Corrigé

Exercice 1

(30') - Calculer les intégrales suivantes et préciser en une phrase si elles sont généralisées ou non :

1. $\int_0^1 x^2 \ln(x) dx$

En intégrant par partie,

$$\int_0^1 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = -\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = -\frac{1}{9}$$

L'intégrale n'est pas généralisée car $\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(x)\right) = 0$ par croissance comparée, la fonction est bien bornée sur le domaine d'intégration.

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}} dx$

En posant le changement de variable $y^2 = 1 + 3\sin(x)$, qui est bien bijectif sur l'intervalle considéré, alors $2y\mathrm{d}y = 3\cos(x)dx$ et les nouvelles bornes vont de $y = 1$ à $y = 2$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{2}{3}y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2}} = \int_1^2 \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3}$$

L'intégrale n'est pas généralisée.

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)} dx$

En remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}(1/\sin(x))}{dx} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Et que

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \mathrm{cotan}^2(x) = -\mathrm{cotan}'(x)$$

Il vient que

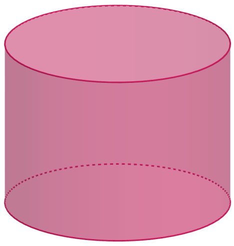
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{\sin(x)} + \mathrm{cotan}(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -2$$

L'intégrale n'est pas généralisée car $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}\right) = -\frac{1}{2}$ par les développement limités de $\sin^2(x)$ et $\cos(x)-1$ en 0. La fonction est bien bornée sur son domaine d'intégration.

Exercice 2

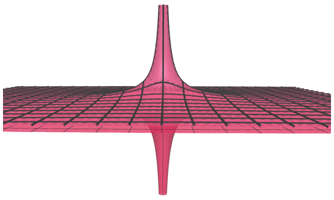
(15') - Calcul de volumes en utilisant des intégrales simples :

Le cylindre



Le cylindre est un objet formidable (observez la figure ci dessus si vous ne nous croyez pas), surtout lorsqu'il a un rayon R et une hauteur h. La valeur de son volume va vous étonner ! Calculez-la en utilisant une intégrale simple. (Pour ce faire, vous vous rappelerez, avec nostalgie, l'équation d'un cercle de rayon R : $x^2 + y^2 = R^2$).

La toupie



Les toupies ne sont pas mal non plus. Celle-ci possède le petit désavantage d'être infinie. Mais son équation cartésienne est plutôt lisible :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = \frac{1}{\sqrt{|z|}} \\ |z| & \leq 5 \end{cases}$$

Trouvez la valeur du volume de cette toupie (que vous pouvez admirer sur la figure ci dessus) en utilisant une intégrale simple.

Exercice 3

(10') - Soit

$$y'(x) + \sin(x)y = \frac{e^{\cos(x)}}{\cos^2(x)} \tag{1}$$

1. Est-ce une équation différentielle linéaire ? (justifiez). De quel ordre ? (justifiez)
2. Résoudre cette équation sur un intervalle que l'on précisera (le plus grand possible).

Exercice 4

(20') - On cherche les fonctions y, solutions de :

$$\frac{dy}{dx} e^{-y^2}(1 - 2y) = 2xe^{-y} \tag{2}$$

et vérifiant $y(1) = 1$.

1. Est-ce que (2) est une équation différentielle linéaire ? (justifiez). De quel ordre ? (justifiez)
2. Calculer la dérivée de $e^{y(1-y)}$
3. Donner une EDO équivalente à (2) en utilisant la dérivée de $e^{y(1-y)}$ calculée juste avant. L'intégrer sur un intervalle que l'on précisera (le plus grand possible).

Exercice 5

(15') - Une balade en voiture en guise de dessert

- À l'arrêt

La suspension d'une voiture de masse m = 800 kg est équivalente à un ressort vertical de constante de raideur k = 1,36 10^4 N/m, qui est associé à un frottement visqueux de constante f = 1,6 10^2 kg/s.

L'équation du déplacement vertival $y(t)$ de la voiture s'écrit :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{3}$$

1. Cette équation différentielle est-elle linéaire ? Si oui, de quel ordre est-elle ?
2. Résoudre cette équation différentielle

- Sur une route "ondulée"

On suppose maintenant que la voiture roule sur piste "ondulée" qui force une oscillation verticale de pulsation $\sqrt{17}$ et transforme l'équation différentielle initiale en :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F\cos\sqrt{17}t \tag{4}$$

avec F= 800 N

1. Simplifier cette équation différentielle en effectuant les applications numériques.
2. Donner la solution générale en précisant l'intervalle de définition de t.
3. Déterminer la solution particulière alors associée aux conditions initiales $y(t = 0) = 1$ et $y'(t = 0) = -1$.