Sorbonne Universitï¿œs

LU2PY013-PeiP 03 mars 2020

CC1

Polycopiï¿œ de cours autorisï¿œ - Calculatrice et TD interdits

1 Exercice 3 *[4 points]*

Soit

$$y'(x) + \sin(x)\, y = \frac{e^{\cos(x)}}{\cos^2(x)} \tag{1}$$

1. Est-ce une ï¿œequation diffï¿œerentielle **linï¿œeaire** ? (justifiez). De quel **ordre** ? (justifiez) ***[0,5 + 0,5 point]***
2. **Rï¿œsoudre** cette ï¿œequation sur un **intervalle** que l'on prï¿œecisera (le plus grand possible). ***[2 + 1 points]***

CORRECTION :

1. C'est une ï¿œequation diffï¿œerentielle linï¿œeaire (en y) ordinaire du premier ordre (seule la premiï¿œere dï¿œrivï¿œe de y intervient)

2. Mï¿œthode de la variation de la constante.
On commence par rï¿œsoudre l'EDO sans second membre :

$$\frac{dy_0}{dx} + \sin(x)\, y_0 = 0$$

c'est-ï¿œ-dire

$$\frac{y_0'}{y_0} = -\sin(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}(\ln(y_0)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) + cte)$$

dont la solution gï¿œnï¿œrale s'ï¿œcrit

$$y_0(x) = e^{\cos(x)+cte} = Ae^{\cos(x)}$$

avec A une constante rï¿œelle que l'on suppose ï¿œtre une fonction $f(x)$ dans un second temps. On remplace donc $y(x)$ par $f(x)\, e^{\cos(x)}$ dans l'EDO et l'on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

en divisant par $e^{\cos(x)}$ de chaque cï¿œtï¿œ.

Cette ï¿œquation s'intï¿œgre alors facilement en reconnaissant la dï¿œrivï¿œe de la fonction tangente ï¿œ droite :

$$f(x) = \tan(x) + C$$

avec C une constante d'intï¿œgration rï¿œelle.

La solution gï¿œnï¿œrale recherchï¿œe est donc ï¿œgale ï¿œ

$$y_{sol}(x) = (\tan(x) + C)\, \mathrm{e}^{\cos(x)}$$

et son support de dï¿œfinition est celui de la fonction tangente, c'est-ï¿œ-dire l'ensemble des rï¿œels privï¿œ des nombres $\pi/2$ modulo π (relatif).

2 Exercice 4 ***[6 points]***

On cherche les fonctions y, solutions de :

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{e}^{-y^2}(1-2y) = 2x\mathrm{e}^{-y} \tag{2}$$

et vï¿œrifiant $y(1) = 1$.

1. Est-ce que (2) est une ï¿œquation diffï¿œrentielle **linï¿œaire** ? (justifiez). De quel **ordre** ? (justifiez) ***[0,5 + 0,5 point]***
2. **Calculer** la dï¿œrivï¿œe de $\mathrm{e}^{y(1-y)}$ ***[1 point]***
3. Donner une **EDO ï¿œquivalente** ï¿œ (2) en utilisant la dï¿œrivï¿œe de $\mathrm{e}^{y(1-y)}$ calculï¿œe juste avant. L'**intï¿œgrer** sur un **intervalle** que l'on prï¿œcisera (le plus grand possible). ***[0,5 + 1,5 + 2 points]***

CORRECTION :

1. C'est une ï¿œquation diffï¿œrentielle non-linï¿œaire (en y) du premier ordre.

2. La dï¿œrivï¿œe de la fonction $\mathrm{e}^{y(1-y)}$ s'ï¿œcrit :

$$\left(\mathrm{e}^{y(1-y)}\right)' = y'(1-2y)\,\mathrm{e}^{y(1-y)}$$

3. Cette dï¿œrivï¿œe conduit ï¿œ rï¿œexprimer l'EDO comme

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{y(1-y)}\right) = 2x$$

d'oï¿œ

$$y(1-y) = \ln\left(x^2 + cte\right)$$

La condition $y(1) = 1$ ï¿œlimine la constante : $cte = 0$ puisque $\ln(1 + cte) = 0$.

Le support de dï¿œfinition de $y(x)$ est donc au maximum la droite rï¿œelle privï¿œe du point 0.

Il reste ï¿œ exprimer $y(x)$ de faï¿œon explicite. L'ï¿œquation $y(1-y)=\ln(x^2)$ s'ï¿œcrit aussi

$$y^2 - y + \ln\left(x^2\right) = 0$$

qui donne deux solutions a priori possibles

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\ln(x^2)}}{2}$$

dont en fait seule celle avec le signe + correspond ï¿œ la solution recherchï¿œe car devant vï¿œrifier la condition $y(1)=1$:

$$y_{sol}(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(x^2)}}{2}$$

On remarque que le support de dï¿œfinition de $y_{sol}(x)$ est plus restreint que prï¿œvu ci-dessus : il doit correspondre ï¿œ la condition de rï¿œalitï¿œ de la racine carrï¿œe : $1 - 4\ln(x^2) \geq 0$, c'est-ï¿œ-dire

$$|x| \leq \mathrm{e}^{1/8}$$

Finalement, l'ensemble de dï¿œfinition de $y_{sol}(x)$ est

$$\left[-\mathrm{e}^{1/8}, 0\right[U \left]0, \mathrm{e}^{1/8}\right]$$

3 Exercice 5 ***Une ballade en voiture en guise de dessert[5 points]***

- à l'arrêt

La suspension d'une voiture de masse m = 800 kg est équivalente à un ressort vertical de constante de raideur k = 1,36 10^4 N/m, qui est associé a un frottement visqueux de constante f = 1,6 10^2 kg/s.

L'équation du déplacement vertival $y(t)$ de la voiture s'écrit :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{3}$$

1. Cette équation différentielle est-elle linéaire ? Si oui, de quel ordre est-elle ? ***[0,5 point]***

2. Résoudre cette équation différentielle ***[1,5 points]***

- Sur une route "ondulée"

On suppose maintenant que la voiture roule sur piste "ondulée" qui force une oscillation verticale de pulsation $\sqrt{17}$ et transforme l'équation différentielle initiale en :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F\cos\sqrt{17}t \tag{4}$$

avec F= 800 N

1. Simplifier cette équation différentielle en effectuant les applications numériques. ***[0,5 point]***

2. Donner la solution générale en précisant l'intervalle de définition de t. ***[1,5 points]***

3. Déterminer la solution particulière alors associée aux conditions initiales $y(t=0)=1$ et $y'(t=0)=-1$. ***[1 point]***

CORRECTION :

- à l'arrêt

1. Cette équation différentielle est linéaire, à coefficients constants et elle est du second ordre.

2. On écrit le polynôme associé et on cherche ses solutions.

$$mp^2+fp+k=0$$
avec $\Delta = f^2-4mk$.

- Si Δ >0 (c'est à dire si $f^2>4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent

$$p_{1,2}=\frac{-f\pm\sqrt{\Delta}}{2m}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y=Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}$$

où A et B sont des constantes réelles.

- Si Δ =0 (c'est à dire si $f^2=4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent

$$p_1=p_2=\frac{-f}{2m}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y=(At+B)e^{p_1t}$$

où A et B sont des constantes réelles.

- Si Δ <0 (c'est à dire si $f^2<4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent

$$p_{1,2}=\alpha\pm i\omega \text{ avec } \alpha=\frac{-f}{2m} \text{ et } \omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y=e^{\alpha t}[A\,\sin(\omega t)+B\,\cos(\omega t)]$$

où A et B sont des constantes réelles.

- Sur une route "ondulée"

L'équation différentielle a maintenant un second membre. Elle s'écrit :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=F\cos\sqrt{17}t$$

1. En effectuant les applications numériques, on obtient :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+17y=\cos\sqrt{17}t$$

2. L'intervalle de définition de t est ici l'ensemble des réels positifs, la variable t étant ici le temps. Pour obtenir la solution générale de cette équation différentielle, on cherche d'abord la solution générale de l'équation sans second membre. On se reporte aux résultats précédents. Ici Δ est négatif et on a $\sqrt{-\Delta} = 8$, ce qui conduit à $\alpha = -1$ et $\omega = 4$. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc :

$$y = e^{-t}[A \sin(4t) + B \cos(4t)] \text{ , A et B étant deux réels.}$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre, de la forme :

$$y = C \sin(\sqrt{17}t) + D \cos(\sqrt{17}t)) \text{ , C et D étant deux réels.}$$

Les dérivées $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sqrt{17}C \cos(\sqrt{17}t) - \sqrt{17}\, D \sin(\sqrt{17}t)) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\ 17C \sin(\sqrt{17}t) \quad - 17\ D \cos(\sqrt{17}t)) \end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y dans l'équation différentielle complète, on obtient en réunissant les termes en sinus d'un côté et ceux en cosinus de l'autre :

$$[-17C - 2\sqrt{17}D + 17C] \sin(\sqrt{17}t) + [-17D + 2\sqrt{17}C + 17D] \cos(\sqrt{17}t) = \cos(\sqrt{17}t)$$

Par identification des termes en $\sin(\sqrt{17}t)$ et ceux en $\cos(\sqrt{17}t)$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$D = 0 \text{ et } C = \tfrac{1}{2\sqrt{17}}.$$

Soit une solution particulière de l'équation avec second membre égale à :

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{17}} \sin(\sqrt{17}t),$$

et une solution générale de l'équation complète avec second membre :

$$y = e^{-t}[A \sin(4t) + B \cos(4t)] + \tfrac{1}{2\sqrt{17}} \sin(\sqrt{17}t), \text{ A et B étant deux réels}$$

3. Pour trouver la solution particulière de l'équation complète avec second membre, associée aux conditions aux limites $y(t=0) = 1$ et $y'(t=0) = -1$ on calcule $y(t=0)$ et $y'(t=0)$:

$$\begin{aligned} y(t=0) &= B + \tfrac{1}{2\sqrt{17}} * 0 = 1, \\ y'(t=0) &= [4A - B + \tfrac{1}{2}] = -1. \end{aligned}$$

On obtient donc $B = 1$ et $A = -\frac{1}{8}$ et la solution s"ecrit :

$$y = e^{-t}[-\tfrac{1}{8} \sin(4t) + \cos(4t)] + \tfrac{1}{2\sqrt{17}} \sin(\sqrt{17}t).$$