Graphes : Représentations

Quentin Fortier

April 11, 2022

Représentation de graphe

On souhaite stocker un graphe en Python, avec les opérations suivantes :

1. ajouter / supprimer une arête
2. savoir s'il existe une arête entre 2 sommets
3. connaître la liste des voisins d'un sommet
4. ...

Avec, si possible, une faible complexité en temps et espace.

Représentation de graphe

On souhaite stocker un graphe en Python, avec les opérations suivantes :

1. ajouter / supprimer une arête
2. savoir s'il existe une arête entre 2 sommets
3. connaître la liste des voisins d'un sommet
4. ...

Avec, si possible, une faible complexité en temps et espace.

Il existe principalement 2 représentations possibles de graphes :

1. Par matrice d'adjacence
2. Par liste d'adjacence

Matrice d'adjacence : Définition

On peut représenter un graphe non orienté (V, E), où $V = \{0, ..., n-1\}$ par une **matrice d'adjacence** A de taille $n \times n$ définie par :

- $A_{i,j} = 1 \iff \{i, j\} \in E$
- $A_{i,j} = 0 \iff \{i, j\} \notin E$

Remarque : A est symétrique.

Matrice d'adjacence : Définition

On peut représenter un graphe non orienté (V, E), où $V = \{0, ..., n-1\}$ par une **matrice d'adjacence** A de taille $n \times n$ définie par :

- $A_{i,j} = 1 \iff \{i, j\} \in E$
- $A_{i,j} = 0 \iff \{i, j\} \notin E$

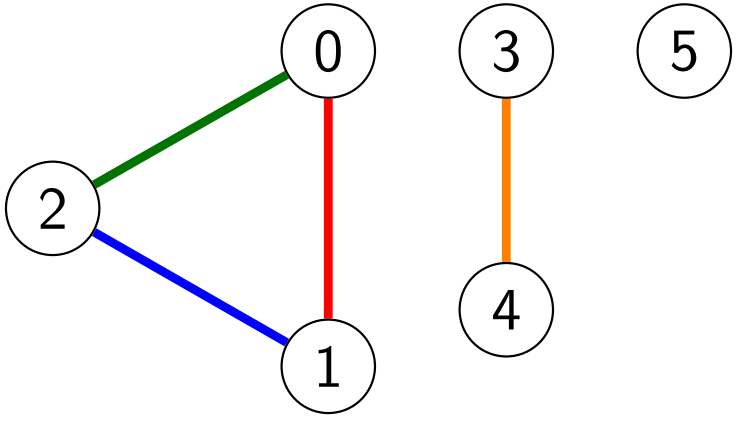
Remarque : A est symétrique.

Pour un graphe orienté $(V, \vec{E})$:

- $A_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in \vec{E}$
- $A_{i,j} = 0 \iff (i, j) \notin \vec{E}$

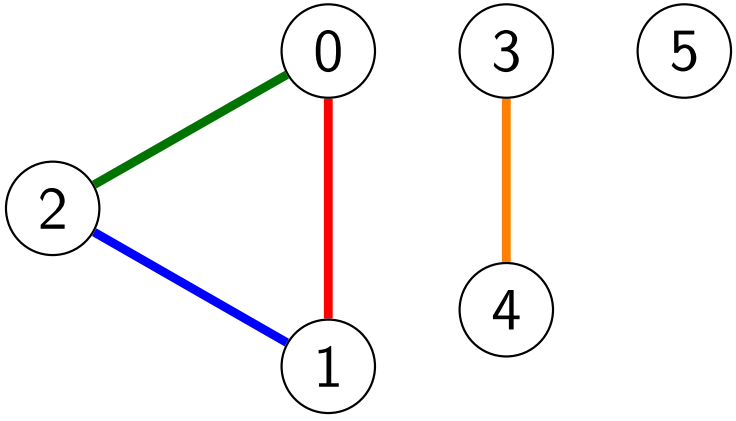
A n'est pas symétrique (a priori).

Matrice d'adjacence : Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence : Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quitte à permuter lignes et colonnes (i.e renuméroter les sommets), les composantes connexes apparaissent par bloc.

Matrice d'adjacence : Exemple

En Python, **une matrice est une liste de listes** (ou un tableau de tableaux, avec `numpy`).

Matrice d'adjacence : Exemple

En Python, **une matrice est une liste de listes** (ou un tableau de tableaux, avec `numpy`).
Par exemple, voici une matrice avec sa représentation en Python :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
M = [[1, 0, 3], [2, 2, 1]]
```

Matrice d'adjacence : Exemple

En Python, **une matrice est une liste de listes** (ou un tableau de tableaux, avec `numpy`).
Par exemple, voici une matrice avec sa représentation en Python :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
M = [[1, 0, 3], [2, 2, 1]]
```

Code	`M[i]`	`M[i][j]`	`len(M)`	`len(M[0])`
Signification	$i$ème ligne	élément ligne i, colonne j	nombre de lignes	nombre de colonnes

Matrice d'adjacence : Exemple

Création de matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets et 0 arête :

```
def make_matrix(n):
    G = []
    for i in range(n): # nombre de colonnes
        L = [] # création de la ième ligne
        for j in range(n):
            L.append(0)
        G.append(L)
    return G
```

Matrice d'adjacence : Exemple

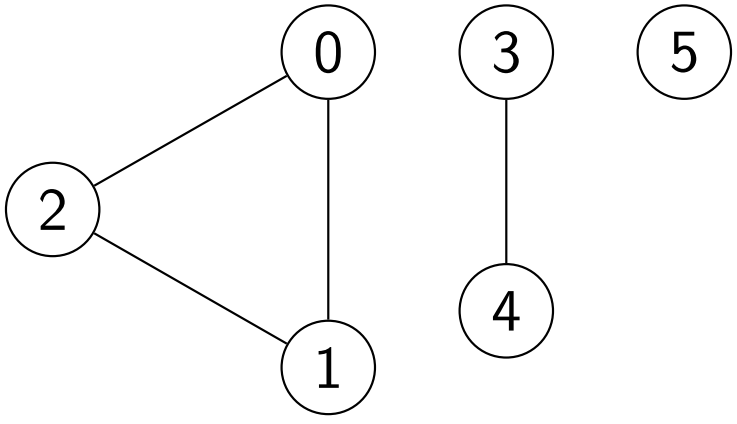
Création de matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets et 0 arête :

```
def make_matrix(n):
    G = []
    for i in range(n): # nombre de colonnes
        L = [] # création de la ième ligne
        for j in range(n):
            L.append(0)
        G.append(L)
    return G
```

Ajout d'une arête :

```
def add_edge(G, u, v):
    G[u][v] = 1
    G[v][u] = 1
```

Matrice d'adjacence : Exemple



Création de ce graphe en Python, par matrice d'adjacence :

```
G = make_matrix(6)
add_edge(G, 0, 1)
add_edge(G, 0, 2)
add_edge(G, 1, 2)
add_edge(G, 3, 4)
```

Matrice d'adjacence : Degré

Exercice

Écrire une fonction `deg(G, v)` pour calculer le degré d'un sommet `v` dans un graphe représenté par matrice d'adjacence `G`.

Matrice d'adjacence : Degré

Exercice

Écrire une fonction `deg(G, v)` pour calculer le degré d'un sommet `v` dans un graphe représenté par matrice d'adjacence `G`.

On regarde le nombre de 1 sur la ligne `v` de la matrice :

```
def deg(G, v):
    res = 0
    for j in range(len(G[v])):
        if G[v][j] == 1:
            res += 1
    return res
```

Matrice d'adjacence : Liste des voisins

Exercice

Écrire une fonction `voisins(G, v)` pour renvoyer la liste des voisins de `v` dans `G`.

Matrice d'adjacence : Liste des voisins

Exercice

Écrire une fonction `voisins(G, v)` pour renvoyer la liste des voisins de `v` dans `G`.

```
def voisins(G, v):
    res = []
    for j in range(len(G[v])):
        if G[v][j] == 1:
            res.append(j)
    return res
```

Matrice d'adjacence : Avec POO

Exemple de **programmation orientée objet** (hors programme) :

```
class Graph:
    def __init__(self, n):
        self.G = [[0]*n for _ in range(n)]
    def add_edge(self, u, v):
        self.G[u][v] = 1
        self.G[v][u] = 1
    def del_edge(self, u, v):
        self.G[u][v] = 0
        self.G[v][u] = 0
    def is_edge(self, u, v):
        return self.G[u][v] == 1
    def neighbors(self, u):
        res = []
        for v in range(len(self.G[u])):
            if self.G[u][v] == 1:
                res.append(v)
        return res
```

Liste d'adjacence

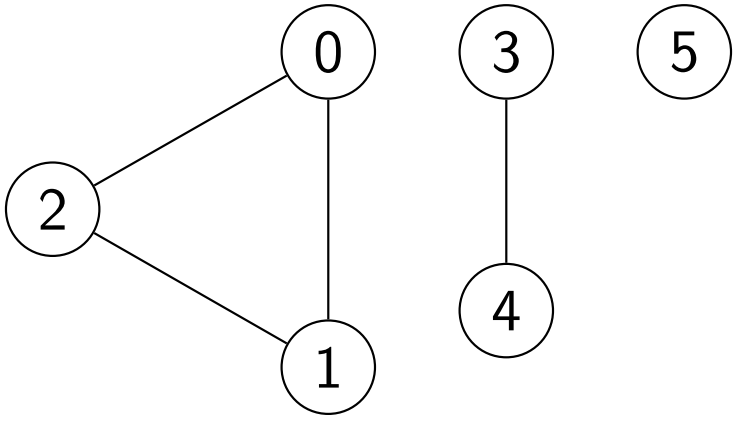
La représentation par **liste d'adjacence** consiste à stocker, pour chaque sommet, la liste de ses voisins.

Liste d'adjacence

La représentation par **liste d'adjacence** consiste à stocker, pour chaque sommet, la liste de ses voisins.

On utilise pour cela une liste `G` de listes, telle que `G[u]` soit la liste des voisins de `u`.

Liste d'adjacence : Exemple



Matrice d'adjacence

```
[[0, 1, 1, 0, 0, 0],
 [1, 0, 1, 0, 0, 0],
 [1, 1, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 1, 0],
 [0, 0, 0, 1, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

Liste d'adjacence

```
[[1, 2],
 [0, 2],
 [0, 1],
 [4],
 [3],
 []]
```

Liste d'adjacence : Fonctions

Pour créer une liste d'adjacence d'un graphe à n sommets et 0 arête :

```
def make_list(n):
    G = []
    for i in range(n):
        G.append([])
    return G
```

Liste d'adjacence : Fonctions

Pour créer une liste d'adjacence d'un graphe à n sommets et 0 arête :

```
def make_list(n):
    G = []
    for i in range(n):
        G.append([])
    return G
```

Ou, avec une création de liste par compréhension :

```
def make_list(n):
    return [[] for i in range(n)]
```

Liste d'adjacence : Fonctions

Pour ajouter une arête à une liste d'adjacence d'un graphe orienté :

Liste d'adjacence : Fonctions

Pour ajouter une arête à une liste d'adjacence d'un graphe orienté :

```
def add_edge(G, u, v):
    G[u].append(v)
```

Liste d'adjacence : Fonctions

Exercice

Écrire une fonction pour calculer le nombre d'arêtes d'un graphe orienté représenté par liste d'adjacence.

Liste d'adjacence : Fonctions

Exercice

Écrire une fonction pour calculer le nombre d'arêtes d'un graphe orienté représenté par liste d'adjacence.

Exercice

Ecrire deux fonctions pour convertir une matrice d'adjacence en liste d'adjacence et vice-versa.

Liste d'adjacence : Fonctions

Exercice

Écrire une fonction pour calculer le nombre d'arêtes d'un graphe orienté représenté par liste d'adjacence.

Exercice

Ecrire deux fonctions pour convertir une matrice d'adjacence en liste d'adjacence et vice-versa.

Exercice

Ecrire une fonction pour renvoyer la transposée d'un graphe orienté représenté sous forme de liste d'adjacence, c'est-à-dire en inversant le sens de toutes les flèches.

Comparaison matrice d'adjacence / liste d'adjacence

Pour un graphe orienté à n sommets et m arêtes :

Opération	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
espace	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n+m)$
ajouter (u, v)	$O(1)$	$O(1)$
supprimer (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$
existence (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$
voisins de u	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+(u))$
ajouter sommet	X	X
supprimer sommet	X	X

Comparaison matrice d'adjacence / liste d'adjacence

Pour un graphe orienté à n sommets et m arêtes :

Opération	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
espace	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n+m)$
ajouter (u, v)	$O(1)$	$O(1)$
supprimer (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$
existence (u, v)	$O(1)$	$O(\deg^+(u))$
voisins de u	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+(u))$
ajouter sommet	X	X
supprimer sommet	X	X

Si $m = \Theta(n^2)$ (graphe dense) : matrice d'adjacence conseillée.
Si $m = \mathrm{O}(n)$ (graphe creux, ex : arbre) : liste d'adjacence conseillée.