3. Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

***Ex. 3.1.1* Cas particulier**

1) Calculer le flux du rotationnel du champ vectoriel
$\vec{F} = xy^2\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j}$, à travers Σ_1, région comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$, pour $x \geq 0$.

2) Calculer le flux d'un champ magnétique :
$\vec{B} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$
à travers la surface $\Sigma_2 = [x_0, x_0 + L] \times [y_0, y_0 + H]$

***Ex. 3.2.2* Cas général**

Soit Σ_3 la frontière du solide fermé, formé par le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$.

Calculer $\iint_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ où $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\vec{k}$

4. Théorèmes liés au flux

Ex. 4.1 Théo de Stokes-Ampère

***Ex. 4.1.1* Cas particulier**

Calculer la circulation du champ vectoriel :
$\vec{A} = y\,\vec{i} - \sin x\,\vec{j}$
sur le chemin A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0), A(0,0).

1) Directement
2) En utilisant le théorème de Stokes-Ampère

***Ex. 4.1.2* Cas général**

Soit Σ le cône (ouvert) d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, avec $z > 0$. On oriente Σ "vers l'extérieur". On définit le champ de vecteurs $\vec{V}(-y, x, 1+x+y)$.

a) Calculer $\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right)$

b) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de S.A. (à faire seuls)

Ex. 4.2 Théo de Green-Ostrogradski

1) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = z\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x\vec{k}$ sur la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 4xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ à travers la surface du cube délimité par $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$

3) Montrer que le volume ϑ d'un corps limité par une surface $\left[\Sigma\right]$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\oiint_\Sigma \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}\, d\sigma$. En déduire la valeur du flux du champ vectoriel $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ à travers la surface totale du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ situé entre $z = 0$ et $z = h$

3. Flux d'un ch vect à travers une surf

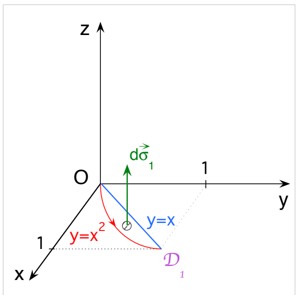
Ex. 3.1.1 Cas particulier

*** Lorsque la surf d'int est plane et // xOy (i.e. $\Sigma = \mathcal{D}$), un calcul de flux est une int double ordinaire (= cas particulier) ***

1) Calculer le flux du rotationnel du champ vectoriel :

$$\vec{F} = xy^2\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j}$$

à travers Σ_1, région comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$, pour $x \geq 0$.



Il s'agit de calculer :

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}\right)\cdot d\vec{\sigma}$$

• On commence par calculer le rot de F :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix}\partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} xy^2 \\ x+y \\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-2xy\end{vmatrix} = \boxed{(1-2xy)\vec{k} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}}$$

• on oriente la surf ds le sens trigo (arbitraire, mais il faut le préciser !) $\Rightarrow$ $d\vec{\sigma}$ suivant Oz et orientée vers les val positives

• $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$ et $d\vec{\sigma}$ étant colin, le prod scal est immédiat et :

$$\iint_{\Sigma_1}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}\right)\cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\mathcal{D}_1}(1-2xy)dS = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(1-2xy)dy$$

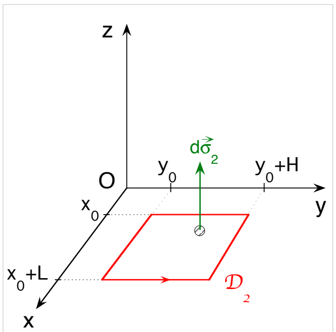
$$= \cdots$$

$$= \boxed{\frac{1}{12} = \iint_{\Sigma_1}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}\right)\cdot d\vec{\sigma}}$$

2) Calculer le flux d'un champ magnétique :

$$\vec{B} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

à travers le rectangle horizontal $[x_0, x_0+L]\times[y_0, y_0+H]$



• on oriente la surf ds le sens trigo (arbitraire, mais à préciser !) $\Rightarrow$ $d\vec{\sigma}$ suivant Oz et orientée vers les val positives

Ici :

$$\vec{B}\cdot\underbrace{d\vec{\sigma}}_{dxdy\,\vec{k}} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)}e^{-\beta(y-y_0)}dxdy$$

D'où

$$\iint_{\Sigma_2}\vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\mathcal{D}_2} B_0 e^{-\alpha(x-x_0)}e^{-\beta(y-y_0)}\,dx\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+L}dx\int_{y_0}^{y_0+H}dy\,B_0 e^{-\alpha(x-x_0)}e^{-\beta(y-y_0)}$$

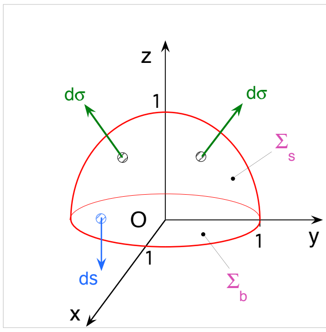
$$= \cdots$$

$$= \boxed{B_0\frac{(1-e^{-\alpha L})(1-e^{-\beta H})}{\alpha\beta} = \iint_{\Sigma_2}\vec{B}\cdot d\vec{\sigma}}$$

Ex. 3.1.2 Cas général

Soit Σ_3 la frontière du solide <u>fermé</u> par le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$.

Calculer $\int_{\Sigma_3}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ où $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\vec{k}$



Att : ici, Σ_3 se compose de <u>*deux surf*</u> : une surf supérieure parabolique Σ_s et une surf de base circulaire $\Sigma_b = S_b$ (fig). Vu que Σ_3 est fermée, on adopte la convention de l'orientation positive "vers l'extérieur" (Ch.4, § 2.1).

Cela implique que Σ_s est orientée vers le haut et on peut appliquer la formule du cours, avec $\mathcal{D}$ = projection de Σ_s sur le plan xOy, donc le disque $x^2 + y^2 \leq 1$. On a donc :

$$\iint_{\Sigma_s}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{D}}\left(-F_x\,\partial_x z - F_y\,\partial_y z + F_z\right)dS$$

$$= \iint_{\mathcal{D}}\left(1 + 4xy - x^2 - y^2\right)dS$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1+4\rho^2\cos\theta\sin\theta - \rho^2\right)r\,dr}_{\text{autre notation pour } \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+4\rho^2\cos\theta\sin\theta-\rho^2\right)r\,dr\,d\theta} = \boxed{\frac{\pi}{2} = \iint_{\Sigma_s}\vec{F}\cdot d\vec{S}}$$

(notation fréq en phys : att à ne pas intégrer dθ avant d'avoir calculé l'intégrale en ρ, car fonc(θ))

• le disque S_b est orienté vers le bas, de sorte que son vecteur normal est $\vec{n} = -\vec{k}$. D'où :

$$\iint_{S_b}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_b}\vec{F}\cdot(-\vec{k})ds = \iint_{\mathcal{D}}(-z)dS = \iint_{\mathcal{D}}(0)dS = 0$$

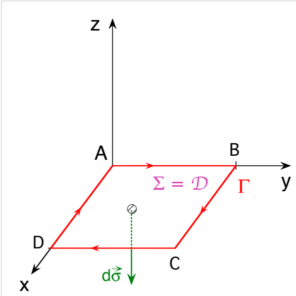
puisque z=0 sur S_b.

Enfin, par déf, $\boxed{\iint_{\Sigma_3}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_s}\vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_b}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2}}$

4. Théorèmes liés au flux

Ex. 4.1 Théo de Stokes-Ampère

***Ex. 4.1.1* Cas particulier**



Rem "cas particulier " lorsque la surface d'intégration est ***plane*** et // (xOy) $\Rightarrow$ ($\Sigma = \mathcal{D}$) et on retrouve la formule de Green Riemann (vue au §2)

Calculer la circulation du champ vectoriel :

$$\vec{A} = y\,\vec{i} - \sin x\,\vec{j}$$

sur le chemin A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0), A(0,0).

1) Directement **(*à faire seuls*) (cf fig au 2))**

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{dOM} = \oint_\Gamma y\,dx - \sin x\,dy = \underbrace{\int_{\overset{\frown}{AB}}}_{\substack{x=0\\ \Rightarrow dx=0}} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{BC}}}_{\substack{y=1\\ \Rightarrow dy=0}} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{CD}}}_{\substack{x=1\\ \Rightarrow dx=0}} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{DA}}}_{\substack{y=0\\ \Rightarrow dy=0}}$$

$$= \cdots = \boxed{1+\sin 1 = \oint_\Gamma y\,dx - \sin x\,dy}$$

2) En utilisant le théorème de Stokes-Ampère

$$\left\{\iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)\cdot d\vec{\sigma} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{dOM}\right\}$$

ici :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$= \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y\\ -\sin x\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ -\cos x - 1\end{vmatrix}$$

$$\iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)\cdot d\vec{\sigma} = \iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)\cdot(-\vec{k})\,d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} -(-\cos x - 1)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 (\cos x + 1)\,dx$$

$$= \boxed{(\sin 1 + x) = \iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)\cdot d\vec{\sigma}}$$

***Ex. 4.1.2* Cas général**

1) Soit Σ le cône (ouvert) d'éq. $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, avec $z > 0$. On oriente Σ "vers l'ext". On déf le ch. de vect $\vec{V}(-y, x, 1+x+y)$.

a) Calculer $\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right)$

rem ici, une seule surface (cône *ouvert*) non plane ($\neq$ du 2) (faire fig). ($\tan\alpha = 1 \;\Rightarrow \alpha = \pi/4$)

cours (§ 3) $\Rightarrow$ si on pose $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{W}$, alors (formule pratique)

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{W}\cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\mathcal{D}} \left(-W_x\,\partial_x g - W_y\,\partial_y g + W_z\right) dS}$$

• *Calculons* $\vec{W} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}-y\\ x\\ 1+x+y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\ -1\\ 2\end{vmatrix} = \vec{W}\,.$$

• *D'où le flux* : $\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right)$

$$\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right) = \iint_\Sigma \vec{W}\cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\mathcal{D}} \left(-W_x\,\partial_x g - W_y\,\partial_y g + W_z\right) dS$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\right) dS = \Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right)$$

Étant donné la sym de $\mathcal{D}$ et de la fonc à intégrer, passons en polaires : sur $\mathcal{D}$, $\rho\in[0,1]$ et $\theta\in[0,2\pi[$ et

$$\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos\theta - \sin\theta + 2)\,\rho\,d\rho$$

$$= \boxed{2\pi = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right)}$$

b) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de S.A.

Long ! (à faire seuls pour s'entrainer…)

ici Γ est le cercle du plan xOy de centre O et de rayon 1 , orienté ds le sens trigo ….
Noter que sur Γ (courbe qui délimite $\mathcal{D}$) qui à pour éq. : $x^2+y^2=1$, $z=0 \Rightarrow dz=0$. D'où :

$$\oint_\Gamma \vec{V}\cdot\overrightarrow{dOM} = -y\,dx + x\,dy + \underbrace{(1+x+y)\,dz}_{z \text{ et donc } dz=0,\text{sur } \Gamma}\,.$$

Pour calculer cette int curv I (cas Γ quelconque) il faut décomposer Γ en 4 quarts de cercle

Ex. 4.2 Théo de Green-Ostrogradski

1) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = z\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x\,\vec{k}$ sur la sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$

On peut calculer le flux directement ou (bcp plus rapide et facile !) à partir du théo de Gr.Os.

• à partir du théo de Gr.Os :

On calcule d'abord :

$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \partial_x(z) + \partial_y(y) + \partial_z(x) = 1$ (déf $\forall(x,y,z)\in\mathcal{V}$)

La sphère unité, ferme la boule B d'éq. $x^2+y^2+z^2\le 1$.
Le théo de Gr-Os conduit à :

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{F}\,dV = \iiint_{\mathcal{V}} 1\,dV = V_{(\text{boule})} = \frac{4}{3}\pi$$

rem : bien faire att à ce que la div soit déf $\forall(x,y,z)\in\mathcal{V}$, sinon l'int triple n'a pas de sens !

• calcul direct (plus long et plus difficile, donc méthode moins intéressante ! Mais le faire à la maison pour s'entrainer ...)

---

2) (vu en cours) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 4xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ à travers la surface du cube délimité par $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$

• à partir du théo de Gr.Os :

On calcule d'abord **(**la**)** :

$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \partial_x(4xy) + \partial_y(-y^2) + \partial_z(yz) = 4y - 2y + y = 3y$

(déf $\forall (x,y,z) \in \mathcal{V}$)

Le théo de Gr-Os conduit à :

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_{\mathcal{V}} 3y\,dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2}$$

• calcul direct (il faut calculer Φ à travers les 6 faces du cube) long ! (mais le faire pour s'entrainer ...)

---

3) Montrer que le vol. $\mathcal{V}$ d'un corps limité par une surface $[\Sigma]$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\oiint_\Sigma \overline{OM}\cdot d\vec{\sigma}$. En déduire la val. du flux du ch. vect. $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ à travers la surf. tot. du cyl. (i.e. le ***cylindre fermé***) $x^2 + y^2 = R^2$ situé entre $z = 0$ et $z = h$

(à partir du théo de Gr.Os)

On calcule d'abord la div. : (en cartés. par ex)

$\operatorname{div}\vec{r} = \nabla\cdot\vec{r} = \partial_x(x) + \partial_y(y) + \partial_z(z) = 3$ (déjà vu !)

(déf $\forall (x,y,z) \in \mathcal{V}$)

d'où : $\iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{3}\,dV = 3\mathcal{V}$

Le théo de Gr-Os s'écrit : $\oiint_\Sigma \vec{r}\cdot d\vec{\sigma} = \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{r}\,dV}_{3\mathcal{V}}$

D'où $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\iint_\Sigma \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$ CQFD

L'application de ce résultat au cylindre, montre que le flux de $\vec{r}$ à travers (toute) sa surface (y compris les disques de base) est égale à 3 fois son volume, soit $3\cdot\pi R^2 h$
