1. Intégrales curvilignes

Ex. 1.1 & 1.2 chemin décrit par f continue et (strict.) monotone

Calculer l'intégrale curviligne de *(la forme diff.)* :
$\delta F = kx(1+y^2)dx + (x+y)dy$

a) le long du chemin OB, défini par le segment de droite (OB) où B(1,2) **[*de deux façons différentes*]**

b) le long du chemin OAB, défini par les deux segments de droites (OA) et (AB), où A(1,0)

c) Conclusion ?

Ex. 1.3 chemin quelconque

***Ex.a* Cas général**

Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée constituée par les deux arcs de parabole : $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens direct avec :
$\mathrm{I} = \oint_C (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$

***Ex. b* Si forme différentielle exacte**

1) Calculer l'intégrale curviligne $J = \oint_C x\,dy + y\,dx$, le long du chemin OM

i) déf. par les segments [ON] et [NM] où {N(1,0), M(1,1)}
ii) déf. par la parabole $y = x^2$

2) Conclusion ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

***Ex. c* Attention**

$K = \oint_{C_2^+} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ où C_2^+ est le périmètre du triangle O (0,0), I(1,0), J(0,1)

Ex. 1.4 circulation - travail

Soit une particule qui se déplace sous l'action d'un champ de forces : $\vec{F} = (x-2y)\,\vec{e}_x + (3y-2x)\,\vec{e}_y$.
1) Montrer que ce champ dérive d'un potentiel V.

2) Calculer de deux façons différentes, le travail de $\vec{F}$ pour déplacer la particule en ligne droite du point O(0,0) au point A(2,4).

2. Formule de Green-Riemann

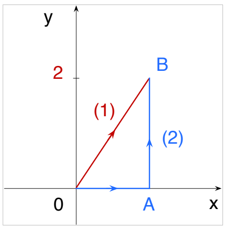
Utiliser la formule de Green-Riemann pour retrouver les résultats de l'exercice 1.3

1. Intégrales curvilignes

Ex. 1.1 & 1.2 chemin décrit par f cont. et (strict.) monot.

Calculer l'int. curv. de *(la forme diff.)* : $\delta F = kx(1+y^2)dx + (x+y)dy$

a) le long du chemin OB, défini par le segment de droite (OB) où B(1,2)



Le chemin $\overset{\frown}{OB}$ est décrit par f cont et strict monotone (cas 1- du cours) ; f a pour éq : $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$. D'où :

i) *en exprimant y en fonc de x*

$$\int_{\overset{\frown}{OB}} \delta F = \int_0^1 kx(1+(2x)^2)dx + (x+2x)2dx = \cdots = \boxed{\frac{3(k+2)}{2} = \int_{\overset{\frown}{OB}} \delta F}$$

ii) *en exprimant x en fonc de y*

$y = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}dy$; D'où

$$\int_{\overset{\frown}{OB}} \delta F = \int_0^2 k\frac{y}{2}(1+y^2)\frac{dy}{2} + (\frac{y}{2} + y)dy = \cdots = \boxed{\frac{3(k+2)}{2} = \int_{\overset{\frown}{OB}} \delta F}$$

---

b) le long du chemin OAB, défini par les deux segments de droites (OA) et (AB), où A(1,0)
(f // aux axes)

• le chemin n'est pas (strictement) monotone suivant OAB : il faut donc le décomposer en $\overset{\frown}{OA} + \overset{\frown}{AB}$ (= chemin // axes [cas 2- du cours]) d'où :

$$\int_{\overset{\frown}{OAB}} \delta F$$

$$= \underbrace{\int_{\overset{\frown}{OA}} kx(1+\underset{0}{\cancel{y^2}})dx + (x+y)\underset{0}{\cancel{dy}}}_{\text{sur OA : y=0 }\Rightarrow\text{dy=0}} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{AB}} kx(1+y^2)\underset{0}{\cancel{dx}} + (\underset{1}{\cancel{x}}+y)dy}_{\text{sur AB : x=1}\Rightarrow\text{dx=0}}$$

$$= \cdots = \boxed{\frac{k+8}{2} = \int_{\overset{\frown}{OAB}} \delta F}$$

---

c) Conclusion ?

$\int_{\overset{\frown}{OB}} \neq \int_{\overset{\frown}{OAB}} \Rightarrow$ l'int curv dép. du chemin suivi (génér.)

Ex. 1.3 chemin quelconque

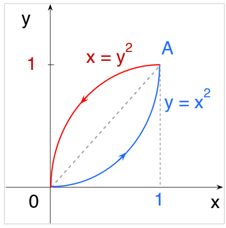
• *a) cas général* ***(≠0)***

Calculer l'int. curv. I le long de la boucle fermée constituée par les deux arcs de parabole : $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens direct avec :

$I = \oint_C (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$

• Les deux arcs se croisent en O(0,0) et A (1,1)

• C doit être décomposée en $\overset{\frown}{OA} + \overset{\frown}{AO}$ (pour être décrite par f cont et strict monotone)



• sur $\overset{\frown}{OA}$: $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$, d'où :

$$I_{\overset{\frown}{OA}} = \int_0^1 (2x \cdot x^2 - x^2)dx + (x + x^4)2x\,dx = \frac{7}{6}$$

• sur $\overset{\frown}{AO}$ (racine carrée) : $x = y^2 \Rightarrow dx = 2ydy$, d'où :

$$I_{\overset{\frown}{AO}} = \int_1^0 (2y^2 \cdot y - y^4)2y\,dy + (y^2 + y^2)dy = -\frac{17}{15}$$

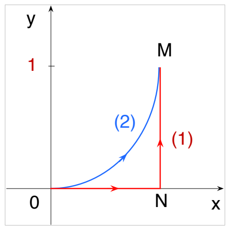
et $\boxed{I = I_{\overset{\frown}{OA}} + I_{\overset{\frown}{AO}} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}}$

---

b) Si forme différentielle exacte

1) Calculer l'intégrale curviligne $J = \oint_C x\,dy + y\,dx$, le long du chemin OM

i) déf. par les segments [ON] et [NM] où {N(1,0), M(1,1)}



$\overset{\frown}{ONM}$ doit être décomposé en $\overset{\frown}{ON} + \overset{\frown}{NM}$ ***(pour être décrit par des fonc cont et monotones)***

$$J_{\overset{\frown}{ONM}} = \underbrace{\int_{\overset{\frown}{ON}}}_{ON\,:\,y=0\Rightarrow dy=0} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{NM}}}_{NM\,:\,x=1\Rightarrow dx=0} = \int_0^1 x\,\underset{0}{\cancel{dy}} + \underset{0}{\cancel{y}}\,dx + \int_0^1 \underset{1}{x}\,dy + y\,\underset{0}{\cancel{dx}} = 1$$

ii) déf. par la parabole $y = x^2$

suivant la parabole, $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$ et

$$J_{\overset{\frown}{OM}} = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx + x^2 dx = \boxed{1 = J_{\overset{\frown}{OM}}}$$

2) Conclusion ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Ici l'int curv ne dép pas du chemin suivi : on peut vérifier si c'est parce que $\delta f = xdy + ydx$ est une diff exacte. En effet, si f est une diff exacte, alors $\boxed{\int_{\widehat{AB}} df = \left[f(B)-f(A)\right]}$ (ne dép que des pt de départ et d'arrivée)

Pour cela, il suffit de vérifier si les d.p. croisées sont égales, soit ici si :

$\partial_x x \overset{??}{=} \partial_y y$; ici c'est clairement le cas

$\Rightarrow \exists f \mid \pm df = xdy + ydx \;$ or $\; df = \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy$

Par identification (convention "+") :

$$\begin{cases} \partial_x f = y & \textbf{(1)} \\ \partial_y f = x & \textbf{(2)} \end{cases}$$ ***(raisonnement déjà vu plusieurs fois)***

On peut soit intégrer (1) / x , soit (2) / y ($\hat{m}$ difficulté) ...

$$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx + g(y) = yx + g(y) \quad \textbf{(1a)}$$

(1a) dans (2) : $\left(\partial_y f =\right) x + g'(y) = x$.

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = K \in \mathbb{R}$$

Par suite, la fonc. cherchée est : $\boxed{f(x,y) = xy + k \in \mathbb{R}}$

Donc : $J = \int_{\widehat{OM}} df = f(M) - f(O) = (1\cdot 1 + k) - (0 + k) = \boxed{1 = J}$

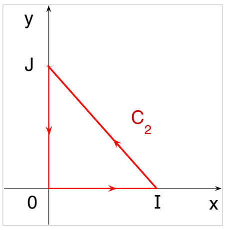
Ex. c Attention

• *Attention* ***0 lors de l'int sur un parcours fermé , alors que pas diff totale :***

$\int_{C_2^+} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$ où C_2^+ est le périmètre du triangle O (0,0), I(1,0), J(0,1)

$$\int_{C_2^+} = \underbrace{\int_{\widehat{OI}}}_{\substack{y=0\Rightarrow \\ dy=0}} + \underbrace{\int_{\widehat{IJ}}}_{\substack{y=1-x \\ dy=-dx}} + \underbrace{\int_{\widehat{JO}}}_{\substack{x=0\Rightarrow \\ dx=0}}$$

$$= \cdots = \boxed{0 = \int_{C_2^+}}$$



Ex. 1.4 circulation - travail

Soit une particule qui se déplace dans un champ de forces : $\vec{F} = (x-2y)\,\vec{e}_x + (3y-2x)\,\vec{e}_y$.

1) Montrer que ce champ dérive d'un potentiel V.

déjà vu au Ch.3 : $\Leftrightarrow \vec{F}$ est un ch. conservatif

$\Leftrightarrow$ existe-t-il un champ scalaire V $\mid \; \vec{F} = \pm \overrightarrow{grad}\, V$

$\Leftrightarrow \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ est une diff. totale

$\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$

Prenons par ex. : $\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = (x-2y)dx + (3y-2x)\,dy = \delta W$

On voit que :

$$\partial_y \delta W_x = \partial_x \delta W_y = -2 \Leftrightarrow \delta W \text{ diff tot} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ est conservatif}$$

$\Leftrightarrow \exists$ ch. scal V $\mid \; \vec{F} = \pm\overrightarrow{grad}\, V = \pm\left(\partial_x V\, \vec{e}_x + \partial_y V\, \vec{e}_y\right)$

Par identification (convention "+" ou "-") :

($\hat{m}$ raisonnement qu'au 1.3b)2)).

$$\begin{cases} \pm\partial_x V = x - 2y & (1) \\ \pm\partial_y V = 3y - 2x & (2) \end{cases}$$

Ici on peut encore soit intégrer (1)/ x, soit (2)/ y ($\hat{m}$ diff) ...

$$(1) \Rightarrow \pm V(x,y) = \int \frac{\partial V}{\partial x} dx + g(y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + g(y) \quad \textbf{(1a)}$$

(1a) dans (2) : $\left(\partial_y V =\right) - 2x + g'(y) = 3y - 2x$.

$$\Rightarrow g'(y) = 3y \Rightarrow g(y) = \frac{3y^2}{2} + K \in \mathbb{R}$$

Par suite, la fonc. cherchée est :

$$\boxed{\pm V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy + K \in \mathbb{R}}$$

---

2) Calculer de <u>deux façons différentes</u>, le travail de $\vec{F}$ pour déplacer la particule en ligne droite du point O(0,0) au point A (2,4).

a) <u>calcul direct</u>

Le chemin $\widehat{OA}$ est décrit par f cont et strict monot. (cas 1- du cours) ; f a pour éq : $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$.

D'où, en exprimant y en fonc de x

$$\int_{\widehat{OA}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^2 (x - 2\cdot 2x)dx + (3\cdot 2x - 2x)\,2dx$$

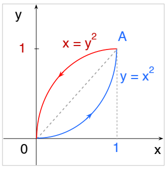
$$= \cdots = \boxed{10 = \int_{\widehat{OA}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}}$$

b) <u>en utilisant le potentiel</u>

$$\int_{\widehat{OA}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \left(V(A) - V(0)\right) = \cdots = \boxed{10 = \int_{\widehat{OA}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}}$$

2. Formule de Green-Riemann

Utiliser la formule de Green-Riemann pour retrouver les résultats de l'exercice 1.3



• ***ex.1.3.a***

$$I = \oint_{C^+} \underbrace{(2xy - x^2)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x+y^2)}_{Q(x,y)}dy = \frac{1}{30}$$

ici :

$$\left.\begin{array}{l} -\partial_y P = -2x \\ \partial_x Q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} (-\partial_y P + \partial_x Q)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2x+1)dy$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{30} \quad \text{CQFD}$$

• ***ex. 1.3.b***

$$J = \oint_{C^+} \underbrace{x}_{P(x,y)} dx + \underbrace{y}_{Q(x,y)} dy = 0$$

ici :

$$\left.\begin{array}{l} -\partial_y P = 0 \\ \partial_x Q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{(-\partial_y P + \partial_x Q)}_{0} dxdy = 0 \quad \text{CQFD}$$

• ***ex. 1.3.c***

$$K = \oint_{C_2^+} \underbrace{(x^2+y^2)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x^2-y^2)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

ici :

$$\left.\begin{array}{l} -\partial_y P = -2y \\ \partial_x Q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} (-\partial_y P + \partial_x Q)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-2y+2x)dy$$

$$= \cdots$$

$$= 0 \quad \text{CQFD}$$