1. Intégrales doubles

Ex. 1.3 en cartésiennes

Calculer

1) $I_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} xy\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \le y \le \sqrt{x}\right\}$, de deux façons différentes.

2) $I_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} (x+y)\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \ge 0,\ 2x^2 \le y \le 3\right\}$, de deux façons différentes

3) Vérifier puis expliquer pourquoi :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy \ne \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx \quad \underline{\textbf{\textit{on donne}}} : \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

4) $I_4 = \iint_{\mathcal{D}_4} \frac{x\sin y}{1+x^2}\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_4 = [0,1]\times[0,\pi/2]$

5) $I_5 = \iint_{\mathcal{D}_5} x\sin(xy)\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_5 = [0,\pi]\times[0,1]$

Ex. 1.3.3 en polaires

Calculer (où R>0)

1) $J_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} xy\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \le R^2 ,\ x \ge 0, y \ge 0\right\}$

a) en cartésiennes
b) en polaires

2) $J_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} x^2\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \le R^2 ,\ x \ge 0\right\}$

2. Intégrales de surface

Calculer

1) l'aire d'une sphère de rayon R puis celle d'un cylindre de révolution *fermé* de rayon R et de hauteur R, en utilisant des intégrales de surface.

2) l'aire de la portion du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ qui se trouve sous le plan $z = 9$

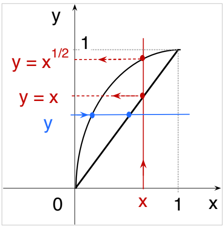
1. Intégrales doubles

Ex. 1.3 en cartésiennes

Calculer

- $I_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} xy\,dx\,dy$, où

$\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \le y \le \sqrt{x}\right\}$



En pratique, en cartés. ***vérifier*** que :

1) $\mathcal{D}$ est simplt connexe (ne pas essayer de représenter la fonc à intégrer, mais seult $\mathcal{D}$).

2) f est cont. (pas de singularités !) sur $\mathcal{D}$ (OK ici)

i) *première méthode* : on fixe $x\left(x \in [0,1]\right)$: dessin $\Rightarrow$ y varie entre x et $\sqrt{x}$, et

$$I_1 = \int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}} xy\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}(x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{24} = I_1}$$

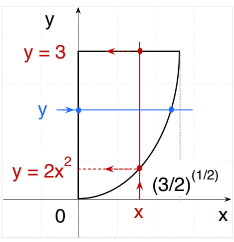
i) *2ème méthode* : on fixe $y\left(y \in [0,1]\right)$: dessin $\Rightarrow$ x varie entre y^2 et y (en effet, $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$) (!! à l'ordre !!)

$$I_1 = \int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} yx\,dx\right)dy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{y} dy = \int_0^1 y\left(\frac{y^2-y^4}{2}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{24} = I_1}$$

2) $I_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} (x+y)\,dx\,dy$, où

$\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \ge 0,\ 2x^2 \le y \le 3\right\}$



1) on trace $\mathcal{D}_2$ (simplt conn. OK)
2) on vérif que f est cont. sur $\mathcal{D}_2$

i) *première méthode* : on fixe $x\left(x \in \left[0, \sqrt{3/2}\right]\right)$: dessin $\Rightarrow$ y varie entre $2x^2$ et 3 (!! à l'ordre !!), et

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\int_{2x^2}^{3} (x+y)\,dy\right)dx = \int_0^{\sqrt{3/2}}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{2x^2}^{3} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3/2}} (3x + \frac{9}{2} - 2x^3 - 2x^4)\,dx = \boxed{\frac{9}{8} + \frac{9\sqrt{6}}{5} = I_2}$$

i) *2ème méthode* : on fixe $y\left(y \in [0,3]\right)$: dessin $\Rightarrow$ x varie entre 0 et $\sqrt{y/2}$ (en effet, $y = 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y/2}$) (!! à l'ordre !!)

$$I_2 = \int_0^3\left(\int_0^{\sqrt{y/2}} (x+y)\,dx\right)dy = \int_0^3\left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^{\sqrt{y/2}} dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{y}{4} + y\sqrt{\frac{y}{2}}\right)dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^3 \boxed{\frac{9}{8} + \frac{9\sqrt{6}}{5} = I_2}$$

3) Vérifier puis expliquer pourquoi :

$$\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy \neq \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx$$

on donne : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

Le pb (théo de Fubini qui n'est pas vérifié) vient de ce que la fonc présente une singularité en (0,0) $\in \mathcal{D}$ $\Rightarrow$ f pas intégrable sur $\mathcal{D}$ ... En faisant le calcul sans réfléchir, on trouve :

$$\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_{-1}^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{-1}^1 dy = -\int_{-1}^1 \frac{-2}{1+y^2}dy$$

$$= -2\left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_{-1}^1 = -\pi$$

$$\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \int_{-1}^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{-1}^1 dx = -\int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2}dx$$

$$= +2\left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_{-1}^1 = +\pi$$

4) $I_4 = \iint_{\mathcal{D}_4} \frac{x\sin y}{1+x^2}dx\,dy$, où $\mathcal{D}_4 = [0,1]\times[0,\pi/2]$

Ici f cont sur $\mathcal{D}$ simplt conn. De plus $\mathcal{D}_3$ est rectangulaire **et** f(x,y) = g(x) * h(y) $\Rightarrow$ l'int double se ramène à un produit de deux int simples

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y\,dy = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \cdot \left[-\cos y\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{\ln 2}{2} = I_3}$$

5) $I_5 = \iint_{\mathcal{D}_5} x\sin(xy)\,dx\,dy$ où $\mathcal{D}_4 = [0,\pi]\times[0,1]$

Ici f cont sur $\mathcal{D}$ simplt conn. De plus $\mathcal{D}_5$ est rectangulaire **mais** f(x,y) ≠ g(x) * h(y) $\Rightarrow$

$$I_4 = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 x\sin(xy)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi}\left[-\cos(xy)\right]_0^1 dx$$

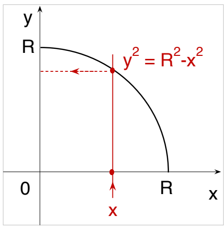
$$= \int_0^{\pi} (1-\cos x)\,dx = \left[x - \sin x\right]_0^{\pi} = \boxed{\pi = I_4}$$

Rem : *ici, très facile si on commence par fixer x, plus difficile ds l'autre sens !*

Ex. 1.3.3 en polaires

1) $J_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} xy\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_1$ est le quart de disque de rayon R, tq: $x^2+y^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

a) en cartésiennes



$$J_1 = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^R x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

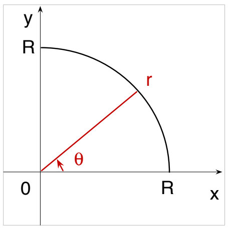
$$= \frac{1}{2} \int_0^R x\left(R^2-x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^R - \left[\frac{x^4}{2 \cdot 4} \right]_0^R = \boxed{\frac{R^4}{8} = J_1}$$

b) en polaires (annexe 4)

rem : en pol, $\mathcal{D}$ doit être connexe, mais pas nécessairet simplt connexe.

• f est cont. sur $\mathcal{D}$ (OK)



En polaires : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dS = \rho\,d\rho\,d\theta$

On fixe $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on voit que $\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ρ est indép de θ et $\rho \in [0, R]$ d'où :

$$J_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^R \rho^3\,d\rho$$

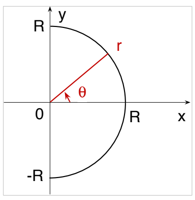
$$= \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \boxed{\frac{R^4}{8} = J_1}$$

c) conclusion

ici le calcul en polaires est « très simple », et en cartésiennes ce n'est pas beaucoup plus « compliqué ». Ce n'est plus le cas pour J2, où le calcul en cartésiennes est plus délicat …

2) $J_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} x^2\,dx\,dy$, où $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le R\ ,\ x \ge 0 \right\}$

Ici, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\forall\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \in [0, R]$. D'où :



$$J_2 = \iint_{\mathcal{D}_2} \rho^2 \cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} d\theta \cdot \int_0^R \rho^3\,d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \boxed{\frac{\pi R^4}{8} = J_2}$$

2. Intégrales de surface

Calculer

1) l'aire d'une sphère de rayon R et d'un cylindre de rayon R et de hauteur R, en utilisant des int. de surface.

Rem : Comme tjrs, on a intérêt à utiliser *les coordonnées les + adaptées à la sym du pb*. Ici :

• aire de la ***sphère***

$\Rightarrow$ utiliser les coord. sphériques et ds ce syst de coord. on fait les calculs directement sur Σ (i.e. $\mathcal{D}(u,v) = \Sigma(u,v)$).

On a alors (cf Annexe 4) : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

$\rightarrow$ On a besoin de l'élém. de surf. ($d\sigma$) en coord. sphériques :

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi} \right\| d\theta\,d\varphi$$

On arrive facilement à $\boxed{d\sigma = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$

Rem : Inutile de faire ce calcul à chaque fois : ***on peut retenir que*** l'on obtient l'élém de surf $d\sigma$ en $\times$ les composantes des deux vect tan à la surf du déplact élém (en sphériques : $\vec{e}_\theta$ (polaire) et $\vec{e}_\varphi$ (azimuta)).

Donc $\Sigma_1(u,v) = \Sigma_1(\theta,\varphi)$ et *sur la sphère de rayon R*, on a :

$\boxed{r = R = Cte}$, $\theta(\text{polaire}) \in [0, \pi]$, $\varphi(\text{azimutal}) \in [0, 2\pi[$

Il en résulte :

rem : pour une surf ***fermée*** on note: $\oiint_{\Sigma_1} d\sigma$

$$\text{Aire}\left(\Sigma_1 = \text{sphère}\right) = \oiint_{\Sigma_1} d\sigma = R^2 \oiint_{\Sigma_1} \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \ldots = 4\pi R^2$$

• cylindre *fermé* , base rayon R et hauteur R

"*fermé*" $\Leftrightarrow$ il faut prendre en compte les surf. des disques aux extrémités.

Ici, ce sont les coord. cylindriques qui sont indiquées. Pour ce syst de coord, on peut encore faire les calculs directement sur Σ (i.e. $\mathcal{D}(u,v) = \Sigma(u,v)$).

En coord. cylindriques, le vect position est donné par (Annexe 4) : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z} \Rightarrow \boxed{d\sigma = R\,d\theta\,dz}$

Donc $\Sigma_2(u,v) = \Sigma_2(\theta,z)$ et *sur le cyl de rayon R* on a :

$\boxed{\rho = R = Cte}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, R]$. Il en résulte :

$$\text{Aire}\left(\text{cylindre}\right) = \oiint_{\Sigma_2} d\sigma = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz + 2\int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi R^2$$

2) l'aire de la portion du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ qui se trouve sous le plan $z = 9$

On trace : $\left\{M\left(x, y, z = x^2 + y^2\right)\right\}$.

• on rem que $f(x,y) = \text{fonc}(x^2 + y^2)$
$\Leftrightarrow$ *f présente une sym axiale d'axe Oz en dim3*.

Se placer en x=0 ,tracer f(y) (parabole) puis utiliser la sym de révolution autour de Oz pour en déduire l'allure de f (= paraboloïde)

• Par ailleurs, le plan $z = 9$, coupe le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ selon le cercle : $x^2 + y^2 = 9$. Par conséquent, la surface cherchée se trouve au dessus du disque $\mathcal{D}$, centré à l'origine et de rayon 3 (faire fig)

Ici, ce sont donc les coord cartés. qui sont les + indiquées (cours § 2.3.1) :

$$\text{Aire} = \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{F(x,y,z)}_{=1 \text{ pour aire}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$
$$= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dx\, dy$$

$\rightarrow$ Etant donné la forme de $\mathcal{D}$ et l'existence de la variable $x^2 + y^2 = \rho^2$, il semble naturel de passer en polaires :

$$\text{Aire} = \int_0^3 \underbrace{\sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho}_{\sqrt{U} \cdot 1/8\, dU} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) = \text{Aire}}$$