## 4. Opérateurs différentiels et champs (suite et fin)

***Ex. 4.3.1*** divergence

**1) coordonnées cartésiennes**

a) Calculer $\operatorname{div}\overrightarrow{OM}$

b) Pour quelle fonction f(z) la divergence de $\vec{u} = xz\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + f(z)\,\vec{e}_z$ est-elle égale à z ?

c) Montrer que $\operatorname{div}(f\vec{u}) = f\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}f$

**2) nabla en dehors des cartésiennes : attention !**

Retrouver l'expression de la divergence avec l'opérateur nabla, en coordonnées cylindriques

**3) coordonnées sphériques**

Calculer en coordonnées sphériques :

1) $\operatorname{div}\overrightarrow{OM}$

2) $\operatorname{div}\left[f(r)\vec{r}\right]$ d'abord directement, puis en utilisant l'ex.4.3.1-1.c

3) $\operatorname{div}\left[f(r)\dfrac{\vec{r}}{r^2}\right]$

***Ex. 4.3.2*** rotationnel

Calculer le rot. des champs vectoriels suivants :

1) $\vec{u} = -\dfrac{y^2}{2}\vec{e}_x + \dfrac{x^2}{2}\vec{e}_y$

2) $\vec{v} = xz\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} - y^2\vec{k}$

3) $\vec{w} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (en cartésiennes et en sphériques)

4) $\vec{J} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ où $\vec{\omega}$ est un vecteur constant

***Ex. 4.4*** Application répétée des opérateurs différentiels

1) Montrer que

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V\right) = \vec{0}$

b) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{A}\right)\right) = 0$

2) Soit le champ de vecteurs : $\vec{V}(x,y,z) = (z^2\sin y)\,\vec{i} + (xz^2\cos y)\,\vec{j} + (2xz\sin y)\vec{k}$

$\vec{V}$ est-il conservatif ? Déterminer un potentiel associé, le cas échéant.

## Ex. 4.3.1 divergence

**1) coordonnées cartés.**

a) Calculer $\operatorname{div} \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = \vec r = x\vec e_x + y\vec e_y + z\vec e_z$ (vecteur position)

$\operatorname{div} \vec r = \vec\nabla\cdot\vec r = (\vec e_x\partial_x + \vec e_y\partial_y + \vec e_z\partial_z)\cdot(x\vec e_x + y\vec e_y + z\vec e_z)$ (par déf.!)

$$= \vec e_x\cdot \underbrace{\partial_x(x\vec e_x)}_{\partial_x(x)\vec e_x + x\partial_x(\vec e_x)} + \ldots = \underbrace{\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z}_{\text{on peut retenir ce résultat}} = \boxed{3 = \operatorname{div}\vec r}$$

b) Pour quelle fonction f(z) la div. de :
$\vec u = xz\vec e_x + y\vec e_y + f(z)\vec e_z$ est-elle égale à z ?

$$\operatorname{div}\vec u = \partial_x(xz) + \partial_y y + \partial_z f(z) = z + 1 + \frac{df}{dz}$$

$$\operatorname{div}\vec u = z \Leftrightarrow z + 1 + \frac{df}{dz} = z \Leftrightarrow \frac{df}{dz} = -1 \Rightarrow f(z) = -\int dz + C$$

Soit : $\boxed{f(z) = -z + C \in \mathbb{R}}$

c) Montrer que $\operatorname{div}(f\vec u) = f\operatorname{div}\vec u + \vec u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$

$$\operatorname{div}(f\vec u) = \frac{\partial(fu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_z)}{\partial z}$$

$$= (\partial_x f)\,u_x + f\partial_x u_x + (\partial_y f)\,u_y + f\partial_y u_y + (\partial_z f)\,u_z + f\partial_z u_z$$

$$= f\operatorname{div}\vec u + \vec u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad \text{CQFD}$$

**2) nabla en dehors des cartésiennes : attention**

Retrouver l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques, avec l'opérateur nabla.

Soit $\vec\nabla = \vec e_\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\vec e_\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \vec e_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ (en cylindriques)

Et $\vec V = V_\rho\vec e_\rho + V_\theta\vec e_\theta + V_z\vec e_z$ un ch vect (rég.) en cyl, itou …

Alors :

$$\vec\nabla\cdot\vec V = \left(\vec e_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\vec e_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(V_\rho\overbrace{\vec e_\rho}^{f(\theta)} + V_\theta\overbrace{\vec e_\theta}^{g(\theta)} + V_z\overbrace{\vec e_z}^{\neq h(\theta)}\right)$$

$$= \vec e_\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(V_\rho\vec e_\rho\right) + \underbrace{\vec e_\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(V_\theta\vec e_\theta\right) + \vec e_\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(V_z\vec e_z\right)}_{0} +$$

$$+\frac{1}{\rho}\vec e_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\rho\vec e_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\vec e_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\theta\vec e_\theta\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho}\vec e_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_z\vec e_z\right)}_{0} +$$

$$\underbrace{+\vec e_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(V_\rho\vec e_\rho\right) + \vec e_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(V_\theta\vec e_\theta\right)}_{0} + \vec e_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(V_z\vec e_z\right)$$

$$= \frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\vec e_\theta\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\rho\vec e_\rho\right)}_{\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\vec e_\rho + V_\rho\vec e_\theta} + \frac{1}{\rho}\vec e_\theta\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\theta\vec e_\theta\right)}_{\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\vec e_\theta + V_\theta(-\vec e_\rho)} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left(V_\rho + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec V} \quad \text{CQFD}$$

**3) *Calculer en coord. sphériques* :**

1) $\operatorname{div}\overrightarrow{OM}$ ; En sym. sphérique $\overrightarrow{OM} = \vec r = r\vec e_r$

Annexe 5 $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec A = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) = \dfrac{1}{r^2}\left[\left(\dfrac{\partial r^2}{\partial r}\right)A_r + r^2\dfrac{\partial A_r}{\partial r}\right]$.

D'où :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{OM} = \operatorname{div}\vec r = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)r + r^2\frac{\partial r}{\partial r}\right] = \frac{1}{r^2}\left(2r^2 + r^2\right) = \boxed{3 = \operatorname{div}\vec r}$$

on retrouve le résultat du 4.3.1a) : ce résultat est bien évid. indép du syst de coord. utilisé.

2) $\operatorname{div}\left[f(r)\vec r\right]$ directement, puis en utilisant l'ex.4.3.1.a.3

- *calcul direct :*

$$\operatorname{div}\left[f(r)\vec r\right] = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)A_r + r^2\frac{\partial A_r}{\partial r}\right] = \frac{1}{r^2}\left[\ 2r\,f(r)\,r + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\,r\right)\ \right]$$

$$= \left[2f(r) + \frac{df}{dr}r + f(r)\right] = \boxed{3f(r) + r\frac{df}{dr} = \operatorname{div}\left[f(r)\vec r\right]}$$

- *utilisation de l'ex.4.3.1-1c :* $\operatorname{div}(f\vec u) = f\operatorname{div}\vec u + \vec u\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$

$$\operatorname{div}\left[f(r)\vec r\right] = f(r)\underbrace{\operatorname{div}\vec r}_{3} + \vec r\cdot\underbrace{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f}_{d_r f\,\vec e_r} = 3f(r) + r\frac{df}{dr}$$

3) $\operatorname{div}\left[\ f(r)\dfrac{\vec r}{r^2}\ \right] = \operatorname{div}\left[f(r)/r\,\vec e_r\right] = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)$

$$= \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)A_r + r^2\frac{\partial A_r}{\partial r}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2r\,\frac{f(r)}{r} + r^2\,\frac{f'(r)\,r - f(r)}{r^2}\right] = \boxed{\frac{1}{r}\left(\frac{f(r)}{r} + \frac{df}{dr}\right) = \operatorname{div}\left[f(r)\frac{\vec r}{r^2}\right]}$$

## Ex. 4.3.2 rotationnel

Calculer le rot. des champs vectoriels suivants :

1) $\vec u = -\dfrac{y^2}{2}\vec e_x + \dfrac{x^2}{2}\vec e_y$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec u = \vec\nabla\wedge\vec u = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-y^2/2\\ x^2/2\\ 0\end{vmatrix} = \boxed{\begin{Vmatrix}0\\ 0\\ x+y\end{Vmatrix} = (x+y)\vec e_z = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec u}$$

2) $\vec v = xz\,\vec i + xyz\,\vec j - y^2\vec k$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec v = \vec\nabla\wedge\vec v = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}xz\\ xyz\\ -y^2\end{vmatrix} = \boxed{-(2+x)y\,\vec i + x\,\vec j + yz\vec k = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec v}$$

3) $\vec w = \dfrac{\vec r}{r^3}$ (en cartésiennes et en sphériques)

• ***<u>cartésiennes</u>***

Utiliser que : $\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = \frac{x\,\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow \ \vec w = \frac{\vec r}{r^3} = \frac{\vec e_r}{r^2} = \frac{x\,\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\frac{\vec e_r}{r^2} = \vec\nabla\wedge\frac{\vec e_r}{r^2} = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x/(\ )^{3/2} = x(\ )^{-3/2}\\ y/(\ )^{3/2} = y(\ )^{-3/2}\\ z/(\ )^{3/2} = z(\ )^{-3/2}\end{vmatrix}$$

$$= \vec i\left(\frac{z\cdot(-3/2)2y}{(\ )^{5/2}} - \frac{-3yz}{(\ )^{5/2}}\right) + \vec j\left(\frac{3zx}{(\ )^{5/2}} - \frac{3xz}{(\ )^{5/2}}\right) + \vec k\left(\frac{-3yx}{(\ )^{5/2}} - \frac{-3xy}{(\ )^{5/2}}\right)$$

$$= \boxed{\vec 0 = \overrightarrow{rot}\,\frac{\vec e_r}{r^2}}$$

• ***<u>Sphériques</u>***

On voit tout de suite que le rot est nul, car ici, seule la composante suivant $\vec e_r$ est non nulle, et cette composante ne dépend ni de $\theta$ ni de $\varphi$

4) $\vec J = \vec\omega\wedge\overrightarrow{OM}$

Posons $\vec\omega = \omega_x\,\vec i + \omega_y\,\vec j + \omega_z\,\vec k$ où les $\omega_i$ sont des const.

Alors : $\vec\omega\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\ y\\ z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\omega_y z - \omega_z y\\ \omega_z x - \omega_x z\\ \omega_x y - \omega_y x\end{vmatrix}$

Et

$$\overrightarrow{rot}\,\vec J = \vec\nabla\wedge\vec J = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\omega_y z - \omega_z y\\ \omega_z x - \omega_x z\\ \omega_x y - \omega_y x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\omega_x - (-\omega_x)\\ \omega_y - (-\omega_y)\\ \omega_z - (-\omega_z)\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{vmatrix}$$

$$= \boxed{2\vec\omega = \overrightarrow{rot}\,\vec J}$$

**<u>Ex. 4.4</u>** Application répétée des op. diff.

**1)** Montrer que

a) $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,V\right) = \vec 0$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}V\right) = \vec\nabla\wedge\left(\vec\nabla V\right) = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\partial_x V\\ \partial_y V\\ \partial_z V\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\partial^2_{yz}V - \partial^2_{zy}V\\ \partial^2_{zx}V - \partial^2_{xz}V\\ \partial^2_{xy}V - \partial^2_{yx}V\end{vmatrix}$$

$$= \text{(Théo de Schwarz)}\ \boxed{\vec 0 = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}V\right)}$$

b) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec A\right)\right) = 0$

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec A\right) = \vec\nabla\cdot\left(\vec\nabla\wedge\vec A\right) = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\cdot\left(\begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\partial_y A_z - \partial_z A_y\\ \partial_z A_x - \partial_x A_z\\ \partial_x A_y - \partial_y A_x\end{vmatrix}$$

$$= \left(\partial^2_{xy}A_z - \partial^2_{xz}A_y\right) + \left(\partial^2_{yz}A_x - \partial^2_{yx}A_z\right) + \left(\partial^2_{zx}A_y - \partial^2_{zy}A_x\right)$$

$$= \boxed{0 = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec A\right)}$$

**2)** Soit le champ de vecteurs :

$$\vec V(x,y,z) = (z^2\sin y)\,\vec i + (xz^2\cos y)\,\vec j + (2xz\sin y)\,\vec k$$

$\vec V$ est-il conservatif ? Déterminer un pot associé, le cas échéant.

a) $\vec V$ est conservatif ssi :

• $\vec V\cdot d\vec\ell = \pm df$ (souvent "+" en maths et "-" en phys))

• $\exists$ champ scalaire f $\Big|\ \vec V = \pm\,\overrightarrow{grad}f$

• $\overrightarrow{rot}\vec V = \vec 0$

Ici :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec V = \vec\nabla\wedge\vec V = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}z^2\sin y\\ xz^2\cos y\\ 2xz\sin y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2xz\cos y - 2xz\cos y\\ 2z\sin y - 2z\sin y\\ z^2\cos y - z^2\cos y\end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\vec 0 = \overrightarrow{rot}\,\vec V} \ \Leftrightarrow \vec V \text{ est conservatif}$$

b) $\vec V$ est conservatif $\Leftrightarrow \exists f \Big|\ \vec V = \pm\,\overrightarrow{grad}f$

Choisissons (arbitrairement !) la conv. +.

Ici, les cartés. semblent indiquées :

$\overrightarrow{grad}f = \partial_x f\,\vec e_x + \partial_y f\,\vec e_y + \partial_z f\,\vec e_z +$

On a, par identification :

$$\begin{cases}\partial_x f = z^2\sin y & (1)\\ \partial_y f = xz^2\cos y & (2)\\ \partial_z f = 2xz\sin y & (3)\end{cases}$$

Ici, les difficultés sont $\Leftrightarrow$ donc, par ex :

***En intégrant (1) / x on trouve :***

$$f(x,y,z) = \int\frac{\partial f}{\partial x}dx + g(y,z) = xz^2\sin(y) + g(y,z) \quad \textbf{(1a)}$$

***On détermine g(y,z) en injectant (1a) dans (2) et (3) :***

**(1a)** ds (2) : $xz^2\cos(y) + \partial_y g(y,z) = xz^2\cos(y)$

$$\Rightarrow \partial_y g(y,z) = 0 \Rightarrow \boxed{g(y,z) = g(z)} \quad \textbf{(2a)}$$

**(1a)** ds (3), en tenant compte de **(2a)** :

$2xz\sin y + g'(z) = 2xz\sin y$

$$\Rightarrow g'(z) = 0 \Rightarrow \boxed{g(z) = K\in\mathbb{R}} \quad \textbf{(3a)}$$

Finalement, **(3a)** ds **(1a)** :

$$\boxed{f(x,y,z) = xz^2\sin(y) + K\in\mathbb{R}}$$