Corrigé

1 Exercice 1 : Intégrales

1. **(3 pts)** En intégrant par partie,

$$\int_0^1 x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx = -\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = -\frac{1}{9}$$

L'intégrale n'est pas généralisée car $\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(x)\right) = 0$ par croissance comparée, la fonction est bien bornée sur son domaine d'intégration.

2. **(3 pts)** En posant le changement de variable $y^2 = 1 + 3\sin(x)$, qui est bien bijectif sur l'intervalle considéré, alors $2y\mathrm{d}y = 3\cos(x)dx$ et les nouvelles bornes vont de $y = 1$ à $y = 2$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}}dx = \int_1^2 \frac{\frac{2}{3}y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2}} = \int_1^2 \frac{2}{3}dy = \frac{2}{3}$$

L'intégrale n'est pas généralisée.

3. **(4 pts)** En remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}(1/\sin(x))}{dx} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Et que

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \mathrm{cotan}^2(x) = -\mathrm{cotan}'(x)$$

Il vient que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{\sin(x)} + \mathrm{cotan}(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -2$$

L'intégrale n'est pas généralisée car $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}\right) = -\frac{1}{2}$ par les développement limités de $\sin^2(x)$ et $\cos(x) - 1$ en 0. La fonction est bien bornée sur son domaine d'intégration.

2 Exercice 2 : calcul de volumes

1. **(3 pts)** On décompose notre cylindre en petit cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$ et additionne les volumes de tous ces cylindres pour trouver le volume du cylindre. Le volume de chacun de ces cylindres est $\pi r(z)^2\mathrm{d}z$. Il ne reste plus qu'à trouver $r(z)$.
On connaît les équations du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$. Pour chacun de ces cylindres, on est dans un plan parallèle à xOy, c'est à dire qu'on est à z fixé. On connaît l'équation d'un cercle dans un tel plan $x^2 + y^2 = r(z)^2$, on en déduit que $x^2 + y^2 = R^2 = r(z)^2$. Donc, le volume du cylindre pour un z donné est $\pi R^2\mathrm{d}z$, il ne reste plus qu'à sommer :

$$V_{\mathrm{cyl}} = \int_0^h \pi R^2 \,\mathrm{d}z = \pi R^2 h$$

2. **(2 pts)** On décompose la toupie en petit cylindre de hauteur dz et on additionne les volumes de tous ces cylindres pour trouver le volume de la toupie. Le volume de chacun des cylindres est $\pi r(z)^2 \mathrm{d}y$. A z fixé, on connaît l'équation d'un cercle dans le plan xOy : $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, on en déduit que $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{|z|}} = r(z)^2$. Donc, le volume du cylindre pour un z donné est $\pi \frac{1}{\sqrt{|z|}} \mathrm{d}z$, il ne reste plus qu'à sommer :

$$V_{\text{toupie}} = \int_{-5}^{5} \pi \frac{1}{\sqrt{|z|}} \,\mathrm{d}z = 2 \int_{0}^{5} \pi \frac{1}{\sqrt{z}} \,\mathrm{d}z \tag{1}$$

Qui est une intégrale généralisée. On trouve finalement

$$V_{\text{toupie}} = 2\pi \lim_{\epsilon \to 0} \left[2\sqrt{z}\right]_{\epsilon}^{5} = 4\pi\sqrt{5} \tag{2}$$

3 Exercice 3 (4 pts)

1. **(1 pts)** C'est une équation différentielle linéaire (en y) ordinaire du premier ordre (seule la première dérivée de y intervient)

2. **(3 pts)** Méthode de la variation de la constante.
On commence par résoudre l'EDO sans second membre :

$$\frac{dy_0}{dx} + \sin(x)\, y_0 = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{y_0'}{y_0} = -\sin(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}(\ln(y_0)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) + cte)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\cos(x) + cte} = A\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

avec A une constante réelle que l'on suppose être une fonction $f(x)$ dans un second temps. On remplace donc $y(x)$ par $f(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$ dans l'EDO et l'on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

en divisant par $\mathrm{e}^{\cos(x)}$ de chaque côté.

Cette équation s'intègre alors facilement en reconnaissant la dérivée de la fonction tangente à droite :

$$f(x) = \tan(x) + C$$

avec C une constante d'intégration réelle.

La solution générale recherchée est donc égale à

$$y_{sol}(x) = (\tan(x) + C)\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

et son support de définition est celui de la fonction tangente, c'est-à-dire l'ensemble des réels privé des nombres $\pi/2$ modulo π (relatif).

4 Exercice 4 (6 pts)

1.**(1 pts)** C'est une équation différentielle non-linéaire (en y) du premier ordre.

2.**(1 pts)** La dérivée de la fonction $e^{y(1-y)}$ s'écrit :

$$\left(e^{y(1-y)}\right)' = y'(1-2y)\,e^{y(1-y)}$$

3.**(3 pts)** Cette dérivée conduit à réexprimer l'EDO comme

$$\frac{d}{dx}\left(e^{y(1-y)}\right) = 2x$$

d'où

$$y(1-y) = \ln\left(x^2 + cte\right)$$

La condition $y(1) = 1$ élimine la constante : $cte = 0$ puisque $\ln(1 + cte) = 0$.
Le support de définition de $y(x)$ est donc au maximum la droite réelle privée du point 0.
Il reste à exprimer $y(x)$ de façon explicite. L'équation $y(1-y) = \ln\left(x^2\right)$ s'écrit aussi

$$y^2 - y + \ln\left(x^2\right) = 0$$

qui donne deux solutions a priori possibles

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\ln\left(x^2\right)}}{2}$$

dont en fait seule celle avec le signe + correspond à la solution recherchée car devant vérifier la condition $y(1) = 1$:

$$y_{sol}(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln\left(x^2\right)}}{2}$$

On remarque que le support de définition de $y_{sol}(x)$ est plus restreint que prévu ci-dessus : il doit correspondre à la condition de réalité de la racine carrée : $1 - 4\ln\left(x^2\right) \geq 0$, c'est-à-dire

$$|x| \leq e^{1/8}$$

Finalement, l'ensemble de définition de $y_{sol}(x)$ est

$$\left[-e^{1/8}, 0\right[\, U \, \left]0, e^{1/8}\right]$$

5 Exercice 5 *Une ballade en voiture en guise de dessert[5 points]*

- à l'arrêt

1. **(0.5 pts)**Cette équation différentielle est linéaire, à coefficients constants et elle est du second ordre.

2. **(1.5 pts)** On écrit le polynôme associé et on cherche ses solutions.

$$mp^2 + fp + k = 0$$

avec $\Delta = f^2 - 4mk$.
Si $\Delta > 0$ (c'est à dire si $f^2 > 4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent :

$$p_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

où A et B sont des constantes réelles.
Si $\Delta = 0$ (c'est à dire si $f^2 = 4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent

$$p_1 = p_2 = \frac{-f}{2m}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y = (At + B)e^{p_1 t}$$

où A et B sont des constantes réelles.
Si $\Delta < 0$ (c'est à dire si $f^2 < 4mk$), les solutions du polynôme associé s'écrivent

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

avec $\alpha = \frac{-f}{2m}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}$
et les solutions de l'équation différentielle s'expriment :

$$y = e^{\alpha t}[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$$

où A et B sont des constantes réelles.

5.1 - Sur une route "ondulée"

L'équation différentielle a maintenant un second membre. Elle s'écrit

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F\cos\sqrt{17}t$$

1. **(0.5 pts)** En effectuant les applications numériques, on obtient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 17y = \cos\sqrt{17}t$$

2. **(1.5 pts)** L'intervalle de définition de t est ici l'ensemble des réels positifs, la variable t étant ici le temps. Pour obtenir la solution générale de cette équation différentielle, on cherche d'abord la solution générale de l'équation sans second membre. On se reporte aux résultats précédents. Ici Δ est négatif et on a $\sqrt{-\Delta} = 8$, ce qui conduit à $\alpha = -1$ et $\omega = 4$. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc :

$$y = e^{-t}[A \sin(4t) + B \cos(4t)] \text{ , A et B étant deux réels.}$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre, de la forme :

$$y = C \sin(\sqrt{17}t) + D \cos(\sqrt{17}t)) \text{ , C et D étant deux réels.}$$

Les dérivées $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ s'écrivent alors :

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{17}C\ \cos(\sqrt{17}t) - \sqrt{17}\,D\ \sin(\sqrt{17}t))$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\ 17C\ \sin(\sqrt{17}t) \quad -17\ D\ \cos(\sqrt{17}t))$$

En remplaçant $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y dans l'équation différentielle complète, on obtient en réunissant les termes en sinus d'un côté et ceux en cosinus de l'autre :

$$[-17C - 2\sqrt{17}D + 17C]\ \sin(\sqrt{17}t) + [-17D + 2\sqrt{17}C + 17D]\ \cos(\sqrt{17}t) = \cos(\sqrt{17}t)$$

Par identification des termes en $\sin(\sqrt{17}t)$ et ceux en $\cos(\sqrt{17}t)$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$D = 0 \text{ et } C = \frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

Soit une solution particulière de l'équation avec second membre égale à :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{17}}\ \sin(\sqrt{17}t),$$

et une solution générale de l'équation complète avec second membre :

$$y = e^{-t}[A\ \sin(4t) + B\ \cos(4t)] + \frac{1}{2\sqrt{17}}\ \sin(\sqrt{17}t), \text{ A et B étant deux réels}$$

3. **(1 pts)** Pour trouver la solution particulière de l'équation complète avec second membre, associée aux conditions aux limites $y(t=0) = 1$ et $y'(t=0) = -1$ on calcule $y(t=0)$ et $y'(t=0)$:

$$y(t=0) = B + \frac{1}{2\sqrt{17}} * 0 = 1,$$
$$y'(t=0) = [4A - B + \frac{1}{2}] = -1.$$

On obtient donc $B = 1$ et $A = -\frac{1}{8}$ et la solution s"ecrit :

$$y = e^{-t}[-\frac{1}{8}\ \sin(4t) + \cos(4t)] + \frac{1}{2\sqrt{17}}\ \sin(\sqrt{17}t).$$

The End.