## 1. Intégration : méthodes courantes

***Ex. 1.2.1*** par primitive

1) $\int (\tan^2 x + 1)\,dx$ ***(cours)*** 2) $I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{3/2} \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)dx$

***Ex. 1.2.2*** **:** par décomposition en somme

1) $\int \tan^2 x\,dx$ ***(cours)***

2) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ ***(cours)*** , $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$

3) $\int \cos^2 x\,dx$ $\int \cos^4 x\,dx$

4) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

***Ex. 1.2.3*** **:** par parties

- **Ex.1.2.3.a :** ***décomposition évidente***

0) $\int \ln x\,dx$ ***(cours)*** 1) $\int \text{Arcsin} x\,dx$

2) $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$ ***(cours)*** 3) $\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(1+x^2)\,dx$

- **Ex.1.2.3.b : décomposition pas évidente**

1) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$

2) $I = \int_0^{\pi/6} e^{-2t}\cos(3t)\,dt$

***Ex. 1.2.4*** **:** par changement de variable

- **Ex.1.2.4-1 :** ***En faisant apparaître dU***

0) $\int \sin x \cos x\,dx$ ***(cours)*** 1) $\int \frac{2x}{x^4+1}dx$

2) $\int \tan x\,dx$ ***(cours)*** 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$ 4) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$ 5) $\int \frac{dx}{\tan^3 x}$

6) $\int \frac{dx}{e^x+1}$

- **Ex.1.2.4-2 :** ***En introduisant $\phi$ pour simplifier f***

$I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ , $J = \int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$

## 1. Intégration : méthodes courantes

***Ex. 1.2.1*** par primitive

utiliser le tableau des primitives donné en Annexe 2 du poly de cours

1) Ne pas oublier la const lorsqu' ∄ de bornes.

---

2) $I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{3/2} \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)dx$

*(Intégrale mise pour avoir un exemple de fonction discontinue (1ère espèce) sur l'intervalle d'intégration)*

Rem : $\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \begin{cases} x \text{ si } x \in ]-1,1[ \\ 2 \text{ périodique} \end{cases}$

(non déf en $x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ (tan non déf))

fonc discontinue (1ère espèce) en $x = 1$ :

$I_2 = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{3/2}(x-2)dx$ (ou $I_2 = \int_{-1}^{-1/2} x\,dx + \int_0^1 x\,dx$)

ou résolution graphique ! $\boxed{I_2 = \frac{1}{8}}$

---

***Ex. 1.2.2*** **:** par décomposition en somme

1) $\int (\tan^2 x + 1) - 1\,dx$ $\quad(\tan x - x + K \in \mathbb{R})$

---

2) • $\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx$ $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

• $\int_0^1 \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx$ $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$

---

3) a) linéariser cos²(x) (rappels de trigo en annexe 1 – on peut leur rappeler en TD comment retrouver ces formules ...)

b) $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 dx$ $\left(\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \in \mathbb{R}\right)$

---

4) $\int \frac{(1+e^x)-e^x}{e^x+1}dx = x - \ln(1+e^x) + K = x + \ln\left(\frac{C}{1+e^x}\right)$

---

***Ex. 1.2.3*** **:** par parties

Leur demander d'utiliser de préférence la notation différentielle $\left(\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du\right)$, comme c'est l'usage en physique ...

**Ex.1.2.3.a :** ***décomposition évidente***

1) (sans tableau des primitives)

$I_1 = \int \underbrace{\text{Arcsin}x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$ ; $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , $v = x$

$I_1 = x\,\text{Arcsin}x - \int \frac{\cancel{2}x\,dx}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\left(x\,\text{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + K\right)$

---

2) $I_2 = \int_0^1 x\underbrace{\ln(1+x)}_{u}dx$ ; $du = \frac{dx}{1+x}$ , $v = \frac{x^2}{2}$

On tombe sur $\int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{1+x}dx$

On arrive facilement à : $\boxed{I_2 = \frac{1}{4}}$

---

• $I_{2b} = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \overbrace{\ln(1+x^2)}^{u}dx$ ; $du = \frac{2x}{1+x^2}dx$ ; $v = \frac{x^3}{3}$

On tombe sur $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx$

On arrive facilement à : $\boxed{I_{2b} = 2\left(\ln(2)\sqrt{3} - \frac{\pi}{9}\right)}$

---

**Ex.1.2.3.b : décomposition pas évidente**

(Si deux fonctions sont "facilement intégrables" il ne faut pas pour autant poser n'importe laquelle égale à u ou à dv ...)

$I_3 = \int_0^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$ $\quad(-2\pi)$

---

$I = \int_0^{\pi/6} \underbrace{e^{-2t}}_{u \to du = -2e^{-2t}}\,\underbrace{\cos(3t)dt}_{dv \to v = \sin(3t)/3}$

après avoir intégré 2 fois par parties on arrive : $I = a - bI$

d'où $\boxed{I = \frac{3e^{-\pi/3}+2}{13}}$

**Ex. 1.2.4 : par changement de variable**

**Ex.1.2.4-1 :** ***En faisant apparaître dU***

$$\int \sin x \underbrace{\cos x\,dx}_{dU=d(\sin x)} = \underbrace{\int \sin x\, d(\sin x)}_{\text{de la forme } \int u\,du=\frac{u^2}{2}+C} = \frac{\sin^2 x}{2}+C \in \mathbb{R}$$

***rem* :** tableau : $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int U^n \underbrace{dU}_{\substack{U'(x)dx\\ \text{différentielle!}}} = \frac{U^{n+1}}{n+1}$

---

1) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \text{Arctan}(x^2)+K \in \mathbb{R}$

---

2) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + K$

$= \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|$

---

3) $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2-(1-\sin^2 x)} = \left(\text{et } \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctan}(u)+K\right)$

$= \text{Arctan}(\sin x)+K \in \mathbb{R}$

---

4) $\int \frac{\overbrace{\cos^3 x\,dx}^{\cos^2 x \overbrace{\cos x\,dx}^{d(\sin x)}}}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)}{(\sin x)^4}$

$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + k \in \mathbb{R}$

---

5) $\int \frac{dx}{\tan^3 dx} = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)}{(\sin x)^3}$

$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + k$

---

6) (intégrale déjà proposée au 1.2.2-4) : ici, l'idée est de faire apparaître $e^{\pm x}$ au numérateur (car exp(x) au dénominateur) : plus rapide avec exp(-x) :

$$I_6 = \int \frac{\overbrace{e^{-x}dx}^{-de^{-x}}}{e^{-x}(e^x+1)} = -\ln(1+e^{-x})+K = \ln\frac{C}{1+e^{-x}} = I_6$$

---

**Ex.1.2.4.2 :** ***En introduisant $\phi$ pour simplifier f***

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Posons : $x = t^2$ $\left(\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x}\right)$; alors $dx = 2t\,dt$ et

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}$ (on choisit t>0 par ex ; c'est bien un changt de var bijectif, car $t^2$ est cont et ↗ sur [0,2] ).

D'où : $I = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{1+t}dt$ $\quad (4-2\ln 3)$

---

$$J = \int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$$

Posons : $x+1=t^2$ $\left(\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{x+1}\right)$ (c'est bien un changement de var bijectif ...). Alors $dx = 2t\,dt$ et si on choisit t>0 :

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$ d'où : $J = 2\int_1^2 (t^2-1)dt$ $\quad \left(\frac{8}{3}\right)$

---