Exercice 2

March 6, 2020

1 La première [3pt; 1pt pour la décomposition en cylindre, 2pt pour le résultat]

Le cylindre est un objet formidable (observez la figure 1 si vous ne me croyez pas), surtout lorsqu'il a un rayon R et une hauteur h. La valeur de son volume va vous étonner ! Calculez-la en utilisant une intégrale simple. (Pour ce faire, vous vous rappelerez, avec nostalgie, l'équation d'un cercle de rayon R : $x^2+y^2 = R^2$).

1.1 Soluce

On décompose notre cylindre en petit cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$ et additionne les volumes de tous ces cylindres pour trouver le volume du cylindre. Le volume de chacun de ces cylindres est $\pi r(z)^2 \mathrm{d}y$. Il ne reste plus qu'à trouver $r(z)$.
On connaît les équations du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$. Pour chacun de ces cylindres, on est dans un plan parallèle à xOy, c'est à dire qu'on est à z fixé. On connaît l'équation d'un cercle dans un tel plan $x^2 + y^2 = r(z)^2$, on en déduit que $x^2 + y^2 = R^2 = r(z)^2$. Donc, le volume du cylindre pour un z donné est $\pi R^2 \mathrm{d}z$, il ne reste plus qu'à sommer :

$$V_{\mathrm{cyl}} = \int_0^h \pi R^2 \, \mathrm{d}z = \pi R^2 h \tag{1}$$

2 La deuxième [2pt; 0.5pt pour la décompo en cylindre, 1pt pour avoir posé la bonne intégrale, 0.5 pour le résultat]

Les toupies ne sont pas mal non plus. Celle-ci possède le petit désavantage d'être infinie. Mais son équation cartésienne est plutôt lisible :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = \frac{1}{\sqrt{|z|}} \\ |z| & \leq 5 \end{cases}$$

Trouvez la valeur du volume de cette toupie (que vous pouvez admirer sur la figure 2) en utilisant une intégrale.

2.1 Soluce

On décompose la toupie en petit cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$ et on additionne les volumes de tous ces cylindres pour trouver le volume de la toupie. Le volume de chacun des cylindres est $\pi r(z)^2 \mathrm{d}y$.
A z fixé, on connaît l'équation d'un cercle dans le plan xOy: $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, on en déduit que $x^2 + y^2 =$

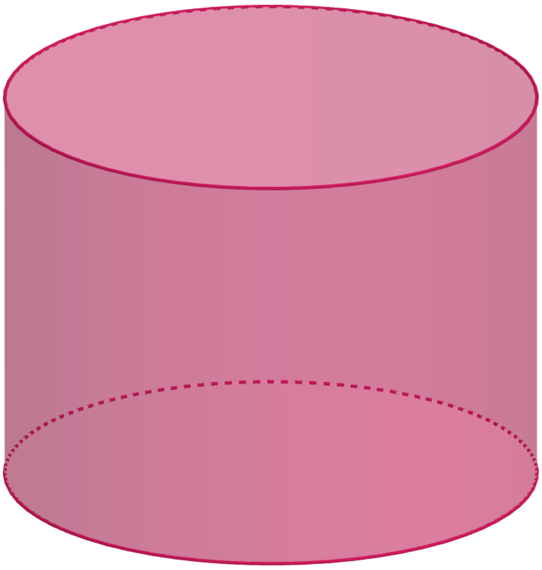

Figure 1: Un cylindre, dans toute sa simplicité

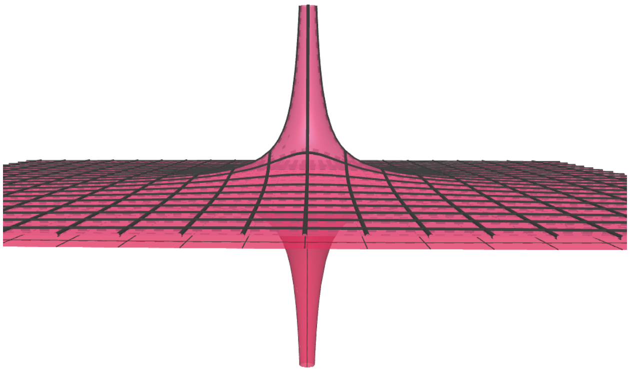

Figure 2: Une toupie, dans toute son infinité

$\frac{1}{\sqrt{|z|}} = r(z)^2$. Donc, le volume du cylindre pour un z donné est $\pi\frac{1}{\sqrt{|z|}}\mathrm{d}z$, il ne reste plus qu'à sommer :

$$V_{\text{toupie}} = \int_{-5}^{5} \pi \frac{1}{\sqrt{|z|}}\,\mathrm{d}z = 2\int_{0}^{5} \pi \frac{1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

Qui est une intégrale généralisée. On trouve finalement

$$V_{\text{toupie}} = 2\pi \lim_{\epsilon\to 0} \left[2\sqrt{z}\right]_{\epsilon}^{5} = 4\pi\sqrt{5} \tag{3}$$