Algorithmes de tri

Informatique pour tous

PENSEZ AU TRI

Appartenance

Question

Comment savoir si un élément `e` appartient à une liste `L` ?

Appartenance

Question

Comment savoir si un élément e appartient à une liste L ?

```python
def contient(L, e):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] == e:
            return True
    return False
```

Appartenance

Question

Comment savoir si un élément `e` appartient à une liste `L` ?

```
def contient(L, e):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] == e:
            return True
    return False
```

Complexité dans le pire cas : $O(n)$, où $n =$ `len(L)`.

Recherche dichotomique

Si `L` est **triée**, on peut savoir si `e` est dans `L` plus rapidement, en comparant `e` avec le **milieu** `m` de `L` :

- Si `e == m`, on a trouvé notre élément.
- Si `e > m`, il faut chercher `e` dans la partie droite de `L`
- Si `e < m`, il faut chercher `e` dans la partie gauche de `L`

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

L = [-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 22, 54]

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

[-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, <u>**9**</u>, 11, 12, 14, 15, 18, 22, 54]

$9 < 14$

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

$$[-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, \boxed{11, 12, 14, 15, 18, 22, 54}]$$

$$9 < 14$$

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

$$[-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, \boxed{11, 12, 14, \underline{\mathbf{15}}, 18, 22, 54}]$$

$$15 > 14$$

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

$$[-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, \boxed{11, \underline{\mathbf{12}}, 14}, 15, 18, 22, 54]$$

$$12 < 14$$

Recherche dichotomique : exemple

On veut savoir si 14 appartient à la liste :

[-2, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, $\boxed{\underline{\mathbf{14}}}$, 15, 18, 22, 54]

14 trouvé !

Recherche dichotomique : version itérative

```python
def contient_dichotomie(L, e):
    debut = 0 # indice de début
    fin = len(L) # indice de fin exclu
    while debut < fin:
        milieu = (debut + fin) // 2
        if L[milieu] == e:
            return True
        elif L[milieu] < e: # il faut chercher à droite
            debut = milieu + 1
        else: # il faut chercher à gauche
            fin = milieu
    return False
```

Recherche dichotomique : version récursive

Recherche dichotomique : version récursive

`dicho(L, e, i, j)` cherche `e` dans `L` entre les indices `i` et `j - 1` :

Recherche dichotomique : version récursive

`dicho(L, e, i, j)` cherche `e` dans `L` entre les indices `i` et `j - 1` :

```
def dicho(L, e, i, j):
    if i >= j: return False
    m = (i + j) // 2 # milieu de i et j
    if L[m] == e: return True
    if e < L[m]: # il faut chercher à gauche de m
        return dicho(L, e, i, m)
    else: # il faut chercher à droite de m
        return dicho(L, e, m + 1, j)
```

Recherche dichotomique

Question

Quel est le nombre d'appels récursifs en fonction de $n = \texttt{len(L)}$?

Recherche dichotomique

Question

Quel est le nombre d'appels récursifs en fonction de $n = \texttt{len(L)}$?

A chaque exécution, on divise au moins par deux la zone de recherche.

Au bout de deux exécutions, elle sera divisée par 4, puis 8, ... et 2^p au bout de p exécutions.

Recherche dichotomique

Question

Quel est le nombre d'appels récursifs en fonction de $n = \texttt{len(L)}$?

A chaque exécution, on divise au moins par deux la zone de recherche.

Au bout de deux exécutions, elle sera divisée par 4, puis 8, ... et 2^p au bout de p exécutions.

Donc, au bout de p exécutions, le nombre d'éléments de la zone de recherche est au plus :

$$\frac{n}{2^p}$$

Recherche dichotomique

Au bout de p appels récursifs, le nombre d'éléments de la zone de recherche est au plus $\dfrac{n}{2^p}$.

Quand $\dfrac{n}{2^p} \leq 1$, i.e $p \geq \log_2(n)$, la fonction s'arrête.

Recherche dichotomique

Au bout de p appels récursifs, le nombre d'éléments de la zone de recherche est au plus $\dfrac{n}{2^p}$.

Quand $\dfrac{n}{2^p} \leq 1$, i.e $p \geq \log_2(n)$, la fonction s'arrête.

Donc il y a au plus $\lceil \log_2(n) \rceil$ appels récursifs.

Comme chacun de ces appels effectue un nombre constant d'opérations, la complexité de la méthode par dichotomie est :

$$\boxed{O(\log(n))}$$

Trier une liste

On a donc besoin de savoir comment trier une liste, pour pouvoir utiliser `dichotomie`.

Question

Comment trier une liste ?

(Comment faites-vous pour trier votre main dans un jeu de cartes ?)

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[5, 1, -4, 2, -8, 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[5, 1, -4, 2, -8, 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[1, 5, -4, 2, -8, 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[-4, 1, 5 , 2, -8, 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[-4, 1, 2, 5, -8, 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[-8, -4, 1, 2, 5 , 7]

Tri par insertion

Le **tri par insertion** parcourt les indices `i` de `L` en conservant `L[:i]` triée et en insérant `L[i]` au bon endroit dans `L[:i]`

[-8, -4, 1, 2, 5, 7]

Tri par insertion

On va se servir d'une fonction récursive `insere(L, i)` qui :

1. Suppose `L[:i]` triée.
2. Met `L[i]` à sa bonne place pour que `L[:i+1]` devienne triée.

Tri par insertion

On va se servir d'une fonction récursive `insere(L, i)` qui :

1. Suppose `L[:i]` triée.
2. Met `L[i]` à sa bonne place pour que `L[:i+1]` devienne triée.

Fonctionnement de `insere(L, i)` :

1. Si `L[i-1] <= L[i]` :

Tri par insertion

On va se servir d'une fonction récursive `insere(L, i)` qui :

1. Suppose `L[:i]` triée.
2. Met `L[i]` à sa bonne place pour que `L[:i+1]` devienne triée.

Fonctionnement de `insere(L, i)` :

1. Si `L[i-1] <= L[i]` : `L[i]` est à sa bonne position, on ne fait rien.
2. Si `L[i-1] > L[i]` :

Tri par insertion

On va se servir d'une fonction récursive `insere(L, i)` qui :

1. Suppose `L[:i]` triée.
2. Met `L[i]` à sa bonne place pour que `L[:i+1]` devienne triée.

Fonctionnement de `insere(L, i)` :

1. Si `L[i-1] <= L[i]` : `L[i]` est à sa bonne position, on ne fait rien.
2. Si `L[i-1] > L[i]` : on peut échanger `L[i-1]` et `L[i]` puis appeler `insere(L, i-1)`.

Tri par insertion

Fonctionnement de `insere(L, i)` :

1. Si `i == 0` : il n'y a rien à faire (cas de base).
2. Si `L[i-1] <= L[i]` : `L[i]` est à sa bonne position, on ne fait rien.
3. Si `L[i-1] > L[i]` : on peut échanger `L[i-1]` et `L[i]` puis appeler `insere(L, i - 1)`.

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Tri par insertion

```
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Remarque : pas de `return`, on modifie la liste en argument donc il n'y a pas besoin de renvoyer une nouvelle liste.

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Comment prouver que ce tri est correct ?

Tri par insertion

```
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Comment prouver que ce tri est correct ?

En montrant l'**invariant de boucle** :

$$H_i = \text{« au début de la } i\text{ème itération de la boucle } \texttt{for}, \texttt{L[0:i]} \text{ est triée »}$$

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Quelle est sa complexité dans le pire cas ?

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Quelle est sa complexité dans le pire cas ?

1. `insere(L, i)` est en

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Quelle est sa complexité dans le pire cas ?

1. `insere(L, i)` est en $O(i)$
2. donc `tri_insertion(L)` est en

Tri par insertion

```python
def insere(L, i):
    if i != 0 and L[i-1] > L[i]:
        L[i], L[i-1] = L[i-1], L[i]
        insere(L, i-1)
```

```python
def tri_insertion(L):
    for i in range(len(L)):
        insere(L, i)
```

Quelle est sa complexité dans le pire cas ?

1. `insere(L, i)` est en $O(i)$
2. donc `tri_insertion(L)` est en $O(1)+O(2)+...+O(n) = O(n^2)$.

On va voir des algorithmes plus efficaces.

Tri fusion

Le tri fusion sur une liste `L` consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` de même taille.

Tri fusion

Le tri fusion sur une liste `L` consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` de même taille.
2. Trier récursivement `L1` et `L2` pour obtenir des listes triées `L1'` et `L2'`

Tri fusion

Le tri fusion sur une liste `L` consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` de même taille.
2. Trier récursivement `L1` et `L2` pour obtenir des listes triées `L1'` et `L2'`
3. Fusionner `L1'` et `L2'` pour avoir un tri de `L`.

Tri fusion

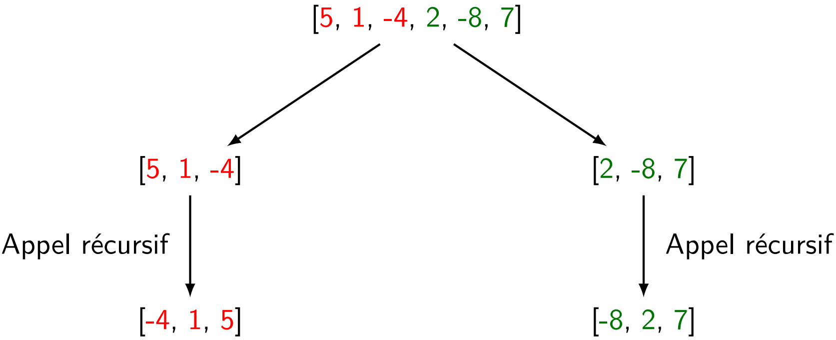
[5, 1, -4, 2, -8, 7]

Tri fusion

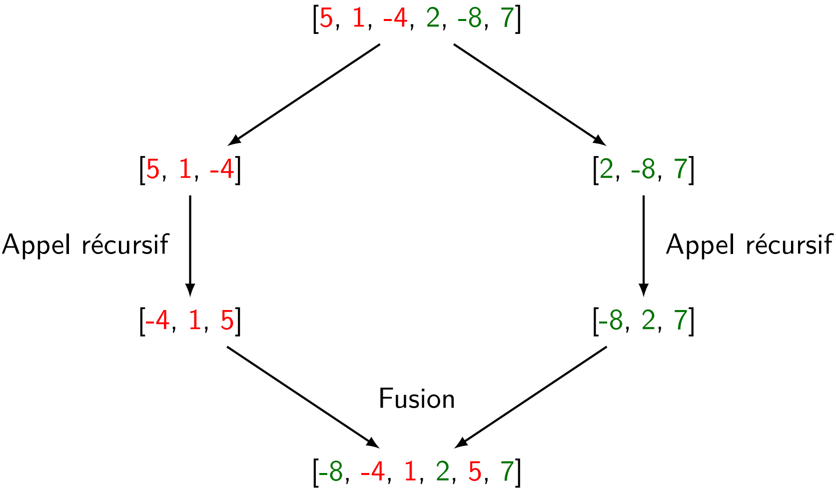
[5, 1, -4, 2, -8, 7]

[5, 1, -4] [2, -8, 7]

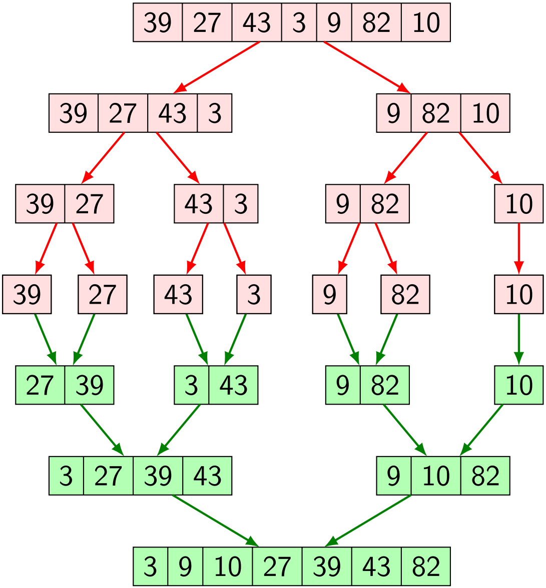
Tri fusion



Tri fusion


[5, 1, -4, 2, -8, 7]
[5, 1, -4]
[2, -8, 7]
Appel récursif
Appel récursif
[-4, 1, 5]
[-8, 2, 7]
Fusion
[-8, -4, 1, 2, 5, 7]

Tri fusion : exemple



Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` :

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` : renvoyer `L2`.
2. Si `len(L2) == 0` :

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` : renvoyer `L2`.
2. Si `len(L2) == 0` : renvoyer `L1`.
3. Sinon :
   a) Soit `m` le maximum de `L1` et `L2`.

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` : renvoyer `L2`.
2. Si `len(L2) == 0` : renvoyer `L1`.
3. Sinon :
    a) Soit `m` le maximum de `L1` et `L2`.
    b) Supprimer `m`.

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` : renvoyer `L2`.
2. Si `len(L2) == 0` : renvoyer `L1`.
3. Sinon :
    a) Soit `m` le maximum de `L1` et `L2`.
    b) Supprimer `m`.
    c) Fusionner récursivement `L1` et `L2` (où `m` a été supprimé).

Fusion

On va se servir d'une fonction récursive `fusion(L1, L2)` qui :

1. Suppose `L1` et `L2` triées.
2. Renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.

Fonctionnement de `fusion(L1, L2)` :

1. Si `len(L1) == 0` : renvoyer `L2`.
2. Si `len(L2) == 0` : renvoyer `L1`.
3. Sinon :
   a) Soit `m` le maximum de `L1` et `L2`.
   b) Supprimer `m`.
   c) Fusionner récursivement `L1` et `L2` (où `m` a été supprimé).
   d) Rajouter `m` au résultat de la fusion.

Tri fusion

```python
def fusion(L1, L2):
    if len(L1) == 0: return L2
    if len(L2) == 0: return L1
    if L1[-1] > L2[-1]: m = L1.pop()
    else: m = L2.pop()
    L = fusion(L1, L2)
    L.append(m)
    return L
```

Tri fusion

```
def fusion(L1, L2):
    if len(L1) == 0: return L2
    if len(L2) == 0: return L1
    if L1[-1] > L2[-1]: m = L1.pop()
    else: m = L2.pop()
    L = fusion(L1, L2)
    L.append(m)
    return L
```

Complexité :

Tri fusion

```python
def fusion(L1, L2):
    if len(L1) == 0: return L2
    if len(L2) == 0: return L1
    if L1[-1] > L2[-1]: m = L1.pop()
    else: m = L2.pop()
    L = fusion(L1, L2)
    L.append(m)
    return L
```

Complexité :
Soit $n =$ `len(L1)+len(L2)`.
`fusion(L1, L2)` effectue $O(n)$ appels récursifs (car à chaque appel on enlève un élément) et chaque appel récursif effectue un nombre constant d'opérations.
Donc la complexité de `fusion(L1, L2)` est $O(n)$.

Tri fusion

Fonctionnement de `tri_fusion(L)` :

1. Si `len(L) <= 1` :

Tri fusion

Fonctionnement de `tri_fusion(L)` :

1. Si `len(L) <= 1` : `L` est déjà triée.
2. Séparer `L` en deux listes de même taille `L1` et `L2`.
3. Trier récursivement `L1` et `L2`.
4. Les fusionner.

Tri fusion

Fonctionnement de `tri_fusion(L)` :

1. Si `len(L) <= 1` : L est déjà triée.
2. Séparer `L` en deux listes de même taille `L1` et `L2`.
3. Trier récursivement `L1` et `L2`.
4. Les fusionner.

```
def tri_fusion(L):
    if len(L) <= 1: return L
    L1, L2 = L[: len(L)//2], L[len(L)//2 :]
    return fusion(tri_fusion(L1), tri_fusion(L2))
```

Tri fusion

```
def tri_fusion(L):
    if len(L) <= 1: return L
    L1, L2 = L[: len(L)//2], L[len(L)//2 :]
    return fusion(tri_fusion(L1), tri_fusion(L2))
```

Question

Comment prouver que `tri_fusion(L)` trie `L` ?

Tri fusion

```
def tri_fusion(L):
    if len(L) <= 1: return L
    L1, L2 = L[: len(L)//2], L[len(L)//2 :]
    return fusion(tri_fusion(L1), tri_fusion(L2))
```

Question

Comment prouver que `tri_fusion(L)` trie `L` ?

Par récurrence sur la taille de `L` : par hypothèse de récurrence, les appels `tri_fusion(L1)` et `tri_fusion(L2)` trient `L1` et `L2` et on en déduit que `tri_fusion(L)` trie `L`.

Tri fusion

Question

Quelle est la complexité dans le pire cas de `tri_fusion(L)` ?

Notons $C(n)$ cette complexité pour $n =$ `len(L)`.

Tri fusion

Question

Quelle est la complexité dans le pire cas de `tri_fusion(L)` ?

Notons $C(n)$ cette complexité pour $n =$ `len(L)`.

`tri_fusion(L)` effectue :

1. appels récursifs sur `L1` et `L2` : complexité $2 \times C(\frac{n}{2})$.
2. fusion des deux listes : complexité n.

D'où : $C(n) = n + 2C(\frac{n}{2})$.

Tri fusion

$$C(n) = n + 2C(\frac{n}{2})$$

En appliquant cette inégalité sur $C(\frac{n}{2})$:

$$C(n) = n + 2(\frac{n}{2} + 2C(\frac{n}{4})) = n + n + 4C(\frac{n}{4})$$

$$\dots$$

Tri fusion

$$C(n) = n + 2C(\frac{n}{2})$$

En appliquant cette inégalité sur $C(\frac{n}{2})$:

$$C(n) = n + 2(\frac{n}{2} + 2C(\frac{n}{4})) = n + n + 4C(\frac{n}{4})$$

$$...$$

$$C(n) = \underbrace{n + n + ... + n}_{k} + 2^k C(\frac{n}{2^k})$$

Tri fusion

$$C(n) = n + 2C(\frac{n}{2})$$

En appliquant cette inégalité sur $C(\frac{n}{2})$:

$$C(n) = n + 2(\frac{n}{2} + 2C(\frac{n}{4})) = n + n + 4C(\frac{n}{4})$$

$$...$$

$$C(n) = \underbrace{n + n + ... + n}_{k} + 2^k C(\frac{n}{2^k})$$

Pour $k = \log_2(n)$:

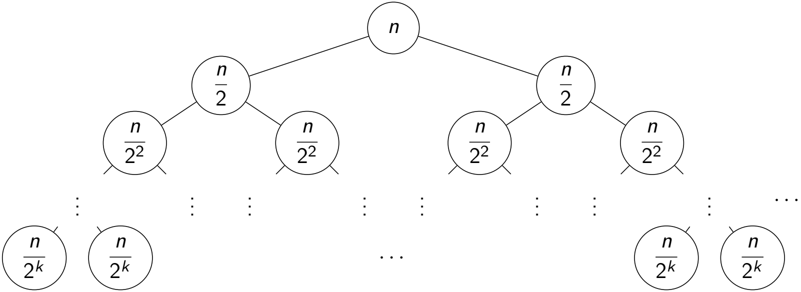
$$C(n) = n\log_2(n) + 2^{\log_2(n)} C(\frac{n}{2^{\log_2(n)}})$$

$$C(n) = n\log_2(n) + nC(1) = O(n\log(n))$$

Donc la complexité du tri fusion est $\boxed{\mathrm{O}(n\log(n))}$.

Tri fusion : arbre des appels récursifs

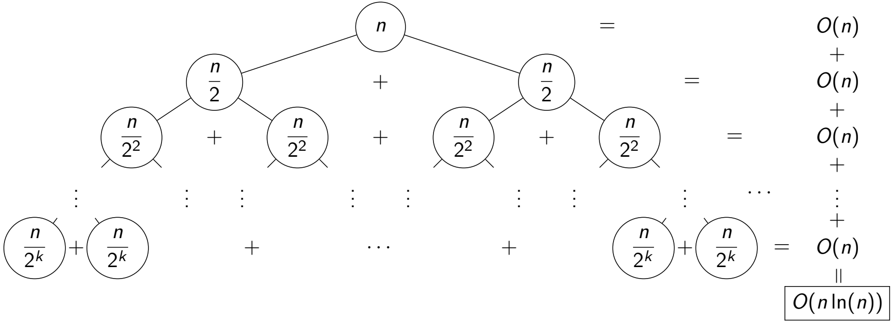
On peut représenter les appels récursifs du tri fusion sous forme d'un arbre et compter le nombre d'opération niveau par niveau :



Chaque rond (sommet) correspond à un appel récursif, avec la taille du sous-tableau à l'intérieur.

arbre des appels récursifs

On peut représenter les appels récursifs du tri fusion sous forme d'un arbre et compter le nombre d'opération niveau par niveau :



Chaque rond (sommet) correspond à un appel récursif, avec la taille du sous-tableau à l'intérieur.

Tri rapide (Quicksort)

Le tri rapide, sur une liste `L`, consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` : les éléments plus petits que `L[0]` et les éléments plus grand que `L[0]`.

Tri rapide (Quicksort)

Le tri rapide, sur une liste `L`, consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` : les éléments plus petits que `L[0]` et les éléments plus grand que `L[0]`.
2. Trier récursivement `L1` et `L2`.

Tri rapide (Quicksort)

Le tri rapide, sur une liste `L`, consiste à :

1. Séparer `L` en deux listes `L1` et `L2` : les éléments plus petits que `L[0]` et les éléments plus grand que `L[0]`.
2. Trier récursivement `L1` et `L2`.
3. Renvoyer la liste triée `L1` + `[L[0]]` + `L2`.

Tri rapide (Quicksort)

Le tri rapide, sur une liste L, consiste à :

1. Séparer L en deux listes L1 et L2 : les éléments plus petits que L[0] et les éléments plus grand que L[0].
2. Trier récursivement L1 et L2.
3. Renvoyer la liste triée L1 + [L[0]] + L2.

```
def tri_rapide(L):
    if len(L) <= 1: return L
    L1, L2 = [], []
    for i in range(1, len(L)):
        if L[i] < L[0]: L1.append(L[i])
        else: L2.append(L[i])
    return tri_rapide(L1) + [L[0]] + tri_rapide(L2)
```

Tri rapide (Quicksort)

Remarque : on peut aussi l'écrire en deux lignes avec des « listes par compréhension »...

```
def tri_rapide(L):
    if len(L) <= 1: return L
    return tri_rapide([e for e in L if e < L[0]])
+ [L[0]] + tri_rapide([e for e in L if e > L[0]])
```

Tri rapide

Question

Quelle est la complexité de `tri_rapide` ?

Tri rapide

Question

Quelle est la complexité de `tri_rapide` ?

- Dans le meilleur des cas : `L1` et `L2` sont de taille $\frac{n}{2}$. La complexité est $O(n \log(n))$, comme pour le tri fusion.
- Dans le pire cas : la taille de `L1` (ou `L2`) est systématiquement égale à $n-1$. On a alors une complexité (à une constante près) :

$$C(n) = C(n-1) + n = 1 + 2 + ... + n = \Theta(n^2)$$

Récapitulatif

Comparaison des algorithmes de tri sur une liste de taille n :

	Meilleur cas	Pire cas
Tri par insertion	$O(n)$	$O(n^2)$
Tri fusion	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$
Tri rapide	$O(n\log(n))$	$O(n^2)$

Application des tris

Question

Comment trouver la **médiane** d'une liste `L` de nombres, c'est à dire l'élément `m` de `L` tel qu'il y ait autant d'éléments supérieurs à m que d'éléments inférieurs ?

Exemple : la médiane de `[1, 0, 6, 27, 8, -10, 21]` est 6. En effet il y a trois éléments inférieurs à 6 et trois éléments supérieurs à 6.

Application des tris

1. 1ère possibilité : tester, pour chaque élément `m` de `L`, si `m` est la médiane.

Application des tris

1. 1ère possibilité : tester, pour chaque élément `m` de `L`, si `m` est la médiane.
   En $O(n^2)$.
2. 2ème possibilité : trier L puis sélectionner l'élément « du milieu ».

Application des tris

1. 1ère possibilité : tester, pour chaque élément `m` de `L`, si `m` est la médiane.
   En $O(n^2)$.
2. 2ème possibilité : trier L puis sélectionner l'élément « du milieu ».
   En $\boxed{O(n\log(n))}$

Application des tris

1. 1ère possibilité : tester, pour chaque élément `m` de `L`, si `m` est la médiane.
   En $O(n^2)$.

2. 2ème possibilité : trier L puis sélectionner l'élément « du milieu ».
   En $\boxed{O(n\log(n))}$

```python
def mediane(L):
    L1 = tri_fusion(L)
    return L1[len(L1)//2]
```

```
In [54]: mediane([3, 2, 6, 1, 8, 4, 5])
Out[54]: 4
```

Égalité à permutation près

Exercice

Écrire une fonction `egal(L1, L2)` déterminant si deux listes d'entiers `L1` et `L2` sont égales à permutation près.

Exemples : `egal([1, 2, 3], [2, 1, 3])` doit renvoyer `True`.
`egal([1, 2, 4], [2, 1, 3])` doit renvoyer `False`.

Tris de chaînes de caractères

Nous avons vu des tris sur des listes de nombres.
Ils permettent aussi de trier des chaînes de caractères selon l'ordre du dictionnaire (alphabétique).

Tris de chaînes de caractères

Nous avons vu des tris sur des listes de nombres.
Ils permettent aussi de trier des chaînes de caractères selon l'ordre du dictionnaire (alphabétique).

```
In [58]: L = ["MPSI", "PCSI", "PSI", "PC", "MP"]

In [59]: tri_insertion(L)

In [60]: L
Out[60]: ['MP', 'MPSI', 'PC', 'PCSI', 'PSI']

In [61]: "PSI" > "PC"
Out[61]: True
```