Mines Ponts 2021 (les 3 marches) : éléments de correction

Entrée [1]:
```
%matplotlib inline
```

Partie I. Randonnée

Q1 Nombre de participants nés entre 1999 et 2003 (inclus) :

```
SELECT COUNT(*) FROM Participant
WHERE ne >= 1999 AND ne <= 2003
```

Q2 Durée moyenne des randonnées pour chaque niveau de difficulté :

```
SELECT diff,AVG(duree) FROM Rando
GROUP BY diff
```

Q3 Nom des participants pour lesquels la randonnée n°42 est trop difficile :

- avec une sous-requête :

```
SELECT pnom FROM Participant
WHERE diff_max < (SELECT diff FROM Rando
                   WHERE rid=42)
```

- avec un produit cartésien :

```
SELECT pnom FROM Participant,Rando
WHERE rid = 42 AND diff_max < diff
```

Q4 Clés primaires des randonnées qui ont un ou des homonymes, sans redondance :

- Première version, avec une auto-jointure :

```
SELECT DISTINCT R.rid
FROM Rando AS R JOIN Rando AS S
ON R.rnom=S.rnom
WHERE R.rid <> S.rid
```

- Deuxième version, avec un `GROUP BY` et un `HAVING` :

```
SELECT DISTINCT rid FROM Rando
WHERE rnom IN (SELECT rnom FROM rando
               GROUP BY rnom
               HAVING COUNT(*) > 1)
```

Q5 De la lecture de fichier :

- Une première version :

```
def importe_rando(nom_fichier):
    fichier=open(nom_fichier,"r")
    coords=[]
    fichier.readline() # pour ne pas traiter la 1ère ligne
    for ligne in fichier:
        ligne=ligne.split(",")
        ligne=[float(elt) for elt in ligne]
        coords.append(ligne)
    fichier.close()
    return coords
```

- On peut aussi écrire une fonction plus "condensée" :

```
def importe_rando(nom_fichier):
    fichier=open(nom_fichier,"r")
    fichier.readline() # pour ne pas traiter la 1ère ligne
    coords=[[float(elt) for elt in ligne.split(",")] for ligne in fichier]
    fichier.close()
    return coords
```

- On pourrait également utiliser `readlines`, ou utiliser une syntaxe de style `with open(nom_fichier,"r") as fichier:`

Q6 C'est une recherche de maximum :

```
def plus_haut(coords):
    lat,long,m=coords[0][:3]
    for elt in coords[1:]:
        if elt[2] > m:
            lat,long,m = elt[:3]
    return [lat,long]
```

Une variante :

```
def plus_haut(coords):
    pos=0
    m=coords[pos][2]
    for i in range(1,len(coords)):
        cur=coord[i][2]
        if cur > m:
            m=cur
            pos=i
    return coords[pos][:2]
```

NB : Si plusieurs points ont la même altitude maximale, la fonction précédente renvoie le premier point de la liste qui atteint cette attitude.

Q7 On propose deux versions :

- Si on ne s'autorise pas la commande `sum` :

```
def deniveles(coords):
    pos,neg=0,0
    for i in range(len(coords)-1):
        a,b=coords[i][2],coords[i+1][2]
        if a>b: # dénivelé négatif
            neg+=b-a
        else: # dénivelé positif
            pos+=b-a
    return [pos,neg]
```

- si on s'autorise la commande `sum` :

```
def deniveles(coords):
    pentes=[coords[i+1][2]-coords[i][2] for i in range(len(coords)-1)]
    pos=sum([p for p in pentes if p>0])
    neg=sum([p for p in pentes if p<0])
    return [pos,neg]
```

Q8 On importe les fonctions utiles du module `math` :

```
from math import asin,sin,cos,sqrt,radians

RT = 6371 # variable globale donnée dans le canevas

def distance(c1,c2):
    phi1,l1,alt1=c1[:3] # phi,lambda et altitude pour le point c1
    phi2,l2,alt2=c2[:3] # idem pour c2
    phi1,phi2=radians(phi1),radians(phi2) # conversion en radians
    l1,l2=radians(l1),radians(l2)
    alt=RT*1e3+(alt1+alt2)/2 # conversion en mètres de RT + on rajoute l'altitude moyenne
    s=sin((phi2-phi1)/2)**2+cos(phi1)*cos(phi2)*sin((l2-l1)/2)**2
    s=sqrt(s)
    d=2*alt*asin(s) # formule de haversine
    dis=sqrt(d**2+(alt2-alt1)**2) # théorème de Pythagore
    return dis
```

Q9 Calcul classique de somme :

- sans utiliser `sum` :

```
def distance_totale(coords):
    d=0
    for i in range(len(coords)-1):
        d+=distance(coords[i],coords[i+1])
    return d
```

- en utilisant `sum` :

```
def distance_totale(coords):
    dis=sum(distance(coords[i],coords[i+1]) for i in range(len(coords)-1))
    return dis
```

Partie II. Mouvement brownien d'une petite particule

Q10

```python
def vma(v1,a,v2):
    assert len(v1) == len(v2) # vérification de la longueur identique des listes
    return [v1[i] + a * v2[i] for i in range(len(v1))]
```

Q11 On projette l'équation du mouvement sur l'axe des abscisses ; on obtient :

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha \dot{x}}{m} + \frac{f_{Bx}}{m}$$

On a une relation identique en projetant sur l'axe des ordonnées.

Ne pas oublier l'import du module `random` :

```python
from math import cos,sin,pi # ou alors déjà fait à la question 8
import random as rd

def derive(E):
    x,y,xp,yp = E
    theta = rd.uniform(0,2*pi)
    norme = abs(rd.gauss(MU,SIGMA))
    fBx = cos(theta)*norme # on projette fB sur (Ox)
    fBy = sin(theta)*norme # idem sur (Oy)
    xpp = (-ALPHA*xp + fBx)/M
    ypp = (-ALPHA*yp + fBy)/M
    return [xp,yp,xpp,ypp]
```

Q12 La relation de récurrence produite par la méthode d'Euler (explicite) est la suivante :

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{dt} = \dot{E}_n$$

i.e. :

$$E_{n+1} = E_n + dt \times \dot{E}_n$$

On en déduit la fonction suivante :

```python
def euler(E0,dt,n):
    Es = [E0]
    E = E0
    for i in range(n):
        E = vma(E,dt,derive(E)) # relation de récurrence d'Euler
        Es.append(E)
    return Es
```

Partie III. Marche auto-évitante

Q13 On parcourt les voisins du point (x, y) pour voir ce qui ont déjà été atteints par le chemin :

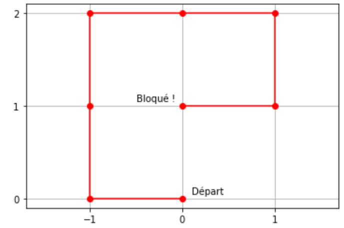
```python
def positions_possibles(p,atteints):
    possibles = []
    x,y = p
    voisins = [[x+1,y],[x-1,y],[x,y+1],[x,y-1]] # les 4 voisins de (x,y)
    for v in voisins:
        if not(v in atteints):
            possibles.append(v)
    return possibles
```

Q14 Il suffit de tourner en "escargot" pour s'enfermer dans une impossiblité le plus rapidement possible.

Remarque : le code n'était évidemment pas demandé dans l'énoncé !

Entrée [2]:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
chemin_x = [0,-1,-1,-1,0,1,1,0]
chemin_y = [0,0,1,2,2,2,1,1]
plt.plot(chemin_x,chemin_y,"o-r")
plt.axis("equal")
plt.grid("on")
plt.xticks([-1, 0, 1])
plt.yticks([0, 1, 2])
plt.text(0.1, 0.05, "Départ")
plt.text(-0.5, 1.05, "Bloqué !")
plt.show()
```



Il s'agit du plus court chemin auto-bloquant. Il est de longueur 7. Il y en a 8 en tout, que l'on peut déduire par 4 rotations (d'angle droit et de centre $(0, 0)$) composées ou non par une symétrie par rapport à (Ox).

Q15 On n'oublie pas les imports (s'ils n'ont pas déjà été faits) :

```python
import random as rd

def genere_chemin_naif(n):
    chemin = [[0,0]]
    p=[0,0]
    for i in range(n): # il faut n+1 points pour un chemin de longueur n
        possibles = positions_possibles(p,chemin)
        if len(possibles) == 0:
            return None # chemin auto-bloquant
        else:
            p = rd.choice(possibles)
            chemin.append(p)
    return chemin
```

Q16 Dans le pire des cas (aucun blocage), il y aura n appels à la fonction `positions_possibles` , avec comme paramètre `chemin` , une liste de taille s'incrémentant de 1 à chaque étape (puisqu'on ne bloque jamais). Chaque appel coûte 4 tests d'appartenance d'une liste de longueur 2 à la liste de telles listes `chemin` , soit un $O($ `len(chemin)` $)$ comparaisons.

Cela donne donc une complexité d'ordre $O(1 + 2 + \cdots + n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = O(n^2)$ comparaisons.

N.B. : on a négligé les autres opérations (coût du `choice` , du `append` , affectations).

Q17

- La boucle intérieure `for i in range(1,M):` détermine la fréquence d'apparition de chemins auto-bloquants de taille fixée `n` parmi $N = 10000$ chemins de longueur n générés aléatoirement.
- La boucle extérieure `for n in range(1,M):` effectue ce calcul de fréquence pour toutes les longueurs de chemins entre 1 et $M - 1 = 350$.
- Il s'agit donc, pour chaque longueur $n \in [\![1, 350]\!]$, de donner une approximation de la probabilité de générer un chemin auto-bloquant de taille n.
- Conclusion : on a donc tracé une approximation de la probabilité pour un chemin de longueur n d'être auto-bloquant en fonction de n. Cette probabilité semble croître (ce qui est normal pour un algorithme glouton) vers 1 : plus n est grand, moins il est probable de générer un CAE de longueur n par la méthode naïve (et le calcul de complexité quadratique précédent ne sera pas pertinent).

Q18 Le tri-fusion réalise un tri d'une liste de taille n, dans le cas le pire, avec une complexité en $O(n \ln n)$. C'est la meilleure complexité possible dans le cas le pire.

Attention : Dans le cas le pire, le tri rapide a une complexité quadratique.

Q19 Une fois la liste des points triée, il suffit de regarder si deux points consécutifs sont égaux :

```
def est_CAE(chemin):
    chemin_trie=sorted(chemin)
    for i in range(len(chemin)-1):
        if chemin_trie[i]==chemin_trie[i+1]:
            return False
    return True
```

Si le chemin est de taille n, le tri coûte $O(n \ln n)$ opérations, et la boucle coûte n accès et tests d'égalité entre deux points, qui se font en $O(1)$ opérations (complexité amortie ?).

La complexité dans le pire des cas de la fonction précédente est bien en $O(n \ln n)$.

Q20 On suppose que l'on a orienté le plan dans le sens trigonométrique.

```
def rot(p,q,a):
    x,y = p
    u,v = q
    assert(a in [0,1,2])
    if a==0:
        return [2*x-u,2*y-v]
    elif a==1:
        return [x+y-v,y+u-x]
    else:
        return [x+v-y,y+x-u]
```

Q21 On propose 2 versions :

- Avec des boucles :

```
def rotation(chemin,i_piv,a):
    chemin_piv=[]
    for i in range(i_piv+1):
        chemin_piv.append(chemin[i])
    p=chemin[i_piv]
    for i in range(i_piv+1,len(chemin)):
        chemin_piv.append(rot(p,chemin[i],a))
    return chemin_piv
```

- Avec les listes par compréhension :

```
def rotation(chemin,i_piv,a):
  debut=chemin[:i_piv+1] # le pivot est invariant par rotation
  p=chemin[i_piv]
  fin=[rot(p,q,a) for q in chemin[i_piv+1:]]
  return debut+fin
```

Q22 À chaque étape, on génère un nouveau chemin pivoté jusqu'à ce que l'on trouve un CAE :

```
import random as rd # si on ne l'a pas déjà fait avant

def genere_chemin_pivot(n,n_rot):
    chemin = [[i,0] for i in range(n+1)] # intialisation donnée dans l'énoncé
    for i in range(n_rot):
        bloque = True
        while bloque: # tant que l'on génère un chemin qui bloque
            i_piv = rd.randrange(1,n)
            a = rd.randrange(0,3)
            chemin_piv = rotation(chemin,i_piv,a) # nouveau chemin potentiel
            if est_CAE(chemin_piv): # le nouveau chemin est un CAE
                chemin = chemin_piv # mise à jour du chemin
                bloque = False # on sort de la boucle while
    return chemin
```

Q23 Si p_{piv}, p, q désignent le pivot, son point précédent et son point suivant, une des 3 rotations (d'angle π, $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$) va envoyer q sur p. Il faut l'éviter (cela gagne un appel -coûteux- à `est_CAE`), et pour cela modifier la ligne `a = rd.randrange(0,3)` de la fonction précédente, et la remplacer par le code suivant (par exemple) :

```
i_piv = rd.ranrange(1,n) # déjà écrit
p_piv=chemin[i_piv]
p=chemin[i_piv-1]
q=chemin[i_piv+1]
det=(q[0]-p_piv[0])*(p[1]-p_piv[1])-(p[0]-p_piv[0])*(q[1]-p_piv[1])
if det==0:
    a=rd.choice([1,2])
elif det>0:
    a=rd.choice([0,2])
else:
    a=rd.choice([0,1])
chemin_piv = rotation(chemin,i_piv,a) # déjà écrit
```

On pourrait également tester les 3 rotations possibles pour éliminer celle qui envoie p sur q.