Intégration numérique

Informatique pour tous

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

1. Trouver une primitive.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

1. Trouver une primitive.
2. Intégration par partie.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

1. Trouver une primitive.
2. Intégration par partie.
3. Changement de variable.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

1. Trouver une primitive.
2. Intégration par partie.
3. Changement de variable.
4. ???

Calculer une intégrale

En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Calculer une intégrale

En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Il faut donc trouver des moyens d'**approximer** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Calculer une intégrale

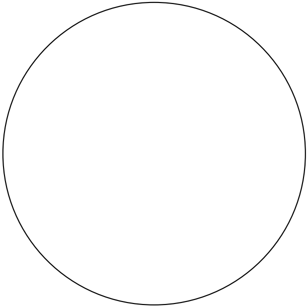
En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Il faut donc trouver des moyens d'**approximer** $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Idée: interpréter $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme l'aire sous la courbe de f, et l'approcher par l'aire de «quelque chose» qu'on sait calculer.

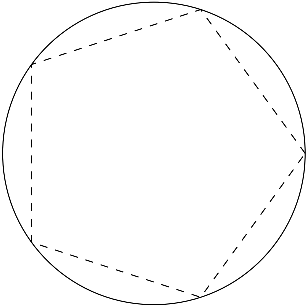
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



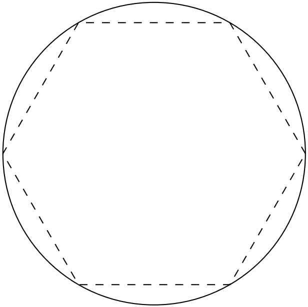
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



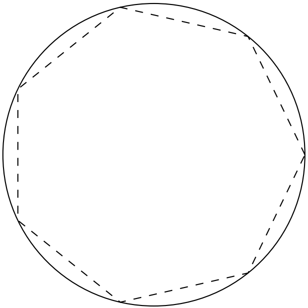
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



Calculer une aire

En utilisant un polygone à 96 côtés, Archimède parvient à l'approximation:

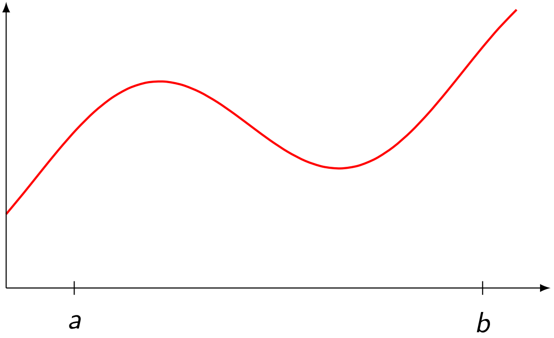
$$\frac{220}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$

Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des rectangles.

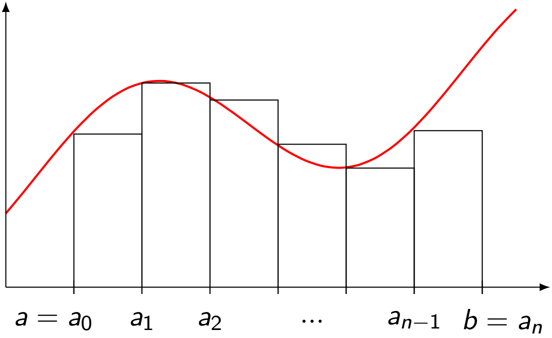
Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des rectangles.

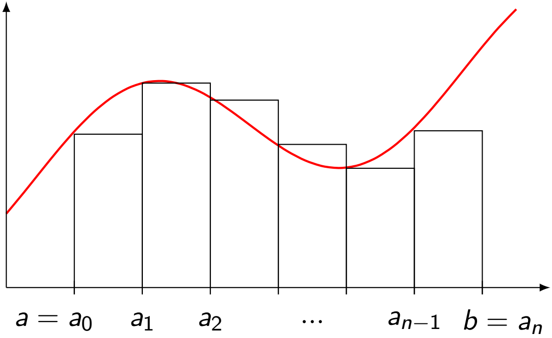


Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des rectangles.



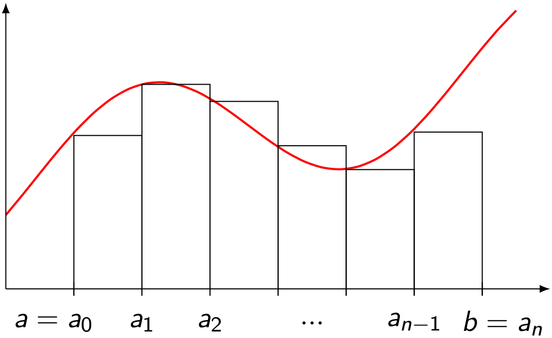
Méthode des rectangles



Question

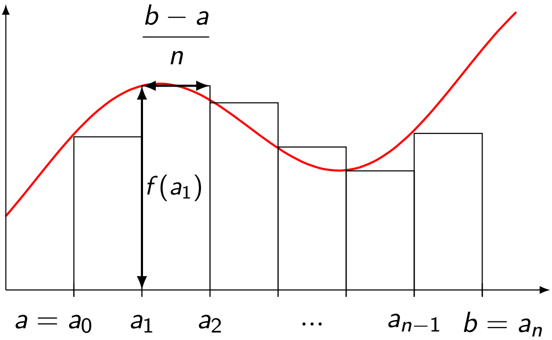
Que vaut a_k, si a_0, ..., a_n sont $n+1$ réels régulièrement espacés de a à b?

Méthode des rectangles



$$\boxed{a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}}$$

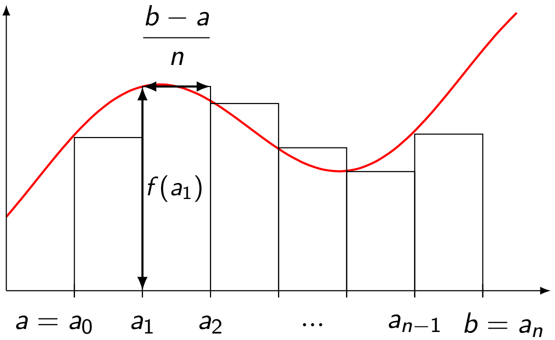
Méthode des rectangles



Question

Que vaut l'aire totale des n rectangles?

Méthode des rectangles



$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

Méthode des rectangles

Vous verrez en cours de mathématiques:

Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue**. Alors:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$$

Méthode des rectangles

Question

Écrire une fonction `rectangle` qui approxime l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles (quels sont ses arguments)?

Méthode des rectangles

Question

Écrire une fonction `rectangle` qui approxime l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles (quels sont ses arguments)?

```
def rectangle(f, a, b, n):
    res = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):
        res += f(a + k * pas)
    return pas * res
```

Méthode des rectangles

```
def rectangle(f, a, b, n):
    res = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):
        res += f(a + k * pas)
    return pas * res
```

Question

Comment utiliser `rectangle` pour approximer $\ln(2)$?

Méthode des rectangles

```python
def rectangle(f, a, b, n):
    res = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):
        res += f(a + k * pas)
    return pas * res
```

Question

Comment utiliser `rectangle` pour approximer $\ln(2)$?

Question

Quelle est la complexité de `rectangle`?

Vitesse de convergence

Questions

1. Est-ce que la méthode des rectangles converge rapidement?
2. Quel n donne une bonne approximation de $\int_a^b f$?

Vitesse de convergence

Questions

1. Est-ce que la méthode des rectangles converge rapidement?
2. Quel n donne une bonne approximation de $\displaystyle\int_a^b f$?

Théorème

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \parallel f' \parallel_\infty$$

Où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Preuve du théorème

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\ \mathrm{d}x$$

Preuve du théorème

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\ \mathrm{d}x$$

Donc:

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| f(x) - f(a_k) \right|\ \mathrm{d}x$$

Preuve du théorème

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\ \mathrm{d}x$$

Donc:

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|\ \mathrm{d}x$$

D'après le **théorème des accroissements finis**, $\forall x \in [a_k, a_{k+1}]$:

$$|f(x) - f(a_k)| \leq \| f' \|_\infty |x - a_k|$$

Preuve du théorème

Donc:

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \| f' \|_\infty \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} x - a_k \ \mathrm{d}x}_{\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}}$$

Preuve du théorème

Donc:

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \| f' \|_\infty \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} x - a_k \ \mathrm{d}x}_{\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right|$$

Preuve du théorème

Donc:

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \| f' \|_\infty \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} x - a_k \, \mathrm{d}x}_{\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}}$$

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \end{aligned}$$

Preuve du théorème

Donc:

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \| f' \|_\infty \underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} x - a_k \ \mathrm{d}x}_{\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \\ &\leq \ \| f' \|_\infty \times n \times \frac{(b-a)^2}{2n^2}\end{aligned}$$

Vitesse de convergence

On a prouvé:

Théorème

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$:

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \parallel f' \parallel_\infty$$

Où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Question

Quel n peut-on choisir pour approximer $\displaystyle\int_a^b f$ à ε près?

Vitesse de convergence

On a prouvé:

Théorème

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$:

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \parallel f' \parallel_\infty$$

Où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Question

Quel n peut-on choisir pour approximer $\displaystyle\int_a^b f$ à ε près?

$$\frac{(b-a)^2}{2n} \parallel f' \parallel_\infty \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon} \parallel f' \parallel_\infty$$

Méthode des trapèzes

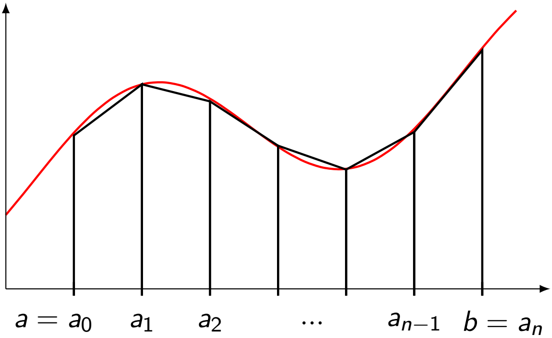
La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des trapèzes

Méthode des trapèzes

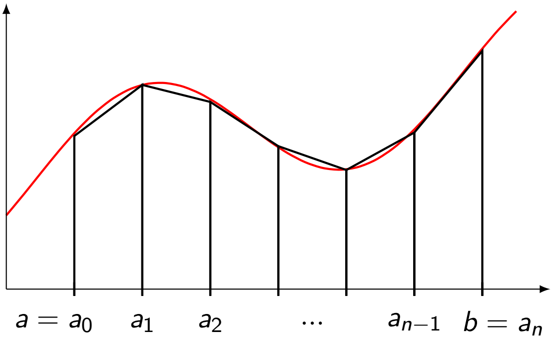
La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des trapèzes (trapèze = quadrilatère ayant 2 côtés parallèles).

Méthode des trapèzes

La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sous la courbe par des trapèzes (trapèze = quadrilatère ayant 2 côtés parallèles).



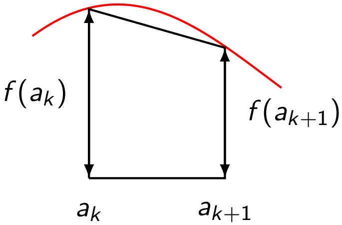
Méthode des trapèzes



Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1}?

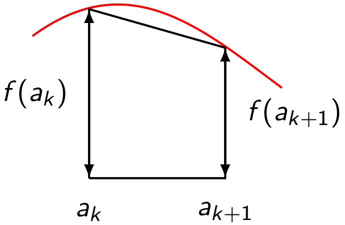
Méthode des trapèzes



Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1}?

Méthode des trapèzes

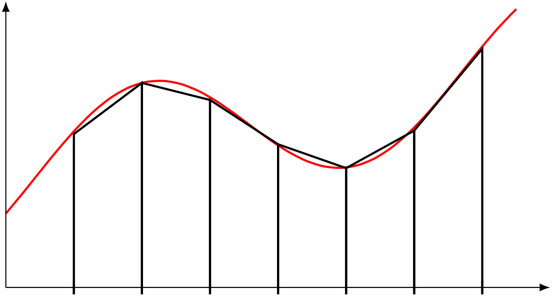


Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1}?

$$\underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{=\frac{b-a}{n}} \times \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

Méthode des trapèzes



La méthode des trapèzes consiste à approximer $\int_a^b f$ par:

$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}}$$

Comparaisons des deux méthodes

En posant $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$:

1. **Méthode des rectangles**: $\displaystyle\int_a^b f \approx \boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)}$
2. **Méthode des trapèzes**: $\displaystyle\int_a^b f \approx \boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}}$

La méthode des trapèzes demande de calculer deux fois plus de valeurs de f pour le même n, mais donne une meilleure approximation de l'intégrale.