2. éq différentielles du 1er ordre

Ex. 2.1 A variables séparées

1) Résoudre

a) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$. Quelle solution vérifie $y(1) = 2$?

c) $\frac{y'}{2x+3x^2} = 1+y$, avec la C.L. $\lim_{0} y(x) = 0$

2) la décharge d'un condensateur C dans une résistance R est décrite par :

$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ où q(t) est la charge du condensateur C à l'instant t.

Déterminer q(t) sachant qu'initialement le condensateur porte une charge q_0.

Ex. 2.2.1 linéaires, avec 2nd mb « simple » : méthode basique

Résoudre

a) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 - x + 1$

b) $\frac{dy}{dx} - 2y = 3e^x + 2x^2$

Ex. 2.2.2 cas général : variation de la constante

Résoudre

a) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$

b) $y' + (\cos x)y = \cos x$; déterminer la sol $\xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$

c) $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$. Existe-t-il des solutions sur $]-\infty, +\infty[$?

2. équations différentielles du 1er ordre

Ex. 2.1 A variables séparées

1) Résoudre a) $\frac{dy}{dx}+2xy=0$

éq. diff lin (du 1er ordre) sans second mb, écrite sous forme canonique (i.e. $\frac{dy}{dx}+g(x)y(x)=h(x)$ *)*

(a) $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-2xy$

Soit $\frac{dy}{y}=-2x\,dx$ (séparation des var), $\forall y\neq 0$

Théo (admis) : pour éq diff lin sans 2nd mb, y=0 tjrs sol

$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -2x\,dx+C\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y|=-x^2+\ln|K|$, $K\neq 0$

$\Rightarrow \ln|y/K|=-x^2$

$\Rightarrow |y/K|=e^{-x^2}$

$\Rightarrow y(x)=\underbrace{K}_{(\pm\text{ inutile})}e^{-x^2}$, $\overbrace{\cancel{y\neq 0}}^{(K=0\Leftrightarrow y=0)}$

Ne pas conclure tout de suite : il faut vérifier si la sol exclue (K=0⇔y=0) n'est effectiv. pas sol ou bien si elle a été exclue à cause de la méthode utilisée.

Ici, y=0 vérifie (a). Il en résulte que :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x)=Ke^{-x^2},\ K\in\mathbb{R},\ x\in\,]-\infty,+\infty[\\ \text{ou}\quad S=\left\{x\in\,]-\infty,+\infty[\,\mapsto Ke^{-x^2}, K\in\mathbb{R}\right\}\end{array}}$$

---

b) $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2$ (rem que ED ***non lin***.)

(b) $\Rightarrow \frac{dy}{(y-1)^2}=dx$ (sép. des var) $\forall y\neq 1$

$\Rightarrow \int\frac{dy}{(y-1)^2}=\int dx+K\in\mathbb{R}\ \Rightarrow \frac{1}{1-y}=x+K$, $y\neq 1$

$\Rightarrow \boxed{y=1-\frac{1}{x+K},\ x\neq -K}$

Ne pas conclure tout de suite : il faut vérifier si la sol exclue (y=1) n'est effectivt pas sol ou bien si elle a été exclue à cause de la méthode utilisée.

Ici, y=1 vérifie (b). Il en résulte que :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x)=1-1/(x+K),\ K\in\mathbb{R},\ x\in\,]-\infty,-K[\ \text{ou}\ ]-K,+\infty[\\ \text{ou}: S=\left\{x\in I_1\ \text{ou}\ I_2\mapsto 1-1/(x+K), K\in\mathbb{R}\right\}\end{array}}$$

Si on impose la C.L. : $y(1)=2\Rightarrow\boxed{K=-2}$

D'autre part, I doit contenir 1, d'où : $I=]-\infty,2[$ (-(-2)=+2) et sur I, la sol est : $\boxed{y=1-\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{2-x}}$

c) $\frac{y'}{2x+3x^2}=1+y$, avec la C.L. $\lim_0 y(x)=0$

éq. diff lin (du 1er ordre) avec second mb. Par commodité, écrivons-là sous *forme canonique* :

(c) $\Leftrightarrow\ y'-(2x+3x^2)y=2x+3x^2$

rem : Ici, cas partic où on peut séparer directt les var malgré la présence d'un second mb (cf + loin)

(c) $\Rightarrow \frac{dy}{1+y}=\left(2x+3x^2\right)dx$ (sép. des var)

$\Rightarrow \int\frac{dy}{1+y}=\int\left(2x+3x^2\right)dx+C\in\mathbb{R}$, $y\neq -1$

$\Rightarrow \ln|1+y|=x^2+x^3+\ln|K|$, $K\neq 0$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{1+y}{K}\right|=x^2+x^3\ \Rightarrow \left|\frac{1+y}{K}\right|=e^{x^2+x^3}\Rightarrow 1+y=\underbrace{K}_{\pm\text{ inutile}}e^{x^2+x^3}$

$\Rightarrow y=Ke^{x^2+x^3}-1$, $K\neq 0$ ($\Leftrightarrow y\neq -1$), $x\in\mathbb{R}$

On vérifie que y=-1 (⇔ K=0) est sol de (c). Il en résulte que :

$y(x)=Ke^{x^2+x^3}-1$, $K\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ (sol cont. dériv sur $\mathbb{R}$)

• *On impose la C.L.* : $\lim_0 y(x)=0\Rightarrow K-1=0\Rightarrow\boxed{K=1}$

Donc *LA* sol qui vérifie la C.L. est :

$\boxed{y(x)=e^{x^2+x^3}-1\ ,\ x\in\mathbb{R}}$ (sol continûment dériv sur $\mathbb{R}$)

---

2) la décharge d'un C ds une R est décrite par :

$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$ où q(t) est la charge de C à t.

Déterminer q(t) sachant que q(0) = q_0.

Rem : un cond. est un réservoir d'E électrique. Il est formé de <u>2 plaques</u> conductrices en regard l'une de l'autre, séparées par un isolant. On le <u>charge</u> en appliquant une tension (U) à ses bornes, selon : Q=C.U
Où C = capacité électr. du cond (typiq ~µF)

(2) $\Leftrightarrow \frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{RC}=0$ (forme canon éq. diff lin 1er ordre)

Ici on cherche des sol sur $]0,+\infty[$ (le circuit est branché à t=0 !) avec une C.I. $q(0)=q_0$

: en phys les grandeurs sont dimensionnées !

$[q]=\text{Coulomb}\quad i=\frac{dq}{dt}\Rightarrow \text{Coul}=A\cdot s$

$[R]=\text{Ohm}\ ,\ [C]=\text{Farad}$

et on ne peut + (-) que des grandeurs de m̂ dim

$\Rightarrow [RC]=T$ (caract du circuit) (typiq R~kΩ ⇒ RC~ms)

$(2) \Rightarrow \int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC} + K \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$

$\Rightarrow \ln|q| = -\frac{t}{RC} + \ln|K_1|$, où $K = \ln|K_1|$, $K_1 \neq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\ln|q| - \ln|K_1|}_{\ln|q/K_1|} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \left|\frac{q}{K_1}\right| = e^{-t/RC} \Rightarrow q(t) = \cancel{(\pm)}\, K_1 e^{-t/RC}$

On a exclu q=0 ($\Leftrightarrow K_1=0$) ci-dessus, mais lorsqu'on injecte q=0 dans (2), on constate que (2) est encore vérifiée. Donc : $q(t) = K_1 e^{-t/RC}$, $K_1 \in \mathbb{R}$

• *On impose la C.I :* : $\lim_0 q(t) = q_0 \Rightarrow q(0) = q_0 \Rightarrow \boxed{K_1 = q_0}$

Donc LA sol qui vérifie la C.I. est : $\boxed{q(t) = q_0 \cdot e^{-t/RC}}$

Rem : sol cohérente avec [RC] = T (= « cte de tps du circuit RC » ; (**tjrs** vérifier l'homogénéité des sol en phys)

Ex. 2.2 linéaires, avec 2nd mb « simple » : méthode basique

a) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 - x + 1$

Rem : ici on ne peut pas *directet* séparer les var … On peut utiliser la méth "basique" ou la méth du 2.3

• *résol. de l'éq. sans 2nd mb* : $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

on arrive à $\boxed{y = Ce^{-2x} \ , C \in \mathbb{R} = y_0}$

• *recherche de sol. partic*. y_1 :

Comme le 2nd mb est un poly d'ordre 2, on injecte une sol partic du $\hat{m}$ type et on procède par identificat

on injecte $y_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\left(\Rightarrow y_1' = a_1 + 2a_2 x\right)$ et

y_1 sol de (a) $\Leftrightarrow$ y_1 vérifie (a)

$\Leftrightarrow \left(a_1 + 2a_2 x\right) + 2\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = x^2 - x + 1$

$\Leftrightarrow 2a_2 x^2 + 2\left(a_1 + a_2\right)x + a_1 + 2a_0 = x^2 - x + 1$

Par identification :

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1/2} \\ 2\left(a_1 + 1/2\right) = -1 \Rightarrow \boxed{a_1 = -1} \\ 2a_0 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1} \end{cases}$$

finalement : $\boxed{y = y_0 + y_1 = Ce^{-2x} + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 \quad , x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}}$

b) $\frac{dy}{dx} - 2y = 3e^x + 2x^2$

• résol. de l'éq. sans second mb : $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(c'est la $\hat{m}$ que celle de l'ex. (a), au signe près !)

• *recherche de sol. partic*.

on injecte un sol de $\hat{m}$ forme que h(x), i.e. :

$y_1 = Ae^x + Bx^2 + Cx + D$ $\left(\Rightarrow y_1' = Ae^x + 2Bx + C\right)$ et on procède par identification :

(y_1 est sol de (b) $\Leftrightarrow$ y_1 vérifie (b)

…

On arrive à :

$\boxed{y = y_0 + y_1 = Ce^{2x} - 3e^x - x^2 - x - \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}}$

Ex. 2.3 variation de la constante

a) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ *(ED lin avec 2nd mb sous forme canon.)*

Rem : on peut vérifier que la méth. basique ne permet pas d'aboutir ici (explications au & 3.2)

• *Résol. de l'éq sans second mb* : $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ **(a_0)**

déf $\forall x \neq 0$ (en fait cela dép de y !) $\Rightarrow$ on cherche des sol sur $I_1 = \left]-\infty, 0\right[$ et sur $I_2 = \left]0, +\infty\right[$ et à la fin on regarde s'$\exists$ des sol sur $\mathbb{R}$.

Soit $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + K \in \mathbb{R}$, $\cancel{y \neq 0}$, $x \neq 0$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|x| \Rightarrow \left|\frac{y}{C}\right| = |x| \Rightarrow y = \cancel{\pm} Cx$, où $K = \ln|C|$, $(C \neq 0)$

$\Rightarrow y = y_0 = C_i x$,avec $x \in I_1$ et $C_1 \neq 0$ ou $x \in I_2$ et $C_2 \neq 0$

(y_0 car sol de l'éq. sans second mb)

Ne pas conclure tout de suite : $C_i=0$, ($\Leftrightarrow y_0=0$) a été exclue mais $y_0=0$ est sol de (a_0). D'autre part, on voit que y_0 est déf en x=0 (de $\hat{m}$ (a) : $y_1/x = C_i$)
Donc la sol géné de l'éq *sans second mb* est :

$\boxed{y_0 = Cx\ \mathbf{(a_1)}, \text{avec } x \in I = \left]-\infty, +\infty\right[\text{ et } C \in \mathbb{R}}$.

• *Variation de la Cte* ((a_1) ds (a) mais avec $C \to C(x)$)

$$\left(C(x)\cdot x\right)' - \frac{C(x)\cdot x}{x} = x^2 \Leftrightarrow \underbrace{C'(x)}_{dC/dx}\cdot x + \underbrace{C(x) - C(x)}_{=0,\ OK} = x^2$$

Soit $\underbrace{dC}_{diff} = x dx \Rightarrow \int \frac{dC}{dx} dx = \int x dx + \alpha \Rightarrow \boxed{C(x) = \frac{x^2}{2} + \underset{(\mathbb{R})}{\alpha}}$ **(a_2)**

• **(a_2)** ds **(a_1)** : $y = \left(\frac{x^2}{2} + \alpha\right)x = \frac{x^3}{2} + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Donc, finalement, la sol géné de (c) est :

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{2} + \alpha x \text{ , où } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\text{ et } \alpha \in \mathbb{R}}$$

---

b) $y' + (\cos x)y = \cos x$; déterminer les sol $\xrightarrow[x \to \pi/2]{} 0$

ED lin écrite sous forme canonique

• *Résol. de l'éq sans 2nd mb* : $\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$ **(b_0)**

on arrive facilt à

$$\boxed{y(x) = y_0(x) = Ke^{-\sin x}, x \in I, K \in \mathbb{R}} \textbf{ (b}_1\textbf{)}$$

• *Var. de la Cte* ((b_1) ds (b) mais avec $K \to K(x)$)

$$\left(K(x)\cdot e^{-\sin x}\right)' + \cos x \cdot K(x) \cdot e^{-\sin x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow K'(x)\cdot e^{-\sin x} + \underbrace{K(x)\cdot(-)\cos x \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot K(x)\cdot e^{-\sin x}}_{=0,\ OK} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dK}{dx} = e^{+\sin x}\cos x$$

$$\Rightarrow \int \frac{dK}{dx} dx = \underbrace{\int e^{+\sin x} \overbrace{\cos x\, dx}^{d\sin(x)}}_{e^U dU} + C \Rightarrow K(x) = e^{+\sin x} + C \in \mathbb{R}$$

• D'où, en reportant ds (b_1) :

$$y(x) = (e^{\sin x} + K)\cdot e^{-\sin x} = \boxed{1 + K \cdot e^{-\sin x} = y(x)}$$

• En imposant la cond aux lim :

$$\lim_{\pi/2} y(x) = 0 \Rightarrow 1 + K \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{K = -e}$$

• Finalement : $\boxed{y(x) = 1 - e^{(1-\sin x)}}$

Rem : comme à l'ex. 2.1.c), ici on aurait pu séparer les var. directement (malgré le second mb) : le faire en ex.. C'est tjrs le cas lorsque l'on a : $y' + g(x)y = \pm g(x)$

---

c) $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$

(c) s'écrit encore : $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x^2}$
(pour $x \neq 0$)

• *Résol. de l'éq sans 2nd mb* : $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$ **(c_0)**

(On cherche des sol sur $I_1 = \left]-\infty, 0\right[$ et sur $I_2 = \left]0, +\infty\right[$)

On arrive facilt à :

$$y(x) = \frac{K_i}{x^2} \quad \text{où } K_{i=1} \neq 0 \text{ et } x \in I_1 \text{ ou } K_{i=2} \neq 0 \text{ et } x \in I_2$$

En injectant la sol ds (c_0), on se rend compte que K=0 ($\Leftrightarrow$y=0) est également sol. Il en résulte que :

$$\boxed{y(x) = \frac{K_i}{x^2} \ \textbf{(c}_1\textbf{)} \text{ avec } K_{i=1} \in \mathbb{R} \text{ et } x \in I_1 \text{ ou } K_{i=2} \in \mathbb{R} \text{ et } x \in I_2}$$

Var. de la Cte (**(c_1)** ds **(c)** mais avec $K_i \to K_i(x)$)

On tombe sur

$$\int \frac{dK_i}{dx} dx = \int \frac{x^2(+1-1)}{1+x^2} dx + C \Rightarrow K_i(x) = x - \text{Arctan}(x) + C_i \in \mathbb{R}$$

• D'où, en reportant ds (c_1) :

$$\boxed{y(x) = \frac{x - \text{Arctan}(x) + C_i}{x^2} \text{ , } C_{i=1,2} \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ ou } x \in I_2}$$

• ***Existe-t-il des sol sur*** $\left]-\infty, +\infty\right[$?

C'est le cas ssi $\exists$ au moins une fonc cont. dériv. sur $\mathbb{R}$.

Ici, y n'est pas déf en 0 mais :

$$\lim_{0^{+,-}} y(x) = \frac{x - (x - x^3/3) + C_{+,-}}{x^2} = \lim_{0^{+,-}} y(x) = \frac{x}{3} + \frac{C_{+,-}}{x^2} = 0$$

si $C_i = 0$.

Donc la fonc déf par : $\tilde{y}(x) = \begin{cases} \frac{x - \text{Arctan}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

est cont sur $\mathbb{R}$.(prolongement par cont. de y).

Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Le pb de dériv. se pose seult en 0 : f dériv en 0 ssi

$$\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < \infty \text{ (existe et est finie). Or :}$$

$$\lim_0 \frac{\frac{x - \text{Arctan}(x)}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_0 \frac{x - \text{Arctan}(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(cf DL ds continuité, avec $x^2 \to x^3$)

la dérivée est-elle cont sur $\mathbb{R}$? Le pb se pose seult en 0. Or on voit que $\lim_{0^+} = \lim_{0^-} = \frac{1}{3}$. Donc f est cont. dériv. sur $\mathbb{R}$ CQFD