Table des matières

Chapitre 1

Signal et bruit

1.1 Conventions, définitions

1.1.1 Transformée de Fourier

On prend la définition "du physicien". Soit $s(t)$ un signal, alors ;

$$\tilde{s}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.1}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}_1(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{1.2}$$

On peut également choisir la convention :

$$\tilde{s}_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i2\pi\nu t}dt \tag{1.3}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}_2(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu \tag{1.4}$$

Et dans ce cas là tu as simplement $\tilde{s}_1(\omega) = \tilde{s}_2(2\pi\nu)$. Par contre les $\sqrt{2\pi}$ on oublie.

Dans tous les cas, ton spectre à pour dimension $[\tilde{s}] = [s] \cdot [Hz]^{-1}$

1.1.2 Propriétés de la TF

— Translation :

$$\tilde{f}(t-\tau)[\omega] = e^{-i\omega\tau}\tilde{f}(t)[\omega] \tag{1.5}$$

— Scaling :

$$\tilde{f}(a \cdot t)[\omega] = \frac{1}{|a|}\tilde{f}(t)[\frac{\omega}{a}] \tag{1.6}$$

En particulier, $\tilde{f}(-t)[\omega] = \tilde{f}(t)[-\omega]$. C'est la "time reversibility"

— f réelle $\implies$ $\tilde{f}$ Hermitienne, soit $\tilde{f}^*(\omega) = \tilde{f}(-\omega)$

— Inversement, si f est hermitienne (donc paire pour une fonction réelle), $\tilde{f}$ est réelle.

— Convolution :

$$TF[(f * g)(\tau](\omega) = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega) \tag{1.7}$$

— Auto-corrélation :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ff}(\omega) &= TF[(f(t) * f^*(-t))] \\ &= TF[f(t)] \cdot TF[f^*(-t)] \\ &= TF[f(t)] \cdot TF[f(t)]^* \\ &= |\tilde{f}(\omega)|^2\end{aligned}$$

1.1.3 Transformée de Fourier tronquée

L'infini c'est long, surtout dans le négatif. Donc expérimentalement on va plutôt utiliser la TF tronquée :

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t)e^{-i\omega t} dt \tag{1.8}$$

1.1.4 Transformée de Fourier discrète

1.1.5 Produit de convolution

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt \tag{1.9}$$

1.1.6 Fonction d'auto-corrélation

La fonction d'auto-corrélation d'un signal est définie comme :

$$R_{ss}(t_1, t_2) = \langle s(t_1)s^*(t_2)\rangle \tag{1.10}$$

où $\langle ... \rangle$ représente a priori une moyenne d'ensemble. Mais nous on aime bien les processus Markovien, donc R_{ss} n'est plus fonction que de $\tau = |t_1 - t_2|$. En plus de ça, on fait une petite hypothèse ergodique est la moyenne d'ensemble devient une moyenne temporelle, et on oublie au passage le facteur de normalisation Alors :

$$R_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t - \tau) = (s(t) * s^*(-t))(\tau) \tag{1.11}$$

Si jamais ton signal est réel, la fonction d'auto-corrélation est paire, donc $R_{ss}(\tau) = R_{ss}(-\tau)$. Si ton signal est complexe c'est un peu plus chiant.

La **Fonction d'auto-covariance** c'est simplement la fonction d'auto-corrélation à la quelle tu soustrais $\langle s(t)\rangle^2$.

1.1.7 Densité spectrale de puissance

On peut définir proprement la DSP à partir de la TF tronquée :

$$S_{ss}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \langle|\hat{s}(\omega)|^2\rangle \tag{1.12}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\langle|\hat{s}(\omega)|^2\rangle &= \langle\hat{s}(\omega)\hat{s^*}(\omega)\rangle \\
&= \langle\frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-i\omega t}dt\int_0^T s^*(t')e^{i\omega t'}dt'\rangle \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \langle s(t)s^*(t')\rangle e^{i\omega(t-t')}dt\,dt'
\end{aligned}$$

Et donc tu vois que, en posant $\tau = t - t'$ et en bidouillant un peu les bornes d'intégrations, tu te retrouves avec :

$$S_{ss}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \tilde{R}_{ss}(\omega) = |\tilde{s}(\omega)|^2 \tag{1.13}$$

La densité spectrale de puissance est la TF de la fonction d'auto-corrélation (pour un processus Markovien). C'est le théorème de **Wiener–Khinchin**.

La version plus sale c'est d'écrire la DSP comme :

$$\langle\tilde{s}(\omega)\tilde{s}^*(\omega')\rangle = S_{ss}(\omega)2\pi\delta(\omega-\omega') \tag{1.14}$$

1.2 Résolution d'un Michelson

Michelson mais ça marche pour toutes les interférences à deux ondes (Ramsay entre autre).

1.2.1 Réponse spectrale

On va commencer par la réponse spectrale d'un Micheslon, c'est à dire le rapport des densités spectrales de puissance en entrée ($I_{in}(\omega)$) et en sortie ($I_{out}(\omega)$) de l'interféromètre. On note A les amplitudes correspondantes, et τ le retard dans l'interféromètre. Alors :

$$I_{in}(\omega) = \tilde{A}_{in}(\omega)\tilde{A}^*_{in}(\omega) = |\tilde{A}_{in}(\omega)|^2 = |TF[A_{in}(t)](\omega)|^2 \tag{1.15}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{out}(\omega) &= |TF[A_{out}(t)](\omega)|^2 \\
&= |TF[\frac{1}{2}(A_{in}(t)+A_{in}(t-\tau)](\omega)|^2 \\
&= \left|TF[(A_{in}(t)](\omega)\left(\frac{1+e^{i\omega\tau}}{2}\right)\right|^2 \\
&= I_{in}(\omega)\left(\frac{1+e^{i\omega\tau}}{2}\right)^2 \\
&= I_{in}(\omega)\left(\frac{1+\cos\omega t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : le 1/2 dans le $A_{out}(t)$ vient du fait que tu as deux séparatrices, qui ajoutent $1/\sqrt{2}$ chacune.

On trouve donc l'intervalle spectral libre :

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{(2)l}{c} \tag{1.16}$$

En résonnant maintenant en nombre de particules (photon ou autre), en supposant que le flux incident comporte N particules et le flux sortant (flux transmis, ou nombre d'atomes excités dans le cas de Ramsay) est N_e, on a tout simplement

$$N_e = N\left(\frac{1+\cos\Phi}{2}\right) \tag{1.17}$$

Avec Φ le déphasage entre les deux voies.

1.2.2 Pouvoir de résolution

On va maintenant considérer que N_e est une variable aléatoire, chaque particule ayant une chance $p_e = \dfrac{1+\cos\Phi}{2}$ de passer. On a donc :

$$\langle N_e \rangle = N\left(\frac{1+\cos\Phi}{2}\right) \tag{1.18}$$

$$\Delta^2 N_e = N(p_e)(1-p_e) = N\frac{\sin^2\Phi}{4} \tag{1.19}$$

$$\Delta N_e = \sqrt{N}\frac{|\sin\Phi|}{2} \tag{1.20}$$

Maintenant pour s'intéresser au pouvoir de résolution, on va considérer un résultat N_{e1} de N particules à ω (où Δ pour un Ramsay) et un autre résultat N_{e2} de N particules à $\omega + \delta\omega$. Pour pouvoir distinguer le résultat entre les deux pulsations, il faut que la différence des valeurs moyennes soit plus grande que ($\sqrt{2}$ fois) l'écart type du résultat. ($\sqrt{2}$ car il y a deux variables aléatoires dont tu fais la différence, donc tu sommes les variances, un peu comme une mesure à la règle. Mais en vrai c'est du chipotage). D'où :

$$\langle N_e(\omega+\delta\omega)\rangle - \langle N_e(\omega)\rangle \approx -N\tau\frac{\sin\omega\tau}{2} \geq \sqrt{2N}\frac{\sin\omega\tau}{2} \tag{1.21}$$

D'où finalement

$$\delta\omega \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}\tau} \tag{1.22}$$

On constate que le pouvoir de résolution d'un Michelson ne dépend pas de la phase : Le signal et le bruit sont tous les deux plus importants quand ta phase vaut $\pi/2$

On remarque également qu'on a une limite en $1/\tau$, qui vient de la transformée de Fourier / Heisenberg temps/énergie, et en $1/\sqrt{N}$, qui est la limite "classique" pour tout processus stochastique à N particules. En utilisant des états quantiques à N particules (intriquées donc) on peut idéalement monter à des résolutions en $1/N$.