

# Preuves de programme

Quentin Fortier

March 20, 2022

# Représentations pour les différents types de nombres

La plupart des langages de programmation stockent:

- ❶ Les entiers positifs avec leur écriture en base 2.
- ❷ Les entiers relatifs avec leur codage par complément à 2.
- ❸ Les flottants avec la norme IEEE-754.

# Représentations pour les différents types de nombres

La plupart des langages de programmation stockent:

- ❶ Les entiers positifs avec leur écriture en base 2.
- ❷ Les entiers relatifs avec leur codage par complément à 2.
- ❸ Les flottants avec la norme IEEE-754.

Le module de calcul scientifique **numpy** permet de spécifier comment on veut représenter un nombre.

---

```
import numpy as np
```

---

# Entiers positifs

Avec  $p$  bits, on peut représenter tous les entiers positifs de:

$$\underbrace{00\dots00}_p{}_2 \quad \text{à} \quad \underbrace{11\dots11}_p{}_2 =$$

# Entiers positifs

Avec  $p$  bits, on peut représenter tous les entiers positifs de:

$$\underbrace{00\dots00}_p{}_2 \quad \text{à} \quad \underbrace{11\dots11}_p{}_2 = 2^p - 1$$

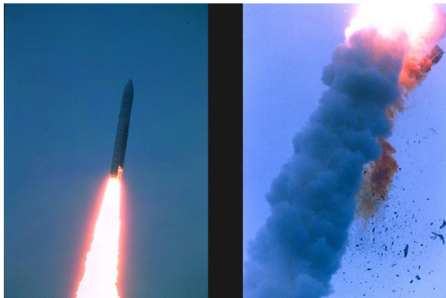
Dans numpy, les nombres positifs sont de type uint (unsigned int), suivi du nombre de bits  $p$  utilisé:

```
In [23]: np.uint32(2**32 - 1)  
Out[23]: 4294967295
```

```
In [24]: np.uint32(2**32)  
Out[24]: 0
```

# Entiers positifs

C'est un dépassement d'entier qui a causé le crash d'Ariane 5!



*Explosion d'Ariane 5 (1996).*

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .



# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

**Exemples:**  $0,101_2 =$

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

**Exemples:**  $0,101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,625 (= 0,625_{10})$

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

**Exemples:**  $0,101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,625 (= 0,625_{10})$

$1,01010101\dots_2 =$

# Flottants

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

**Exemples:**  $0,101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,625 (= 0,625_{10})$

$$1,01010101\dots_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} \dots = \frac{1}{4^0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

## Question

Comment représenter les nombres à virgules?

Par définition,  $0,1415 = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ .

Définition: développement en base  $b$

$$0, x_1 x_2 \dots_b = x_1 \times b^{-1} + x_2 \times b^{-2} + \dots$$

**Exemples:**  $0,101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,625 (= 0,625_{10})$

$$1,01010101\dots_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} \dots = \frac{1}{4^0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$1,01010101\dots_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

①  $x \times b =$



## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1x_2x_3\dots_b$ .

①  $x \times b = x_1, x_2x_3\dots_b$ , donc  $x_1 =$

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1x_2x_3..._b$ .

- 1  $x \times b = x_1, x_2x_3..._b$ , donc  $x_1 = \lfloor x \times b \rfloor$ .
- 2 Pour trouver  $x_2$ , on refait la même chose sur  $x \times b - x_1 = 0, x_2x_3..._b$ .
- 3 ...

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

- 1  $x \times b = x_1, x_2 x_3 \dots_b$ , donc  $x_1 = \lfloor x \times b \rfloor$ .
- 2 Pour trouver  $x_2$ , on refait la même chose sur  $x \times b - x_1 = 0, x_2 x_3 \dots_b$ .
- 3 ...

**Exemples:**  $0,625 = 0,?_2$

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

- 1  $x \times b = x_1, x_2 x_3 \dots_b$ , donc  $x_1 = \lfloor x \times b \rfloor$ .
- 2 Pour trouver  $x_2$ , on refait la même chose sur  $x \times b - x_1 = 0, x_2 x_3 \dots_b$ .
- 3 ...

**Exemples:**  $0,625 = 0,1?_2$

- 1  $0,625 \times 2 = 1,25$

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

- 1  $x \times b = x_1, x_2 x_3 \dots_b$ , donc  $x_1 = \lfloor x \times b \rfloor$ .
- 2 Pour trouver  $x_2$ , on refait la même chose sur  $x \times b - x_1 = 0, x_2 x_3 \dots_b$ .
- 3 ...

**Exemples:**  $0,625 = 0,10?_2$

- 1  $0,625 \times 2 = 1,25$
- 2  $0,25 \times 2 = 0,5$

## Question

Comment passer d'un développement de  $0 < x < 1$  en base 10 à un développement dans une autre base  $b$ ?

On veut écrire  $x$  sous la forme  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots_b$ .

- 1  $x \times b = x_1, x_2 x_3 \dots_b$ , donc  $x_1 = \lfloor x \times b \rfloor$ .
- 2 Pour trouver  $x_2$ , on refait la même chose sur  $x \times b - x_1 = 0, x_2 x_3 \dots_b$ .
- 3 ...

**Exemples:**  $0,625 = 0,101_2$

- 1  $0,625 \times 2 = 1,25$
- 2  $0,25 \times 2 = 0,5$

## Question

Écrire un algorithme Python pour calculer la liste des chiffres en base 2 d'un flottant.

## Question

Écrire un algorithme Python pour calculer la liste des chiffres en base 2 d'un flottant.

---

```
x = 0.625 # on va convertir x en base 2
L = []
while x != 0:
    x *= 2
    L.append(int(x))
    x -= int(x)
```

---



$x$  peut avoir un développement décimal fini mais infini en base 2 :

$$0,1 = 0,000110011001100110011001100..._2$$

# Flottants

$x$  peut avoir un développement décimal fini mais infini en base 2 :

$$0,1 = 0,000110011001100110011001100..._2$$

Comme on ne peut stocker qu'un nombre fini de chiffres sur un PC, Python fait une troncature donc une approximation.

```
In [54]: 0.1 + 0.1 + 0.1  
Out[54]: 0.30000000000000004  
  
In [55]: 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3  
Out[55]: False
```

**Il ne faut donc jamais tester une égalité entre deux flottants!**

**Il ne faut donc jamais tester une égalité entre deux flottants!**

Si  $x$  et  $y$  sont deux flottants, plutôt qu'écrire:

---

```
if x == y:  
    ...
```

---

On testera si la différence est suffisamment petite:

---

```
if abs(x - y) < 0.001:  
    ...
```

---

Pour convertir un flottant d'une base à une autre, on convertit sa partie entière et sa partie fractionnaire.

## Question

Convertir à la main  $1010,11_2$  en base 10

# Flottants

Pour convertir un flottant d'une base à une autre, on convertit sa partie entière et sa partie fractionnaire.

## Question

Convertir à la main  $1010,11_2$  en base 10

## Question

Convertir à la main 22,5625 en base 2

# Flottants

## Question

Comment stocker un flottant en mémoire?

## Question

Comment stocker un flottant en mémoire?

On utilise la notation scientifique:

$$932,134 = 9,32134 \times 10^2$$

$$1001,011_2 =$$

## Question

Comment stocker un flottant en mémoire?

On utilise la notation scientifique:

$$932,134 = 9,32134 \times 10^2$$

$$1001,011_2 = 1,\underbrace{001011}_\text{mantisse}_2 \times \underbrace{2^3}_{2^\text{exposant}}$$



Python code un flottant  $x$  en utilisant **64 bits**:

- ① 1 bit pour le **signe** (0 si  $x \geq 0$ , 1 si  $x < 0$ )
- ② 11 bits pour l'**exposant**: de  $-2^{10} + 1 = -1023$  à  $2^{10} = 1024$
- ③ 52 bits (chiffres significatifs) pour l'écriture en base 2 de la **mantisse**: de  $0, \underbrace{00 \dots 00}_{52}$  à  $0, \underbrace{11 \dots 11}_{52}$

# Norme IEEE-754

Python code un flottant  $x$  en utilisant **64 bits**:

- 1 bit pour le **signe** (0 si  $x \geq 0$ , 1 si  $x < 0$ )
- 11 bits pour l'**exposant**: de  $-2^{10} + 1 = -1023$  à  $2^{10} = 1024$
- 52 bits (chiffres significatifs) pour l'écriture en base 2 de la **mantisse**: de  $0, \underbrace{00 \dots 00}_{52}$  à  $0, \underbrace{11 \dots 11}_{52}$

Exemple:

1	0	...	0	1	1	0	...	0	1	1	0
---	---	-----	---	---	---	---	-----	---	---	---	---

représente:

Python code un flottant  $x$  en utilisant **64 bits**:

- 1 bit pour le **signe** (0 si  $x \geq 0$ , 1 si  $x < 0$ )
- 11 bits pour l'**exposant**: de  $-2^{10} + 1 = -1023$  à  $2^{10} = 1024$
- 52 bits (chiffres significatifs) pour l'écriture en base 2 de la **mantisse**: de  $0, \underbrace{00 \dots 00}_{52}$  à  $0, \underbrace{11 \dots 11}_{52}$

Exemple:

1	0	...	0	1	1	0	...	0	1	1	0
---	---	-----	---	---	---	---	-----	---	---	---	---

représente:  $-1,6 \times 2^3$

# Flottants

Ainsi, il peut y avoir dépassement de flottant en Python :

```
In [70]: 2.**1023
```

```
Out[70]: 8.98846567431158e+307
```

```
In [71]: 2.**1024
```

```
-----  
OverflowError                                Traceback (most recent call last)  
<ipython-input-71-503cd93858fd> in <module>()  
----> 1 2.**1024
```

```
OverflowError: (34, "Le résultat numérique est en dehors de l'intervalle")
```

# Flottants

```
In [1]: 2**52 + 0.5 - 2**52  
Out[1]: 0.0
```

# Flottants

```
In [1]: 2**52 + 0.5 - 2**52  
Out[1]: 0.0
```

Seulement 52 chiffres significatifs peuvent être stockés, on peut avoir des problèmes d'arrondis.

# Flottants

```
In [1]: 2**52 + 0.5 - 2**52  
Out[1]: 0.0
```

Seulement 52 chiffres significatifs peuvent être stockés, on peut avoir des problèmes d'arrondis.

## Question

Qu'affiche l'algorithme suivant?

```
s = 2**53  
while s < 2**53 + 3:  
    s += 0.1  
print(s)
```

Question 3 :
--------------

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies :

- A) Un nombre entier naturel qui est représenté en binaire par une suite de 0 et de 1 et qui se termine par 1 est pair.
- B) Le nombre décimal 0,1 possède une représentation binaire finie.
- C) Sur un octet de mémoire le plus grand entier naturel représentable par une suite de 0 ou de 1 est 255.
- D) 110 en binaire représente 10 en base dix.



**Question 2** Parmi les affirmations suivantes, indiquez celle ou celles qui sont vraies.

- A) Si un nombre réel admet une écriture décimale finie, alors il possède une écriture binaire finie.
- B) Si un nombre réel admet une écriture binaire finie, alors il possède une écriture décimale finie.
- C) Tous les nombres réels admettent une écriture binaire finie.
- D) Tous les nombres entiers naturels admettent une écriture binaire finie.

**Question 3** Parmi les affirmations suivantes, indiquez celle ou celles qui sont vraies.

- A) L'utilisation de nombres flottants peut provoquer des erreurs d'arrondis, mais celles-ci ne sont jamais graves car les erreurs d'arrondis sont minimales.
- B) L'utilisation de nombres flottants peut provoquer de graves erreurs d'arrondis.
- C) L'utilisation de nombres flottants ne provoque pas d'erreur d'arrondis.
- D) Pour ne pas avoir d'erreur d'arrondis, il suffit de coder les flottants sur 64 bits plutôt que sur 32 bits.