1. Tracés de fonctions

Ex. 1.2 Représentations graphiques

Donner l'allure des fonctions suivantes :

1) $f_0(x,y) = 6 - 3x - 2y$ (seulement la partie située dans le premier octant)

2) $f_1(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ ***(cours)***

3) $f_2(x,y) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-y^2}$

4) $f_3(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

2. Dérivées partielles

***Ex. 2.1* :** dérivées partielles du premier ordre

1) Calculer les dérivées partielles du premier ordre des fonctions suivantes :

a) $f_3\left(x,y,z\right) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$

b) $f_4(x,y,z) = x^2 \cdot z \cdot \mathrm{Arctan}\left(y/z\right)$

2) L'éq. d'état d'un « gaz de Van der Waals » est : $\left(P + \dfrac{a}{V^2}\right)\cdot\left(V - b\right) = RT$. Calculer $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ et $\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T$

Ex. 2.2: *∂.* p. du second ordre

Calculer les dérivées partielles du 2ème ordre /x et y des fonctions f_3 et f_4 définies dans l'ex. 2.1.

***Ex. 2.5* :** notion d'éq. aux dérivées partielles

Résoudre

1) $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (E.2.5.1) ***(cours)***

3) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (E.2.5.2)

Indication : passer en coordonnées polaires, et utiliser les éq. déf au §2.4 pour transformer (E.2.5.2) en une EDO du 1er ordre.

1. Tracés de fonctions - Dérivées partielles

Ex. 1.2 Représentations graphiques

Donner l'allure des fonctions suivantes :

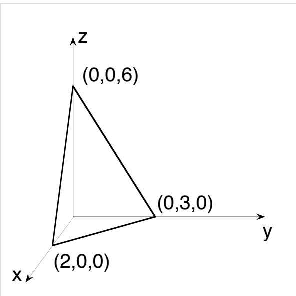
idée *: il ne s'agit pas de tracer pt par pt ces fonc (on le fait par ordinateur) mais plutôt d'avoir une idée de leur allure), de façon à repérer les fautes de frappe, éventuelles… Ce n'est pas facile dans le cas géné, mais ici, les fonc choisies sont simples (f_0 et f_4) et/ou ressemblent à des objets connus (f_2 et f_3) … lesquels ? Noter qu'il est conseillé de posséder un logiciel qui permet de tracer les fonc de deux variables (Mathematica, ou logiciel libre (Maxima), …)*

1) $f_0(x,y) = 6 - 3x - 2y$

On doit donc tracer : $\{M(x,y,z = f_0(x,y))\}$

On écrit encore : $3x + 2y + z = 6$

Pour tracer la portion d'un plan située dans le 1er octant, il suffit de déterminer les intersections avec les axes.



> Oz : $x = y = 0 \Rightarrow \boxed{z = 6}$

> Ox : $y = z = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$

> Oy : $x = z = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow \boxed{y = 3}$

Rem : si ne dép que de 2 var $\Leftrightarrow$ pas d'int avec l'axe de la 3ème var (// à cet axe)

Rem2 : si ne dép que d'une var $\Leftrightarrow$ pas d'int. Avec les deux autres axes $\Leftrightarrow$ // au plan formé par les deux autres axes

---

2) $f_1(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ (traitée en cours)

Méthode : se placer en des plans particuliers x et/ou y tq f(x,y) soit « facile à déterminer », utiliser les symétries éventuelles, s'aider des lignes de niveau (i.e. des courbes tq, $f(x,y) = \text{cte}$).

On doit tracer $\{M(x,y,z = f(x,y))\}$ Avec ici : $z = e^{-(x^2+y^2)}$

Rem :

$$\boxed{f(x^2+y^2) = f(\rho^2) \Leftrightarrow \text{sym} \begin{cases} \text{polaire en dim2} \\ \text{de révolution /(Oz) en dim3} \end{cases}}$$

(en Annexe 4 rappels systèmes de coord.)

• sur le plan x=0, $z = e^{-y^2}$ (gaussienne)

• puis on utilise la sym de révolution autour de l'axe Oz (ou ce qui revient au $\hat{m}$, les courbes de niveau, qui dans ce cas sont des cercles)

$\Rightarrow$ on obtient une cloche

---

3) $f_2(x,y) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-y^2}$

Ici, $z = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-y^2}$

• sur les plans $y = \pm 2$, $z = \sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4 - x^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$ (éq. demi-cercle (0,r=2))

• sur les plans $x = \pm 2$, $z = -\sqrt{4-y^2}$

$\hat{m}$ chose avec cette fois, $z \leq 0$

$\Rightarrow$ selle ; (cf poly p.15)

$\rightarrow$ difficile pour une fonc arbitraire de 2 variables.

---

4) $f_3(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

(tracer $\ln(x^2 - 1)$ puis utiliser la symétrie de révol / (Oz))

---

2. Dérivées partielles

Ex. 2.1 : dérivées partielles du premier ordre

1) Calculer les $\partial \cdot P$ du 1er ordre des fonc suivantes :

a) $f_3(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z} = \partial_x f_3 \; ; \; \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2} = \partial_y f_3$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{-(x-y)(-1)}{(y-z)^2} = \frac{x-y}{(y-z)^2} = \partial_z f_3$$

---

b) $f_4(x,y,z) = x^2 \cdot z \cdot \text{Arc}\tan\dfrac{y}{z}$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 2xz\,\text{Arc}\tan\frac{y}{z} = \partial_x f_4 \; ; \; \frac{\partial f_4}{\partial y} = x^2 \cdot z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + y^2/z^2} = \frac{x^2 z^2}{y^2 + z^2}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial z} = x^2 \text{Arc}\tan\frac{y}{z} + x^2 z \left(\frac{-y}{z^2}\right) \frac{1}{1 + y^2/z^2} = x^2 \left[\text{Arc}\tan\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right]$$

---

2) L'éq. d'état d'un « gaz de Van der Waals » est :

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)\cdot\left(V-b\right)=RT \quad (E)\ ;\ \text{Calculer : } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{ et } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

$$(E)\Leftrightarrow P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2} \text{ d'où:}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{V-b} \text{ et } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=\frac{-RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}$$

---

rem: existe-t-il des pt $M(x_0,y_0)$ tq

$\partial_x f(x_0,y)=\partial_y f(x,y_0)=0$ pour les fonctions de l'ex. 1.2

(max, min et pt selle)

Ex. 2.2 : ∂. p. du second ordre

Calculer les ∂ p du 2ème ordre /x et y des fonc. f_3 et f_4 déf ds l'ex. 1.2.1.

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{1}{y-z}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2}\right)=\frac{-1}{(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{1}{y-z}\right)=\frac{-1}{(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z-x}{(y-z)^2}\right)=\frac{-(z-x)2\cancel{(y-z)}}{(y-z)^{\cancel{4}3}}$$

On rem que $\boxed{\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}}$ (théo de Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}=2z\,\mathrm{Arctan}\frac{y}{z}\ ;\ \frac{\partial^2 f_4}{\partial y\partial x}=\frac{2xz^2}{y^2+z^2}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}=-\frac{2x^2yz^2}{\left(y^2+z^2\right)^2}$$

Ex. 2.5 : notion d'éq. aux dérivées partielles

Résoudre :

1) $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$

Cette éq signifie que l'on cherche toutes les fonc u, deux fois dérivables /x et tq $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)=0$;

posons $v(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$. On doit avoir :

$\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)=0\Rightarrow v(x,t)=T(t)$. On est donc ramené au pb suivant : trouver u tq $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=T(t)$. En raisonnant de la même manière, il vient : $\boxed{u(x,t)=T(t)x+X(x)}$

Où X est une fonction dérivable quelconque. Remarquer qu'aucune condition n'est apparue sur les fonctions X et T (ce ne serait plus le cas si on imposait des conditions aux limites et/ou initiales).

---

2) $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ (E.2.5.1) ***(Traitée en cours)***

(poser u=x+y et v=x-y, réécrire l'EDP en f(u,v) en utilisant §2.4, déterminer f(u,v), revenir à f(x,y). On arrive à : f(x,y)=h(x+y) où h est une fonc. de classe C^1)

---

3) $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ (E.2.5.2)

Indication : passer en coord. polaires, et utiliser les éq. déf au §2.4 pour transformer (E) en une éq. diff du 1er ordre que l'on pourra intégrer

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta(x,y)=\mathrm{Arctan}(y/x)\underbrace{+p\pi}_{\text{pas un pb ici en pratique}}\ ,\quad \underbrace{p=0,1\text{ ou}2}_{\text{cf Annexe 4}}\end{cases}$$

d'après §2.4 (cours)

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}=\cos\theta\\ \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2}\frac{1}{1+(y^2/x^2)}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-\sin\theta}{\rho}\end{array}$$

et
$$\frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho}=\sin\theta$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{1}{1+(y^2/x^2)}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{\rho^2}=\frac{\cos\theta}{\rho}$$

donc (E) s'écrit en polaires :

$$\rho\cos\theta\left(\partial_\rho f\cos\theta-\cancel{\partial_\theta f(\sin\theta)/\rho}\right)\rho+\sin\theta\left(\partial_\rho f\sin\theta+\cancel{\partial_\theta f(\cos\theta)/\rho}\right)$$

Soit : $\rho\cdot\partial_\rho f(\rho,\theta)=0$ Comme $\rho\neq 0$ sauf en un pt

$\Rightarrow\partial_\rho=0\Rightarrow f(\rho,\theta)=g(\theta)$

Att : on doit maintenant revenir à f(x,y).
Pour cela se rappeler que $\theta(x,y)=\mathrm{Arctan}(y/x)+p\pi$.
Donc, les fonc de classe C^1 cherchées sont déf par $\boxed{f(x,y)=g\{\mathrm{Arctan}(y/x)+p\pi\}=\varphi(y/x)}$ (arbitr … enfin pas tout à fait : doivent être dérivables sur un domaine $\mathcal{D}$!)