## 3. éq diff. lin. du 2nd ordre à coeff const

### *Ex. 3.1* *Sans* second membre

1) Passage de $C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2$ , à $e^{\alpha x}(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x))$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

2) Résoudre

a) $y''-6y'+9y=0$ ; déterminer la sol tq : $y(0)=0$ et $y(1)=e^3$

b) $y''-2y'+5y=0$

c) $2y''-5y'+3y=0$

3) Résoudre

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=0$ , $\omega_0\in\mathbb{R}^{+*}$ . Reconnaissez-vous cette ED ?

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\omega^2y=0$ , $\omega\in\mathbb{R}^{+*}$

### *Ex. 3.2* *Avec* second membre « simple »

1) Résoudre

a) $y''+y=x^3$

b) $y''-y'=x$

c) $y''-y'=\cos x$

d) $y''-y'=x+\cos x+e^{-2x}$

## 3. éq diff. lin. du 2nd ordre à coeff const

***Ex. 3.1*** Second ordre sans second membre

1) Passage de $C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2$ à $e^{\alpha x}(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x))$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

***Cours*** : $a\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+cy=0$

Si $\Delta=b^2-4ac<0$ alors

$$y(x)=C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2, \text{ et } p_{1,2}=\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha}\pm\underbrace{i\sqrt{-\Delta}}_{i\omega}$$

$$=C_1e^{(\alpha+i\omega)x}+C_2e^{(\alpha-i\omega)x}=e^{\alpha x}\left[C_1e^{i\omega x}+C_2e^{-i\omega x}\right]$$

$$=e^{\alpha x}\left[C_1(\cos(\omega x)+i\sin(\omega x))+C_2(\cos(\omega x)-i\sin(\omega x))\right]$$

$$=e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2)\cos(\omega x)+i(C_1-C_2)\sin(\omega x)\right]$$

$$\text{et } \begin{cases}C_1+C_2=\lambda\in\mathbb{R}\\ i(C_1+C_2)=\mu\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{C_1=C_2^*}$$

2) Résoudre

a) $y''-6y'+9y=0$ ; dét.la sol tq : $y(0)=0$ et $y(1)=e^3$

• Le poly caract associé est : $p^2-6p+9=0$

$\Delta=36-4\cdot9=0\Rightarrow$ il admet une racine dble : $p=\dfrac{6}{2}=3$

Donc la sol géné de (a) est : $y(x)=\left(\lambda x+\mu\right)e^{3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ y(0)=0\Rightarrow\mu=0\\ y(1)=e^3\Rightarrow\lambda e^3=e^3\Leftrightarrow\lambda=1\end{array}\right\}\ \boxed{y(x)=xe^{3x}}$$

b) $y''-2y'+5y=0$

• Le poly caract associé est : $p^2-2p+5=0$

$\Delta=4-20=-16<0$

$\Rightarrow$ il admet deux racines $\mathbb{CC}$ : $p_{1,2}=\dfrac{2\pm i4}{2}=1\pm i2$

Donc la sol géné de (b) est :

$$\boxed{\begin{aligned}y(x)&=e^x(\lambda\cos2x+\mu\sin2x)\ ,\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\\ &=C_1e^{(1+i2)x}+C_2e^{(1-i2)x}\ ,\text{ où }(C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2\end{aligned}}$$

c) $2y''-5y'+3y=0$

• Le poly caract associé est : $2p^2-5p+3=0$

$\Delta=25-4\cdot2\cdot3=1>0$

$\Rightarrow$ il admet deux racines simples : $p_{1,2}=\dfrac{5\pm1}{4}=1$ ou $3/2$

Donc la sol gén de (c) est : $\boxed{y(x)=\lambda e^x+\mu e^{3x/2}\ ,\text{ où }(\lambda,\mu)}$

3) Résoudre .... a) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=0$ , $\omega_0\in\mathbb{R}^{+*}$

• Le poly caract associé est : $p^2+\omega_0^2=0\Rightarrow p=\pm i\omega_0$

(2 racines im pures $\mathbb{C}$ conj)

(ici $\Delta<0$, mais son calcul est inutile !)

Donc la sol géné de (a) est :

$$\begin{aligned}y(t)&=C_1e^{i\omega_0t}+C_2e^{-i\omega_0t} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2\\ &=\lambda\cos(\omega_0t)+\mu\sin(\omega_0t) \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ (2)\\ &=L\cos(\omega_0t+\varphi) \text{ où } L>0,\ \varphi\in\mathbb{R}\ (3)\\ &\ldots\end{aligned}$$

*{ éventuellement leur montrer le passage de la forme (2) à (3)}*

***rem*** : $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=0}$ = éq très importante en phys = oscill harmonique ***libre*** (i.e. un syst qui, une fois mis en mvt, oscille *indéfiniment* (pas phys !), à une fréq. propre $\boxed{f_0=\omega_0/2\pi}$

***rem2*** : oscill ***libre*** *avec frottements visqueux* :

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\alpha\dfrac{dy}{dt}+\omega_0^2y=0$ : $\exists$ frott fluide.

***rem3*** : oscilll ***forcé*** : [h(x)] (2nd mb) = [F]/[m].

Si $h(x)=A\cos\omega t$ (ou $\sin\omega t$), $\exists$ ***résonance*** lorsque $\boxed{\omega=\omega_0}$ (très imp en pratique)

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\omega^2y=0$ , $\omega\in\mathbb{R}^{+*}$

*{ idée : le signe "-" change totalement la nature des solutions !}*

• Le poly caract associé est : $p^2-\omega^2=0\Rightarrow p=\pm\omega$

(2 racines réelles simples)

(ici $\Delta>0$, mais son calcul est inutile !)

• Donc la sol géné de (b) est :

$$\begin{aligned}y(t)&=Ae^{\omega t}+B^{-\omega t} \text{ où } (A,B)\in\mathbb{R}^2\\ &=C\operatorname{ch}\omega t+D\operatorname{sh}(\omega t) \text{ où } (C,D)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

## Ex. 3.2 Avec second membre « simple »

1) Résoudre a) $y''+y=x^3$

éq diff lin 2nd ordre à coeff const, avec un 2nd membre « simple » car de la forme : $\underbrace{\cos(kx)\cdot e^{mx}}_{=1 \Rightarrow k=0=m}\cdot\underbrace{P(x)}_{°3}$

• *sol de l'éq sans 2nd mb* : $y''+y=0$

→ si on reconnaît un oscill harm. (avec $\omega_0^2=1$) on peut écrire directement :
$y_0(x)=A\cos x+B\sin x$ $\left(\text{ou } L\cos(x+\varphi),\ \text{ou...}\right)$

→ sinon : méthode géné (poly caract. ici Δ<0, ...)

• Recherche de sol partic :

$$y_1(x)=\left[Q_1\cos(kx)+Q_2\sin(kx)\right]e^{mx}$$

posons $\boxed{z=m+ik=0}$. 0 n'est pas racine de l'éq caract (qui sont ±i). Donc cherche une sol partic sous la forme : $\boxed{y_1(x)=Q_1 \text{ avec } °Q_1=°P=3}$

Soit : $y_1(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

Alors : $y_1'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ et $y''(x)=6\alpha x+2\beta$

Et $y_1$ sol de (a) ssi $y_1$ est dériv. 2 fois et vérifie (a)
$\Leftrightarrow y_1''+y_1=(6\alpha x+2\beta)+(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)=x^3$
$\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x^2+(6\alpha+\gamma)x+2\beta+\delta=x^3$

Par identif. : $\begin{cases}\alpha=1\ ;\ \beta=0\\ \gamma+6\alpha=0\Rightarrow\gamma=-6\ ;\ 2\beta+\delta=0\Rightarrow\delta=0\end{cases}$

finalement :

$$\boxed{y(x)=y_0+y_1=A\cos x+B\sin x+x^3-6x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

b) $y''-y'=x$

éq diff lin 2nd ordre à coeff const, avec un 2nd mbre « simple » car de la forme : $\underbrace{\cos(kx)\cdot e^{mx}}_{=1 \Rightarrow k=0=m}\cdot\underbrace{P(x)}_{°1}$

• *sol de l'éq sans 2nd mb* : $y''-y=0$

Le poly caract associé est : $\overbrace{p^2-p}^{p(p-1)}=0 \Rightarrow p=0$ ou 1
(2 racines réelles simples)

d'où: $y_0(x)=\lambda e^{p_1x}+\mu e^{p_2x}=\lambda+\mu e^{x}$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

• Recherche de sol partic :

posons $\boxed{z=m+ik=0}$. 0 est une racine simple de l'éq caract. Donc cherche une sol partic sous la forme : $\boxed{y_1(x)=Q_1 \text{ avec } °Q_1=°P+1=2}$

Soit : $y_1(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Alors : $y_1'(x)=2\alpha x+\beta$ et $y''(x)=2\alpha$

On arrive facilement par identification à :

$$\boxed{y(x)=y_0+y_1=\lambda+\mu e^{x}-\frac{x^2}{2}-x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \text{où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

c) $y''-y'=\cos x$ *(seul le second mb "simple" diffère)*

• *sol de l'éq sans 2nd mb* : cf b) !

• *Recherche de sol partic* :

posons $\boxed{z=i}$. i n'est pas racine de l'éq caract. Donc on cherche une sol partic sous la forme : $\boxed{y_1(x)=Q_1\cos x+Q_2\sin x \text{ avec } °Q_i=°P=0}$

Soit : $y_1(x)=A\cos x+B\sin x$

On arrive facilement à :

$$\boxed{y(x)=y_0+y_1=\lambda+\mu e^{x}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}}$$

d) $y''-y'=x+\cos x+e^{-2x}$

• *sol de l'éq sans 2nd mb* : cf b) !

D'après le théo de superposition, la sol géné de cette éq. est la somme de la sol de $y''-y'=x$ (vu au b), de la sol de $y''-y'=\cos x$ (vu au c) ) et de la sol de $y''-y'=e^{-2x}$

• *Recherche de sol partic de* $y''-y'=e^{-2x}$

posons $\boxed{z=-2}$. -2 n'est pas racine de l'éq caract. Donc on cherche une sol partic sous la forme : $\boxed{y_1(x)=Q_1e^{-2x} \text{ avec } °Q_1=°P=0}$ Soit $y_1(x)=Ae^{-2x}$

On arrive facilement à :

$$\boxed{y(x)=y_0+\sum y_1=\lambda+\mu e^{x}-x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}$$

*{ Probablement trop court : prévoir un exercice **appliqué à la physique** (avec des grandeurs dimensionnées !) mettant en jeu un oscillateur forcé (dans l'idéal, sans puis avec frottements visqueux et hors puis à la résonance … Mais je ne sais pas si c'est raisonnable question temps … l'année prochaine on intègrera dans le sujet celui qui aura été validé expérimentalement par les étudiants ! }*