pour $\omega \rightarrow \infty$, $\cos(\theta_0) \rightarrow 0$ et $\theta_0 \rightarrow \pi/2$.
 4. On vérifie facilement [[AS : Il faudrait développer ...](#)] que $\theta_0 = \pi$ est stable pour $g/\omega^2 r > 1$ et instable si $g/\omega^2 r \leq 1$, tandis que pour $g/\omega^2 r \leq 1$, la nouvelle position d'équilibre est stable La position $\theta_0 = 0$ est toujours instable.
-

3.2 Mouvement brachistochrone

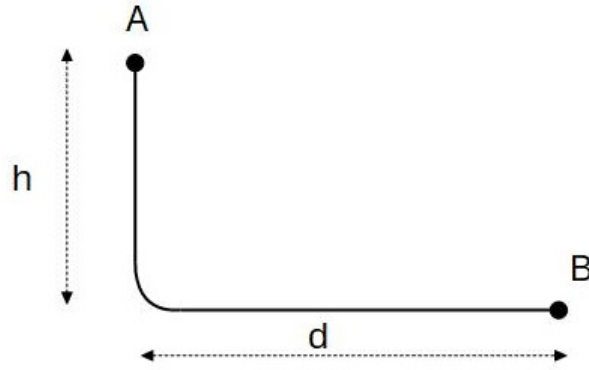
Quelle trajectoire doit suivre une particule, initialement immobile et soumise seulement au champ de pesanteur terrestre supposé uniforme, pour joindre deux points, A , B , fixés à l'avance dans les plus brefs délais ?

Pour préciser cet énoncé, la particule est supposée astreinte à suivre une certaine trajectoire à la manière d'une perle enfilée sans frottement. La trajectoire est évidemment dans le plan vertical contenant les points A et B . L'axe horizontal sera noté (Ox) et l'axe vertical, orienté vers le bas sera noté (Oz) . L'origine des coordonnées sera prise sur le point initial A et les coordonnées du point B dans le plan (xAz) seront notées (h, d) .

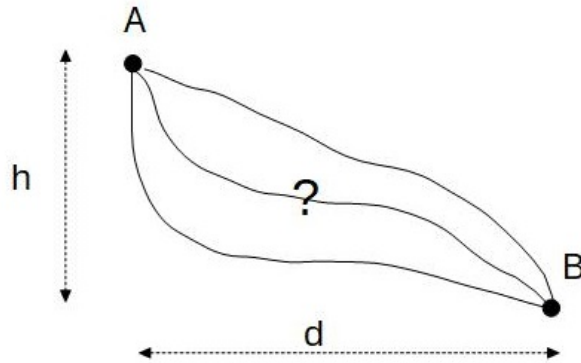
1. Calculer la durée du parcours pour une trajectoire en ligne droite entre A et B en fonction de g , h et d



2. Calculer la durée du parcours si la particule suit la verticale sur une distance h puis parcourt la distance d horizontalement. Nous supposons que la trajectoire "arrondie" à l'angle droit sur une échelle négligeable devant h et d .



3. Comparer les durées pour chacune des trajectoires. Pour une trajectoire arbitraire :



4. Relier la vitesse à tout moment à la coordonnée z et à l'accélération de la pesanteur g .
5. Exprimer la durée de temps infinitésimale dt pour que la particule parcoure une portion infinitésimale de la trajectoire en fonction de dz et dx
6. En déduire la durée du parcours entre A et B sous forme d'une intégrale :

$$T = \int_A^B F(x, x(z), z) dz, \quad (3.1)$$

$x(z)$ étant l'équation de la trajectoire.

7. Formuler les équations d'Euler-Lagrange pour ce problème variationnel
8. En déduire alors une équation différentielle pour la trajectoire.
9. A l'aide d'un changement de variable approprié, trouver une paramétrisation trigonométrique de la trajectoire.

Correction 3.2

1. En écrivant la loi fondamentale de la dynamique projetée le long de la direction (AB) , la réaction du "fil rigide" étant normale, on obtient l'accélération :

$$a = g \sin \alpha \quad (3.2)$$

Le mouvement est uniformément accéléré : $r = \frac{1}{2} a t^2$. On obtient alors la durée du parcours :

$$T_1^2 = \frac{2 D}{a} = \frac{2 D}{g \sin \alpha} = \frac{2 h}{g \sin^2 \alpha} = \frac{2 h}{g} \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right), \quad (3.3)$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2 h}{g} \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)}, \quad (3.4)$$

où D est la longueur AB .

2. La durée du mouvement vertical est $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Le mouvement horizontal s'effectue à la vitesse $v = \sqrt{2gh}$ et sa durée est par conséquent $\frac{d}{\sqrt{2gh}}$. On en déduit alors la durée totale de ce parcours :

$$T_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{d}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{d}{2h}\right). \quad (3.5)$$

3. On pose $\eta = d/h$ et on compare les carrés des durées : $T_1^2 < T_2^2$ implique : $1 + x^2 < 1 + x + x^2/4$ $(3/4 x - 1) < 0$ d'où : $x < 4/3$. La ligne droite est "plus courte" pour $d < 4/3 h$.

4. $\frac{1}{2} v^2 = gz$

5. $dt = \frac{dx}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{\sqrt{2gz}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dx}{dz})^2}}{\sqrt{z}}$

6. $T = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dx}{dz})^2}}{\sqrt{z}} dz$

7. On souhaite alors minimiser l'intégrale : $\int_A^B \frac{\sqrt{1 + (\frac{dx}{dz})^2}}{\sqrt{z}} dz$

8. On pose $L(x(z), x'(z), z) = \frac{\sqrt{1 + x'(z)^2}}{\sqrt{z}}$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3.6)$$

Comme L ne dépend pas de x : $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ d'où :

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = Cte \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{x'(z)}{\sqrt{1 + x'(z)^2}} = Cte \quad (3.8)$$

$$\frac{x'(z)^2}{1 + x'(z)^2} = Cte^2 z \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{K}{z} - 1, \quad (3.10)$$

K étant une constante positive ($K = 1/Cte^2$).

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{K}{z} - 1} \quad (3.11)$$

9. On pose : $z = K \sin^2 \theta$, alors : $dz = 2 K \sin \theta \cos \theta d\theta$

$$2 K \sin \theta \cos \theta d\theta = \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dx \quad (3.12)$$

$$dx = \pm 2 K \sin^2 \theta d\theta \quad (3.13)$$

$$x = \pm K \int (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \pm K \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + cte \quad (3.14)$$

au point A : $x = 0$ et $z = 0$, donc $cte = 0$, d'où la paramétrisation : $x = \pm K \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)$, $z = \frac{K}{2} (1 - \cos(2\theta))$ si on introduit un angle $\phi = \pm 2\theta$ et une longueur $\lambda = K/2$:

$$x = (-\sin \phi), z = (1 - \cos \phi)$$

On reconnaît la paramétrisation d'une cycloïde.

3.3 Principe de Fermat

La lumière se propage de tel sorte qu'un rayon lumineux suit la trajectoire de moindre temps.

1. Deux milieux homogènes sont séparés par une interface plane. Quelle trajectoire doit suivre un rayon lumineux pour minimiser le temps de parcours entre un point A dans le premier milieu et un point B dans le second milieu. A et B étant fixés à l'avance. La vitesse de la lumière sera noté v_1 et v_2 pour les deux milieux respectivement. Retrouver les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction entre deux milieux.
2. Montrer que pour un milieu d'indice de réfraction de variable où la vitesse de la lumière $v(z)$ dépend de la coordonnée z seulement, le trajet d'un rayon lumineux "respecte" la relation :

$$\frac{\sin(\theta(z))}{v(z)} = \text{Cte.} \quad (3.15)$$

$\theta(z)$ est l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec l'axe (Oz) . On vous propose de retrouver la loi de Descartes à l'aide du calcul variationnel :

3. Exprimer la durée de temps infinitésimale dt pour que le rayon lumineux parcourt une portion infinitésimale du trajet en fonction de dz et dx
4. En déduire la durée du parcours entre A et B sous forme d'une intégrale :

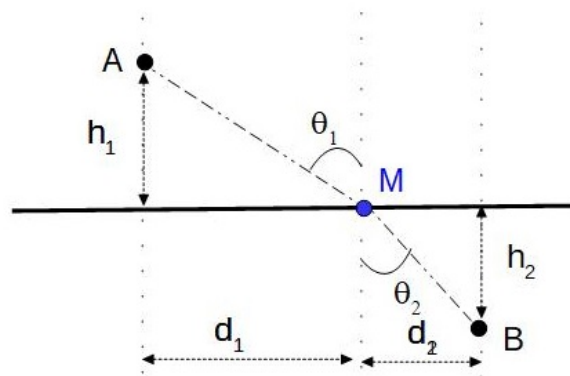
$$T = \int_A^B F(x, x(z), z) dz, \quad (3.16)$$

$x(z)$ étant l'équation de la trajectoire.

5. Formuler les équations d'Euler-Lagrange pour ce problème variationnel
6. En déduire alors une équation différentielle pour la trajectoire et retrouver la loi de la réfraction.
7. Application au mouvement brachistochrone : Le problème de la trajectoire optimale a été résolu au 17ème siècle avant l'apparition du calcul variationnel par analogie avec l'optique et le principe de Fermat. A partir de la loi de Descartes retrouver l'équation différentielle de la trajectoire.

Correction 3.3

1. L'inconnue est la position du point M à l'interface par où passe le rayon lumineux :



La durée du trajet du rayon lumineux est donnée par :

$$T = \frac{AM}{v_1} + \frac{BM}{v_2} = \frac{h_1}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{h_2}{v_2 \cos \theta_2}, \quad (3.17)$$

tandis que les variables θ_1 et θ_2 sont liées par la relation :

$$h_1 \tan \theta_1 + h_2 \tan \theta_2 = d_1 + d_2 = \text{cte} . \quad (3.18)$$

$dT = 0$ pour l'optimisation et $d \text{cte} = 0$, d'où

$$\frac{h_1}{v_1} \frac{\sin \theta_1}{\cos^2 \theta_1} d\theta_1 + \frac{h_2}{v_2} \frac{\sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2} d\theta_2 = 0 , \quad (3.19)$$

$$h_1 \frac{d\theta_1}{\cos^2 \theta_1} + h_2 \frac{d\theta_2}{\cos^2 \theta_2} = 0 . \quad (3.20)$$

Et on obtient :

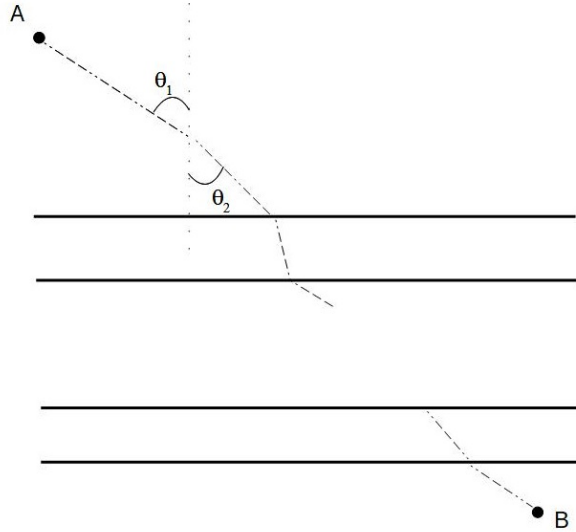
$$\frac{h_1}{v_1} \frac{\sin \theta_1}{\cos^2 \theta_1} d\theta_1 - \frac{h_2}{v_2} \frac{\sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2} \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_1} \frac{h_1}{h_2} d\theta_1 = 0 \quad (3.21)$$

Après simplification :

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} . \quad (3.22)$$

Remarque : Le calcul aurait pu être plus simple avec un multiplicateur de Lagrange pour l'optimisation avec contrainte mais ils ne l'ont probablement pas vu en L_1

2. Pour un milieu d'indice variable on peut "découper" des tranches infiniment petites d'épaisseur Δz . En introduisant les angles $\theta_1, \theta_2, \dots$



on aboutit au problème d'optimisation suivant : trouver le minimum de :

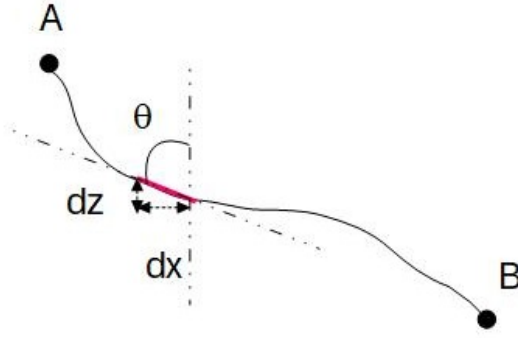
$$T = \frac{h_1}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{h_2}{v_2 \cos \theta_2} + \dots \quad (3.23)$$

sachant que

$$h_1 \tan \theta_1 + h_2 \tan \theta_2 + \dots = \text{cte} . \quad (3.24)$$

De manière similaire (avec un multiplicateur de Lagrange ou sans) on obtient de nouveau la loi de Descartes.

3. On exprime la durée infiniment petite $dt = \frac{dr}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{v}$
4. La durée totale T est alors donnée par l'intégrale : $T = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (\frac{dx}{dz})^2}}{v(z)} dz$



5. On souhaite alors minimiser l'intégrale :

$$\int_A^B \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{v(z)} dz.$$

$$\text{On pose } L(x(z), x'(z), z) = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{v(z)} dz$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3.25)$$

Comme L ne dépend pas de x : $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ d'où :

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \text{Cte.} \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{v(z)} \frac{x'(z)}{\sqrt{1 + x'(z)^2}} = \text{Cte} \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{v(z)} \frac{dx}{dz} = \text{Cte} \quad (3.28)$$

$$\frac{\sin \theta}{v} = \text{Cte} \quad (3.29)$$

6. Pour résoudre le problème brachistochrone on écrit la loi Descartes : $\frac{\sin \theta}{v} = \text{Cte}$ ici $v = \sqrt{2gz}$ et $\sin \theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$ On peut alors écrire l'équation différentielle :

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{dx} \sqrt{2gz} = \text{cte} \quad (3.30)$$

et on retrouve alors l'équation différentielle de l'exercice I :

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{K}{z} - 1. \quad (3.31)$$

3.4 Particule dans un champ électromagnétique

Dans cet exercice, qui peut être vu comme un complément du cours, nous allons reformuler le principe de moindre action de façon un peu différente, pour pouvoir prendre en compte des forces non conservatives, notamment les forces électromagnétiques qui agissent sur une particule chargée. À cette fin, nous allons considérer la variation de l'intégrale $I = \int_{t_0}^{t_1} T$ de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$, entre la trajectoire effectivement suivie par la particule et une autre trajectoire proche (cf. Fig.3.2). La variation est effectuée avec les conditions aux limites $\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}(t_1) = 0$. Après intégration par parties, on obtient

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{t_0}^{t_1} \delta W. \quad (3.32)$$

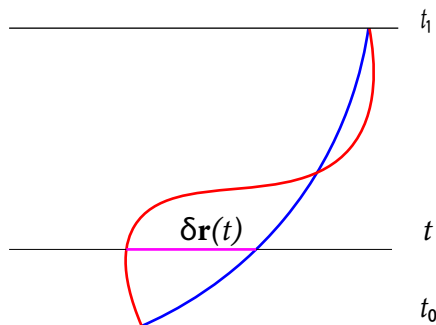


FIGURE 3.2 : Trajectoires entre deux points fixes $\mathbf{r}_0(t_0)$ et $\mathbf{r}_1(t_1)$: en bleu la trajectoire classique

où \mathbf{F} est la force qui agit sur la particule et $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$ est la variation de travail de cette force \mathbf{F} lors d'un déplacement virtuel $\delta \mathbf{r}$. Remarquons que cette dernière expression, qui est scalaire, est indépendante du système de coordonnées. Par conséquent, dans le cas général où l'on utilise des coordonnées généralisées (notées $q_i, i = 1, \dots$ par exemple), on peut introduire les forces généralisées F_i , définies par l'équation :

$$\boxed{\delta W = F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots} \quad (3.33)$$

Dans ce cas³ l'équation (3.32) devient

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i = - \int_{t_0}^{t_1} F_i \delta q_i, \quad (3.34)$$

où la somme sur les indices répétés est implicite. Ces deux expressions sont égales pour des variations δq_i arbitraires (hormis les conditions aux limites) et l'on obtient les équations de Lagrange sous la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + F_i.} \quad (3.35)$$

Insistons sur le fait que cette forme est correcte que les forces soient conservatives ou non, les F_i étant définies par (3.33).

1. Soit une particule de masse m se déplaçant dans un plan sous l'action d'une force \mathbf{F} . Écrire T en coordonnées polaires ($q_1 = r, q_2 = \theta$). Écrire les équations de Lagrange dans ce cas et justifier que la force généralisée F_2 est le **moment** de la force \mathbf{F} autour de l'origine.
2. Lorsque les forces sont conservatives, montrer que (3.35) prend la forme usuelle des équations de Lagrange avec $L = T - V$ et $F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$.
3. Lorsque les forces sont non conservatives, il est parfois possible de définir un potentiel effectif V qui dépend des coordonnées et des vitesses, et tel que (3.34) prenne la forme usuelle des équations de Lagrange pour $L = T - V$. Démontrer que dans ce cas

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (3.36)$$

4. La force de Lorentz est donnée par

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (3.37)$$

Il est toujours possible de définir des potentiels⁴ scalaire ϕ et vecteur \mathbf{A} , fonctions de (t, \mathbf{r}) , tels que

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (3.38)$$

3. En général T peut dépendre non seulement des vitesses généralisées \dot{q}_i mais aussi des q_i (cf. votre réponse à la question 1) ou Landau p. 18 eq. (5.5).

4. Ces potentiels ne sont définis qu'à une transformation de jauge près.

Si l'on définit le lagrangien

$$L = T - V, \quad (3.39)$$

avec un potentiel effectif

$$V = q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad \text{avec } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (3.40)$$

montrer que les équations de Lagrange correspondent bien aux équations de Newton pour la force de Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (3.41)$$

On fera le calcul pour une particule dans \mathbb{R}^3 en coordonnées cartésiennes.

5. Pour $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, vérifier que l'impulsion généralisée

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (3.42)$$

n'est pas la quantité de mouvement usuelle $m\dot{x}_i$.

6. Pour un champ magnétique uniforme on peut choisir (vérifier)

$$\phi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}. \quad (3.43)$$

Écrire le lagrangien (3.39) en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) pour $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ (B constant) et résoudre les équations de Lagrange pour ρ constant. Décrire le mouvement de la particule.

Correction 3.4

1. On a $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ et $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (3.44)$$

Remarquez que T est une fonction des vitesses généralisées $(\dot{r}, \dot{\theta})$ mais aussi de la coordonnée généralisée r . Les équations (3.35) sont par conséquent

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_1, \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} = F_2. \quad (3.46)$$

F_1 et F_2 sont définis par $\delta W = F_1\delta r + F_2\delta\theta$. Lors d'un petit déplacement **angulaire** $\delta\theta$ à r constant $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = r\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta\delta\theta$. On observe que F_2 est le moment de la force par rapport à l'origine, pas sa composante suivant \mathbf{e}_θ . C'est évidemment en accord avec le fait que l'impulsion généralisée conjuguée à une variable angulaire a les dimensions d'un moment cinétique. Ici p_θ , conjugué à θ est précisément égal au moment cinétique $L_z = mr^2\dot{\theta}$ (voir Landau p. 32, éq. 9.7 et Problème 1, ou p. 45. Les réf. au Landau sont à la 3e édition française des éditions MIR).

2. Lorsque les forces sont conservatives $\delta W = -\delta V$ (ou ce qui revient au même $\mathbf{F} = -\nabla V$) et V ne peut dépendre des vitesses. Il suffit alors de remplacer $V - T$ par L dans (3.35) pour trouver les équations de Lagrange sous leur forme usuelles :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (3.47)$$

3. Prenons pour point de départ les équations de Lagrange (3.47) avec $L = T - V$ mais où maintenant T et V peuvent dépendre tant des coordonnées que des vitesses généralisées. On trouve sans difficulté (en réarrangeant certains termes dans le membre de droite)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (3.48)$$

Il suffit de comparer cette équation avec (3.35) pour déduire la forme (3.36) des forces généralisées.

4. Puisque le potentiel effectif dépend des vitesses, il suffit de prendre l'expression (3.36) des forces pour trouver en coordonnées cartésiennes où $v_i = dx_i/dt$ et $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q(-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + v_i \nabla A_i) \\ &= q(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - v_i \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i} + v_i \nabla A_i) \\ &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\end{aligned}$$

En effet le passage à la dernière équation se fait en remarquant que les deux premiers termes dans la parenthèse du membre de droite de l'avant dernière équation sont simplement \mathbf{E} et que les deux derniers ne sont autres que l'expression de $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ en fonction du potentiel vecteur. En effet, pour réécrire $\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ on peut utiliser la formule bien connue $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ mais réécrite comme $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = a_i \mathbf{b} c_i - a_i b_i \mathbf{c}$, c'est-à-dire en respectant l'ordre des facteurs, ce qui est essentiel ici puisque le rôle de \mathbf{b} est joué par l'opérateur différentiel ∇ qui ne commute pas avec les fonctions de x_i comme \mathbf{A} .

5. En effet

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i + A_i. \quad (3.49)$$

6. On vérifie immédiatement que $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$ (calcul similaire à 3. Remarquons ensuite que seule la composante A_φ est non nulle en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2}\rho B(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\rho) = \frac{1}{2}\rho B \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.50)$$

En utilisant l'expression du potentiel effectif (3.40) et l'expression connue de l'énergie cinétique en coordonnées cylindriques on trouve

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\varphi}. \quad (3.51)$$

Remarquons que L ne dépend ni de z ni de φ . On dit que z et φ sont des coordonnées cycliques. Les équations de Lagrange deviennent

$$m\rho\dot{\varphi}^2 + qB\rho\dot{\varphi} - m\ddot{\rho} = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}qB\rho^2 \right) = 0, \quad (3.53)$$

$$m\ddot{z} = 0. \quad (3.54)$$

Pour ρ constant (3.52) donne, lorsque $\dot{\varphi} \neq 0$.

$$\dot{\varphi} = -\frac{qB}{m}. \quad (3.55)$$

On reconnaît dans $\frac{\dot{\varphi}}{2\pi}$ la fréquence cyclotron bien connue. Les deux dernières équations indiquent la conservation des impulsions p_φ et p_z conjuguées aux deux variables cycliques φ et z . C'est un phénomène général et qui découle immédiatement des équations de Lagrange et de la définition des impulsions conjuguées. On y reviendra peut-être au chapitre sur les lois de conservation (voir aussi Landau p 44).

TD 4 : Lois de conservations et formalisme lagrangien

4.1 Le joueur de pétanque

Soit un joueur de pétanque maladroit qui envoie sa boule de masse $m=1$ kg en direction d'un cochonnet de masse $m=50$ g, qu'elle percute en plein axe par une collision que l'on supposera élastique. La boule roule initialement à une vitesse $v_0=1$ m/s et le cochonnet est immobile. On néglige les frottements et on considère le terrain parfaitement plat.

1. Quelles sont les forces extérieures s'appliquant sur la boule et le cochonnet ? De quelles coordonnées du système dépendent les énergies potentielles dont dérivent ces forces ?
 2. La boule et le cochonnet roulant sur le terrain, quel jeu de coordonnées généralisées peut-on choisir pour décrire l'état mécanique du système ? En déduire le Lagrangien du système {boule, cochonnet}
 3. Étant donné la forme du Lagrangien, l'énergie mécanique et la quantité de mouvement du système sont-elles conservées ?
 4. Calculer l'énergie mécanique et la quantité de mouvement du système à partir des formules (4.7) et (4.17) du cours, dans le cas général puis pour $t = 0$
 5. Par la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, déduire un système d'équations qui impliquent les vitesses finales des deux objets après la collision.
 6. Résoudre le système d'équation et calculer numériquement la vitesse finale de la boule et du cochonnet
-

Correction 4.1

1. Les forces qui s'appliquent sur la boule et le cochonnet sont la gravité et l'action du sol. Dans le cas de la gravité, l'énergie potentielle de pesanteur d'un objet i vaut $E_p = m_i g z_i$, elle ne dépend donc que des hauteurs (z_1 et z_2) des objets. L'action du sol est plus compliquée à prendre en compte, néanmoins on peut facilement se convaincre qu'elle s'écrit comme $\mathbf{F} = F(z)\mathbf{e}_z$, de sorte que le potentiel dont elle dérive (et qui existe puisque $\text{rot}(\mathbf{F})=0$) ne dépend que des z_i .

L'énergie potentielle du système s'écrit donc $U(z_1, z_2)$

2. Puisque les hauteurs des objets sont imposées, $z_1 = 0 = z_2$, alors les seules coordonnées nécessaires pour décrire l'état du système sont les positions (x_1, x_2) et leurs vitesses associées (\dot{x}_1, \dot{x}_2)

Le Lagrangien s'écrit alors $\mathcal{L} = m_1 \frac{\dot{x}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2}{2} + U_0$ ou U_0 est une constante que l'on peut omettre puisque le Lagrangien est défini à une constante près.

3. Bien que le système ne soit pas isolé, le Lagrangien est celui d'un système isolé. On peut donc appliquer les conclusions qu'on a tirées du cas d'un système isolé, en particulier la conservation de la quantité de mouvement. (L'énergie mécanique elle est forcément conservée si on ne considère que des forces conservatives, ce qui est implicitement le cas si on ne néglige les frottements et qu'on considère la collision élastique)

4. Les équations du cours donnent directement

$$\mathcal{H} = m_1 \frac{\dot{x}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2}{2} - \mathcal{L} = 2\mathcal{L} - \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

$$\mathbf{P} = (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) \mathbf{e}_x$$

A $t=0$, l'énergie mécanique du système vaut donc $\mathcal{H} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$ et la quantité de mouvement $\mathbf{P} = m_1 v_0 \mathbf{e}_x$

5. En appliquant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique à leurs valeurs initiales, on trouve directement :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0 \quad (4.1)$$

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{v_0^2}{2} \quad (4.2)$$

6. La résolution a déjà été faite en cours, en remplaçant (4.1) dans (4.2), on obtient

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_0 - v_1)^2$$

que l'on peut simplifier par $(v_0 - v_1)$ après la collision en supposant que la vitesse de la boule a été modifiée.

On trouve alors :

$$v_1 = v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.3)$$

$$v_2 = v_0 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad (4.4)$$

A.N. : $v_1 \approx 0.90$ m/s et $v_2 \approx 1.90$ m/s.

4.2 Propulsion d'une fusée

Soit une fusée de masse $m = 10^3$ kg ayant décollé depuis la Terre, étant à l'instant t_0 à une distance $d_0 = 10^4$ km du centre de la Terre et ayant une vitesse \mathbf{v}_0 . On notera \mathcal{R} un référentiel terrestre que l'on supposera Galiléen et \mathcal{R}' un référentiel en translation avec une vitesse \mathbf{v}_0 par rapport à \mathcal{R} .

1. Quelles sont les coordonnées généralisées nécessaires pour décrire l'état du système ? Écrire le Lagrangien du système avec ce jeu de coordonnées dans le référentiel \mathcal{R} .
2. En déduire la quantité de mouvement de la fusée dans \mathcal{R} par la formule (4.27) du cours.
3. Retrouver la formule de la transformation de l'énergie cinétique T dans un référentiel \mathcal{R} en T' dans un référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse \mathbf{v}_0 par rapport à \mathcal{R} .
4. En déduire le Lagrangien dans le référentiel \mathcal{R}' , puis la quantité de mouvement de la fusée à l'instant $t = 0$ dans ce référentiel. Était-ce prévisible ?

La fusée projetée à l'instant t_0 une quantité de gaz de masse $dm = 10$ kg avec une vitesse relative $\mathbf{v}_g = 4000$ m/s par rapport à elle. La durée totale de l'expulsion est $dt = 100$ ms.

5. Calculer et faire l'application numérique dans le référentiel \mathcal{R}' de la quantité de mouvement qui aurait été transmise à la fusée par le gaz si le système était isolé. Calculer ensuite la quantité de mouvement transmise au système { fusée + gaz } pendant la durée de l'expulsion. Est-ce une grosse approximation de considérer le système isolé pendant le temps de l'expulsion ? (On rappelle que la pesanteur vaut $g = 9.81$ m/s² à la surface de la Terre, soit pour $D=6371$ km)
6. Calculer dans le référentiel \mathcal{R}' l'énergie mécanique du système { fusée + gaz } à l'instant $t_0 + dt$ (on supposera que la fusée et le gaz sont toujours à une distance d_0 de la Terre).

7. L'énergie mécanique du système est-elle conservée par l'expulsion de gaz ? Pourquoi ? Quelle est l'énergie qu'a du fournir la combustion du carburant pour expulser les gaz ? (donner une valeur numérique).
8. L'énergie fournie par le carburant a-t-elle surtout contribué à propulser la fusée en avant ou les gaz en arrière ? On donne la quantité d'énergie chimique massique pour des hydrocarbures : 50 MJ/kg. La valeur d'énergie chimique fournie par le carburant correspond-elle au travail fourni par ce dernier ? Pourquoi ?

Correction 4.2

1. La seule coordonnée spatiale pertinente du problème est la distance d de la fusée à la Terre, et le vitesse correspondante $\dot{d} = v$. La seule force s'appliquant à la fusée est la gravité de la terre, on peut donc écrire son Lagrangien comme :

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mMG}{d}$$

avec M la masse de la Terre.

2. La quantité de mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est simplement

$$\mathbf{P} = mv\mathbf{e}_r$$

3. La composition des vitesses donnent, pour \mathbf{v} dans le référentiel \mathcal{R} , et \mathbf{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$$

Alors :

$$T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 = T + \frac{1}{2}mv_0^2 - m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0$$

4. On en déduit

$$\mathcal{L}' = T' + U = \mathcal{L} + T' - T = \mathcal{L} + \frac{1}{2}mv_0^2 - m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0$$

, puis

$$\mathbf{P}' = m\mathbf{v} - mv_0$$

$\mathbf{P}'(t=0) = \mathbf{0}$, ce qui était effectivement assez prévisible.

5. Dans le référentiel \mathcal{R}' , la quantité de mouvement initiale du système est $\mathbf{P} = 0$. En supposant le système isolé, alors la quantité de mouvement du système en $t+dt$ doit également être nulle. Après expulsion des gaz, la quantité de mouvement du système s'écrit :

$$\mathbf{P} = (m - dm)\mathbf{v}_f + dm\mathbf{v}_g = 0$$

Avec \mathbf{v}_f la vitesse finale de la fusée dans \mathcal{R}' . On en déduit la quantité de mouvement transmise à la fusée

$$\mathbf{P}_f = -dm\mathbf{v}_g$$

La quantité de mouvement transmise au système par la gravité vaut elle $\mathbf{F}dt$, avec

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{d^2}\mathbf{u}_r = -mg\left(\frac{6371}{10^4}\right)^2\mathbf{u}_r$$

A.N. : Par l'expulsion des gazs, $|\mathbf{P}_f| = 4 \cdot 10^4 \text{ kg.m.s}^{-1}$. Par la gravité, $|\mathbf{P}| = 398 \text{ kg.m.s}^{-1}$. On peut donc bien négliger la contribution de la gravité pendant la durée de l'expulsion des gazs.

6. La nouvelle énergie mécanique vaut

$$E_{t+dt} = T_{t+dt} + U_{t+dt} = E_t + T_{t+dt}$$

puisque $U_t = U_{t+dt} = U$ (en supposant que les positions relatives n'ont pas changé) et $T_t = 0$. Il suffit donc de calculer T_{t+dt} :

$$T_{t+dt} = \frac{dm}{2} v_g^2 + \frac{1}{2} (m - dm) v_f^2$$

Hors par la conservation de la quantité de mouvement,

$$v_f^2 = \left(v_g \frac{dm}{m - dm} \right)^2$$

D'où :

$$E_{t+dt} = U + T_{t+dt} = U + v_g^2 \left(\frac{dm}{2} + \frac{dm^2}{2m - dm} \right)$$

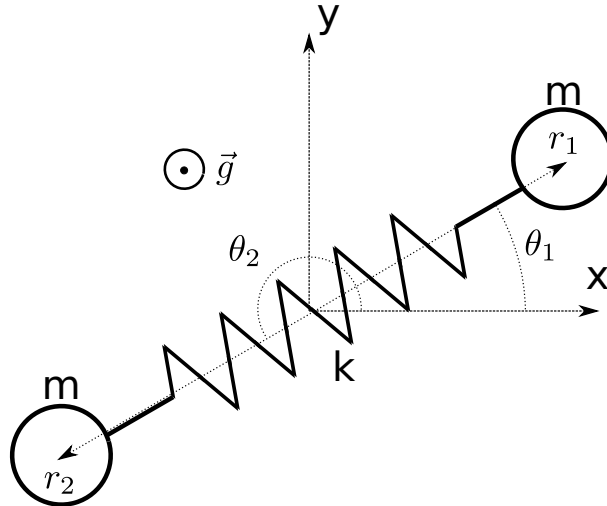
[FM : problème de notation : les primes désignent maintenant les quantités après expulsion nan ?] [CPM : Effectivement, je change ça]

7. L'énergie mécanique du système n'est pas conservée, c'est parce qu'on avait pas pris en compte l'énergie potentielle chimique du carburant dans le Lagrangien. Le travail fourni pour expulser les gaz est donc $T_{t+dt} = 8.08$ MJ

8. En séparant les deux contributions de T_{t+dt} , on trouve que les gaz emportent une quantité $T_{\text{gaz}} = 8$ MJ d'énergie cinétique, alors que la fusée n'emporte que $T_{\text{fusée}} = 80$ kJ. Le travail fourni sert donc principalement à faire reculer les gaz, et non à faire avancer la fusée !

Par ailleurs, l'énergie chimique fournie par la combustion $E = 500$ MJ est bien plus grande que le travail fourni, car l'essentiel de cette énergie part dans le chauffage des gaz et de la fusée.

4.3 Mobile sur coussin d'air



Soient deux masses, que l'on suppose ponctuelles et de masse m , reliées par un ressort de raideur k dont on négligera la masse. Le tout est placé sur une table à coussin d'air, de sorte qu'on puisse ignorer les frottements s'appliquant sur le système.

1. Par analogie avec l'exercice du joueur de pétanque, expliquer rapidement pourquoi on peut considérer le mobile comme un système isolé.
2. En partant des coordonnées cartésiennes, retrouver l'expression de la vitesse des deux masses en coordonnées polaires : $\mathbf{v} = v_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$
3. En déduire l'expression du Lagrangien du système avec des coordonnées polaires. On rappelle que l'énergie d'un ressort de longueur à vide l_0 est $E = \frac{k}{2} (l - l_0)^2$

4. Calculer l'expression du moment cinétique du système autour de l'axe z à partir de la formule (4.46) du cours.
5. On considère à présent que le mobile tourne autour de l'axe z . Pour des raisons de symétries, on a alors $r_1 = r_2 = r$. Par ailleurs, les deux masses étant diamétralement opposées, trouver une relation entre θ_1 et θ_2 , puis entre $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.
6. En déduire une expression du Lagrangien qui ne fasse intervenir que deux coordonnées généralisées (r, θ) .
7. Retrouver la conservation du moment cinétique L_z du système à partir de l'équation de Lagrange en θ .
8. A partir de l'équation de Lagrange en r et de la conservation du moment cinétique L_z , déduire une équation différentielle en r qui ne fasse pas intervenir θ .
9. On cherche à présent une solution telle que la longueur r reste constante pendant la rotation. Qu'est-ce que cela implique sur la vitesse de rotation $\dot{\theta}$? En déduire la longueur initiale r_0 nécessaire pour stabiliser le mobile si il tourne initialement à la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$? Que se passe-t-il si $\dot{\theta}_0 > \sqrt{\frac{2k}{m}}$?

Correction 4.3

1. Comme pour l'exercice du joueur de pétanque, le mouvement est ici fixé dans le plan (x, y) et les énergies potentielles liées à la gravité et à l'action de la table ne dépendent que de z . On peut donc considérer que le mobile est libre et isolé dans le plan (xy) .
2. En partant de $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y \\
 &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y \\
 &= \dot{r}(\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) + r\dot{\theta}(-\sin(\theta) \mathbf{e}_x + \cos(\theta) \mathbf{e}_y) \\
 &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned}$$

3. Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + (r_1 \dot{\theta}_1)^2 + (r_2 \dot{\theta}_2)^2) - \frac{k}{2}(r_1 + r_2 - l_0)^2$$

4. la formule du cours donne directement :

$$L_z = mr_1^2 \dot{\theta}_1 + mr_2^2 \dot{\theta}_2$$

5. On a $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ donc

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$$

6. En prenant $\theta = \theta_1$, on peut directement écrire

$$\mathcal{L} = m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{k}{2}(2r - l_0)^2$$

7. L'équation de Lagrange en θ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

Soit

$$\frac{d}{dt}(2mr^2 \dot{\theta})$$

On retrouve donc bien que le moment cinétique en z est conservé.

8. L'équation de Lagrange en r donne :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

Soit

$$2m\ddot{r} = 2mr\dot{\theta}^2 - 2k(2r - l_0)$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement on peut alors s'affranchir des $\dot{\theta}$:

$$2m\ddot{r} = \frac{L_z^2}{2mr^3} - 2k(2r - l_0)$$

9. La conservation de la quantité de mouvement et la condition $r = \text{cst}$ impose que $\dot{\theta}$ soit également constant. Elle impose également que $\ddot{r} = 0$. D'où :

$$2mr_0\dot{\theta}_0^2 = 2k(2r_0 - l_0)$$

Soit

$$r = l_0 \frac{1}{1 - \frac{2m\dot{\theta}_0^2}{4k}}$$

Si $\dot{\theta}_0 > \sqrt{\frac{2k}{m}}$, on voit que le résultat est négatif, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de solution stable au problème : la force centrifuge l'emporte toujours sur la force de rappel du ressort et r croît vers l'infini. Dans la pratique, soit le ressort casse, soit des non-linéarités supplémentaires empêchent cette divergence.

TD 5 : Petites oscillations

5.1 Molécule linéaire triatomique

On peut modéliser une molécule linéaire triatomique telle que CO_2 , par une masse centrale M , liée par des ressort identiques de longueur à repos b et de constante de raideur k à deux masses latérales m . Soit x_1 , x_2 et x_3 les positions des trois atomes (voir figure), et $x_{0,1}$, $x_{0,2}$ et $x_{0,3}$ les respectives positions d'équilibre

1. Écrire le lagrangien du système dans l'approximation des petites oscillations, par rapport aux coordonnées généralisées définies par les déviations des atomes par rapport aux positions d'équilibre $\eta_i = x_i - x_{0,i}$, avec $i = 1, 2, 3$.
2. Dériver les équations du mouvement.
3. On cherche des solutions harmoniques sous forme complexe $\eta_i = \eta_{0,i} e^{i\omega t}$. Trouver les fréquences propres du système
4. déterminer les modes normaux associés aux fréquences propres.

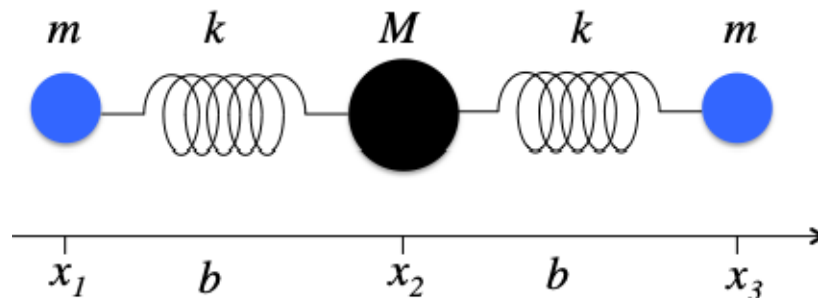


FIGURE 5.1 : Modèle d'une molécule linéaire triatomique

Correction 5.1

1. On remarque que $x_{0,2} - x_{0,1} = x_{0,3} - x_{0,2} = b$. On peut donc écrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\eta_1, \eta_2) &= \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2 = \frac{k}{2}[(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2] \\ &= \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3) \end{aligned}$$

et l'énergie cinétique sous la forme :

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2$$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2 - \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3) \end{aligned}$$

2. à partir de $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial L}{\partial \eta_i}$, on dérive :

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 &= -k(\eta_1 - \eta_2) \\ M\ddot{\eta}_2 &= -k(2\eta_2 - \eta_1 - \eta_3) \\ m\ddot{\eta}_3 &= -k(\eta_3 - \eta_2) \end{aligned}$$

3. On remplace les expressions des η_i et des $\ddot{\eta}_i = -\omega^2 \eta_i$ dans les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m\omega^2 \eta_1 &= k(\eta_1 - \eta_2) \\ M\omega^2 \eta_2 &= k(2\eta_2 - \eta_1 - \eta_3) \\ m\omega^2 \eta_3 &= k(\eta_3 - \eta_2) \end{aligned}$$

Soit $X = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Les équations du mouvement peuvent s'écrire en forme matricielle :

$$GX = \omega^2 HX$$

avec I matrice identité, et

$$H = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Les fréquences propres ω sont données par les racines de l'équation séculaire $\det(H - \omega^2 G) = 0$, soit :

$$\omega^2(k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

dont les solution sont :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)} \end{aligned}$$

4. La première valeur propre $\omega_1 = 0$ correspond à un mode avec une fréquence d'oscillation nulle. Ceci peut être interprété physiquement par un mouvement de translation rigide du centre de masse de la molécule. En effet ce mode correspond à la solution $U_1 = (u_1, u_2, u_3)$ du système $(H - \omega_1^2 G)U_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne la condition $u_1 = u_2 = u_3$, et donc les trois atomes translatent dans la même direction. D'une façon analogue le mode propre de fréquence ω_2 sera une solution U_2 de $\det(H - \omega_2^2 G)U_2 = 0$. Soit, en imposant la condition de normalisation $m(u_1^2 + u_2^2) + Mu_3^2$,

$$U_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2m}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2m}} \right)$$

Ceci correspond à un mode symétrique, dans lequel l'atome central est fixe et les atomes latéraux oscillent en opposition de phase. Finalement pour ω_3 , le système $(H - \omega_3^2 G)U_3 = 0$ et la condition de normalisation donnent

$$U_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2m(1 + \frac{2m}{M})}}, \frac{-2}{\sqrt{2M(2 + \frac{M}{m})}}, \frac{1}{\sqrt{2m(1 + \frac{2m}{M})}} \right)$$

Avec les deux atomes latéraux en phase entre eux et en opposition de phase avec l'atome central

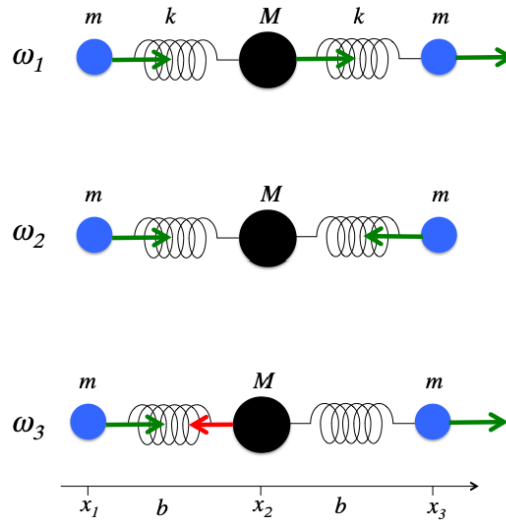


FIGURE 5.2 : Modes propres d'oscillation d'une molécule linéaire triatomique

5.2 Circuit Oscillant

Questions préliminaires

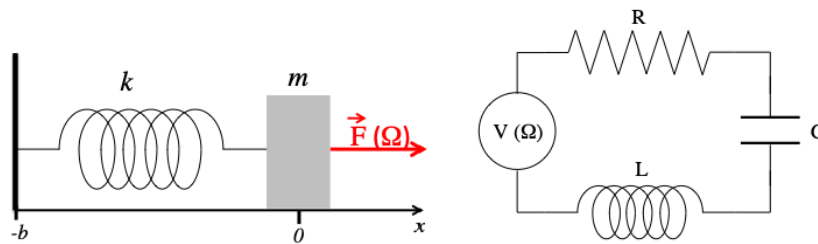


FIGURE 5.3 : Exemples d'oscillateurs forcés en mécanique (gauche) et électronique (droite)

1. Un palet de masse m se trouve sur un plan horizontale lié à un ressort de longueur à repos b et constante de raider k , dont l'autre extrémité est fixe (voir figure 5.3 gauche). On adopte pour décrire le mouvement du palet, un axe x dont l'origine correspond à la position d'équilibre du système. Le palet est ensuite soumis à une force externe horizontale $F(\Omega) = F_0 \cos(\Omega T)$ qui varie sinusoidalement dans le temps. Une force de frottement fluide est également présente appliquée le système. Rappeler les équations du mouvement de cet oscillateur mécanique forcé.
2. On considère maintenant le circuit RLC représenté dans la figure 5.3 droite, alimenté par un potentiel sinusoidal $V(\Omega) = V_0 \cos(\Omega T)$. Ecrire l'équation différentielle de la charge électrique q dans le circuit. Comparer au cas de l'oscillateur mécanique forcé.
3. A partir des questions précédent, tracer un tableau des correspondance entre grandeur mécaniques et électriques

Circuit Oscillant

On a considère le circuit oscillant de la figure 5.4. Déterminer le fréquences propres du système.

Correction 5.2

1. $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(\Omega)$
2. $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V(\Omega)$
3. La comparaison entre les deux questions précédentes suggère les analogies :

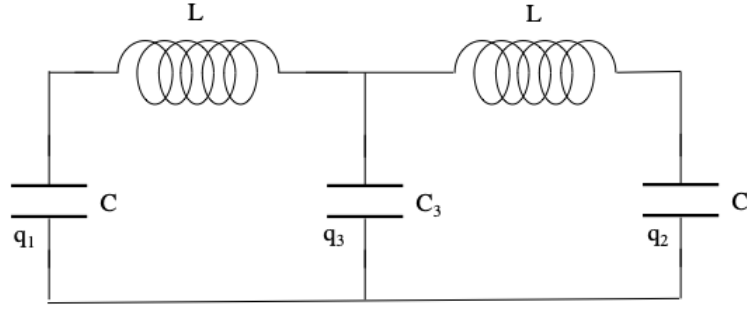
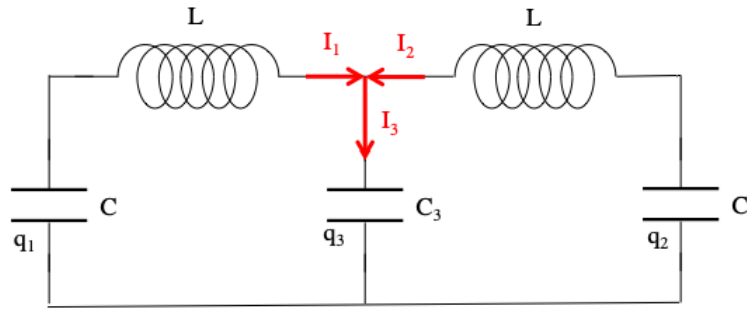


FIGURE 5.4 : Circuits oscillants couplés

grandeurs mécaniques	grandeurs électriques
x	q
m	L
γ	R
k	$1/C$
F	V
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$

4. Soit I_i avec $i = 1, 2, 3$, les courants dans les trois branches du circuit, avec la convention de signe da la figure. La neutralité des charges nous donnent la condition



$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -(q_1 + q_2)$$

La loi des noeds nous donne la condition sur les courants

$$I_3 = I_1 + I_2$$

La loi des mailles appliquée aux deux boucles du circuit, permet d'écrire le système

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C} + L\ddot{q}_1 + \frac{q_3}{C_3} = 0 \\ \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_2}{C} + L\ddot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} - \frac{q_1+q_2}{C_3} = 0 \\ L\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C} - \frac{q_1+q_2}{C_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega_0^2(1 - \beta)q_1 - \omega_0^2\beta q_2 \\ \ddot{q}_2 = \omega_0^2(1 - \beta)q_2 - \omega_0^2\beta q_1 \end{cases}$$

où on a défini $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, et $\beta = C/C_3$. Nous nous-sommes donc ramenés à calculer les valeurs propres de la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0^2(1 - \beta) & -\omega_0^2\beta \\ -\omega_0^2\beta & \omega_0^2(1 - \beta) \end{pmatrix}$$

ce qui donne les fréquences propres $\omega_1 = \omega_0$ et $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1 - 2\beta}$

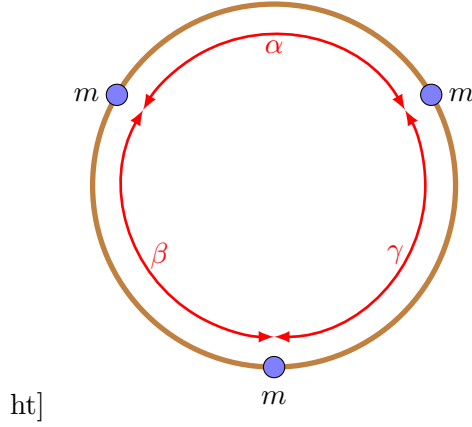


FIGURE 5.5 : Trois billes sur un anneau dans un potentiel V

5.3 Trois particules sur un anneau

Trois particules de masse égale m se déplacent sur un anneau de rayon r et sont soumises à des forces qui dérivent du potentiel

$$V = V_0 (e^{-2\alpha} + e^{-2\beta} + e^{-2\gamma}) . \quad (5.1)$$

Ici, α , β , et γ sont les séparations angulaires des masses en radians. La figure 5.5 représente une position d'équilibre du système où $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi/3$.

1. Trouvez les fréquences des modes normaux en utilisant l'approximation de petite amplitude pour les oscillations autour d'une position d'équilibre. On notera $\theta_i, i = 1, 2, 3$ les écarts aux positions d'équilibre. Déterminez les modes normaux normalisés correspondants.
2. Esquissez le mouvement correspondant pour chaque mode normal.
3. Quelles sont les coordonnées normales correspondantes et les équations de mouvement pour les coordonnées normales ?
4. Considérez les conditions initiales suivantes $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_3(0) = 0$, et $\dot{\theta}_1(0) = 3\omega_0, \dot{\theta}_2(0) = -2\omega_0$ et $\dot{\theta}_3(0) = -\omega_0$. Utilisez vos résultats ci-dessus pour déterminer $\theta_i(t)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Correction 5.3

1. On choisit comme coordonnées généralisées les positions **angulaires** des billes sur l'anneau notées $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Le lagrangien du système est

$$L = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - V_0(e^{-2(\varphi_1-\varphi_3)} + e^{-2(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-2(\varphi_3-\varphi_2)}) , \quad (5.2)$$

Le développement de Taylor de $V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ autour des positions d'équilibre, permet l'étude des petites fluctuations θ_i des billes autour de leur position d'équilibre $\varphi_{i,0}, i = 1, 2, 3$. On a

$$V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = V(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{3,0}) + \sum_{i=1}^3 \theta_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=1}^3 \theta_i \theta_j V_{ij} + \dots \quad (5.3)$$

où

$$V_i = \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_i = \varphi_{i,0}} , \quad \text{et} \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_i = \varphi_{i,0}} . \quad (5.4)$$

Le premier terme est une constante et donne la valeur du (potentiel à l'équilibre. Le second terme contient les gradients V_i du potentiel par rapport aux coordonnées φ_i évalués en $\varphi_{i,0}$. Ils donnent la force agissant sur la bille i évaluée à l'équilibre. Ce terme est donc

nul. Autrement dit, puisque l'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle, sa variation au premier ordre doit être nulle. Le terme quadratique s'évalue rapidement en remplaçant d'abord $\varphi_i - \varphi_j \rightarrow 2\pi/3 + \theta_i - \theta_j$ dans l'expression du potentiel (5.1). Le lagrangien (5.2) devient à une constante près

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}_i^2 - 4e^{-\frac{4\pi}{3}} V_0 (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_2\theta_1 - \theta_3\theta_1 - \theta_2\theta_3). \quad (5.5)$$

Les équations de Lagrange des petites fluctuations autour de la position d'équilibre sont celles de trois oscillateurs harmoniques couplés :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -A(2\theta_1 - \theta_3 - \theta_2), \\ \ddot{\theta}_2 &= -A(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3), \\ \ddot{\theta}_3 &= -A(2\theta_3 - \theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

où $A = \frac{4V_0 e^{-4\pi/3}}{m r^2}$.

Avec $z(t) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, le système d'équations différentielles (5.6) s'écrit

$$\ddot{z} = -K.z \quad \text{où} \quad K = A \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

On cherche des solutions de la forme $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$, autrement dit, le système de valeurs et de vecteurs propres de

$$K.z(0) = \omega^2 z(0). \quad (5.8)$$

Les valeurs propres (données par les solutions de $\det K - \lambda = \lambda(-9A^2 + 6A\lambda - \lambda^2) = 0$, et vecteurs propres sont

Fréquence propre	Vecteur propre normalisé
$\omega_1 = \sqrt{3A}$	$z_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1),$
$\omega_2 = \sqrt{3A}$	$z_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),$
$\omega_3 = 0$	$z_3(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$

- La troisième solution correspond au mode de translation simultané des trois billes le long de l'anneau. Ce mode correspond simplement à la symétrie de rotation du problème : le lagrangien étant invariant sous la transformation $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \lambda, i = 1, 2, 3, \lambda$ quelconque. Pour les deux autres, de même fréquence $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$, une bille reste fixe à sa position d'équilibre, les deux autres se rapprochant puis s'éloignant périodiquement l'une de l'autre.
- Les coordonnées normales et leurs équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \theta_1 - \theta_2, & \ddot{\xi}_1 &= -3A\xi_1, \\ \xi_2 &= \theta_1 - \theta_3, & \ddot{\xi}_2 &= -3A\xi_2, \\ \xi_3 &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, & \ddot{\xi}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

- Le mode de translation $\xi_3(t) = vt + c$ (cf. (5.9)) n'est pas excité puisque $\xi_3(0) = 0$ et $\dot{\xi}_3(0) = 0$ d'après les conditions initiales données. L'amplitude et le déphasage des deux autres modes normaux $\xi_i(t) = a_i \cos(\omega_0 t - \delta_i), i = 1, 2$, sont fixées par les mêmes conditions initiales soit

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= 0, & \dot{\xi}_1(0) &= 5\omega_0 & \rightarrow \delta_1 &= \pi/2, & a_1 &= 5, \\ \xi_2(0) &= 0, & \dot{\xi}_2(0) &= 4\omega_0 & \rightarrow \delta_2 &= \pi/2, & a_2 &= 4. \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= 5 \sin \omega_0 t, \\ \xi_2(t) &= 4 \sin \omega_0 t, \\ \xi_3(t) &= 0.\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{1}{3}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 3 \sin \omega_0 t, \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{3}(-2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = -2 \sin \omega_0 t, \\ \theta_3(t) &= \frac{1}{3}(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = -\cos \omega_0 t.\end{aligned}$$

TD 6 : Mouvement d'un solide

6.1 Autour de la Machine d'Atwood

Deux solides M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 (avec arbitrairement $m_1 > m_2$) sont reliés par une corde inextensible (longueur constante L) passant dans la gorge d'une poulie (rayon R). La corde ne glisse pas et la poulie tourne sans frottement autour de son axe Oz (voir figure 6.1). On note g l'accélération de la pesanteur et $\vec{g} = g\vec{e}_x$ le champ de pesanteur.

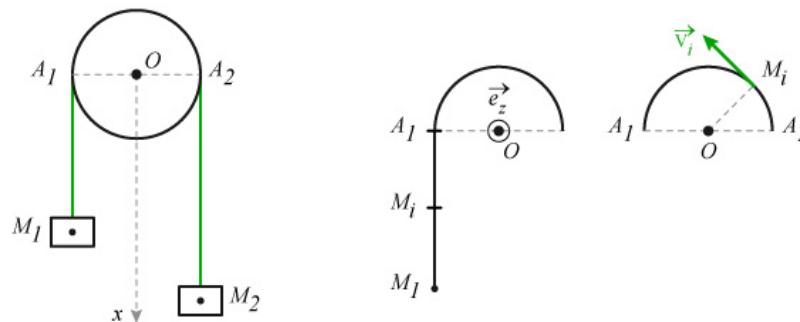


FIGURE 6.1 : Modélisation de la machine d'Atwood

6.1.1 La machine idéale

On suppose que la corde et la poulie ont des masses négligeables dans cette sous-partie.

1. Écrire le Lagrangien du système constitué des deux solides M_1 et M_2 .
2. En déduire l'accélération subie par les deux masses puis les tensions T_1 et T_2 que la corde exerce sur les masses M_1 et M_2 à leurs points d'attaches.

Correction 6.1.1

1. Notons x_1 (resp. x_2) l'abscisse du point d'attache de M_1 (resp. M_2) à la corde. Si la corde est inextensible, $L = x_1 + x_2 + \pi R$ et par conséquent $0 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$.

On va tout exprimer en fonction d'une des variables seulement (par exemple x_1) et de ses dérivées.

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_1^2 \\ &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{x}_1^2. \end{aligned}$$

tandis que, en fixant le zéro de l'énergie de pesanteur dans le plan $x = 0$,

$$\begin{aligned} E_P &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \\ &= -(m_1 - m_2) g x_1 - m_2 g (L - \pi R). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2) g x_1 + m_2 g (L - \pi R).$$

2.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}$$

soit

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2) g.$$

On en déduit

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

On peut calculer les tensions en exprimant la relation fondamentale de la dynamique pour chacune des masses : $m_i \ddot{x}_i = m_i g - T_i$ (signe $-$ pour signifier que la tension de la corde est bien orientée dans le sens opposé de l'axe (Ox) .) On obtient

$$T_1 = T_2 = m_1 (g - \ddot{x}_1) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Les tensions sont égales.

6.1.2 Le rôle de la poulie

On suppose que la poulie de masse m est un disque homogène et on note $J = \frac{mR^2}{2}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz .

1. Écrire le Lagrangien du système constitué des deux solides M_1 et M_2 et de la poulie.
2. En déduire l'accélération subie par les deux masses puis les tensions T_1 et T_2 .
3. Décrire le mouvement des masses. A.N. : $m_1 = 230$ g, $m_2 = 220$ g, $m = 340$ g (machine d'Atwood construite en 1850 par Lecomte à Paris et conservée à l'Université de Lyon) Quelle est la durée d'une chute d'une hauteur de $H = 2$ m ?
4. Cette machine était utilisée pour des mesures de la pesanteur en intercalant un dynamomètre entre la corde et une des masses. Expliquer l'intérêt de cette machine.

Correction 6.1.2

1. Il faut rajouter l'énergie cinétique de la poulie en rotation. Lorsque x_1 varie de Δx_1 , puisque la corde ne glisse pas dans la gorge de la poulie, cette dernière tourne d'un angle $\Delta\theta$ tel que $R\Delta\theta = \Delta x_1$. La vitesse angulaire de la toupie $\dot{\theta}$ est donc reliée à la vitesse linéaire de M_1 , \dot{x}_1 , par la relation $R\dot{\theta} = \dot{x}_1$.
L'énergie cinétique de la poulie $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2$ est donc égale à $\frac{J}{2R^2} \dot{x}_1^2 = \frac{m}{4} \dot{x}_1^2$. [FM : Les étudiants ont-ils déjà fait un peu de méca du Solide ?] Le nouveau Lagrangien est donc

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2 + \frac{m}{2})}{2} \dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2) g x_1 + m_2 g (L - \pi R).$$

2. On en déduit immédiatement

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g.$$

Puis

$$T_1 = m_1(g - \ddot{x}_1) = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

$$T_2 = m_2(g - \ddot{x}_2) = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

Les tensions ne sont plus égales : elles créent un couple au niveau de la poulie qui la met en mouvement.

3. Il s'agit un mouvement uniformément accéléré avec une accélération αg où $\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$ donc $\Delta x_1(t) = \frac{\alpha}{2} g t^2$. Ici

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{230 - 220}{230 + 220 + \frac{340}{2}} \simeq 0,0161$$

Si $\Delta x_1(\tau) = H = \frac{\alpha}{2} g \tau^2$, alors

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9,815}} \frac{1}{\sqrt{0,0161}} \simeq 5 \text{ s.}$$

Avec $\alpha = 1$ (cas de la chute libre), on aurait

$$\tau' = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9,815}} \simeq 0,65 \text{ s.}$$

4. Avec des masses très proches, la durée de la « chute libre » (donc de la mesure) est fortement augmentée, ce qui facilite le travail de l'expérimentateur.

Le dynamomètre permet de mesurer la tension de la corde (en gros $m_i g$) et d'en déduire finalement g .

6.1.3 Le rôle (éventuel) de la corde

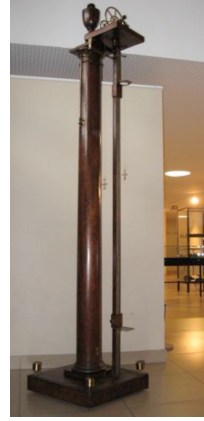
On suppose que la corde est homogène et a une masse m_C non négligeable (mais telle que $m_C < m_1 - m_2$). On note $x_1 = x_1(t)$ la longueur de corde du segment $A_1 M_1$ à l'instant t . On prépare la machine de telle sorte que $x_1(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = 0$.

1. Écrire l'énergie cinétique du système constitué de la poulie, de la corde et des deux masses en fonction des données et de $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$. On précisera la valeur de la vitesse sur les différents segments de la corde, notamment sur la partie enroulée.
2. Écrire l'énergie potentielle du système constitué de la poulie, de la corde et des deux masses en fonction des données et de x_1 .
3. Écrire le Lagrangien du système. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur $x_1(t)$.

En déduire que $x_1(t) = \mathcal{A} \frac{\cosh(\omega t) - 1}{\omega^2}$ où \mathcal{A} et ω sont des constantes que l'on explicitera en fonction des données.

4. Une tresse en polyamide blanche d'un mm de diamètre à une masse d'environ $0,5 \text{ g.m}^{-1}$ pour une résistance à la rupture d'environ 50 kg. Quantifier la correction que l'utilisation de cette tresse aura sur le résultat de l'expérience étudiée la question précédente. Vous choisirez des valeurs réalistes de R et de L (voir la figure 6.1.3). Commenter.

« Cette machine, (...), rend sensible les lois du mouvement uniformément accéléré ou retardé, de même que celles du mouvement uniforme, sans employer qu'un espace moindre de cinq pieds & demi, ce qui la rend extrêmement commode et très avantageuse dans un Cours de Physique. La simplicité et l'exactitude avec laquelle cette machine rend ce genre d'expériences à la portée des sens, sont encore son plus grand mérite; car vous savez que les observations sur la chute des corps & l'accélération de leurs vitesses demandent des opérations très délicates, fort difficiles & assez laborieuses : & ce qui plus est tout-à-fait impraticables dans un Cours régulier de Physique Expérimentale. » Lettre de J.H. de Magellan à A. Volta (1780).



Correction 6.1.3

1. La corde est tendue et inextensible : tous ses éléments ont une vitesse égale à \dot{x}_1 . Elle ajoute donc une énergie cinétique $\frac{m_c}{2}\dot{x}_1^2$ à l'énergie cinétique de la partie précédente :

$$E_C = \frac{(m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2})}{2} \dot{x}_1^2.$$

2. Si un bout de corde de longueur x_1 pend du côté de la masse M_1 , sa masse est égale à $\frac{x_1}{L}m_c$ et la position de son centre de gravité est $\frac{x_1}{2}$: son énergie potentielle est donc $-m_c \frac{x_1}{L} g \frac{x_1}{2} = -\frac{x_1^2}{2L} m_c g$.

Du côté de la masse M_2 , la longueur pendante est $L - \pi R - x_1$ et, en suivant la même démarche, on trouve que l'énergie potentielle de cet autre bout de corde est $-\frac{(L - \pi R - x_1)^2}{2L} m_c g$. La partie de la corde enroulée autour de la poulie a aussi une énergie potentielle de pesanteur (son centre de gravité est à une abscisse négative) mais comme cette énergie est constante, on peut ne pas l'ajouter dans le Lagrangien.

3. Au total, on a, à une constante près,

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2})}{2} \dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2)gx_1 + m_c g \frac{x_1^2 + (L - \pi R - x_1)^2}{2L}.$$

On a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}) \ddot{x}_1,$$

tandis que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= (m_1 - m_2)g + \frac{m_c g}{2L} [2x_1 + 2(x_1 + \pi R - L)], \\ &= (m_1 - m_2 - m_c + \frac{\pi R}{L} m_c + \frac{2x_1}{L} m_c)g. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 - m_2 - m_c + \frac{\pi R}{L} m_c)g}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}} + \frac{2x_1}{L} \frac{m_c}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}} g.$$

Si on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{(m_1 - m_2 - m_c + \frac{\pi R}{L} m_c)g}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}}, \\ \omega^2 &= \frac{2}{L} \frac{m_c}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}} g, \end{aligned}$$

alors on a $\ddot{x}_1 = \mathcal{A} + \omega^2 x_1$, ou encore $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = \mathcal{A}$.

La solution générale de l'équation précédente est $x_1(t) = -\frac{\mathcal{A}}{\omega^2} + K_1 \cosh(\omega t) + K_2 \sinh(\omega t)$.

À l'instant initial,

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0 = -\frac{\mathcal{A}}{\omega^2} + K_1, \\ \dot{x}_1(0) &= 0 = \omega K_2.\end{aligned}$$

On a finalement

$$x_1(t) = \mathcal{A} \frac{\cosh(\omega t) - 1}{\omega^2}.$$

4. On prend $L = 3$ m et $R = 0,15$ m. On a alors $m_c = 1,5$ g.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{(m_1 - m_2 - m_c + \frac{\pi R}{L} m_c)g}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}} = \frac{(230 - 220 - 1,5 + \frac{\pi \times 0,15}{3} 1,5) \times 9,815}{230 + 220 + 1,5 + 170} \simeq 0,138 \text{ m.s}^{-2}, \\ \omega^2 &= \frac{2}{L} \frac{m_c}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{m}{2}} g = \frac{2}{3} \times \frac{1,5}{230 + 220 + 1,5 + 170} \times 9,815 \simeq 0,0158 \text{ Hz}^2.\end{aligned}$$

On peut remarquer que pour les temps courts, $x_1(t) = \frac{\mathcal{A}}{2} t^2$. \mathcal{A} est donc l'accélération initiale que l'on peut comparer à la grandeur αg dans la question précédente. On avait alors $\alpha g = 0,158 \text{ m.s}^{-2}$. La variation est somme toute importante, de l'ordre de 13%.

On en déduit que le temps de chute τ vérifie $\frac{\cosh(\omega\tau)-1}{\omega^2} = \frac{H}{\mathcal{A}} \simeq \frac{2}{0,138} \simeq 14,5$ soit encore $\cosh(\omega\tau) \simeq 1,229$, $\omega\tau \simeq 0,6645$ et enfin $\tau \simeq 5,29$ s. A comparer aux 5 s précédentes.

La corde a ralenti la chute de M_1 (le comportement exponentiel ne suffit pas à compenser le fait qu'au début, la corde est du côté de M_2 et donc s'oppose à la chute de M_1).

6.2 La toupie de Lagrange

On s'intéresse au mouvement d'une toupie de masse m , soumise au champ de pesanteur terrestre \vec{g} , dont la pointe en O est maintenue immobile sans dissipation dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(0; \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$. On introduit $\mathcal{T}(0; \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$ le référentiel des axes principaux de la toupie dont l'orientation par rapport au référentiel du laboratoire est déterminée par les angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) (voir figure 6.2), qui décrivent la précession, la nutation et la rotation propre de la toupie. Cette toupie possède une symétrie de rotation par rapport à l'axe principal $0x_3$: on note I_3 (resp. $I_1 = I_2$) son moment d'inertie par rapport à $0x_3$ (resp. par rapport à $0x_1$ et $0x_2$). On note l la distance à O du centre de gravité G de la toupie (situé sur $0x_3$).

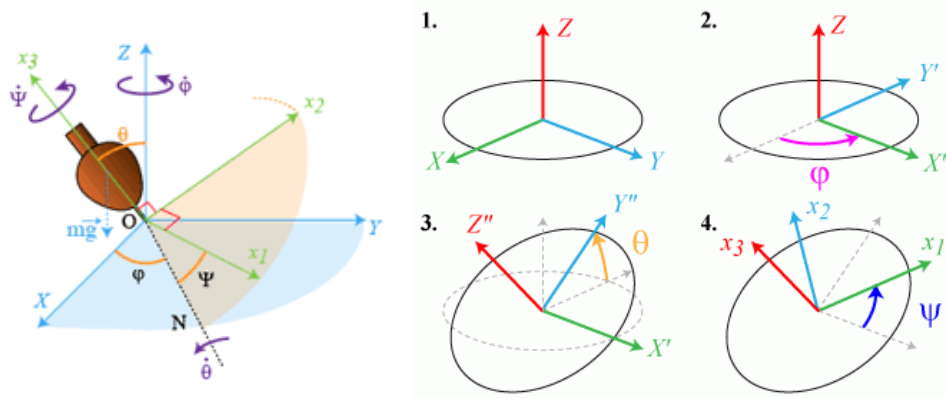


FIGURE 6.2 : Les angles d'Euler de la toupie et les différents repères

1. Exprimer $\vec{\Omega}$, le vecteur vitesse angulaire de la toupie en fonction de $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ et des vecteurs unitaires $\vec{e}_Z, \vec{e}_{X'}$ et \vec{e}_{x_3} .
2. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$ en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées.
3. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la toupie.

4. Montrer que le Lagrangien de la toupie est égal à

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\psi}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} + \cos(\theta)\dot{\psi})^2 - mgl \cos(\theta).$$

On note $L_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ et $L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$.

5. Que peut-on dire de L_3 et de L_z ? Quelles sont leurs interprétations physiques?
6. Écrire l'énergie E de la toupie en fonction des angles d'Euler, de leurs dérivées et des données.
7. Dédire des questions précédentes que l'étude du mouvement de la toupie se réduit à l'étude d'un système unidimensionnel conservatif de la forme $E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$. On donnera l'expression de l'énergie potentielle effective $U_{eff}(\theta)$.
8. Étudier la stabilité de la toupie lorsqu'elle est verticale. On effectuera un développement limité à l'ordre convenable de $U_{eff}(\theta)$ autour de $\theta = 0$.
9. On réécrit l'équation précédente sur l'énergie sous la forme $\dot{u}^2 = f(u) = (1-u^2)(c-du) - (au-b)^2$ où $u = \cos(\theta)$. Donner les expressions des coefficients a, b, c et d .
10. Justifier qu'il y ait deux racines de $f(u)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$, que l'on notera u_1 et u_2 .
11. Étudier le signe de $\dot{\phi}$ dans l'intervalle $[u_1, u_2]$. En déduire, selon le positionnement de $u_0 = \frac{L_z}{L_3}$ par rapport à cet intervalle, que les différents types de mouvement de la toupie sont conformes à l'illustration 6.3.

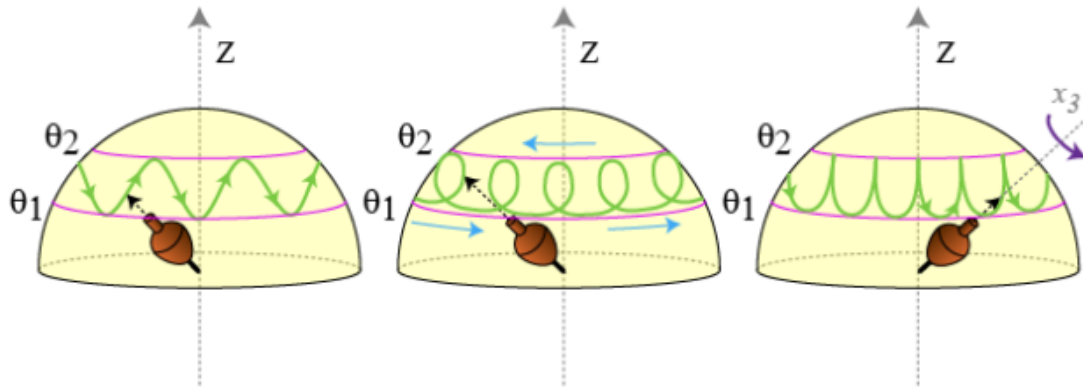


FIGURE 6.3 : Les différents mouvements de nutation de la toupie

À l'instant initial $t = 0$, on lâche la toupie inclinée de θ_0 par rapport à la verticale avec une rotation propre $\dot{\psi}(t = 0) = \omega$ « très élevée » (on donnera du sens à cette expression dans la suite).

12. Réécrire l'équation différentielle sur la variable u , compte-tenu des conditions initiales.
13. Dans l'hypothèse où $a^2/d \gg 1$, on admet que $\theta(t) - \theta_0$ demeure « petit ». Montrer que $\dot{u}^2 \simeq (u_0 - u)[d(1 - u_0^2) - a^2(u_0 - u)]$.
14. Introduire la variable $v = u_0 - u - \frac{d(1-u_0^2)}{2a^2}$. Montrer que l'équation précédente se réécrit $\dot{v}^2 + a^2v^2 = \frac{d^2(1-u_0^2)^2}{4a^2}$. Déterminer $v(t)$, puis $u(t)$ et vérifier que le mouvement de nutation est de faible amplitude et périodique. En déduire $\dot{\phi}(t)$, puis sa moyenne temporelle $\langle \dot{\phi}(t) \rangle$ sur une période. Tracer sommairement le mouvement de la toupie.
15. Pourquoi observe-t-on rarement ce mouvement lorsque l'on lance une toupie jouet?
16. Pourquoi la toupie ne tombe pas?

1. On peut additionner les vecteurs vitesse angulaire correspondant à chacune des rotations d'Euler : $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{e}_Z + \dot{\theta}\vec{e}_{X'} + \dot{\psi}\vec{e}_{x_3}$.
2. L'idée est d'exprimer $\vec{\Omega}$ dans la base des axes principaux de la toupie, base où la relation entre le moment cinétique \vec{L} et le vecteur vitesse angulaire est particulièrement simple. Sur la figure 6.2, on a 4 bases successives : $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, $(\vec{e}_{X'}, \vec{e}_{Y'}, \vec{e}_{Z'} = \vec{e}_Z)$, $(\vec{e}_{X''} = \vec{e}_{X'}, \vec{e}_{Y''}, \vec{e}_{Z''})$, $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3} = \vec{e}_{Z''})$.

On a $\vec{e}_Z = \cos(\theta)\vec{e}_{Z''} + \sin(\theta)\vec{e}_{Y''} = \cos(\theta)\vec{e}_{x_3} + \sin(\theta)\vec{e}_{Y''}$ tandis que $\vec{e}_{Y''} = \cos(\psi)\vec{e}_{x_2} + \sin(\psi)\vec{e}_{x_1}$. Par ailleurs, $\vec{e}_{X''} = \vec{e}_{X'} = \cos(\psi)\vec{e}_{x_1} - \sin(\psi)\vec{e}_{x_2}$.

En substituant, on obtient $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{e}_Z + \dot{\theta}\vec{e}_{X'} + \dot{\psi}\vec{e}_{x_3} = \dot{\phi}[\cos(\theta)\vec{e}_{x_3} + \sin(\theta)(\cos(\psi)\vec{e}_{x_2} + \sin(\psi)\vec{e}_{x_1})] + \dot{\theta}[\cos(\psi)\vec{e}_{x_1} - \sin(\psi)\vec{e}_{x_2}] + \dot{\psi}\vec{e}_{x_3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= [\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)]\vec{e}_{x_3} + [\dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi)]\vec{e}_{x_1} + [\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi)]\vec{e}_{x_2} \\ &= \Omega_3\vec{e}_{x_3} + \Omega_2\vec{e}_{x_2} + \Omega_1\vec{e}_{x_1}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

3. Dans la base des axes principaux, le moment cinétique s'exprime comme $\vec{L} = I_1\Omega_1\vec{e}_{x_1} + I_2\Omega_2\vec{e}_{x_2} + I_3\Omega_3\vec{e}_{x_3} = I_1(\Omega_1\vec{e}_{x_1} + \Omega_2\vec{e}_{x_2}) + I_3\Omega_3\vec{e}_{x_3}$. On en déduit l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\Omega} \\ &= \frac{1}{2}\{I_1\Omega_1^2 + I_1\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{I_1[\dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi)]^2 + I_1[\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi)]^2 + I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)]^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{I_1[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2] + I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)]^2\}.\end{aligned}$$

L'énergie potentielle est l'énergie potentielle de pesanteur $E_P = mgz_G$ où z_G est la hauteur du centre de gravité par rapport au plan horizontal (OXY) (par convention, on choisit l'énergie potentielle nulle dans ce plan), d'où

$$E_P = mgz_G = mgl\cos(\theta).\tag{6.2}$$

4. Par définition, $\mathcal{L} = E_c - E_P$. On obtient bien l'expression demandée.
5. ψ et ϕ sont des variables cycliques (elles n'apparaissent pas explicitement dans le Lagrangien) donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}L_3 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)], \\ L_Z &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = I_3\cos(\theta)[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)] + I_1\sin^2(\theta)\dot{\phi},\end{aligned}\tag{6.3}$$

sont des constantes du mouvement. L_3 (resp. L_Z) est la projection du moment cinétique sur (Ox_3) (resp. (OZ)). Les deux sont conservés car le couple du poids $\vec{OG} \wedge m\vec{g}$ est bien orthogonal à ces deux axes et ne peut donc pas faire varier ces composantes du moment cinétique.

6. $E = E_c + E_P = \frac{1}{2}\{I_1[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2] + I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)]^2\} + mgl\cos(\theta)$. Comme il n'y a pas de phénomènes dissipatifs, l'énergie est conservée.
7. Le Lagrangien et l'énergie dépendent explicitement de quatre variables $(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ et nous avons deux grandeurs conservées L_3 et L_Z : on peut exprimer E uniquement en fonction de θ et $\dot{\theta}$ en éliminant $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$.
- On a immédiatement $\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \dot{\phi}\cos(\theta)$ et en remarquant que l'on peut réécrire $L_Z = \cos(\theta)L_3 + I_1\sin^2(\theta)\dot{\phi}$, on en déduit $\dot{\phi} = \frac{L_Z - \cos(\theta)L_3}{I_1\sin^2(\theta)}$. Il vient donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\{I_1[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2] + I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)]^2\} + mgl\cos(\theta), \\ &= \frac{I_1}{2}[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2] + \frac{I_3}{2}\left(\frac{L_3}{I_3}\right)^2 + mgl\cos(\theta), \\ &= \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\sin^2(\theta)\left[\frac{L_Z - \cos(\theta)L_3}{I_1\sin^2(\theta)}\right]^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgl\cos(\theta), \\ &= \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta), \end{aligned} \quad (6.4)$$

où

$$U_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}\frac{(L_Z - \cos(\theta)L_3)^2}{I_1\sin^2(\theta)} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgl\cos(\theta).$$

8. Lorsque la toupie est lancée avec son axe vertical : $\theta(t=0) = \theta_0 = 0$ et on obtient $L_0 = L_3 = L_Z = I_3(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_0)$. D'où l'on déduit

$$U_{eff}(\theta) = \frac{L_0^2}{2I_1}\frac{(1 - \cos(\theta))^2}{\sin^2(\theta)} + \frac{L_0^2}{2I_3} + mgl\cos(\theta).$$

On obtient donc au deuxième ordre en θ

$$U_{eff}(\theta) = \frac{L_0^2}{2I_3} + mgl + \left(\frac{L_0^2}{4I_1} - mgl\right)\frac{\theta^2}{2} + \dots$$

L'équilibre est stable autour de $\theta = 0$ uniquement si U_{eff} est une cuvette de potentiel (avec un minimum en $\theta = 0$) ce qui impose que

$$\frac{L_0^2}{4I_1} - mgl \geq 0,$$

ou encore en terme de vitesse de rotation

$$\Omega_3(t=0) \geq \sqrt{\frac{4mglI_1}{I_3^2}}.$$

La rotation doit être suffisamment rapide pour contrebalancer l'effet déstabilisateur du poids.

9. Si on pose $u = \cos(\theta)$, on a $\sin^2(\theta) = 1 - u^2$ tandis que $\dot{u} = -\sin(\theta)\dot{\theta}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 &= E - U_{eff}(\theta) \\ \frac{I_1}{2}\frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} &= E - \frac{L_3^2}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\frac{(L_Z - L_3u)^2}{(1 - u^2)} - mglu, \end{aligned}$$

soit

$$\dot{u}^2 = \frac{2}{I_1}\left\{(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mglu)(1 - u^2) - \frac{1}{2I_1}(L_Z - L_3u)^2\right\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} a &= \frac{L_Z}{I_1}, \\ b &= \frac{L_3}{I_1}, \\ c &= \frac{2}{I_1} \left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} \right), \\ d &= \frac{2mgl}{I_1}. \end{aligned}$$

10. $f(u)$ est un polynôme du troisième degré qui possède au maximum trois racines. On peut faire le constat que $f(-1) = -\frac{1}{2I_1}(L_Z + L_3)^2 < 0$ et $f(1) = -\frac{1}{2I_1}(L_Z - L_3)^2 < 0$ tandis que $f(+\infty) > 0$.

Une des racines est donc comprise dans l'intervalle $[1, +\infty[$. Par ailleurs, du point de vue de la physique, il y a nécessairement un domaine dans $[-1, 1]$ dans lequel $f(u)$ est positive (sinon pas de mouvement possible). Donc les deux dernières racines sont forcément dans cet intervalle.

Si les deux racines u_1 et u_2 sont distinctes ($u_1 = \cos(\theta_1) < u_2 = \cos(\theta_2)$), cela signifie qu'il y aura un mouvement de nutation de la toupie $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$.

11. On a $\dot{\phi} = \frac{L_Z - \cos(\theta)L_3}{I_1 \sin^2(\theta)} = \frac{L_3}{I_1(1-u^2)} \left(\frac{L_Z}{L_3} - u \right)$. Son signe dépend donc de la quantité $\frac{L_Z}{L_3} - u = u_0 - u$.

Si $u_0 < u_1$ ou $u_0 > u_2$, $\dot{\phi}$ ne s'annulera jamais au cours du mouvement : la précession est monotone. Cf. figure de gauche de 6.3.

Si $u_1 < u_0 < u_2$, il y a changement de signe de $\dot{\phi}$ lors de la nutation. La précession n'est plus monotone : elle a lieu dans le sens direct quand la toupie est la plus inclinée (par rapport à la verticale), dans le sens indirect quand la toupie est la moins inclinée. On obtient donc des boucles. Cf. figure centrale de 6.3.

Si $u_1 = u_0$ ou $u_0 = u_2$, la précession est monotone mais s'arrête au moment où la nutation de la toupie est maximale (ou minimale) : on a l'apparition d'un point de rebroussement de première espèce (une pointe quoi!). Cf. figure de droite de 6.3.

12. On a alors $L_3 = I_3\omega$, $L_Z = \cos(\theta_0)L_3$ et $E = \frac{I_3}{2}\omega^2 + mgl\cos(\theta_0)$. On a donc $u_0 = \frac{L_Z}{L_3} = \cos(\theta_0)$ et $\frac{L_3^2}{2I_3} = \frac{I_3}{2}\omega^2$. Finalement,

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= \frac{2}{I_1} \{ mgl(u_0 - u)(1 - u^2) - \frac{L_3^2}{2I_1}(u_0 - u)^2 \}, \\ &= (u_0 - u) \{ d(1 - u^2) - a^2(u_0 - u) \}. \end{aligned}$$

avec $a = \frac{I_3\omega}{I_1}$ et $d = \frac{2mgl}{I_1}$.

13. Comme $\epsilon = \frac{d}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{mgl}{\frac{I_3\omega^2}{2}} \ll 1$ (ω très élevée : l'énergie cinétique de rotation initiale est beaucoup plus élevée que l'énergie potentielle de pesanteur), $\epsilon(1 - u^2) - (u_0 - u) = \epsilon(1 - u_0^2) - (1 + 2\epsilon u_0)(u_0 - u) - \epsilon(u_0 - u)^2 \simeq \epsilon(1 - u_0^2) - (u_0 - u)$, au premier ordre en ϵ et $u_0 - u$.

14. On a donc

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= a^2(u_0 - u) \{ \epsilon(1 - u_0^2) - (u_0 - u) \}, \\ &= a^2 \left\{ \frac{\epsilon^2}{4}(1 - u_0^2)^2 - [u_0 - u - \frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $v = u_0 - u - \frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2)$,

$$\dot{v}^2 + a^2 v^2 = a^2 \frac{\epsilon^2}{4} (1 - u_0^2)^2.$$

On reconnaît la loi de conservation de l'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation a avec $\dot{v}(t=0) = 0$ et $v(t=0) = -\frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2)$.

On en déduit donc $v(t) = -\frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2) \cos(at)$ soit

$$u_0 - u(t) = \frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2)[1 - \cos(at)]$$

$$\begin{aligned} u_0 - u(t) &= \frac{\epsilon}{2}(1 - u_0^2)[1 - \cos(at)], \\ &= \frac{d}{2a^2} \sin^2(\theta_0)[1 - \cos(at)], \end{aligned}$$

$$\cos(\theta_0) - \cos(\theta(t)) = \frac{I_1}{I_3} \left(\frac{mgl}{I_3 \omega^2} \right) \sin^2(\theta_0)[1 - \cos(at)].$$

Compte-tenu que $\left(\frac{mgl}{I_3 \omega^2} \right) \ll 1$, on a $\theta_0 - \theta(t) = -\frac{I_1}{I_3} \left(\frac{mgl}{I_3 \omega^2} \right) \sin(\theta_0)[1 - \cos(at)]$: le mouvement de nutation est de très faible amplitude et périodique de période $\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{I_1}{I_3}$.

On en déduit aussi, au premier ordre en $u_0 - u$,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_Z - \cos(\theta)L_3}{I_1 \sin^2(\theta)} \\ \dot{\phi} &= \frac{L_3}{I_1(1 - u^2)} \left(\frac{L_Z}{L_3} - u \right), \\ &= \frac{I_3 \omega}{I_1(1 - u^2)} (u_0 - u), \\ &\simeq \frac{I_3 \omega}{I_1(1 - u_0^2)} (u_0 - u), \\ \dot{\phi} &\simeq \frac{mgl}{I_3 \omega} [1 - \cos(at)]. \end{aligned}$$

On constate que $\frac{\dot{\phi}}{\omega} \propto \frac{mgl}{I_3 \omega^2} \ll 1$: le mouvement de précession est très lent par rapport à la rotation propre et en moyenne $\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{mgl}{I_3 \omega}$.

15. Les frottements au niveau de la pointe, voire les frottements aérodynamiques, amortissent le mouvement de nutation qui peut devenir inobservable et moyennent la précession qui devient assez régulière. Lorsque le ralentissement de la rotation propre devient sensible, la nutation reprend ses droits, et la toupie se met à tanguer de plus en plus jusqu'à chuter.
16. Hélas, la mécanique analytique est puissante mais en termes de compréhension physique, il faudra repasser !

6.3 Le pendule double solide

Nous considérons le pendule solide représenté ci-dessous. Il est composé de deux tiges solides homogènes T_1 et T_2 . La tige T_1 de longueur L et de masse M , est attachée au point O qui est fixe dans le référentiel galiléen d'étude R_g . La tige T_2 de longueur λL et de masse m est attachée à la tige T_1 au point A . Il faut noter que les tiges sont arrangées de manière à ce que leurs centres de gravité, notés G_1 et G_2 , ne coïncident pas avec les points d'attache O et A . Les dimensions du pendule sont décrites par les coefficients λ , λ_1 , λ_2 et α comme précisé sur le schéma. Le mouvement du pendule est contenu dans le plan $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. On note $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ le repère mobile orthonormé lié à la tige T_1 . L'angle θ_1 quantifie la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du mouvement par rapport au repère fixe. Idem pour la tige T_2 associée au repère orthonormé $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ et à l'angle θ_2 . Le pendule est soumis au champ de gravité qui est uniforme, vertical et orienté vers le bas. On considère que les deux tiges ont la même épaisseur et la même densité, on peut donc écrire $m = \lambda M$. Nous faisons l'hypothèse que le pendule est idéal, c'est-à-dire que nous ne tenons pas compte des frottements ni au niveau des liaisons mécaniques, ni avec l'air.

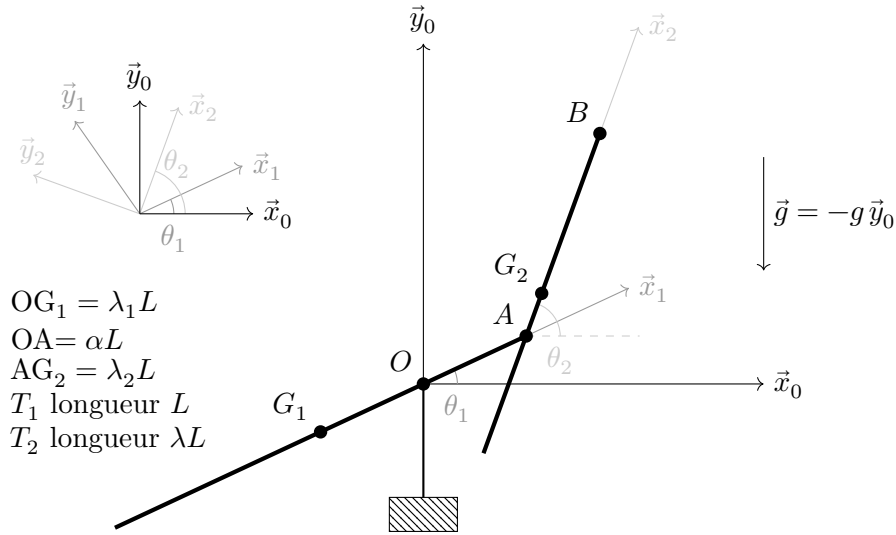


FIGURE 6.4 : Schéma du pendule double solide et sa paramétrisation.

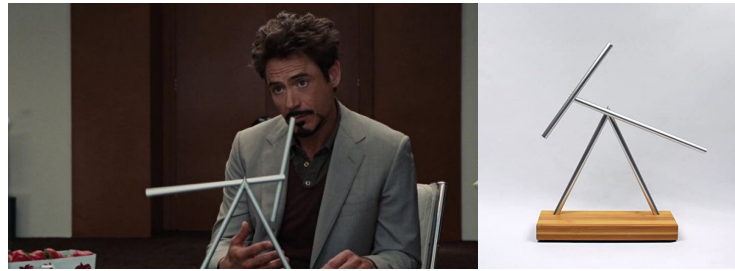


FIGURE 6.5 : À gauche, Tony Stark dans le film Iron Man 2. Nous envisageons d'étudier le pendule qui se trouve sur son bureau, représenté également sur l'image de droite.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les équations du mouvement qui décrivent l'évolution du pendule. Nous les utiliserons pour déterminer la trajectoire de l'extrémité de la tige T_2 située au point B . Pour cela, nous allons appliquer les équations d'Euler-Lagrange.

1. Combien de degrés de liberté possède ce pendule ? Quel choix simple de coordonnées généralisées peut-on faire ?
2. Exprimer les coordonnées x_B et y_B du point B dans le référentiel fixe telles que $\overrightarrow{OB} = x_B \vec{x}_0 + y_B \vec{y}_0$. Que faut-il faire pour connaître la trajectoire du point B ?
3. Calculer le lagrangien \mathcal{L}_1 associé à la tige T_1 . Pour ce faire, nous décomposons les étapes suivantes :
 - (a) Calculer l'énergie cinétique du centre de masse de T_1
 - (b) Calculer l'énergie cinétique de rotation de T_1
 - (c) Calculer l'énergie potentielle de la tige T_1
4. Procéder de même pour calculer le lagrangien \mathcal{L}_2 en respectant suivant (a), (b), et (c) mais pour la tige T_2 .
5. Exprimer le lagrangien du système composé des tiges T_1 et T_2
6. Utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour déterminer les deux équations différentielles couplées de θ_1 et θ_2 . Pour ce faire :
 - a) Commencer par écrire l'équation de $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ et montrer que

$$\left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \ddot{\theta}_2 + \alpha \lambda_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{g}{L} \lambda_2 \cos \theta_2$$

- b) En utilisant l'équation de $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$, montrer que

$$(\lambda_1 - \lambda \alpha) \frac{g}{L} \cos \theta_1 = \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} + \lambda \alpha^2 \right) \ddot{\theta}_1 + \alpha \lambda \lambda_2 \left(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

7. *Question complémentaire, hors du cadre de ce cours* : Pour répondre au problème posé, il faudrait déterminer l'évolution de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. Pour ce faire, quelle approche peut-on envisager pour résoudre les équations couplées établies à la question précédente ?

Correction 6.3

1. Un solide libre en 3 dimensions possède 6 degrés de liberté, répartis en 3 degrés de liberté de translation et en 3 degrés de liberté de rotation. Pour un solide libre en 2 dimensions, il n'en existe que 3 : il y a 2 degrés de liberté de translation et 1 degré de liberté de rotation (rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du solide seulement). Dans notre problème, si on considère deux tiges libres indépendantes, on possède à priori $2 \times 3 = 6$ degrés de liberté.

Si on tient maintenant compte des contraintes, alors la tige T_1 attachée au point O ne possède pas de degré de liberté en translation. Cela lui retire deux degrés de liberté. De même, la tige T_2 étant attachée à la tige T_1 au point A , elle perd ainsi deux degrés de liberté.

Finalement, après avoir tenu compte des contraintes, il ne reste que $6 - 4 = 2$ degrés de liberté. Chacun correspond à l'unique degré de liberté de rotation des tiges T_1 et T_2 . Ces rotations sont paramétrisées par les angles θ_1 et θ_2 .

Un choix simple de coordonnées généralisées est donc $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$.

2. En utilisant le schéma on voit immédiatement que l'on peut écrire

$$\overrightarrow{OB} = |OA|\vec{x}_1 + (|AG_2| + |G_2B|)\vec{x}_2$$

où le symbole $|\cdot|$ représente les distances entre les points concernés. D'après l'énoncé, on connaît $|OA| = \alpha L$ et $|AG_2| = \lambda_2 L$. Pour la distance restante, remarquons que comme la tige est homogène, la distance entre son extrémité et son centre de masse est la moitié de sa longueur totale, soit $|G_2B| = \lambda L/2$. On obtient donc

$$\overrightarrow{OB} = L \left(\alpha \vec{x}_1 + \left(\lambda_2 + \frac{\lambda}{2} \right) \vec{x}_2 \right)$$

Pour répondre à la question, il faut exprimer le résultat dans la base (\vec{x}_0, \vec{y}_0) . Les angles θ_1 et θ_2 permettent d'exprimer (\vec{x}_1, \vec{y}_1) et (\vec{x}_2, \vec{y}_2) dans le repère fixe

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \theta_1 \vec{x}_0 + \sin \theta_1 \vec{y}_0 & \vec{x}_2 &= \cos \theta_2 \vec{x}_0 + \sin \theta_2 \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin \theta_1 \vec{x}_0 + \cos \theta_1 \vec{y}_0 & \vec{y}_2 &= -\sin \theta_2 \vec{x}_0 + \cos \theta_2 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

En remplaçant \vec{x}_1 et \vec{x}_2 dans l'expression de \overrightarrow{OB} on obtient les coordonnées x_B et y_B

$$\begin{aligned} x_B &= \overrightarrow{OB} \cdot \vec{x}_0 = L \left(\alpha \cos \theta_1 + \left(\lambda_2 + \frac{\lambda}{2} \right) \cos \theta_2 \right) \\ y_B &= \overrightarrow{OB} \cdot \vec{y}_0 = L \left(\alpha \sin \theta_1 + \left(\lambda_2 + \frac{\lambda}{2} \right) \sin \theta_2 \right) \end{aligned}$$

3. (a) On doit calculer la vitesse du centre de masse de T_1 , que l'on note v_{G_1} , pour calculer l'énergie cinétique $E_{G_1} = \frac{1}{2} M v_{G_1}^2$. On voit que dans son mouvement, G_1 ne peut que décrire des cercles centrés en O et de rayon $\lambda_1 L$. La vitesse angulaire correspondante est donnée par $\dot{\theta}_1$. On a donc $v_{G_1} = \lambda_1 L \dot{\theta}_1$, soit

$$E_{G_1} = \frac{1}{2} M \lambda_1^2 L^2 \dot{\theta}_1^2$$

- (b) Pour calculer l'énergie de rotation associée à T_1 , il faut utiliser la formule $\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$. Étant donné que l'on a calculé l'énergie cinétique de la question précédente au niveau du centre de masse, il faut alors calculer le moment d'inertie autour de l'axe de rotation perpendiculaire au plan du mouvement passant par le centre de masse de la tige T_1 . Le calcul de ce moment d'inertie est présenté dans le cours, dans lequel on montre que $I_1 = \frac{ML^2}{12}$. On obtient donc

$$E_{\text{rot},1} = \frac{1}{24} ML^2 \dot{\theta}_1^2$$

- (c) L'énergie potentielle se calcule en utilisant la formule $U_1 = Mgy_{G_1} + \text{Cte}$, où y_{G_1} est la position verticale dans le repère fixe du centre de gravité de la tige T_1 . On peut arbitrairement décider que la constante est nulle pour simplifier les expressions. On a donc

$$y_{G_1} = \overrightarrow{OG_1} \cdot \vec{y}_0 = -\lambda_1 L (\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0) = -\lambda_1 L \sin \theta_1$$

soit

$$U_1 = -Mg\lambda_1 L \sin \theta_1$$

L'expression du lagrangien \mathcal{L}_1 associé à la tige T_1 est donc donnée par

$$\mathcal{L}_1 = E_{G_1} + E_{\text{rot},1} - U_1 = \frac{1}{2}M\lambda_1^2 L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{24}ML^2 \dot{\theta}_1^2 + Mg\lambda_1 L \sin \theta_1$$

4. (a) Cette fois-ci nous devons calculer la vitesse du centre gravité de la tige T_2 , c'est-à-dire la vitesse du point G_2 que l'on note v_{G_2} . On remarque d'abord que

$$\overrightarrow{OG_2} = \alpha L \vec{x}_1 + \lambda_2 L \vec{x}_2$$

On obtient ensuite la vitesse en dérivant cette expression par rapport au temps. On utilise les relations $\frac{d}{dt}(\vec{x}_1) = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$ et $\frac{d}{dt}(\vec{x}_2) = \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$. On obtient donc

$$\vec{v}_{G_2} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG_2}) = \alpha L \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 L \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$$

Il est pertinent de calculer directement $v_{G_2}^2$ puisque que c'est la quantité qui intervient dans l'énergie cinétique. En prenant le carré de l'expression précédente, on obtient

$$v_{G_2}^2 = \vec{v}_{G_2} \cdot \vec{v}_{G_2} = \alpha^2 L^2 \dot{\theta}_1^2 (\vec{y}_1)^2 + \lambda_2^2 L^2 \dot{\theta}_2^2 (\vec{y}_2)^2 + 2\alpha\lambda_2 L^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2)$$

Étant donné que \vec{y}_1 et \vec{y}_2 sont des vecteurs unitaires, on a $(\vec{y}_1)^2 = (\vec{y}_2)^2 = 1$. Pour le troisième terme, on utilise la formule qui exprime le produit scalaire comme étant le produit des normes et du cosinus de l'angle entre les vecteurs, soit $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = |\vec{y}_1||\vec{y}_2| \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$. On a donc

$$v_{G_2}^2 = \vec{G}_2 \cdot \vec{G}_2 = L^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1^2 + \lambda_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\alpha\lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

Étant donné que la tige T_2 possède une masse m , on obtient l'énergie cinétique du centre de masse suivante

$$E_{G_2} = \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 = \frac{1}{2}mL^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1^2 + \lambda_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\alpha\lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

- (b) L'énergie de rotation est toujours donnée par la même formule que pour la tige T_1 car T_2 est aussi une tige homogène. Cependant, il faut remplacer les paramètres par ceux de la tige T_2 . On effectue donc les substitutions suivantes : $M \rightarrow m$, $L \rightarrow \lambda L$ et $\dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{\theta}_2$. On a donc

$$E_{\text{rot},2} = \frac{1}{24}m\lambda^2 L^2 \dot{\theta}_2^2$$

- (c) L'énergie potentielle se calcule avec la formule $U_2 = mgy_{G_2}$, où y_{G_2} représente la position verticale du centre de masse du pendule T_2 par rapport à l'origine. Pour obtenir y_{G_2} , il faut projeter le vecteur position $\overrightarrow{OG_2}$ (calculé à la question 4.a) sur l'axe vertical et on obtient

$$U_2 = mg(\alpha L \sin \theta_1 + \lambda_2 L \sin \theta_2)$$

Par conséquent, le lagrangien $\mathcal{L}_2 = E_{G_2} + E_{\text{rot},2} - U_2$ associé à la tige T_2 s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}mL^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1^2 + \lambda_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\alpha\lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) + \frac{1}{24}m\lambda^2 L^2 \dot{\theta}_2^2 - mg(\alpha L \sin \theta_1 + \lambda_2 L \sin \theta_2) \\ &= \frac{1}{2}mL^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \dot{\theta}_2^2 + 2\alpha\lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) - mg(\alpha L \sin \theta_1 + \lambda_2 L \sin \theta_2) \end{aligned}$$

5. Le lagrangien total $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est tout simplement donnée par la somme des lagrangiens des deux tiges T_1 et T_2 .
6. Il est maintenant temps d'écrire les équations d'Euler-Lagrange pour $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ et $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$. On a donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$$

- (a) Commençons par l'équation du couple $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$. Par linéarité de l'opération de dérivée, on peut écrire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_2}$$

or il est facile de voir que \mathcal{L}_1 ne dépend pas explicitement ni de θ_2 , ni de $\dot{\theta}_2$. Par conséquent les dérivées partielles de \mathcal{L}_1 par rapport à θ_2 et $\dot{\theta}_2$ sont nulles et on a donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$$

Deux termes contribuent à la première dérivée partielle, on obtient en factorisant par mL^2

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta_2} = -mL^2 \left(\alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{g}{L} \lambda_2 \cos \theta_2 \right)$$

Deux termes contribuent à la seconde dérivée partielle, on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_2} = mL^2 \left(\left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \dot{\theta}_2 + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

Dérivons ce terme par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_2} = mL^2 \left(\left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \ddot{\theta}_2 + \alpha \lambda_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

Constatons que le terme $-mL^2 \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ apparaît identiquement dans les deux termes de l'équation d'Euler-Lagrange et va donc s'annuler lors de la soustraction des termes. Les termes restants ne s'annulent pas et on peut alors écrire, en divisant par le facteur commun mL^2 ,

$$\left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \ddot{\theta}_2 + \alpha \lambda_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{g}{L} \lambda_2 \cos \theta_2$$

ce qui détermine notre première équation différentielle couplant θ_1 et θ_2 . Comme $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont deux inconnues, cette équation seule n'est pas suffisante pour déterminer le mouvement du pendule.

- (b) Pour obtenir la deuxième équation, il faut détailler minutieusement l'équation suivante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$$

Cette fois-ci, les deux lagrangiens \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 contribuent au résultat. Les calculs ne sont pas plus compliqués que pour établir l'équation précédente, il y a simplement plus de termes à établir et collectionner. Pour ne pas s'y perdre, on les regroupe dans le tableau ci-dessous

Terme	Expression
\mathcal{L}_1	$\frac{1}{2}ML^2 \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} \right) \dot{\theta}_1^2 + Mg\lambda_1 L \sin \theta_1$
$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \theta_1}$	$MgL\lambda_1 \cos \theta_1$
$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\theta}_1}$	$ML^2 \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} \right) \dot{\theta}_1$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\theta}_1}$	$ML^2 \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} \right) \ddot{\theta}_1$
\mathcal{L}_2	$\frac{1}{2}mL^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \dot{\theta}_2^2 + 2\alpha\lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) - mg(\alpha L \sin \theta_1 + \lambda_2 L \sin \theta_2)$
$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta_1}$	$mL^2 \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - mg\alpha L \cos \theta_1$
$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_1}$	$mL^2 \left(\alpha^2 \dot{\theta}_1 + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_1}$	$mL^2 \left(\alpha^2 \ddot{\theta}_1 + \alpha \lambda_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right)$

On utilise les résultats du tableau ci-dessus pour les injecter dans l'équation d'Euler-Lagrange sur $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$$

Il faut faire attention à ne pas faire d'erreur de signe. On constate que le terme proportionnel à $mL^2 \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ s'annule (c'était aussi le cas dans la question précédente). On divise tous les termes par ML^2 et on utilise la relation $m/M = \lambda$ pour se débarrasser des masses dans le résultat final. On obtient finalement l'expression suivante

$$(\lambda_1 - \lambda \alpha) \frac{g}{L} \cos \theta_1 = \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} + \lambda \alpha^2 \right) \ddot{\theta}_1 + \alpha \lambda \lambda_2 \left(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right)$$

7. En conclusion, nous avons démontré que $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ peuvent être déterminés en résolvant les deux équations différentielles couplées ci-dessous.

$$\begin{cases} \left(\lambda_2^2 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \ddot{\theta}_2 + \alpha \lambda_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \alpha \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{g}{L} \lambda_2 \cos \theta_2 \\ (\lambda_1 - \lambda \alpha) \frac{g}{L} \cos \theta_1 = \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{12} + \lambda \alpha^2 \right) \ddot{\theta}_1 + \alpha \lambda \lambda_2 \left(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right) \end{cases}$$

Il est important de remarquer que bien que le système d'étude soit simple et idéalisé (seulement deux degrés de liberté, géométrie simple, distribution de masse homogène, problème à deux dimensions, pas de frottement, forces extérieures décrites par un champ de gravité uniforme...), l'équation obtenue est complexe et obtenir une solution analytique est difficilement envisageable.

Cela étant dit, il existe des méthodes numériques qui permettent de construire des solutions approximatives qui convergent vers la solution des équations ci-dessous. Ces méthodes numériques reposent essentiellement sur la discrétisation des variables par lesquelles qu'il faut dériver, par exemple ici le temps t . Dans notre cas, au lieu de considérer que le temps

est continue, on peut considérer qu'il est discret. Il est alors possible de réécrire les dérivées $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ différemment, par exemple

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\theta_1(t + dt) - \theta_1(t)}{dt} \approx \frac{\theta_1(t + \Delta t) - \theta_1(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Dans la dernière équation, on utilise une valeur finie de Δt au lieu de faire tendre cette dernière vers 0. Cette discrétisation introduit une erreur $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, qui peut devenir négligeable si on choisit Δt très petit. Cela signifie qu'en injectant ces nouvelles expressions des dérivées dans le système d'équations différentielles couplées, on peut calculer $\theta_1(t = \Delta t)$ et $\theta_2(t = \Delta t)$ si jamais on connaît les angles et vitesses angulaires initiales $\theta_1(t = 0), \theta_2(t = 0), \dot{\theta}_1(t = 0)$ et $\dot{\theta}_2(t = 0)$. En procédant par itération, on peut ensuite déterminer ces quantités à $t = 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t, \dots$ et ainsi de suite. En calculant suffisamment de point, une peut obtenir l'évolution discrete de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ de manière satisfaisante, et l'utiliser pour calculer d'autres quantités physiques : trajectoire d'un point, énergie...

Il faut savoir qu'il existe une très grande variété de schémas numériques, qui peuvent être très simple ou extrêmement complexes. La création et l'étude de schémas numériques est un domaine de recherche extrêmement actif. La qualité des solutions obtenues varie énormément selon le schéma numérique utilisé, la précision numérique utilisée, et bien évidemment la complexité de l'équation à résoudre.

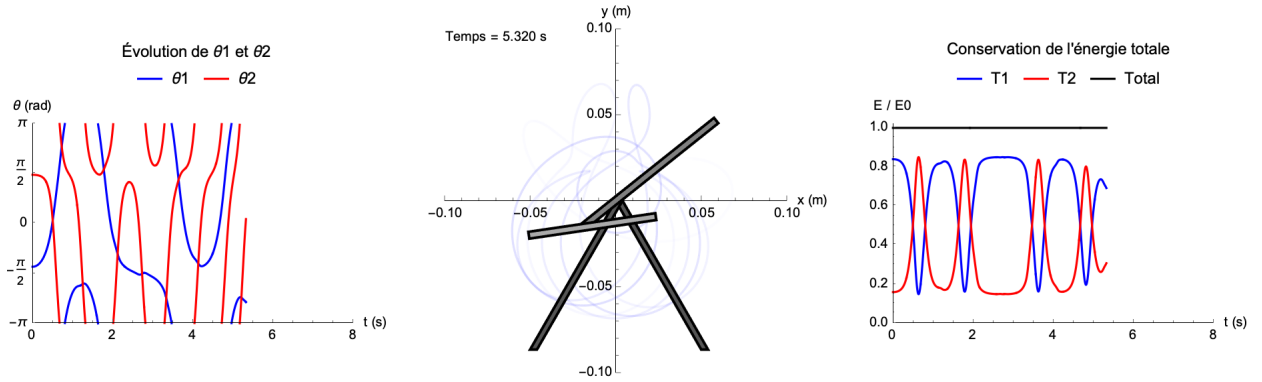


FIGURE 6.6 : Solution numérique de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, à gauche. Ces solutions permettent de calculer le mouvement du pendule représenté au centre et en particulier la trajectoire du point B , en bleu, comme précisé au début de l'exercice. À droite, on vérifie que la solution numérique n'est pas absurde : les tiges T_1 et T_2 échangent leur énergie mécanique mais l'énergie totale est conservée. Image issue de la vidéo du pendule animé.

TD 7 : Introduction au formalisme hamiltonien

7.1 Hamiltonien en coordonnées cylindriques

1. Retrouver l'expression du Lagrangien d'une particule libre en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , puis l'expression des impulsion correspondantes p_i . En déduire l'expression du Hamiltonien en coordonnées cylindriques exprimé en fonction des p_i .

Correction 7.1

1. La vitesse d'une particule en coordonnées cylindrique s'écrit $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$. On en déduit donc le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

De là on peut calculer les $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r} \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} \\ p_z &= m\dot{z} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) (= \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right) \end{aligned}$$

7.2 Dynamique d'une particule chargée dans un potentiel électromagnétique

Soit une particule chargée dans un potentiel électromagnétique caractérisée par un potentiel électrostatique V et un potentiel vecteur \mathbf{A} . On rappelle son Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{||\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)||^2}{2m} + qV(\mathbf{r}, t)$$

1. Retrouver l'expression de \mathbf{p} en fonction de $\dot{\mathbf{r}}$ par la première équation de Hamilton.
2. Retrouver l'expression de la force électromagnétique à partir de la deuxième équation de Hamilton. On procédera par étape :
 - (a) Écrire l'équation de Hamilton pour \dot{p}_x en remplaçant les p_i par des \dot{r}_i grâce à la question précédente, puis montrer que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\dot{\mathbf{A}} - \nabla V) - \frac{1}{2m} \nabla(\dot{\mathbf{r}}^2)$$

(b) En utilisant la relation $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$, montrer que

$$\nabla(\dot{r}^2) = 2\dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}})$$

(c) En utilisant $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ (qui est vrai même si un des vecteurs est ∇), montrer que

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Puis que

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}})$$

(d) Montrer que

$$\frac{\partial A_i}{\partial r_j} = -\frac{m}{q} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_j}$$

puis que

$$(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{A} = -\frac{m}{q}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}$$

(e) Conclure que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\dot{\mathbf{A}} - \nabla V) + q\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

Puis retrouver l'expression des champs électrique et magnétique à partir des potentiels.

Correction 7.2

1. Par la première équation de Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{r}_i$$

on trouve directement :

$$\dot{r}_i = \frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_i$$

D'où finalement :

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}$$

2. (a) La deuxième équation de Hamilton s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{p}_x = -(m\ddot{x} + q\dot{A}_x)$$

En remarquant que $\mathbf{p} - q\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}}$, il vient que

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial \dot{r}^2}{\partial x} + q \frac{\partial V}{\partial x} = -(m\ddot{x} + q\dot{A}_x)$$

D'où :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\dot{\mathbf{A}} - \nabla V) - \frac{1}{2m} \nabla(\dot{r}^2)$$

(b) En remarquant que $\dot{r}^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, le résultat vient directement.

(c)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) &= (\mathbf{A} \wedge \nabla) \wedge \dot{\mathbf{r}} \\ &= \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Puis en utilisant à nouveau le développement du gradient d'un produit :

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \dot{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

(d) En remarquant que

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{P}}{m} - \frac{q}{m} \mathbf{A}$$

et que

$$\frac{\partial p_i}{\partial r_j} = 0$$

il vient tout de suite que

$$\frac{\partial A_i}{\partial r_j} = -\frac{m}{q} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_j}$$

En écrivant ce que veut dire $(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{A}$ et en remplaçant les dérivées partielles de A_i par celles de \dot{r}_i , on trouve bien

$$(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{A} = -\frac{m}{q} (\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}$$

(e) Par les deux questions précédentes

$$-\frac{1}{2m} \nabla(\dot{\mathbf{r}}^2) = q \dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

l'expression du Hamiltonien est bien celle recherchée.

Ensuite en identifiant

$$m \ddot{\mathbf{r}} = q \mathbf{E} + q \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}$$

on retrouve bien les expressions :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \dot{\mathbf{A}} - \nabla V \\ \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \end{aligned}$$

7.3 Théorème de Poisson

1. Soit f et g deux intégrales premières, c'est à dire deux fonctions représentant une grandeur conservée dans le temps. Montrer que $\{f, g\}$ est également une intégrale première dans le cas où f et g ne dépendent pas explicitement du temps.

Correction 7.3

1. Par la formule (7.29) du cours, une intégrale première, donc une fonction dont la dérivée totale par rapport au temps est nulle, et qui ne dépend pas explicitement du temps est caractérisée de façon univoque par $\{f, \mathcal{H}\} = 0$. Il faut donc montrer que $\{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = 0$. Le résultat est immédiat en utilisant l'identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\}, \mathcal{H}\} + \{\{\mathcal{H}, f\}, g\} + \{\{g, \mathcal{H}\}, f\} = 0$$

Puisque $\{\mathcal{H}, f\} = 0 = \{g, \mathcal{H}\}$ car f et g sont des intégrales premières, il en suit que $\{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = 0$, $\{f, g\}$ est bien une intégrale première.

7.4 Crochet de poisons de fonctions usuelles

Dans tous cet exercice on considère un simple point matériel dans un référentiel Galiléen en coordonnées cartésiennes.

1. Démontrer les relations crochets de Poisson "fondamentaux" de l'équation (7.37) à partir des relations de dérivations par rapport aux coordonnées et aux impulsions (7.35) et (7.36).
2. Calculer $\{L_i, p_j\}$ pour toutes les combinaisons de (i,j) possibles. On rappelle que pour un point matériel le moment cinétique est défini par $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$.

3. Calculer $\{L_i, L_j\}$ pour toutes les combinaisons (i, j) possibles. Ces relations peuvent en réalité servir de définition du moment cinétique : une fonction est un moment cinétique si elle vérifie ces relations. On peut grâce à cela décrire certaines grandeur, comme le spin en mécanique quantique, comme des moment cinétiques bien qu'on ne puisse pas définir de \mathbf{r} ou de \mathbf{p} correspondant.
4. Calculer $\{L_i, p^2\}$ pour tous les i possibles, avec $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$
5. Soit V une fonction scalaire isotrope des paramètres mécaniques du système. L'espace étant isotrope, V ne peut pas dépendre de la direction particulière de \mathbf{r} ou de \mathbf{p} , mais seulement de leur amplitude, et de l'angle relatif entre les deux. Une façon de décrire ça est de dire que V est une fonction de $r^2, p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} : V(r^2, p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$.

Prouver les égalités suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial r_i^2} = \frac{\partial V}{\partial r_j^2} \equiv \frac{\partial V}{\partial r^2} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_i^2} = \frac{\partial V}{\partial p_j^2} \equiv \frac{\partial V}{\partial p^2} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_i p_i} = \frac{\partial V}{\partial r_j p_j} \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \quad (7.3)$$

Développer les dérivées partielles de $V(r^2, p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$ en p_i et q_i en faisant apparaître $\frac{\partial V}{\partial r^2}, \frac{\partial V}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}$.

6. Montrez que $\{L_i, V\} = 0$. Retrouver grâce à cela la conservation du moment cinétique dans un espace isotrope.

Correction 7.4

1. Par (7.35),

$$\{q_i, q_j\} = -\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$$

Par (7.36),

$$\{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$$

Par (7.36),

$$\{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$$

2. On démontrera pour $L_x = yp_z - zp_y$, On peut ensuite obtenir les résultats pour L_y et L_z par permutation circulaire.

$$\{L_x, p_x\} = \frac{\partial L_x}{\partial x} = 0$$

$$\{L_x, p_y\} = \frac{\partial L_x}{\partial y} = p_z$$

$$\{L_x, p_z\} = \frac{\partial L_x}{\partial z} = -p_y$$

3. $\{L_i, L_i\} = 0$, comme pour toute fonction, par anti-symétrie du crochet de poisson. Calculons $\{L_x, L_y\}$:

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\ &= \{yp_z, zp_x\} - \{yp_z, xp_z\} - \{zp_y, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} \end{aligned}$$

Commençons par le premier terme :

$$\begin{aligned}\{yp_z, zp_x\} &= p_x\{yp_z, z\} + z\{yp_z, p_x\} \\ &= -p_x \frac{\partial yp_z}{\partial p_z} + z \frac{\partial yp_z}{\partial x} \\ &= -yp_x\end{aligned}$$

On trouve de même pour les autres termes : $\{yp_z, xp_z\} = 0$, $\{zp_y, zp_x\} = 0$ et $\{zp_y, xp_z\} = xp_y$. D'où finalement :

$$\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = -L_z$$

On trouve de même par permutation circulaire $\{L_y, L_z\} = -L_x$ et $\{L_z, L_x\} = -L_y$.

4. Calculons $\{L_x, p^2\} = \{L_x, p_x^2\} + \{L_x, p_y^2\} + \{L_x, p_z^2\}$:

$$\begin{aligned}\{L_x, p_x^2\} &= 2p_x\{L_x, p_x\} = 0 \\ \{L_x, p_y^2\} &= 2p_y\{L_x, p_y\} = -2p_y p_z \\ \{L_x, p_z^2\} &= 2p_z\{L_x, p_z\} = 2p_y p_z\end{aligned}$$

D'où $\{L_x, p^2\} = 0$, de même pour L_y et L_z .

5. On commence par développer $r^2 = \sum_i r_i^2$, $p^2 = \sum_i p_i^2$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \sum_i r_i p_i$. Puisque V est fonction de la somme des r_i^2 , p_i^2 et $r_i p_i$, alors les égalités demandées viennent directement (si $f(x,y)=f(x+y)$, alors $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y$).

Ensuite, la dérivation d'une fonction composée donne directement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r_i} &= 2r_i \frac{\partial V}{\partial r_i^2} + p_i \frac{\partial V}{\partial p_i r_i} = 2r_i \frac{\partial V}{\partial r^2} + p_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \\ \frac{\partial V}{\partial p_i} &= 2p_i \frac{\partial V}{\partial p_i^2} + r_i \frac{\partial V}{\partial p_i r_i} = 2p_i \frac{\partial V}{\partial p^2} + r_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}\end{aligned}$$

6. Prenons encore une fois L_x :

$$\begin{aligned}\{V, L_x\} &= \{V, yp_z - zp_y\} = \{V, yp_z\} - \{V, zp_y\} \\ &= y\{V, p_z\} + p_z\{V, y\} - z\{V, p_y\} - p_y\{V, z\} \\ &= y \frac{\partial V}{\partial z} - p_z \frac{\partial V}{\partial p_y} - z \frac{\partial V}{\partial y} + p_y \frac{\partial V}{\partial p_z} \\ &= y \left(2z \frac{\partial V}{\partial r^2} + p_z \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \right) - p_z \left(2p_y \frac{\partial V}{\partial p^2} + y \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \right) - z \left(2y \frac{\partial V}{\partial r^2} + p_y \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \right) \\ &\quad + p_y \left(2p_z \frac{\partial V}{\partial p^2} + z \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Or, \mathcal{H} est une fonction scalaire, qui de par la nature isotrope de l'espace ne doit dépendre que de $(r^2, p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$, d'où $\{L_i, \mathcal{H}\} = 0$. Donc \mathbf{L} est bien une intégrale première, le moment cinétique d'une particule dans un potentiel isotrope est conservé.

2PY104 Mécanique avancée

Appendice : Exercices à garder // Non inclus dans le cahier de TD

TD1

A Troisième loi de Kepler

Preliminaire : Dans le cas d'une trajectoire circulaire d'un satellite autour d'une planète, rappeler l'expression de sa période de révolution en fonction du rayon R de sa trajectoire, et des grandeurs d'interactions (masses, constante gravitationnelle...). On pourra supposer que la masse de la planète M est très supérieure à la masse du satellite m .

On donne les rayons et les périodes des orbites de quatre satellites galiléens de Jupiter. La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée ? Quelle est la masse de Jupiter ?

Nom	Rayon de l'orbite en km	Période de révolution en s
Io	422 000	152 853
Europe	671 000	306 014
Ganymède	1 071 000	615 642
Callisto	1 884 000	1 440 032

Correction A

1. L'expression de la période de révolution T en fonction du rayon R de la trajectoire du satellite est (troisième loi de Kepler, $m \ll M$) :

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

où G est la constante de gravitation. Afin de vérifier cette relation dans le cas des satellites de Jupiter, montrons que le rapport R^3/T^2 est constant :

Nom	R (km)	T (s)	R^3/T^2 ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$)
Io	422 000	152 853	$3,22 \times 10^{15}$
Europe	671 000	306 014	$3,23 \times 10^{15}$
Ganymède	1 071 000	615 642	$3,24 \times 10^{15}$
Callisto	1 884 000	1 440 032	$3,22 \times 10^{15}$

Nous trouvons donc que : $\alpha = R^3/T^2 \simeq 3,23 \times 10^{15} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. La masse de Jupiter est donc égale à :

$$M = \frac{4\pi^2\alpha}{G} = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

B Chute d'un satellite

Le maintien d'un satellite de masse m sur son orbite circulaire autour de la Terre nécessite des manœuvres de correction d'orbite consommant des ergols, leur épuisement étant la cause principale de fin de vie du satellite.

1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au satellite, exprimer le rayon r de l'orbite en fonction de la masse de la Terre M_T , de la période de révolution T du satellite et de G . Vérifier la troisième loi de Kepler.
2. Les satellites du programme SPOT croisent à une altitude de 822 km. Quelle est leur vitesse ? leur période de révolution ? Masse de la Terre $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg ; rayon $R_T = 6,37 \times 10^3$ km.
3. Dans le cas général d'un satellite en orbite circulaire de rayon r , déterminer l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique E du satellite uniquement en fonction de r , M_T , G et m .

Pour modéliser les derniers moments de la chute du satellite, on admet qu'il subit une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\frac{C}{2} S \rho v \vec{v}$ où C est une constante, S la surface du satellite et ρ la masse volumique de l'atmosphère environnante. Cette force est très faible : la trajectoire demeure quasi-circulaire pendant une révolution et on admet que la relation entre E et r demeure inchangée.

4. Estimer le travail de la force de frottement pendant une durée dt . En déduire quelle est la variation d'énergie mécanique du système puis la variation dr ($\ll r$) de son orbite et dv ($\ll v$) de sa vitesse pendant une période. N'y a-t-il pas un paradoxe ?
5. Cas du satellite SPOT 4, désorbité été 2013 (masse de 2,76 tonnes ; dimensions 2 m \times 2 m \times 5,6 m ; coefficient balistique $\frac{CS}{m} = 0,016$ S.I.). À 822 km d'altitude, la masse volumique de l'air est égale à 3×10^{-14} kg.m⁻³. Calculer de combien de mètres le satellite chute par jour. Même question à 250 km d'altitude avec $\rho = 6,8 \times 10^{-11}$ kg.m⁻³.

Correction B

1. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Celui-ci n'est soumis qu'à la force gravitationnelle de la Terre \vec{F} (voir la figure 7.1).

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad m \frac{v^2}{r} = \frac{GmM_T}{r^2}$$

où \vec{v} et \vec{a} sont les vecteurs vitesse et accélération du satellite. De plus :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \text{constante}$$

Nous retrouvons la troisième loi de Kepler, à savoir que le rapport $\frac{r^3}{T^2}$ est constant.

2. La vitesse de ces satellites est égale à :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6370 + 822) \times 10^3}} = 7460 \text{ m.s}^{-1}$$

Leur période de révolution est donc :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times (6370 + 822) \times 10^3}{7460} = 6059 \text{ s} = 101 \text{ min}$$

3. L'énergie mécanique du satellite est égale à :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r}$$

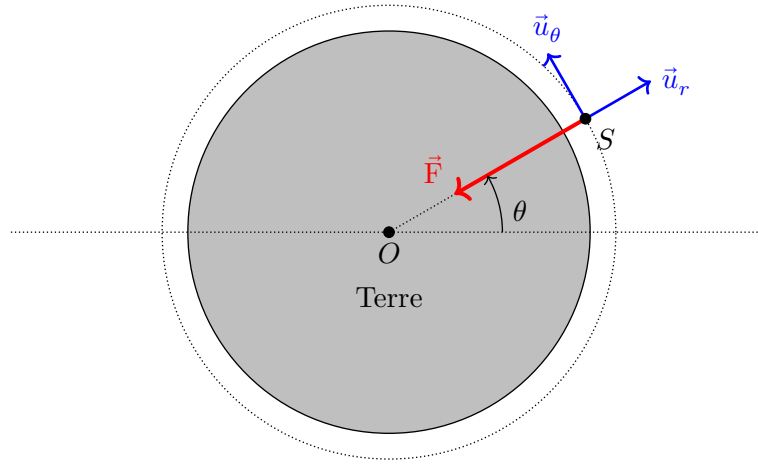


FIGURE 7.1

4. Le travail de la force de frottement pendant une durée dt est égal à :

$$\delta W = \vec{f} \cdot (\vec{v}dt) = -\frac{C}{2} S \rho v^3 dt = dE$$

En supposant que la relation entre E et r demeure inchangée au cours d'une révolution, nous avons :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r} \Rightarrow dE = \frac{1}{2} GmM_T \frac{dr}{r^2}$$

En combinant ces deux expressions, on trouve :

$$dr = -\frac{CS\rho}{GmM_T} r^2 v^2 (vdt) = -\frac{CS\rho}{m} r (vdt)$$

L'orbite étant supposée quasi-circulaire, le rayon de l'orbite du satellite (r) varie très peu pendant une période de révolution (T). On a donc :

$$dr = -\frac{CS\rho}{m} r (vT) = -\frac{2\pi CS\rho}{m} r^2$$

Nous pouvons enfin déterminer dv :

$$v^2 = \frac{GM_T}{r} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dr}{r} = +\frac{\pi CS\rho}{m} r$$

La vitesse du satellite augmente malgré les frottements. L'énergie mécanique diminue ($dE < 0$), mais moins que l'énergie potentielle, il y a donc une augmentation de l'énergie cinétique du satellite.

5. À 822 km d'altitude, on trouve :

$$|dr| = 2\pi\rho \frac{CS}{m} r^2 = 2 \times \pi \times 3 \times 10^{-14} \times 0,016 \times (6370 + 822)^2 \times 10^6 = 0,156 \text{ m/révolution}$$

La période de révolution étant de 101 minutes à cette altitude, le satellite chute de 2,22 m par jour.

À 250 km d'altitude, on trouve :

$$|dr| = 2 \times \pi \times 6,8 \times 10^{-11} \times 0,016 \times (6370 + 250)^2 \times 10^6 = 300 \text{ m/révolution}$$

La période de révolution à cette altitude est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6370 + 250)^3 \times 10^9}{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}} = 5350 \text{ s} = 89 \text{ min}$$

Le satellite chute donc de 4850 m par jour.

C Formules de Binet et première loi de Kepler

Nous avons vu en cours que l'équation en polaire de la trajectoire du problème de Kepler est une section de conique de la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (7.4)$$

où on a introduit les paramètres p :

$$p = \frac{L^2}{\mu \alpha} \quad (7.5)$$

et l'excentricité e de l'orbite :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}} \quad (7.6)$$

Si on remplace $u = r^{-1}$ dans (7.4), on observe que u est une fonction simple de θ . Le but de cet exercice est donc de redémontrer plus facilement la première loi de Kepler en utilisant u à la place de r .

1. Dans le cadre général d'un problème à force centrale, démontrer les formules de Binet, à savoir que les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent :

$$\vec{v} = C \left(u \vec{u}_\theta - \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r \right) \quad \text{et} \quad \vec{a} = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{u}_r \quad (7.7)$$

où vous exprimez C en fonction des constantes du problème.

2. Appliquer ces formules (7.7) au problème de Kepler pour retrouver l'équation de la trajectoire (7.4) et la paramétrisation (7.5).
3. En utilisant vos résultats des deux questions précédentes, retrouver que la nature de la trajectoire dépend bien uniquement du signe de l'énergie mécanique totale du système, à savoir la paramétrisation (7.6).

Correction C

1. La conservation du moment cinétique donne $\dot{\theta} = Cu^2$ avec $C = L/\mu$. D'où successivement $\dot{u} = Cu^2 \frac{du}{d\theta}$, $\dot{r} = -C \frac{du}{d\theta}$, $r\dot{\theta} = Cu$ et les résultats demandés.
2. Le principe fondamentale de la dynamique donne avec (7.7) :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\alpha}{\mu C^2} \quad (7.8)$$

dont on vérifie que (7.4) est bien la solution avec $p = \frac{\mu C^2}{\alpha}$ soit (7.5).

3. $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - \alpha u$. En y insérant la trajectoire (7.4), on trouve $E = \frac{\mu \alpha^2}{2p} (e^2 - 1)$ soit (7.6).

D Vecteur de Laplace-Runge-Lenz et première loi de Kepler

Le problème de Kepler se distingue aussi par l'existence d'autres constantes vectorielles du mouvement que le moment angulaire \vec{L} .

1. Dans le cadre général d'un problème à force centrale $\dot{\vec{p}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$, montrer que :

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \wedge \vec{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (7.9)$$

On pourra utiliser/redémontrer la formule de Gibbs du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (7.10)$$

2. En déduire pour le problème de Kepler, *i.e.* pour $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$, que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz donné par :

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - \mu\alpha \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.11)$$

est bien une constante du mouvement.

3. Montrer que \vec{A} est dans le plan de l'orbite.
 4. Tracer schématiquement \vec{p} , $\vec{p} \wedge \vec{L}$, $\mu\alpha \frac{\vec{r}}{r}$ et \vec{A} au périhélie, aphélie et en un point quelconque d'une orbite elliptique. Quelle est la signification physique de $\vec{A} = \text{cste}$?
 5. Déduire de $\vec{A} \cdot \vec{r}$ la première loi de Kepler (7.4) et (7.5). Comment s'écrit l'excentricité e en fonction de A , la norme de \vec{A} ?
 6. Calculer directement A^2 à partir de (7.11). On pourra pour ce faire utiliser/redémontrer l'identité de Lagrange :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad (7.12)$$

En faisant apparaître E dans l'expression obtenue, montrer que l'on retrouve bien encore (7.6).

Correction D

1. Comme \vec{L} est une constante,

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \wedge \vec{L}) = \dot{\vec{p}} \wedge \vec{L} = +\mu \frac{f(r)}{r} [\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}})] \quad (7.13)$$

(7.10) donne $\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \dot{r}\vec{r} - r^2\ddot{\vec{r}}$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}$ d'où le résultat.

2. direct
 3. $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$
 4. $\vec{A} = \text{cste}$ implique qu'il n'y pas de précession de l'axe de l'orbite.

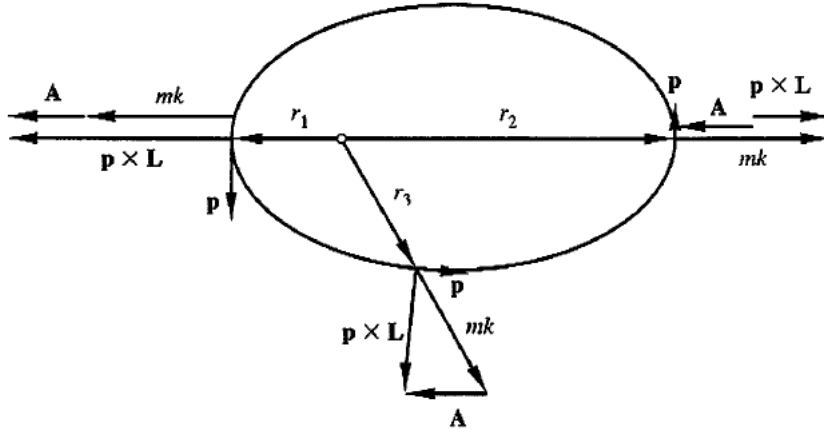


FIGURE 3.18 The vectors \vec{p} , \vec{L} , and \vec{A} at three positions in a Keplerian orbit. At perihelion (extreme left) $|\vec{p} \times \vec{L}| = mk(1+e)$ and at aphelion (extreme right) $|\vec{p} \times \vec{L}| = mk(1-e)$. The vector \vec{A} always points in the same direction with a magnitude mke .

5. $\vec{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}) = L^2$ d'où $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta = L^2 - \mu\alpha r$ d'où

$$r = \frac{L^2}{\mu\alpha + A \cos \theta} \quad (7.14)$$

on retrouve (7.4) avec toujours (7.5) et $e = \frac{A}{\mu\alpha}$.

6. On a

$$A^2 = (\vec{p} \wedge \vec{L})^2 + \mu^2 \alpha^2 - 2\mu\alpha \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}) .$$

L'équation (7.12) donne

$$\|\vec{p} \wedge \vec{L}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 \|\vec{L}\|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{L})^2 = p^2 L^2 - 0$$

d'où

$$A^2 = \mu^2 \alpha^2 + L^2 (p^2 - \frac{2\mu\alpha}{r}) = \mu^2 \alpha^2 + 2\mu L^2 E.$$

Le résultat en découle.

E Théorème de Bertrand (d'après Goldstein)

Dans cet exercice, plus difficile, nous allons redémontrer le théorème de Bertrand. Celui-ci établit que pour tout mouvement à force centrale, seules les lois de force de Hooke en $-\alpha r$ (type ressort) et de Newton (ou de Coulomb) en $-\frac{\alpha}{r^2}$ donnent des trajectoires fermées.

1. En partant des formules de Binet (7.7), montrer que pour une force centrale $f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ on a :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \quad (7.15)$$

On définit la fonction J comme

$$J(u) = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \quad (7.16)$$

2. En utilisant la définition de J , montrer que :

$$J(u) = -\frac{\mu}{L^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (7.17)$$

3. Pour un mouvement circulaire, on a donc $J(u) = u$ soit $J'(u) = 1$ et les dérivées suivantes nulles. En déduire que la condition pour son rayon $r_0 = u_0^{-1}$ s'écrit :

$$u_0 = -\frac{\mu}{L^2 u_0^2} f\left(\frac{1}{u_0}\right) \quad (7.18)$$

4. On s'intéresse maintenant aux petites perturbations autour d'une orbite circulaire. Pour cela, on pose $\eta = u - u_0$ et on développe la fonction J au voisinage de la trajectoire circulaire, soit

$$J(u) \simeq J(u_0) + \eta J'(u_0) + \frac{\eta^2}{2} J''(u_0) + \frac{\eta^3}{6} J'''(u_0) + \dots \quad (7.19)$$

Montrer que, au première ordre en η , la perturbation à la trajectoire circulaire satisfait à :

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} + \beta^2 \eta = 0 \quad (7.20)$$

On exprimera β^2 en fonction de $J'(u_0)$. En déduire qu'elle est stable (ne diverge pas) pour $J'(u_0) < 1$ et qu'elle est harmonique, c'est-à-dire qu'elle s'écrit :

$$\eta(\theta) = h \cos(\beta\theta + \varphi) \quad (7.21)$$

où h et φ sont deux constantes d'intégration et h "petit" (perturbation). On en déduit que β est nécessairement un nombre rationnel pour avoir une orbite fermée.

5. En déduire que :

$$3 - \beta^2 = \frac{u_0}{f\left(\frac{1}{u_0}\right)} \left(\frac{df\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \right)_{u=u_0} \quad (7.22)$$

6. Cette relation devant être valable pour tout rayon u_0 et β étant rationnel, on en déduit que β doit être constant. On peut donc remplacer dans cette dernière relation u_0 par u . En déduire que les seules lois de force permettant une trajectoire fermée doivent satisfaire à l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dr} = (\beta^2 - 3) \frac{f}{r} \quad (7.23)$$

7. Montrer que les seuls potentiels possibles s'écrivent donc

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^{3-\beta^2}} \quad (7.24)$$

où α est une constante d'intégration. Il s'agit donc uniquement de loi de puissance en r .

8. En déduire l'expression de $J''(u_0)$ et de $J'''(u_0)$ en fonction de β et u_0 .

9. On s'intéresse maintenant à de plus grandes déviations à la circularité. On ne peut donc plus négliger les termes d'ordres supérieurs dans le développement de J . Pour résoudre

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \beta^2\eta = \frac{\eta^2}{2}J''(u_0) + \frac{\eta^3}{6}J'''(u_0) \quad (7.25)$$

on va chercher la déviation à la circularité η à partir de son développement en série de Fourier :

$$\eta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos(n\beta\theta) \quad (7.26)$$

En comparant à (7.21), on s'attend à ce que $h_1 \gg h_0 \sim h_2 \gg h_3$ et que les termes suivants soient encore plus petits. On va montrer en effet que h_0 et h_2 sont d'ordre h_1^2 et h_3 est d'ordre h_1^3 . Pour simplifier, on pose donc :

$$\eta(\theta) = \gamma_0 h^2 + h \cos \beta\theta + \gamma_2 h^2 \cos 2\beta\theta + \gamma_3 h^3 \cos 3\beta\theta + O(h^4) \quad (7.27)$$

avec les $\gamma_i \ll 1$. Montrer que :

$$\eta^2 = \frac{h^2}{2} + \left(\frac{1}{2} + 2\gamma_0 h + \gamma_2 h\right) h^2 \cos \beta\theta + \frac{h^2}{2} \cos 2\beta\theta + \gamma_2 h^3 \cos 3\beta\theta + O(h^4) \quad (7.28)$$

$$\eta^3 = \frac{3h^3}{4} \cos \beta\theta + \frac{h^3}{4} \cos 3\beta\theta + O(h^4) \quad (7.29)$$

et

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \beta^2\eta = \gamma_0 h^2 \beta^2 - 3\gamma_2 h^2 \beta^2 \cos 2\beta\theta - 8\gamma_3 h^3 \beta^2 \cos 3\beta\theta + O(h^4) \quad (7.30)$$

10. Ces relations étant valables pour tout $\beta\theta$, on peut dans (7.25) évaluer à droite et gauche chacun des termes en $\cos n\beta\theta$. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer qu'on a bien :

$$\gamma_0 = \frac{J''(u_0)}{4\beta^2} \quad (7.31)$$

$$\gamma_2 = -\frac{J''(u_0)}{12\beta^2} \quad (7.32)$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{8\beta^2} \left(\gamma_2 \frac{J''(u_0)}{2} + \frac{J'''(u_0)}{24} \right) \quad (7.33)$$

et finalement montrer que :

$$0 = (2\gamma_0 + \gamma_2) \frac{J''(u_0)}{2} + \frac{3}{4} \frac{J'''(u_0)}{6} \quad (7.34)$$

11. Utiliser les résultats de la question précédente pour montrer que pour qu'une trajectoire soit fermée il faut que :

$$5J''^2(u_0) + 3\beta^2 J'''(u_0) = 0 \quad (7.35)$$

12. En y insérant les résultats de la question (8), conclure.

Correction E

1. le PFD s'écrit $\mu \vec{a} = -\mu C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{u}_r = -\frac{dV(\frac{1}{u})}{dr} \vec{u}_r = -u^2 \frac{dV(\frac{1}{u})}{du} \vec{u}_r$

2. On a

$$\frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{du} = -\frac{1}{u^2}f\left(\frac{1}{u}\right),$$

d'où le résultat.

3. Pour un mouvement circulaire $\frac{du}{d\theta} = 0$ d'où le résultat.

4. Immédiat comme $u_0 = J(u_0)$ avec $\beta^2 = 1 - J'(u_0)$. L'équation (7.20) admet des solutions bornées pour $\beta^2 > 0$.

5.

$$J'(u) = -\frac{\mu}{L^2} \left(-\frac{2}{u^3}f\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u^2} \frac{df\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \right).$$

En y insérant (7.18) on obtient le résultat demandé.

6. $du/u = -dr/r$ d'où le résultat.

7. il suffit de vérifier que (7.24) est bien solution.

8. De (7.24) on déduit que $J(u) = \frac{\mu\alpha}{L^2}u^{1-\beta^2}$. Ce qui donne $u_0^{\beta^2} = \frac{\mu\alpha}{L^2}$.

De $J'(u) = (1 - \beta^2) \frac{\mu\alpha}{L^2}u^{-\beta^2}$, on déduit $J'(u_0) = (1 - \beta^2)$.

De $J''(u) = -\beta^2(1 - \beta^2) \frac{\mu\alpha}{L^2}u^{-\beta^2-1}$, on déduit $J''(u_0) = -\frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0}$.

De $J'''(u) = \beta^2(1 - \beta^2)(1 + \beta^2) \frac{\mu\alpha}{L^2}u^{-\beta^2-2}$, on déduit $J'''(u_0) = \frac{\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2}$.

9. $\eta^2 = h^2 \cos^2 \beta \theta + 2h^3 \cos \beta \theta (\gamma_0 + \gamma_2 \cos 3\beta \theta + O(h^4))$

$\eta^3 = h^3 \cos^3 \beta \theta + O(h^4)$ et on utilise $\cos(nx) \cos(mx) = (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)/2$.

La dernière équation se trouve simplement via :

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = -h\beta^2 \cos \beta \theta - \gamma_2 h^2 (2\beta)^2 \cos 2\beta \theta - \gamma_3 h^3 (3\beta)^2 \cos 3\beta \theta + O(h^4).$$

10. terme constant du développement de Fourier : $\gamma_0 h^2 \beta^2 = \frac{h^2}{2} \frac{J''(u_0)}{2}$

terme en $\cos 2\beta \theta$: $-3\beta^2 \gamma_2 h^2 = \frac{h^2}{2} \frac{J''(u_0)}{2}$

terme en $\cos 3\beta \theta$: $-8\beta^2 \gamma_3 h^3 = \gamma_2 h^3 \frac{J''(u_0)}{2} + \frac{h^3}{4} \frac{J'''(u_0)}{6}$

finalement terme en $\cos \beta \theta$: $0 = (2\gamma_0 h + \gamma_2) h^3 \frac{J''(u_0)}{2} + \frac{3h^3}{4} \frac{J'''(u_0)}{6}$

11. il suffit de remplacer dans la dernière ligne les expressions trouvées pour γ_0 et γ_2 .

12. L'équation (7.35) donne $3\beta^4(1 - \beta^2)(1 + \beta^2) + 5\beta^4(1 - \beta^2)^2 = 2\beta^4(1 - \beta^2)(4 - \beta^2)$. En dehors de $\beta = 0$ (orbite circulaire), les seules trajectoires fermées possibles sont pour $\beta = 1$ est $\beta = 2$. Soit pour les lois de force de Hooke et de Kepler/Coulomb.

TD2

F Choc à deux dimensions élastique

Une particule (1) de masse m_1 est animée d'une vitesse \vec{v}_1 dans le référentiel du laboratoire. Elle heurte une particule cible (2), immobile dans ce référentiel de masse m_2 . On désigne par \vec{v}_2' et \vec{v}_1' les vitesses des deux particules après le choc et on pose $\theta_1 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2')$. L'angle θ_1 est l'angle de diffusion de la particule (1). C'est une donnée expérimentale qui joue le rôle de paramètre.

1. 4.1 Déterminer l'équation du second degré permettant de déterminer le module v_1' de \vec{v}_1' en fonction de v_1 , des masses m_1 et m_2 et de θ_1 .
2. 4.2 Expliciter v_1' pour $\theta_1 = 0$ et interpréter les résultats obtenus.

Correction F

1. correction 4.1
 2. correction 4.2
-

G Rebond d'une balle élastique

Une balle élastique de masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h_0 au-dessus du sol. Le choc de la balle est caractérisé par un coefficient de restitution e .

1. 5.1 Exprimer la hauteur h_1 du premier rebond. Application numérique : $h_0 = 1$ m et $e = 0.8$

Correction G

1. correction 5.1
-

H Spectrométrie neutronique :

On considère un faisceau de neutrons dont on veut déterminer l'énergie cinétique à partir de l'étude cinématique (en cinématique classique) du choc élastique (diffusion élastique) sur des noyaux d'hélium ou d'hydrogène. Le noyau cible (hélium ou hydrogène) est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On notera :

- m la masse du neutron et M la masse du noyau cible,
- E_{c0} , \vec{p}_0 , E_{c1} , \vec{p}_1 et E_{c2} , \vec{p}_2 , l'énergie cinétique et la quantité de mouvement respectivement du neutron incident, du neutron diffusé et du noyau cible après le choc,
- θ_1 l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{p}_0 et θ_2 l'angle entre \vec{p}_2 et \vec{p}_0 . Ces angles sont compris entre 0 et π .

1. 7.1 Montrer que l'énergie cinétique transférée au noyau cible s'écrit :

$$E_{c2} = E_{c0} \frac{4Mm}{(M+m)^2} \cos^2 \theta_2 \quad (7.36)$$

2. 7.2 Les noyaux cibles étant connus, montrer que la mesure de E_{c2} et de θ_2 permet d'obtenir la valeur de l'énergie cinétique E_{c0} des neutrons incidents.
3. 7.3 On considère le cas $M > m$: A partir des lois de conservations, montrer que $\theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Correction H

1. correction 7.1
 2. correction 7.2
 3. correction 7.3
-

TD3

TD4

TD5

TD6

I Le billard

Une boule homogène de centre G , de masse $m = 209$ g et de diamètre $2a = 61,5$ mm, se déplace sur un tapis de billard modélisé par un plan horizontal, fixe dans un référentiel galiléen muni du repère $(O; x, y, z)$ représenté sur la figure. Le contact entre la boule et le tapis est ponctuel et il existe un coefficient de frottement $\mu = 0,2$ supposé constant entre la boule et le tapis.

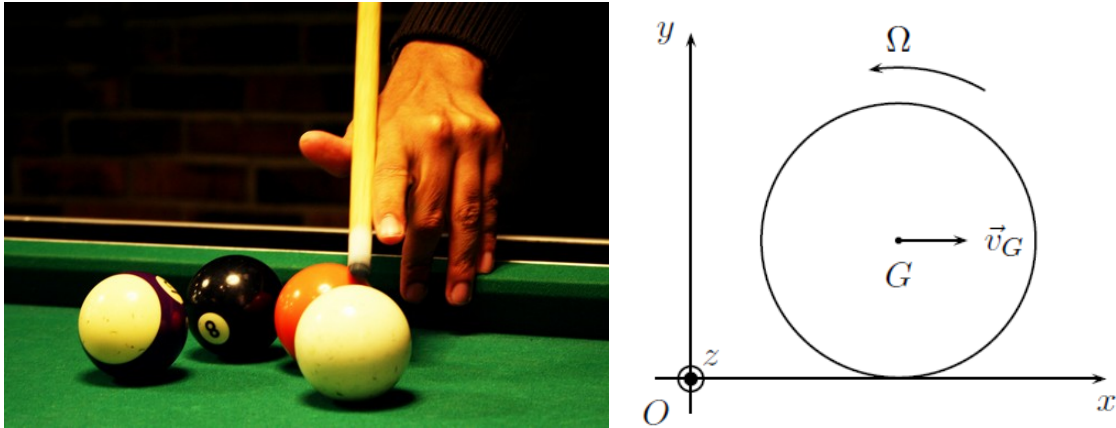


FIGURE 7.2 : La physique nous permettra-t-elle de comprendre comment bien jouer au billard ?

Dans un premier temps, on suppose que la boule est lancée avec une vitesse angulaire initiale $\vec{\Omega}(t=0) = \Omega_0 \vec{e}_z$ et une vitesse initiale $\vec{v}_G(t=0) = v_0 \vec{e}_x$, avec $\Omega_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

1. Calculer la vitesse du point de contact I de la boule sur le tapis. Montrer que la boule glisse à l'instant $t = 0$ et préciser le sens de la vitesse de glissement. En déduire l'orientation de la composante tangentielle de la réaction du tapis sur la boule.

On fait l'hypothèse (raisonnable) que le glissement perdure pour $t > 0$. Soit $\vec{v}_G(t)$ la vitesse de G et $\vec{\Omega}(t)$ la vitesse angulaire de la boule.

1. Appliquer les théorèmes généraux de la mécanique à la boule, après avoir rappelé l'expression du moment d'inertie J de la boule par rapport à un axe passant par son centre. En déduire que la vitesse et la vitesse angulaire conservent leurs directions initiales, puis les deux équations différentielles portant sur $v_G(t)$ et $\Omega(t)$.
2. Intégrer ces deux équations et montrer que la vitesse de glissement de la boule $v_I(t)$ est égale à $v_I(t) = v_0 + a\Omega_0 - \frac{7}{2}\mu gt$.
3. En déduire à quel moment le glissement cesse. Calculer la vitesse et la vitesse angulaire de la boule à cet instant précis. Calculer la distance parcourue. A.N. : $v_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$; $\Omega_0 = 3 \text{ tour.s}^{-1}$.
4. Étudier le mouvement de la boule au-delà de ce moment.
5. À quelle condition sur v_0 , Ω_0 et a la boule peut revenir en arrière ? A.N. : estimer la vitesse de la boule si $\Omega_0 = 10 \text{ tour.s}^{-1}$ puis $\Omega_0 = 30 \text{ tour.s}^{-1}$.

On regarde désormais le cas plus général d'une bille qui débute son mouvement en glissant : $\vec{v}_I(t=0) \neq \vec{0}$.

1. À partir de la formule de Varignon (qui relie \vec{v}_G et \vec{v}_I), calculer $m \frac{d\vec{v}_I(t)}{dt}$ en fonction de la composante tangentielle de la réaction.
2. En déduire que $\vec{v}_I(t)$ conserve une direction constante \vec{i} pendant la phase de glissement, puis $v_I(t)$.

3. En déduire à quel moment le glissement cesse.
4. Exprimer $\vec{v}_G(t)$ en fonction de $\vec{v}_G(0)$, μ , g , t et \vec{i} .
5. En déduire que la boule suit une trajectoire parabolique.
6. Étudier $\Omega(t)$.

Pour mettre en mouvement la boule, on la frappe intensément mais brièvement avec la queue horizontale en un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) par rapport à G ($x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$). On note $\vec{\Pi} = \int \vec{F} dt = \Pi_x \vec{e}_x + \Pi_z \vec{e}_z$ la percussion de la force.

1. En appliquant les théorèmes généraux, calculer $\vec{\Omega}(t=0)$ et $\vec{v}_G(t=0)$.
2. Montrer qu'on peut éviter de faire glisser la boule.
3. En déduire la hauteur de la bande de la table de billard.
4. Peut-on réaliser l'effet rétro avec ce coup ? (On prendra $z_0 = 0$.)
5. Où frapper pour que la bille accélère en roulant ?

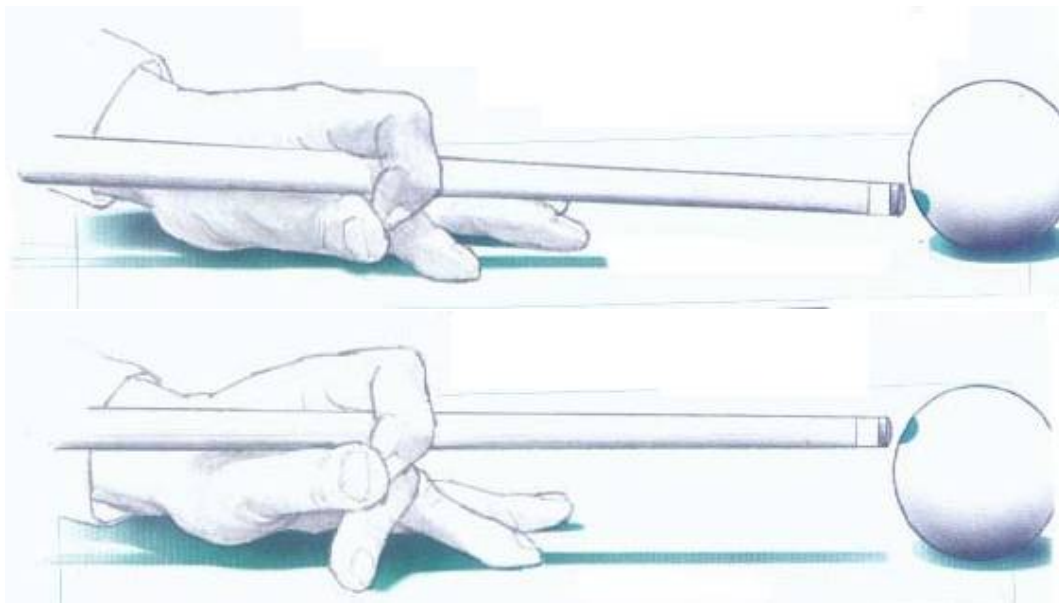


FIGURE 7.3 : Carreau, coulé, massé, piqué ou rétro ?

TD7