CPGE **Moulay Youssef**
Rabat

Préparation 2025

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Mines

Session 2020

Corrigé proposé par Ahmed Hammani

Classes MP*

Table des matières

ÉNONCÉ

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet, on considère des **R**-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé nilindice de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.
Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.
Une matrice triangulaire supérieure est dite stricte lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.
L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

THÉORÈME(*DE GERSTENHABER*)

Soit E un R-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme B). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I : Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2 On fixe une base $\mathbf{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

3 Soit B une base de E. Montrer que

$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geqslant q \geqslant 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre, et que si $\left(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y)\right)$ est libre alors $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y)\right)$ est libre.

5 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II : Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, (a \otimes x)(z) = (a \mid z) \cdot x$$

6 On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7 Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III : Deux lemmes

On considère ici un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sousespace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé nilindice générique de $\mathcal{V}$ (cet entier est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geqslant 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet)$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

LEMME A

Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}\left(u^k v\right) = 0$ pour tout entier naturel k.

LEMME B

Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11 , on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8 Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $\left(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}\right)$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9 Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10 Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}\left(f_1^{(k+1)}\right)$, et en déduire la validité du lemme **A**.

11 Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. A l'aide d'une relation entre $u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right)$ et $v\left(u^{p-1}(y)\right)$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12 Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$. Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV : Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, on a $\dim \mathcal{V}' \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose,

$$H := \mathrm{Vect}(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\bar{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \bar{u}(z) = \pi(u(z))$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}$$

13 Montrer que $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14 Montrer que

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}$$

15 Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z}$$

et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.

16 En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17 Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n - 1$$

18 Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\bar{u})^k(z) = \pi\left(u^k(z)\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19 Démontrer que

$$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20 Démontrer que

$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

21 En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet}\setminus\{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^*$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geqslant n-1$ d'après la question 21.

22 Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On pourra utiliser les résultats de la question 5 et la question 20.

23 On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24 Conclure.

CORRIGÉ

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

I : Généralités sur les espaces nilpotents

1 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que tel que $u^r = 0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u^k)^p = (u^p)^k = 0$, d'où $u^k \in \mathcal{N}(E)$ et $Sp(u^k) = \{0\}$ et par suite $\mathrm{tr}(u^k) = 0$.

2 Soit $f \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $\chi_f = X^n$, donc par théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$, donc $f \in \mathcal{N}$.
L'application $\Phi : f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathbf{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est l'image par Φ^{-1} de l'ensemble $T_n^{++}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes. Celui-ci est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $n(n-1)/2$ donc $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n(n-1)/2$.
On conclut que $\mathcal{N}_B$ est un sous-espace nilpotent.

3 Soit $\nu(u)$ le nilindice de $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $u \in \mathcal{N}(E)$, donc $\chi_u = X^n$ ce qui entraine que $u^n = 0$ et par suite $\nu_u \in [\![1, n]\!]$, d'où les inclusions

$$\{\nu(u) \ / \ u \in \mathcal{N}\} \subset \{\nu(u) \ / \ u \in \mathcal{N}(E)\} \subset [\![1, n]\!]$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et notons $\mathbf{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, alors l'endomorphisme u définit dans la base $\mathbf{B}$ par $u(e_j) = 0$ pour $j \in [\![1, n-k+1]\!]$ et $u(e_j) = e_{j-n+k-1}$ pour $j \in [\![n-k+2, n]\!]$ est d'indice de nilpotence $\nu_u = k$ et $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, donc $k \in \{\nu_u \ / \ u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\}$, ce qui assure l'égalité entre ces ensembles.

4 Supposons que la famille est liée, alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ non nulle tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et considérons

$$j = \min\{k \in [\![0, p-1]\!] \ / \ \alpha_k \neq 0\}$$

alors $\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et en composant $p-1-j$ fois par u, on obtient $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{q-1}$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$$

alors en composant par u^q on obtient

$$\alpha_0 u^q(x) + \alpha_1 u^{q+1}(x) + \cdots + \alpha_{r-1} u^{p-1}(x) = 0$$

où on a posé $r = p - q \geqslant 0$. La liberté de la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ exige alors que $\alpha_0 = \cdots \alpha_{r-1} = 0$. On obtient ainsi

$$\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$$

et en composant successivement par $u^{q-1}, u^{q-2}, \ldots, u$, on aura successivement

$$\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_0 u^{q-1}(y) = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{p-2} u^{p-1}(x) + \beta_{q-2} u^{q-1}(y) = 0$$

et la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ entrainera $(\alpha_r, \beta_0) = \cdots (\alpha_{p-2}, \beta_{q-2}) = (0,0)$ et finalement $\alpha_{p-1}u^{p-1}(x) + \beta_{q-1}u^{q-1}(y) = 0$, donc $(\alpha_{p-1}, \beta_{q-1}) = (0,0)$.

5 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice $p \geqslant n-1$.
Si $p = n$, alors $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-1})$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (O) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (O) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est clair que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-1}(x))$ et $\mathrm{Im}(u^{n-1}) = \mathrm{vect}(u^{n-1}(x))$ et on a bien le résultat attendu.
Si $p = n-1$, alors $(x, u(x), \dots, u^{n-2}(x))$ est libre, on la complète en une base de E, $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$, alors $u^{n-1}(y) = 0$ et d'après la question précédente, $(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y))$ est liée, si non on aura $\mathbf{B}' \cup \{y, u(y)\}$ libre avec un cardinal $\geqslant n+1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) &= \mathrm{vect}(u(x), \dots, u^{n-2}(x), u(y)) \\ \mathrm{Ker}(u) &\subset \mathrm{vect}(u^{n-2}(x), y) \\ \mathrm{Im}(u^{n-2}) &= \mathrm{vect}(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y)) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x)) \end{aligned}$$

Or $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1,2\}$.
Si $y \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(y) = 0$, donc par liberté de $(u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$, $y \notin \mathrm{Im}(u)$, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x)) = \mathrm{Im}(u^{n-2})$.
Si $y \notin \mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x))$.

II : Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

6 Pour tout $z \in E$, $a, b \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ((a+\alpha b) \otimes x)(z) &= (a + \alpha b|z).x = (a|z).x + \alpha(b|z).x \\ &= (a \otimes x)(z) + \alpha(b \otimes x)(z) \\ &= ((a \otimes x + \alpha b \otimes x))(z) \end{aligned}$$

Notons $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$.
Soit $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors pour tout $z \in E$, $\varphi(a)(z) = (a|z).x = 0$, or $x \neq 0$, donc avec $z = a$, on obtient $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui assure l'injectivité de φ.

pour tout $a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$ est linéaire et $\mathrm{Im}(\varphi(a)) \subset \mathrm{vect}(x)$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\}$.
Complétons x en une base de E, $\mathbf{B}' = (x, e_2, \ldots, e_n)$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)$ si, et seulement si, la matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\dim\{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\} = n = \dim(E)$, ce qui entraine que φ est bijective de E vers $\{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\}$.

7 $(a \otimes x)(x) = (a|x).x$, donc en choisissant la base précédente $\mathbf{B}'$, on aura $\mathrm{tr}(a \otimes x) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathbf{B}'}(a \otimes x)\right) = a_1 = (a|x)$.

III : Deux lemmes

8 Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $k = 1$, $(u + tv)^1 = u + tv = t^0 u + t^1 v$, donc $f_0^{(1)} = u, f_1^{(1)} = v$.
Supposons qu'on a le résultat pour un certain $k \geqslant 2$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(u + tv)^{k+1} &= (u + tv)^k (u + tv) \\
&= \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} (u + tv) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (t^i f_i^{(k)} u + t^{i+1} f_i^{(k)} v) \\
&= \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k+1} t^i f_{i-1}^{(k)} v \\
&= f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k} t^i (f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v) + t^{k+1} f_k^{(k)} v
\end{aligned}$$

ce qui donne $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u, f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} v$ et pour $i \in [\![1, k]\!]$,

$$f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v$$

Cette récurrence assure l'existence et l'unicité.

Toujours par récurrence, $f_0^{(1)} = u$, et si $f_0^{(k)} = u^k$, alors

$$f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u = u^k u = u^{k+1}$$

$f_1^{(1)} = v$ et si $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors

$$\begin{aligned} f_1^{(k+1)} &= f_1^{(k)} u + f_0^{(k)} v \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v \\ &= \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i} \end{aligned}$$

9 $u, v \in \mathcal{V}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc $u + tv$ est nilpotent et par suite $(u + tv)^p = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi $t \longmapsto (u + tv)^p$ est une fonction polynômiale vectorielle nulle, donc les $f_i^{(p)}$ sont nuls, en particulier $f_1^{(p)} = 0$.

10 Par linéarité de la trace,on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(f_1^{(k+1)}) &= \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^i v u^{k-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^k v) \\ &= (k+1) \operatorname{tr}(u^k v) \end{aligned}$$

$u + tv$ est nilpotent, donc aussi pour $(u + tv)^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraine que pour tout $t \in \mathbb{R}$, ,

$$0 = \operatorname{tr}\left((u + tv)^{k+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \operatorname{tr}(f_i^{(k+1)})$$

il s'agit d'une fonction polynômiale nulle, donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0$, c'est à dire $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$, ce qui valide le lemme **A**.

11 $\mathcal{V}^* = \{x \in E \ / \ \exists u \in \mathcal{V}, \ x \in \operatorname{Im}(u^{p-1})\}$.

$$\begin{aligned} f_1^{(p-1)}(y) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((u + tv)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y)\right) \\ &= \lim_{t \to 0} \left((u + tv)^{p-1} \left(\frac{1}{t} y\right) - u^{(p-1)} \left(\frac{1}{t} y\right)\right) \end{aligned}$$

donc $f_1^{(p-1)}(y)$ est limite d'une fonction à valeurs dans $K(\mathcal{V})$ qui est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

Comme
$$\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$$
alors
$$\sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -vu^{p-1}$$
et par suite
$$\begin{aligned} uf_1^{(p-1)} &= \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} \\ &= -vu^{p-1} \end{aligned}$$

Alors $u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = -v\left(u^{p-1}(y)\right)$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$, il existe $y \in E$ tel que tel que $x = u^{p-1}(y)$, donc $v(x) = v\left(u^{p-1}(y)\right) = -u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) \in u\left(K(\mathcal{V})\right)$ vu que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

12 D'après la question 11 (solution 11), pour tout $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$, $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V}))$.
On remarque que $u(\mathrm{vect}(x)) = \{0\}$, donc
$K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{vect}(x) + u(K(\mathcal{V})) \subset \mathrm{vect}(x) + u^2(K(\mathcal{V})) \subset \cdots \subset \mathrm{vect}(x) + u^k(K(\mathcal{V}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
Pour $k = p$, $y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in \mathrm{vect}(x)$, donc $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{vect}(x)$.
De l'inclusion précédente, on aura $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V})) \subset (\mathrm{vect}(x)) \subset \{0\}$, donc $\mathcal{V}x = \{0\}$.

IV : Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13 On considère les applications linéaires
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{L}(H) \\ u & \longmapsto & \overline{u} \end{array}$$
et on pose
$$\mathcal{V}x = \mathrm{Im}(\varphi) \qquad \mathcal{W} = \mathrm{Ker}(\varphi) \qquad \overline{\mathcal{V}} = \mathrm{Im}(\psi) \qquad \mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\psi)$$

14 On applique le théorème du rang aux applications φ et ψ, on obtient $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{V}x)$ et $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}})$, ce qui donne l'égalité $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}})$.

15 $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ \overline{u} = 0\}$, or

$\overline{u} = 0$ si, et seulement si, pour tout $z \in H$, $\overline{u}(z) = \pi(u(z)) = 0$ si, et seulement si, pour tout $z \in H$, $u(z) \in \mathrm{vect}(x)$ si, et seulement si, $u(H) \subset \mathrm{vect}(x)$.

Donc $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ u(H) \subset \mathrm{vect}(x)\}$, or d'après la question 6 (solution 6), l'application $a \longmapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E dans $\{u \in \mathcal{L}(E), / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\}$, donc pour chaque $u \in \mathcal{W}$ tel que $u(H) \subset \mathrm{vect}(x)$, notons L le sous-espace de E image réciproque de $\mathcal{Z}$ par cette application, alors $\mathcal{Z} = \{a \otimes x \ / \ a \in L\}$, et $\mathcal{Z}$ et L sont isomorphes , donc $\dim(\mathcal{Z}) = \dim(L)$.

pour tout $a \in L$, , $a \otimes x \in Z$, donc nilpotente et par suite grâce à la question 7 (solution 7), $\mathrm{tr}(a \otimes x) = (a|x) = 0$, donc $x \in L^{\perp}$.

16 Soit $v \in \mathcal{V}$. Montrons que $v(x) \in L^{\perp}$.

Soit $a \in L$, alors pour tout $z \in E$,

$$\begin{aligned}(a \otimes v(x))(z) &= (a|z).v(x) \\ &= v((a|z)x) \\ &= v((a \otimes x)(z)) \\ &= (v \circ (a \otimes x))(z)\end{aligned}$$

donc $a \otimes v(x) = v \circ (a \otimes x)$, en appliquant le lemme **A** avec $k = 1$, on obtient $\mathrm{tr}(v \circ (a \otimes x)) = \mathrm{tr}(a \otimes v(x)) = (a|v(x)) = 0$, donc $v(x) \in L^{\perp}$.

$x \in L^{\perp}$, $u \in \mathcal{V}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \in \mathcal{V}$, et vu que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, on aura $u^k(x) \in L^{\perp}$.

17 S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = u(x)$, donc $\lambda \in Sp(u)$, mais u est nilpotent, donc $\lambda = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$.

D'après les deux questions précédentes $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ et $\mathrm{vect}(x) \subset L^{\perp}$ et $\mathrm{vect}(x)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}x$, donc l'inclusion $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ est stricte, d'où

$\dim(\mathcal{V}x) < \dim(L^{\perp})$ et par suite $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) < \dim(L^{\perp}) + \dim(L) = n$,

c'est à dire $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) \leqslant n - 1$.

18 π est la projection orthogonal sur H, donc pour tout $z \in H$, $\pi(z) = z$, donc $\overline{u}^0(z) = z = \pi(u^0(z))$.

Supposons que pour tout $z \in H$, $\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

On fait la remarque suivante : Tout $z \in E$ se décompose par $z = \alpha x + y$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in H$, alors pour tout $u \in \mathcal{W}$, $u(x) = 0$, donc $u(z) = u(y)$ et $\pi(z) = y$ et par suite $u(\pi(z)) = u(y) = u(z)$.

Alors pour tout $z \in H$,

$$\overline{u}^{k+1}(z) = \overline{u}(\overline{u}^k(z)) = \overline{u}(\pi(u^k(z))) = \\ \overline{u}(u^k(z)) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z))$$

ce qui achève la récurrence.

Soit $u \in \mathcal{W}$, u étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, donc $\overline{u}^k = \pi \circ u^k = 0$, donc $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent.

19 $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ nilpotent et $\dim(H) = n-1$, donc par hypothèse de récurrence,

$\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant (n-1)(n-2)/2$, donc avec l'égalité de la question 14 (solution 14) et l'inégalité de la question 17 (solution 17), on obtient

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{V}) &= \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) + \dim(\overline{\mathcal{V}}) \\ &\leqslant n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

20 De l'inégalité de la question 17 (solution 17) et l'égalité de la question 14 (solution 14), on tire $\dim(\overline{\mathcal{V}}) \geqslant (n-1)(n-2)/2$, or par hypothèse de récurrence $\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc

$$\dim(\overline{\mathcal{V}}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Avec ces résultats, l'égalité de la question 14 (solution 14) entraine que, $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n-1$, donc

$\dim(\mathrm{vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n$.

On a les inclusions entre sous-espaces, $\mathrm{vect}(x) \subset L^\perp$ et $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, donc $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp$, de plus on a égalité de dimensions, donc $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^\perp$.

D'après la question 16 (solution 16), pour tout $v \in \mathcal{V}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in L^\perp$, donc $v^k(x) \in \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

21 d'après la question 18 (solution 18), $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$ de dimension $(n-1)(n-2)/2$ et $\dim(H) = n-1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathbf{B}'$ de H tel que pour tout $v \in \mathcal{W}$, $\mathrm{Mat}_{\mathbf{B}'}(\overline{v})$ est triangulaire supérieure stricte. Soit $v \in \mathcal{L}(H)$ de matrice dans la base $\mathbf{B}'$ de taille $n-1$, est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & 0 & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

alors $v^{n-2} \neq 0$.
Considérons $u \in \mathcal{V}$ dont la restriction à H est égal à v, alors $u^{n-2} \neq 0$, donc le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égale à $n-1$.
Si $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$.
On considère la base de E, $\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cup \{x\}$, alors tout élément $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

22 Si $v^{p-1} = 0$, alors $\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \{0\} \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
Si $v^{p-1} \neq 0$, alors le nilindice de v est $p \geqslant n-1$, donc d'après la question 5 (solution 5), $\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v)$ et $\dim(v^{p-1}) = 1$.
$v(x) \neq 0$, considérons $j = \max\{k \in [\![1, p-1]\!] \ / \ v^k(x) \neq 0\}$.
Alors $v^{j+1}(x) = 0$, donc $v^j(x) \in \operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v^{p-1})$ et par suite $\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \operatorname{vect}(v^j(x))$, et par la question 20 (solution 20), $v^j(x) \in \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23 $v_0(x) \neq 0$, donc il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que tel que $\pi_j(v_0(x)) = (v_0(x))_j \neq 0$ où π_j la j-ième projection qui envoie la j-ième composante d'un vecteur de E dans une base fixée.
Soit $z \in E$. Considérons une forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle sur $\operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, et la fonction polynômiale
$P : t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right).\varphi\left((v + tv_0)^{p-1}(z)\right)$ de degré $\leqslant p$.
D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$,
$\forall z \in E$, $(v + tv_0)^{p-1}(z) \in \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$, donc P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.
Or $\pi_j(v_0(x)) \neq 0$, donc $t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right)$ est non nul, ce qui exige $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi\left((v + tv_0)^{p-1}(z)\right)$, en particulier pour $t = 0$, $\varphi\left(v^{p-1}(z)\right) = 0$, ceci pour toute forme φ nulle sur $\operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, en particulier pour les projections qui envoient un vecteur sur les composantes dans $(\operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$, on obtient $v^{p-1}(z) \in \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraine que $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24 On vient de montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

donc

$$\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

et par suite

$$K(\mathcal{V}) = \operatorname{vect}\left(\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Im}(v^{p-1})\right) \subset \operatorname{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

ce qui entraine par le lemme **B**, que $\mathcal{V}x = \{0\}$ et par la question 21 (solution 21), il existe une base de E dans laquelle tout $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire stricte.