TP: méthode d'Euler 2
Informatique pour tous

I Système de Lotka-Volterra

Le système différentiel de Lotka-Volterra permet de modéliser l'évolution conjointe de populations de proies et de prédateurs :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(\alpha - \beta\, y(t)) \\ y'(t) = y(t)\,(\delta\, x(t) - \gamma) \end{cases}$$

avec

- $x(t)$: la population de proies au temps t;
- $y(t)$: la population de prédateurs au temps t;
- α : le taux de reproduction des proies indépendamment des prédateurs rencontrés;
- β : le taux de mortalité des proies dues aux prédateurs rencontrés;
- γ : le taux de mortalité des prédateurs indépendamment du nombre de proies
- δ : le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

Les populations initiales $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sont connues.

On choisit des temps d'approximations t_k et on veut approximer $x(t_k)$ par x_k et $y(t_k)$ par y_k.
On rappelle que la méthode d'Euler sur un système d'équations différentielles consiste à appliquer la méthode sur chacune des équations (voir cours).

1. Écrire les équations de récurrences vérifiées par les approximations x_k et y_k de la méthode d'Euler, appliquée au système différentiel ci-dessus.
2. Écrire des instructions Python pour stocker dans des listes `t`, `x` et `y` ces t_k, x_k et y_k. On choisira l'intervalle de temps et le nombre d'approximations judicieusement et on prendra $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.
3. Afficher y en fonction de x et interpréter.
4. Afficher y en fonction de t et x en fonction de t, sur le même dessin et interpréter.
5. Essayer de modifier les constantes α, β...

II Équation d'ordre 2

On rappelle que pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 du type $y'' = f(t, y, y')$, on peut poser $z(t) = y'(t)$ pour se ramener à un système de 2 équations différentielles d'ordre 1 dont les inconnues sont y et z. On applique ensuite la méthode d'Euler sur chacune des équations (même méthode que pour l'exercice précédent).
En choisissant l'intervalle de temps et le nombre d'approximations judicieusement, utiliser cette méthode pour approximer la solution y de l'équation (simplifiée) du pendule amorti:

$$y''(t) = -\alpha y'(t) - \sin(y(t))$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

où α est un coefficient de frottement (qu'on pourra choisir entre 0.1 et 1, par exemple). Afficher y en fonction de t, puis y' en fonction de y (portrait de phase).