Corrigé épreuve informatique - Centrale - 2021

C. Antonini
mail : cantonini@stanislas-cannes.com
Les commentaires constructifs (notamment sur les questions de complexité) seront les bienvenus

On commence par les importations citées dans l'énoncé.

[1]:
```
import numpy as np
import math
```

I/ Géométrie

Question 1

[2]:
```
def vec(A, B):
    return B-A
```

Question 2

[3]:
```
def ps(v1, v2):
    s = 0
    for i in range(len(v1)):
        s += v1[i]*v2[i]
    return s
# On pourrait aussi voir le résultat comme la somme des coefficients
# du produits de Hadamard :
# def ps(v1, v2):
#     v = v1*v2
#     s = 0
#     for x in v:
#         s += x
#     return s
# Vu l'annexe p8, on pouvait même se permettre de taper
# def ps(v1, v2):
#     v = v1*v2
#     return v.sum()
# Ou carrément :
# def ps(v1, v2):
#     return np.inner(v1, v2)
# Car (je cite) "calcule la somme des produits terme à terme etc." :
# c'est le produit scalaire canonique
```

Question 3

[4]:
```python
def norme(v):
    return math.sqrt(ps(v, v))
```

Question 4

[5]:
```python
def unitaire(v):
    return (1/norme(v))*v
# On peut aussi directement diviser !
# def unitaire(v):
#    return v/norme(v)
```

Question 5

Tapons déjà les fonctions !

[6]:
```python
def pt(r, t):
    # assert t >= 0
    (S, u) = r
    return S + t * u
```

Renvoie le point M du rayon r de paramètre t ($t \geq 0$), i.e. le vecteur défini par $\vec{SM} = t.\vec{u}$.

Une erreur est renvoyée si $t < 0$ (c'est-à-dire si "l'assertion" (= la supposition) t>=0 n'est pas vérifiée).

[7]:
```python
def dir(A, B):
    return unitaire(vec(A, B))
```

Renvoie le vecteur unitaire dirigeant la droite (AB), qui est aussi le vecteur du rayon issu de A passant par B.

[8]:
```python
def ra(A, B):
    return A, dir(A, B)
```

Renvoie le rayon issu de A et passant par B.

Question 6

Le rayon de la sphère de centre A et passant par B est la distance $AB = ||\vec{AB}||$, d'où :

[9]:
```python
def sp(A, B):
    r=norme(vec(A, B))
    return (A,r) # Parenthèses optionnelles ici
```

Question 8

Il faut choisir la plus petite des 2 racines de l'équation s'il y a des solutions, les deux sont de même signe car on suppose que l'origine du rayon n'est pas dans la boule (c=produit des racines est positif). Ainsi il faut prendre la solution avec $-\sqrt{\Delta}$ et pas $+\sqrt{\Delta}$...

Normalement, si on lance la fonction, les racines (s'il y en a) sont positives. J'ai néanmoins précisé if t<0: return None pour le cas où l'on n'atteint pas la sphère dans la 1/2 droite du rayon. Il faudrait modifier la réponse à la Q25 pour éviter cela.

[10]:
```python
def intersection(r, s):
    A, u = r
    C, R = s # ATTENTION, PB avec l'énoncé : le nom du rayon lumineux
             # = r = nom du rayon de la sphère
             # J'appelle donc R le rayon de la sphère !
    # définition des coeffs de l'équation (a=1, je ne le nomme pas)
    CA = vec(C, A)
    b = 2*ps(u, CA)
    c = ps(CA, CA) - R**2
    Delta = b**2 - 4*c
    if Delta < 0:
        return None
    else:
        t = (-b-math.sqrt(Delta))/2
        # Pour Q25 j'évite le cas t<0, mais c'est
        # car il me manque un appel à la fonction au_dessus ou visible
        # dans cette question 25
        if t<0:
            return None
        else:
            return pt(r, t), t
```

II/ Optique

II.A - Visibilité

Question 9

le plan tangent à la sphère au point P est le plan passant par P et orthogonal au vecteur CP, donc M appartient à ce plan ssi les vecteurs $\vec{PM}$ et $\vec{CP}$ sont orthogonaux Ce plan est donc d'équation $\vec{PM}.\vec{CP} = 0$ (. pour produit scalaire !) Les demi-espaces stricts séparés par ce plan sont donc d'(in)équations $\vec{PM}.\vec{CP} > 0$ et $\vec{PM}.\vec{CP} < 0$ Comme $\vec{PC}.\vec{CP} = -||\vec{PC}||^2 < 0$, le demi-espace au-dessus de la sphère, ne contient pas C, son inéquation est donc $\vec{PM}.\vec{CP} > 0$.

Question 10

On en déduit la fonction :

[11]:
```python
def au_dessus(s, P, src):
    C, R = s
    PM = vec(P, src)
    CP = vec(C, P)
    return ps(PM, CP)>0 # On pourrait aussi mettre du large...
```

Question 11

[12]:
```
def visible(obj, j, P, src):
    if au_dessus(obj[j], P, src) == False:
        return False # Ainsi, on ne va pas plus loin
                     # si la sphère n'est pas visible.
    # On parcourt les autres sphères, et
    # si on en rencontre une plus proche, on renvoie False
    for i in range(len(obj)):
        if i!=j:
            r = ra(src, P)
            inter=intersection(r, obj[i])
            if inter != None:
                if inter[1] < norme(vec(src, P)):
                    return False
    # Si on arrive ici, c'est que tout est bon !
    return True
```

II.B - Diffusion

Question 12

[13]:
```
def couleur_diffusee(r, Cs, N, kd):
    S, u = r
    co = ps(-u, N) # calcul de cos(theta) ATTENTION, l'orientation de u
                   # (vecteur directeur du rayon)
                   # opposée au vecteur qui permet de calculer le cos
    return co*(Cs*kd)
```

II.C - Réflexion

Question 13

En notant $\vec{v}$ le projeté orthogonal de $\vec{-u}$ (même pb que ci-desus) sur la droite dirigée par $\vec{N}$, on a $\vec{w} + \vec{-u} = 2\vec{v}$.
D'où la fonction

[14]:
```
def rayon_reflechi(s, P, src):
    u = dir(src, P)
    C, r = s
    N = dir(C, P) # Vecteur normal (sortant) à la sphère en P
    v = ps(N, -u)*N
    w = u+2*v
    return (P,w)
```

III/ Enregistrement des scènes - requêtes SQL

Question 14

SELECT sc_nom FROM Scene WHERE EXTRACT(year FROM sc_creation)="2021"

Question 15

SELECT sc_id, COUNT(so_id) FROM Source GROUP BY sc_id

Question 16

SELECT ob_id, ob_x, ob_y, ob_z, sp_id FROM Scene JOIN Objet ON Scene.sc_id=Objet.sc_id JOIN Sphere ON ob_id=sp_id WHERE sc_nom="woodbox"

Question 17

SELECT s1.ob_id, so_id, s2.ob id FROM Objet as s1 JOIN Objet as s2 ON s1.sc_id=s2.sc_id JOIN Scene ON s1.sc_id=Scene.sc_id JOIN Source ON Scene.sc_id=Source.sc_id WHERE sc_nom="woodbox" AND Occulte(Scene.sc_id, s1.ob_id, so_id, s2.ob_id)

IV/ Lancer de rayons

IV.A - Ecran

Question 18

[15]:
```python
def grille(i, j):
    x = (Delta/N)*(j-N/2)
    # Attention, sur fig 4, lorsque i augmente, y diminue.
    y = (Delta/N)*(N/2-i)
    return np.array([x, y, 0])
```

Question 19

[16]:
```python
def rayon_ecran(omega, i, j):
    u = dir(omega, grille(i, j))
    return (omega, u)
```

IV.B - Couleur d'un pixel

Question 20

[17]:
```
def interception(r, eviter=-1):
    # J'ai rajouté le 2ème paramètre pour la Question 25,
    # on ne cherche pas l'intersection avec l'objet d'indice eviter...
    x = None
    minim = np.inf
    for i in range(len(Objet)):
        if i != eviter:
            t = intersection(r, Objet[i])
            if t != None:
                if t[1] < minim:
                    x = t[0], i
                    minim = t[1]
    return x
```

Question 21

[18]:
```
def couleur_diffusion(P, j):
    coul = np.array([0,0,0])
    for i in range(len(Source)):
        if visible(Objet, j, P, Source[i]):
            coul = coul + couleur_diffusee(ra(Source[i], Objet[j][0]),␣
 ↪ColSrc[i], dir(Objet[j][0], P), KdObj[j])
    return coul # si aucune source visible, ça renvoie le [0,0,0] initial,
                # qui correspond bien au noir
```

IV.C - Constitution de l'image

Question 22

[19]:
```
def lancer(omega, fond):
    im = np.ndarray((N,N,3))
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            r = rayon_ecran(omega, i, j)
            x = interception(r)
            if x == None:
                im[i, j] = fond
            else:
                im[i, j] = couleur_diffusion(x[0], x[1])
    return im
```

Je trouve que ça vaut la peine d'essayer sur un exemple concret !

[20]:
```
# Définition des objets (un par un, avec .append)
Objet = []
Objet.append((np.array([0,5.5,-6]), 3))
Objet.append((np.array([0.5,1.5,-2]), 1))
Objet.append((np.array([2,-3,-3]), 3))
Objet.append((np.array([-4,0,-3]), 2))
# Définition des couleurs de diffusion,
# objet par objet
KdObj = []
KdObj.append(np.array([0,1,0]))
KdObj.append(np.array([1,1,1]))
KdObj.append(np.array([0,0.8,1]))
KdObj.append(np.array([1,1,0]))
# Définition des sources lumineuses (positions)
Source = []
Source.append(np.array([-2,0,3]))
Source.append(np.array([3,0,3]))
# Définition des couleurs émises,
# source par source
ColSrc = []
ColSrc.append(np.array([1,1,1]))
ColSrc.append(np.array([0,0,1]))
# Résolution de l'image et dimension de la grille
N = 1024
Delta = 10
```

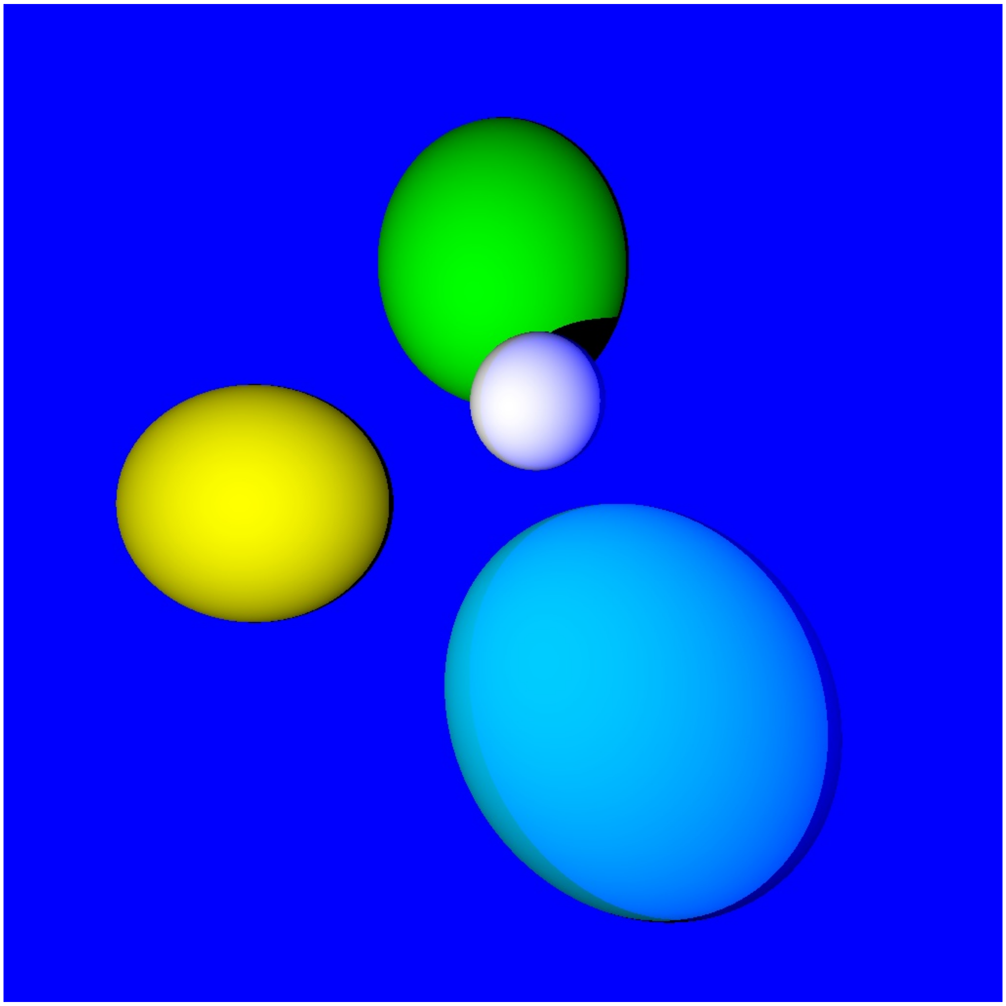
Je crée une fonction (non demandée) pour sauvegarder l'image dans un fichier dont je passe aussi le nom en paramètre :

[21]:
```
import matplotlib.pyplot as plt

def sauvegarde(im, nom_fichier):
    # J'applique un traitement pour que les valeurs (des niveaux r, v, b)
    # soient des entier entre 0 et 255 plutôt que des flottants entre 0 et 1
    # (il était aussi possible que l'on sorte de l'intervalle)
    #
    # Enfin, le type uint8 de numpy correspond justement
    # à un entier dans [[0,255]] codé sur un octet...
    def f(a):
        return max(0,min(255,round(255*a)))
    im2 = np.zeros((N,N,3),dtype=np.uint8)
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            for c in range(3):
                im2[i,j,c]=f(im[i,j,c])
    plt.imsave(nom_fichier, im2)
    # Je pourrais visualiser, mais je ne l'active pas :
    # plt.imshow(im2)
```

Et je lance mes procédures :

[22]:
```
im1 = lancer(np.array([0,0,4]), np.array([0,0,1]))

sauvegarde(im1, "4Billes_2sources_sans_réflexion.jpg")
```

Voici mon résultat :



IV.D - Complexités

Questions 23 et 24

On lance un rayon pour chacun des N^2 pixels de l'image.

Pour chaque rayon, on recherche l'objet éventuellement intercepté, ce qui nécessite n_o passages. Il faut alors calculer la couleur diffusée en ce point (s'il est sur un objet) ce qui nécessite de calculer la couleur reçue de chaque source (n_s itérations) mais de vérifier si aucun autre objet ne le cache, donc n_o itérations).

La complexité dans le pire des cas est $O(N^2.n_o^2.n_s)$.

Si un objet cache tous les autres, la complexité dans le meilleur des cas diminue alors en $N^2.n_o.n_s$.

V/ Améliorations

V.A - Prise en compte de la réflexion

Question 25

Notons qu'une version récursive sur rmax serait aussi très intéressante à envisager !

[23]:
```
# Une version récursive sur rmax serait aussi intéressante à envisager !
def reflexions(r, rmax):
    R = []
    I = interception(r)
    while (len(R)<rmax+1) and (I != None):
        R.append(I)
        r=rayon_reflechi(Objet[I[1]], I[0], r[0])
        # J'ai modifié interception pour éviter (à cause des erreurs d'arrondis)
        # que l'on retombe sur l'objet lui-même !
        I = interception(r, I[1])
    if R != []:
        return R
    else:
        return None
# Le else... est inutile, en fait...
# Il faudrait que j'utilise visible ou au_dessus dans cette fonction,
# j'ai préféré rajouter une condition dans interception
```

Question 26

[24]:
```
def couleur_percue(r, rmax, fond):
    R = reflexions(r, rmax)
    if R == None:
        return fond
    else:
        C = np.array([0,0,0]) # C'est le Cr+1=0 ...
        for I in R[::-1]: # On commence par la fin
                          # puisque la relation de récurrence
                          # donne Ck en fonction de Ck+1...
            C = couleur_diffusion(I[0], I[1])+KrObj[I[1]]*C
        return C
```

Question 27

[25]:
```
def lancer_complet(omega, fond, rmax):
    im = np.ndarray((N,N,3))
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            r = rayon_ecran(omega, i, j)
            im[i, j] = couleur_percue(r, rmax, fond)
    return im
```

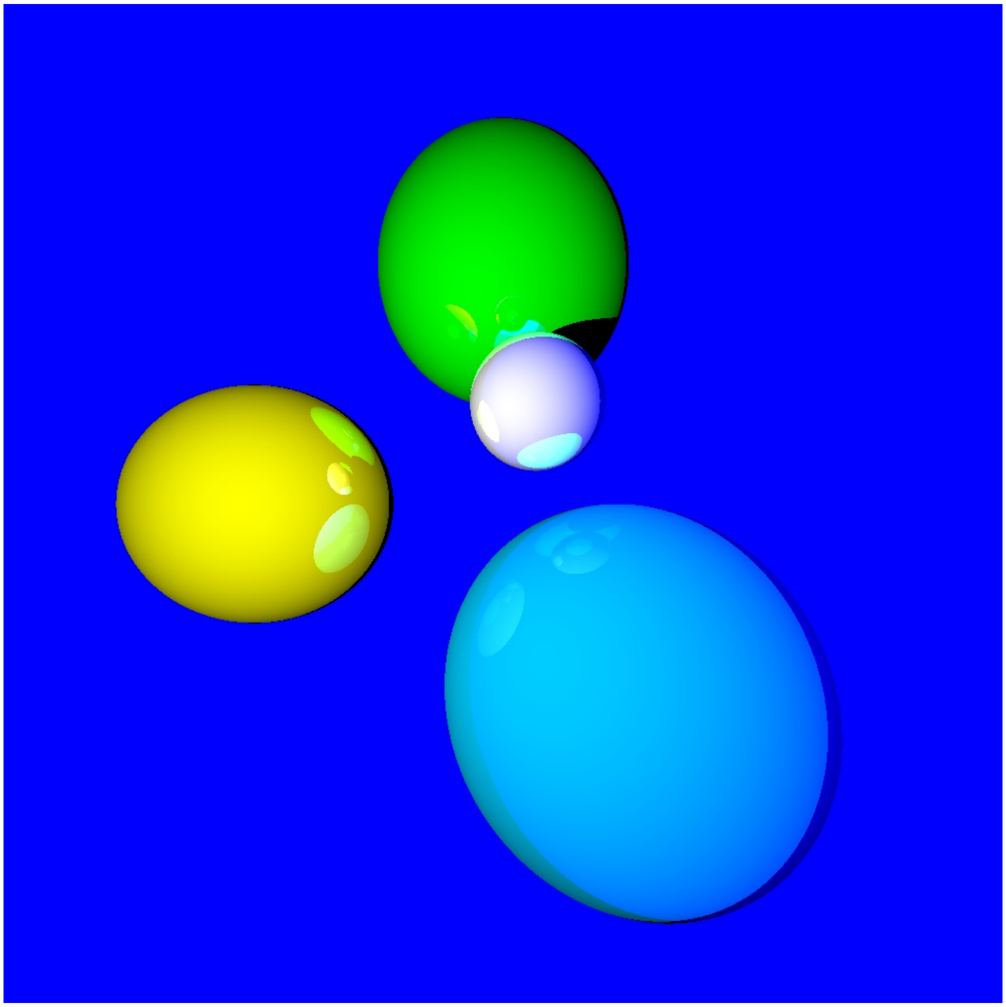
Je reprends le même exemple que précédemment, en rajoutant les coefficients de réflexion :

[26]:
```
KrObj=[0.8, 1, 0.1, 0.4]
```

Je peux alors utiliser la procédure lancer_complet...
J'ai choisi d'aller jusquà 10 reflexions !

[27]:
```
im_reflet1 = lancer_complet(np.array([0,0,4]), np.array([0,0,1]), 10)

sauvegarde(im_reflet1, "4Billes_2sources_avec_10_reflexions_max.jpg")
```

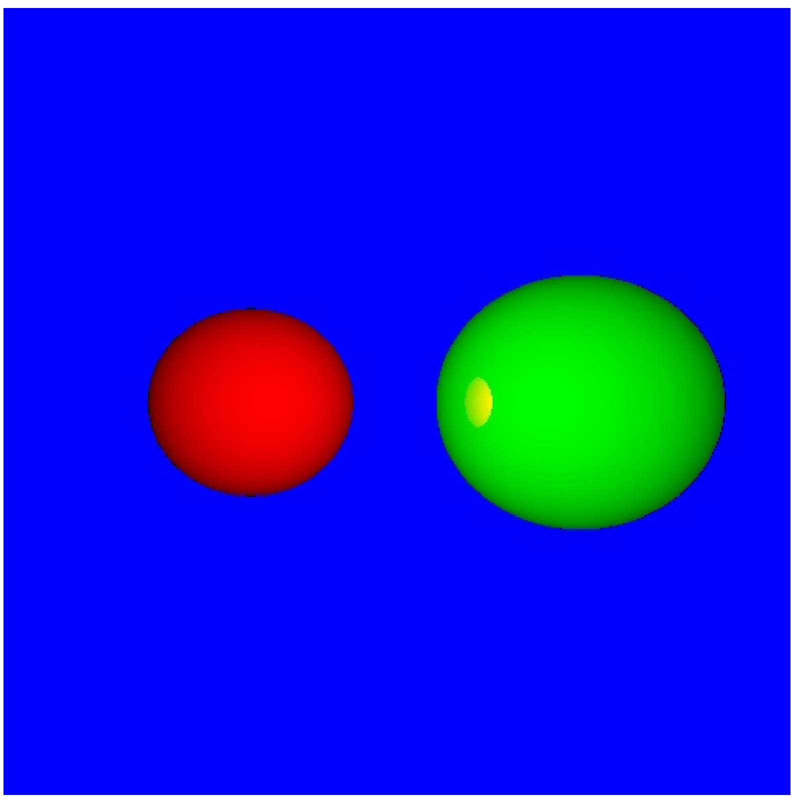
Voici le nouveau résultat :



Je fais un 2ème exemple plus simple, avec lumière à la verticale du centre, et uniquement 2 objets (un vert et un rouge), dont un qui reflète à 100% et l'autre pas du tout.

[28]:
```
Objet = []
Objet.append((np.array([4,0,-4]), 3))
Objet.append((np.array([-3,0,-3]), 2))
KdObj = []
KdObj.append(np.array([0,1,0]))
KdObj.append(np.array([1,0,0]))
KrObj = [1, 0]
Source = []
Source.append(np.array([0,0,3]))
ColSrc = []
ColSrc.append(np.array([1,1,1]))

N = 512
Delta = 10

im_simple = lancer_complet(np.array([0,0,4]), np.array([0,0,1]), 1)

sauvegarde(im_simple, "2Billes_1source_avec_1_reflexion.jpg")
```

Et le résultat est le suivant :



Le reflet de la bille rouge sur la bille verte donne une zone jaune (synthèse additive des couleurs)

Un dernier exemple pour sourire (à vous de le lancer pour voir !)

[29]:
```
Objet = []
Objet.append((np.array([0,-1,-3]), 2))
Objet.append((np.array([-1.5,2,-3]), 1.3))
Objet.append((np.array([1.5,2,-3]), 1.3))
Objet.append((np.array([0,-1.1,-0.8]), 0.2))
KdObj = []
KdObj.append(np.array([1,1,1]))
KdObj.append(np.array([.2,.2,.2]))
KdObj.append(np.array([.2,.2,.2]))
KdObj.append(np.array([0,0,0]))
KrObj = [1, 0, 0, 0]
Source = []
Source.append(np.array([2,2,3]))
ColSrc = []
ColSrc.append(np.array([1,1,1]))

N = 512
Delta = 6

#im_simple2 = lancer_complet(np.array([0,0,4]), np.array([0,0,1]), 1)

#sauvegarde(im_simple2, "souris.jpg")
```

Question 28

La complexité obtenue questions 23-24 est multipliée par r_{max}, ou plus précisément par $(1 + r_{max})$.

V.B - Une optimisation

Question 29

[30]:
```
def table_risque(risque):
    no = len(Objet)
    ns = len(Source)
    res = []
    for i in range(no):
        L = []
        for j in range(ns):
            L2 = []
            for i2 in range(no):
                if [IdObj[i], IdSrc[j], IdSrc[i2]] in risque:
                    L2.append(i2)
            L.append(L2)
        res.append(L)
    return res
```

Question 30

[31]:
```python
def visible_opt(j, k, P):
    if au_dessus(Objet[k], P, Source[j]) == False:
        return False # Ainsi, on ne va pas plus loin
                     # si la sphère n'est pas visible.
    # On parcourt les autres sphères de la table à risque
    # et si l'intersection de la demi-droite P,source est non vide,
    # on renvoie False
    for i in range(TableRisque[k][j]):
        r = ra(P, Source[j])
        if intersection(r, obj[i]) != None:
            return False
    # Si on arrive ici, c'est que tout est bon !
    return True
```

Fin !