3. Différentielles – formes différentielles – applications (suite et fin)

Ex. 3.3.2 Calculs d'incertitudes en physique

1) Un condensateur de capacité $C = 120 \pm 5\,\text{pF}$ est alimenté sous une tension $U = 12{,}0 \pm 0{,}1\,\text{V}$. Quelle sera la charge emmagasinée dans ce condensateur ? (on rappelle que $Q = C \cdot U$)

2) Pour déterminer la masse volumique d'un objet, on mesure sa masse et son volume. On a trouvé : $m = 16{,}250\,\text{g}$ à 1 mg près et $V = 8{,}5 \pm 0{,}4\,\text{cm}^3$. Calculer la masse volumique de l'objet, ainsi que la précision du résultat obtenu.

3) La résistance équivalente R à deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle est donnée par : $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Supposons les résistances R_1 et R_2 connues à 5% près. Que peut-on dire de la précision sur R ?

4. Opérateurs différentiels et champs

Ex. 4.1.2 Représentations graphiques

Représenter graphiquement la surface correspondant aux champs définis sur $\mathbb{R}^2$ par :

1) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$.
2) $\vec{F}(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

Ex. 4.2. gradient

1) Calculer le gradient des champs scalaires suivants

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
b) $g(x,y,z) = xyz\sin(xy)$

2) Calculer en coordonnées cartésiennes et en sphériques $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ où $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3) Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

Ex. 4.2.2 direction et sens du gradient

1) déterminer la direction de la variation la plus rapide du champ scal. $U = xy + yz + xz$, à partir du pt $M(1,1,1)$

2) La dérivée d'une fonction f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ est $\overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \vec{n}$. Calculer la dérivée de $f = x\exp y + y\exp x - z^2$ au point $M_0(3,0,2)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$, avec $M_1 = (4,1,3)$

Ex. 4.2.3 champ de gradient et potentiel

Toute charge électrique q, mise en présence d'une charge q_0 placée en O subit de ce fait une force : $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0 q}{OM^3}\overrightarrow{OM}$. On dit que q_0 crée un champ électrostatique que l'on peut écrire (en sphériques) : $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0}{r^2}\vec{e}_r$

ce champ dérive-t-il d'un potentiel ? $\vec{E}$ est-il conservatif ? Déterminer un potentiel associé, le cas échéant.

Ex. 3.3.2 Calculs d'incertitudes en physique

1) $C = 120 \pm 5\,\text{pF}$ est alimenté sous une tension $U = 12{,}0 \pm 0{,}1\,\text{V}$. Quelle sera la charge emmagasinée dans ce cond ? (on rappelle que $Q = C\cdot U$

Rép. $Q = CU \Rightarrow Q_0 = 120\cdot 10^{-12}\times 12{,}0 = \boxed{1440\,\text{pC} = Q_0}$

1ère méthode : utilisation des dérivées partielles

$$dQ(C,U) = \frac{\partial Q}{\partial C}dC + \frac{\partial Q}{\partial U}dU \Rightarrow \Delta Q \le \left|\frac{\partial Q}{\partial C}\right|\Delta C + \left|\frac{\partial Q}{\partial U}\right|\Delta U$$

Soit : $\Delta Q \le U\Delta C + C\Delta U$ $\boxed{A\cdot N\cdot}$ $\Delta Q \le \underbrace{12\cdot 5 + 120\cdot 0{,}1}_{72\,\text{pC} \ge \Delta Q}$

On écrira donc : $\boxed{Q = 1440 \pm 72\,\text{pC}}$

2ème méthode : utilisation des diff log

$$Q = CU \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{dC}{C} + \frac{dU}{U} \Rightarrow dQ = \frac{Q}{C}dC + \frac{Q}{U}dU$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Q \le \underbrace{\left|\frac{Q}{C}\right|}_{U}\Delta C + \underbrace{\left|\frac{Q}{U}\right|}_{C}\Delta U}$$

2) Pour déterminer la masse volumique d'un objet, on mesure sa masse et son volume. On a trouvé : $m = 16{,}250\,\text{g}$ à 1 mg près et $V = 8{,}5 \pm 0{,}4\,\text{cm}^3$. Calculer la masse volumique de l'objet, ainsi que la précision du résultat obtenu

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho_0 = \frac{16{,}250}{8{,}5} = \boxed{1{,}91\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3} = \rho_0}$$

1ère méthode : calcul direct (à partir de la diff)

$$\rho = f(m,V) = \frac{m}{V} \Rightarrow d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial m}dm + \frac{\partial\rho}{\partial V}dV = \frac{1}{V}dm + \frac{-M}{V^2}dV$$

$$\Delta\rho \le \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial V}\right|\Delta V = \boxed{\frac{1}{V}\Delta m + \frac{M}{V^2}\Delta V \ge \Delta\rho}$$

$\boxed{A\cdot N\cdot}$ $\Delta\rho = \frac{1}{8{,}5}\cdot 0{,}001 + \frac{16{,}5}{8{,}5^2}\cdot 0{,}4 = 1\cdot 10^{-4} + 9{,}00\cdot 10^{-2}$

$$\approx \boxed{0{,}09\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3} \ge \Delta\rho}$$

On écrira donc : $\boxed{\rho = 1{,}91 \pm 0{,}09\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$

2ème méthode : utilisation des diff log

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} \le \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \boxed{\Delta\rho \le \underbrace{\frac{\rho}{m}}_{1/V}\Delta m + \underbrace{\frac{\rho}{V}}_{m/V^2}\Delta V}$$

3) $R = \frac{R_1\cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Supposons les résistances R_1 et R_2 connues à 5% près.

Signifie que $\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0{,}05$

Que peut-on dire de la précision sur R ?

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1+R_2)\,(= dR_1 + dR_2)}{R_1 + R_2}$$

On voit que dR_1 et dR_2 interviennent à plusieurs reprises : dans ce cas on doit écrire :

$$\frac{dR}{R} = dR_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}\right) + dR_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1+R_2}\right)$$

$$= \frac{dR_1}{R_1}\frac{R_2}{R_1+R_2} + \frac{dR_2}{R_2}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

(ici, tout les coeff sont positifs)

Puisque la précision sur les deux résistances est la m̂, nous pouvons la mettre en facteur :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_i}{R_i}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_1}{R_1+R_2}\right) = \frac{dR_i}{R_i} = \frac{dR}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta R}{R} \le \frac{\Delta R_i}{R_i} = 5\%}$$

$\Rightarrow$ la précision sur R est la m̂ que sur les résist. R_i

L'erreur à ne pas commettre serait de passer aux valeurs absolues avant de regrouper les termes i.e. :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1 + dR_2}{R_1+R_2} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} \le \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta R}{R} \le 3\frac{\Delta R_1}{R_1}}$$

ce qui est très grossier !

4. Opérateurs différentiels et champs

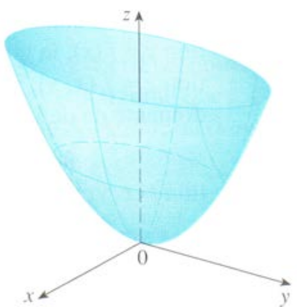
Ex. 4.1.2 Représentations graphiques

1) Représenter graphiquement la surface correspondant au champ scalaire : $f(x,y)=4x^2+y^2$. On pourra s'aider des lignes de niveau

(déjà vu au § 1.2.**)**

On doit tracer $\{M(x,y,z=f(x,y))\}$, avec ici : $z=4x^2+y^2$

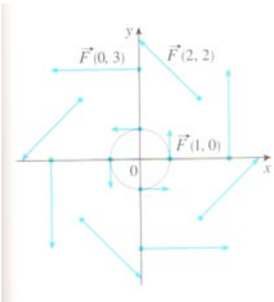
- sur le plan x=0, $z=y^2$
- sur le plan y=0, $z=4x^2$
- lignes de niveau : $z=4x^2+y^2=K \Rightarrow$ on reconnaît l'éq. d'une ellipse et on en déduit l'allure de $[\Sigma]$



2) Représenter graphiquement le champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^2$ par : $\vec{F}(x,y)=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}$

Comme $F(1,0)=\vec{j}$, on dessine le vecteur $\vec{j}=(0,1)$ en plaçant son origine au pt (1,0). En continuant de cette façon, on calcule plusieurs autres valeurs représentatives de $\vec{F}(x,y)$.

Il ressort de la fig. que ***chaque flèche est tan à un cercle centré à l'origine*** (utiliser un logiciel)



Ex. 4.2. gradient

1) (basique) Calculer le grad des ch scal suivants

a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y)=\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y=(3x^2-3y)\vec{e}_x+(3y^2-3x)\vec{e}_y$$

b) $g(x,y,z)=xyz\sin(xy)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,g(x,y,z)=\vec{\nabla}g=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$=(yz\sin(xy)+\underbrace{xyz\cdot y}_{xy^2z}\cos(xy))\vec{e}_x+$$
$$+(xz\sin(xy)+\underbrace{xyz\cdot x}_{x^2yz}\cos(xy))\vec{e}_y+(xy\sin(xy))\vec{e}_z$$

2) Calculer en coord. cartésiennes et en sphériques $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ où $f=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\left(=\dfrac{1}{r}\text{ en sphériques}\right)$

- ***en sphériques*** (bonne sym $\Rightarrow$ calculs les + simples)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\ldots\right)\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{r^2}\vec{e}_r=\boxed{-\frac{\vec{r}}{r^3}=\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)}$$

- ***en cartésiennes***

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$
$$=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_x-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_y-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

3) Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg)=f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g+g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(fg)\right]\vec{e}_x+\left[\frac{\partial}{\partial y}(fg)\right]\vec{e}_y+\left[\frac{\partial}{\partial z}(fg)\right]\vec{e}_z$$
$$=\left(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{e}_x+\left(f\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{e}_y+\left(f\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$
$$=f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g+g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f\quad\text{CQFD}$$

Ex. 4.2.2 direction et sens du gradient

1) Déterminer la direction de la var la plus rapide du champ scal $u=xy+yz+xz$, à partir du pt $M_0(1,1,1)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,u=\vec{\nabla}u=\partial_x u\,\vec{e}_x+\partial_y u\,\vec{e}_y+\partial_z u\,\vec{e}_z$$
$$=(y+z)\vec{e}_x+(x+z)\vec{e}_y+(x+y)\vec{e}_z$$

et $\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_0)=2\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z$ où $M_0(x=1,y=1,z=1)$

i.e. que la + grade pente est obtenue ds la dir :

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,u}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\,u\|}=\frac{2}{\sqrt{4+4+4}}\vec{e}_x+\frac{2}{\sqrt{}}\vec{e}_y+\frac{2}{\sqrt{}}\vec{e}_z$$
$$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}}\vec{e}_x+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_y+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_z=\vec{e}\text{ (vecteur unitaire)}$$

et sa val est : $\|\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_0)\|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

2) La dérivée d'une fonc. f dans la dir° d'un vect. unitaire $\vec{n}$ est $\overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\vec{n}$. Calculer la dériv. de $f=x\exp y+y\exp x-z^2$ au pt $M_0(3,0,2)$ dans la dir° du vect. $\overrightarrow{M_0M_1}$, avec $M_1=(4,1,3)$

On a $\overrightarrow{M_0M_1}\,(1,1,1)$ et $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ $\left(\text{i}\cdot\text{e}\cdot\ \overrightarrow{M_0M_1}=M_0M_1\,\vec{n}\right)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_z$$
$$=(e^y+ye^x)\,\vec{e}_x+(xe^y+e^x)\,\vec{e}_y-2z\,\vec{e}_z$$

d'où : $\overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\vec{n}=\dfrac{e^y+ye^x}{\sqrt{3}}+\dfrac{xe^y+e^x}{\sqrt{3}}-\dfrac{2z}{\sqrt{3}}$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\left((1+x)e^y+(1+y)e^x-2z\right)=f'_{\vec{n}}}$$

et $f'_{\vec{n}}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((1+3)e^0 + (1+0)e^3 - 2\cdot 2\right) = \boxed{\frac{e^3}{\sqrt{3}} = f'_{\vec{n}}(M_0)}$

Ex. 4.2.3 champ de gradient et potentiel

Toute charge électrique q, mise en présence d'une charge q_0 placée en O subit de ce fait une force :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{OM^3}\overrightarrow{OM}$$

On dit que q_0 crée un champ électrostatique que l'on peut écrire (en sphériques) : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\vec{e}_r$

ce ch vect dérive-t-il d'un potentiel scal ?

⇔ existe-t-il un champ scalaire V $\left|\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right.$

(rem : ± en fonc des disciplines !)

⇔ $\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr}$ est une diff. Totale (i.e. = -dV)

$$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \vec{E}\cdot(dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}dr = -d\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r} + Cte\right)}_{V}$$
