CPGE MOULAY YOUSSEF
RABAT

Concentration

MATRICES POSITIVES ET APPLICATIONS

SUJETS DE SYNTHÈSE

Mars 2025

Proposé par SADIK BOUJAIDA

CLASSES MP*

TABLE DES MATIÈRES

Enoncés

I. Localisation des racines d'un polynôme et des valeurs propres d'une matrice carrée

Vocabulaire et notations

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ on note $A^* = {}^t\overline{A}$. On peut munir $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ d'un produit scalaire (complexe) dit produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$:

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})^2,\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \overline{a_{i,j}}b_{i,j}$$

En particulier

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2,\ \langle X, Y\rangle = X^*Y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}y_k$$

On observera que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $C_1, C_2, \cdots, C_p$ sont ces vecteurs colonnes alors

$$(A^*A)_{i,j} = \langle C_i, C_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{k,i}}a_{k,j}$$

et que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ alors

$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle$$

N.B. dans cette identité les produits scalaires à gauche et à droite ne se situent pas dans le même espace.

On considère une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- A est dite hermitienne si $A^* = A$. On notera $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- A est dite anti-hermitienne si $A^* = -A$. On notera $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- A est dite unitaire si $A^*A = I_n$. On notera $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  N.B. A est unitaire si ces vecteur colonnes forment une *base orthonormée* (BON) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

- A est dite normale si $A^*A = AA^*$. On notera $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrice normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On notera que
$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$$

EXERCICE 1

théorème de Schur

1.1 Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible U telle que

$$A = UTU^* \qquad U^*U = I_d$$

Nous dirons que A est orthogonalement trigonalisable.

1.2 Montrer que si A est une matrice réelle trigonalisable sur $\mathbb{R}$ alors il existe une matrice $U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A = UT\,{}^{\mathrm{t}}U$.

EXERCICE 2

Théorème de continuité des racines d'un polynôme

Soit $E = \mathbb{C}_d[X]$. On notera F le sous-espace affine de E formé des polynômes unitaire de degré d.
Pour tout polynôme non constant $P \in F$, on notera $Z(P)$ l'ensemble de ses racines dans $\mathbb{C}$ et C_P sa matrice compagne.
On considère dans la suite un polynôme $P \in F$.

2.1 Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{U}_d = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \;/\; M^*M = I_d\}$$

est un compact de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

2.2 En posant $A = C_P$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $Q \in F$ vérifiant $\|Q - P\| \leqslant \delta$ on ait

$$\forall \mu \in Z(Q),\ \exists \lambda \in Z(P)\ ;\ |\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$$

C'est le théorème de « continuité des racines d'un polynôme ».

N.B. Attention ! Ce n'est pas une continuité au sens usuel.

2.3 Donner un exemple de polynôme P tel que cette propriété ne soit pas vraie si on n'impose pas que $Q \in F$.

2.4 Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $D(\lambda, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - \lambda| < \varepsilon\}$ contienne exactement α racines, comptées avec leurs multiplicités, de P et aucune racine sur le cercle $C(\lambda, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - \lambda| = \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall Q \in F, \ \|Q - P\| \leqslant \delta \Longrightarrow \operatorname{card}\Big(Z(Q) \cap D(\lambda, \varepsilon)\Big) = \alpha$$

Que peut-on dire lorsque λ est une racine de multiplicité α de P ?

EXERCICE 3

Théorème de Rouché

On considère un réel $r > 0$ et un complexe z_0. On note $\mathcal{C}$ le cercle du plan complexe d'équation $|z - z_0| = r$.

3.1 Pour tout $a \in C$ tel que $|z_0 - a| \neq r$, on pose

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} - a}\,\mathrm{d}\theta$$

Montrer que $\mathcal{I}_a$ est égale à 1 si $|z_0 - a| < r$ et à 0 si $|z_0 - a| > r$.

3.2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant qui n'admet pas de racine sur $\mathcal{C}$. Montrer que l'expression

$$\operatorname{Ind}_P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta})}{P(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta})} r\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

est égale au nombre de racines de P dans le disque ouvert $D(z_0, r)$ comptées avec leurs multiplicités.

3.3 **Théorème de Rouché.** Soient deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall z \in \mathcal{C}, \ |Q(z)| < |P(z)|$$

Montrer que P et $P + Q$ ont le même nombre de racines, comptées avec leurs multiplicités, dans le disque ouvert $D(z_0, r)$.

ind

3.4 **Application.** Démontrer le résultat de la dernière question de l'exercice précédant en utilisant le théorème de Rouché.

EXERCICE 4

Disques d'Hadammard

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

4.1 Montrer que pour toute *valeur propre* (VAP) λ de A il existe $i \in [\![1\,;\,d]\!]$ tels que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$$

On notera
$$r_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$
$$D_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - a_{i,i}| \leqslant r_i(A)\}$$

THEORÈME : (DE GERSHGORIN). Les ensembles $D_i(A)$ sont dits les disques d'Hadammard de A (ou de Gershgorin, selon les références). Cette question démontre que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{I=1}^{d} D_i(A)$$

4.2 **Application.** Montrer que si A est à diagonale dominante alors elle est inversible.

VOCABULAIRE. A est à diagonale dominante si : $\forall i \in [\![1\,;\,d]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$

4.3 Soit $j \in [\![1\,;\,d]\!]$. On suppose que le disque $D_j(A)$ est d'intersection vide avec les autres disque d'Hadammard de A. Montrer que A admet une unique VAP dans $D_j(A)$.

ind

II. MATRICES POSITIVES, MATRICES STOCHASTIQUES

Les notions abordées dans cette section sont d'un grand intérêt. Elles sont intimement liées à certaines notions utilisées dans la théorie des probabilités (les chaînes de Markov) ainsi qu'à la théorie des graphes.

VOCABULAIRE

Matrices positives

On dit qu'une matrice réelle $A = (a_{i,j})$ est positive (resp. Strictement positive), et on écrit $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si $a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$) pour tout couple d'indices (i, j).
Pour deux matrices réelles A et B de même taille, $A \geqslant B$ (resp. $A > B$) signifie $A - B \geqslant 0$ (resp. $A - B > 0$).

ATTENTION. $A \geqslant 0$ et $A \neq 0$ ne signifie pas que $A > 0$.

Pour toute matrice complexe $A = (a_{i,j})$ on notera $|A|$ la matrice $(|a_{i,j}|)$. Pour une matrice réelle carrée A on notera $\rho(A)$ son rayon spectral :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$$

Une matrice carrée réelle $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est positive et

$$\forall i \in [\![1\,;\,d]\!],\ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} = 1$$

ATTENTION. Ne pas confondre entre la notion de « matrice positive » et celle de « matrice symétrique positive ». Une matrice symétrique positive peut très bien contenir des coefficients négatifs et inversement une matrice symétrique dont les coefficients sont tous positifs peut ne pas être symétrique positive.

EXERCICE 5

Soient $P, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $x, y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

5.1 $P > 0, x \geqslant 0, x \neq 0 \Longrightarrow Px > 0$

5.2 $P \geqslant 0, x \geqslant y \geqslant 0 \Longrightarrow Px \geqslant Py$

5.3 $P \geqslant 0, x > 0, Px = 0 \Longrightarrow P = 0$

5.4 $P \geqslant 0, P \neq 0, x > y > 0 \Longrightarrow Px > Py$

5.5 $|Px| \leqslant |P||x|$ et $|PN| \leqslant |P|\,|N|$

EXERCICE 6

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

6.1 Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la suite $(A^n)_n$ converge vers 0 et que si $\rho(A) > 1$ alors la suite $(A^n)_n$ diverge.

6.2 **Application.** montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ alors

$$|A| \leqslant B \Longrightarrow \rho(A) \leqslant \rho(|A|) \leqslant \rho(B)$$

ind

EXERCICE 7

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$.

7.1 Montrer que si la somme des coefficients sur chaque ligne de A est égale à un même scalaire β alors $\beta = \rho(A)$.

7.2 Montrer que

$$\min_i \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}$$

Montrer que ce résultat reste valable si $A \geqslant 0$.

EXERCICE 8

Formule de Collatz–Wielandt

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$. Montrer que

$$\rho(A) = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \\ X \geqslant 0, X \neq 0}} \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant d \\ (X)_i \neq 0}} \frac{(AX)_i}{(X)_i} = \min_{\substack{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \\ X \geqslant 0, X \neq 0}} \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant d \\ (X)_i \neq 0}} \frac{(AX)_i}{(X)_i}$$

EXERCICE 9

Perron–Frobenius pour une matrice strictement positive

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$.

9.1 Montrer que $\rho(A) > 0$.

9.2 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et Soit Z un *vecteur propre* (VEP) associé. Montrer que $A|Z| = \rho(A)|Z|$. Montrer que $|Z| > 0$.

N.B. Ainsi $\rho(A)$ est une *va.p* de A et il existe $V > 0$ tel que $AV = \rho(A)V$.

9.3 Montrer qu'en fait $\rho(A)$ est la seule VAP de A dans $\mathbb{C}$ de module $\rho(A)$ et que le *sous-espace propre* (SEP) associé est de dimension 1.

9.4 Montrer enfin que $\rho(A)$ est une VAP simple de A.

9.5 Montrer que tout VEP U de A tel que $U > 0$ est associé à $\rho(A)$.

9.6 Vérifier le théorème avec $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 10

Cas d'une matrice positive

Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$.

10.1 Montrer que $\rho(A)$ est une VAP de A.

N.B. on peut avoir ici $\rho(A) = 0$.

10.2 Montrer qu'il existe un vecteur non nul $V \geqslant 0$ tel que $AV = \rho(A)V$.

ind

VOCABULAIRE

Matrice d'adjacence d'un graphe

- **Définition d'un graphe :** Soit un ensemble fini $V = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$. On appelle graphe (en fait graphe simple et orienté) de support V tout couple $G = (V, E)$ où $E \subset V^2$. Les éléments de V sont dits les sommets de G et les couples (e_i, e_j) de E sont dits les arêtes de G.

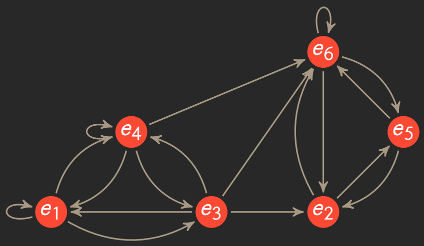
  On dit que e_i communique avec e_j dans G s'il existe des indices k_1, $k_2, \ldots, k_r$ tels que les couples (e_i, e_{k_1}), (e_{k_1}, e_{k_2}),…, (e_{k_r}, e_j) soient des arêtes de G.

  Le graphe G est dit irréductible (ou fortement connecté) si tout sommet e_i communique avec tout sommet e_j lorsque $j \neq i$.

- **Matrice d'adjacence du graphe g :** on appelle ainsi la matrice $A = (a_{i,j})$ définie par

$$a_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (e_i, e_j) \in E \\ 0 & \text{si } (e_i, e_j) \notin E \end{array} \right.$$

  Exemple d'un graphe à 6 sommets avec sa matrice d'adjacence.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  La matrice A est dite irréductible si le graphe G est fortement connecté.

- **Matrice des signes d'une matrice positive :** On appellera ainsi la matrice définie à partir d'une matrice positive $B = (b_{i,j})$ par $A = \big(\text{sign}(b_{i,j})\big)$. On dira que B est irréductible si sa matrice des signes A est irréductible.

EXERCICE 11

caractérisation d'une matrice irréductible

Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $B \geqslant 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

i B est irréductible ;

ii $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,d]\!]^2,\ \exists k \in [\![1\,;\,d-1]\!],\ (B^k)_{i,j} \neq 0$;

iii $(I_d + B)^{d-1} > 0$;

iv il n'existe aucune matrice de permutation P telle que ${}^tPBP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$, B_1, B_3 étant des blocs carrés.

EXERCICE 12

Perron–Frobenius pour une matrice irréductible

Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice positive irréductible. On pose $r = \rho(B)$.

12.1 Montrer que r est une VAP simple B et que $E_r(B)$ est dirigé par un vecteur $V > 0$.

12.2 Donner un exemple où r n'est pas la seule VAP λ de B telle que $|\lambda| = \rho(A)$.

On suppose dans la suite que $r = 1$.

12.3 Montrer que la suite $(B^n)_n$ converge vers la matrice L de la projection sur $E_r(B)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(B - rI_d)$.

12.4 Montrer que pour tout vecteur non nul $V \geqslant 0$, la suite $(B^nV)_n$ converge vers un vecteur positif de $E_r(B)$.

EXERCICE 13

Matrices stochastiques

On considère S l'ensemble des matrices stochastiques.

13.1 Montrer que S est stable par multiplication et que tous ses éléments ont 1 comme rayon spectral.

13.2 Soit $A \in S$.

13.2.1 Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

13.2.2 Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = 1$ et soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur propre qui lui est associé.
Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max_{j \in [\![i\,;\,n]\!]} |x_j|$. Montrer que $|\lambda x_k| = |x_k|$.
En déduire que λ est une racine m^{eme} de l'unité, avec $m \leqslant n$.

13.2.3 Montrer que si on suppose que $a_{kk} > 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ alors la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

13.3 Soit une matrice $A \in S$ strictement stochastique, ie que ses coefficients sont tous strictement positifs.

Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} A - I_n) = 1$.

III. SUJETS D'ENTRAÎNEMENT

SUJET 1

Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients strictement positifs

X-ENS 2017, PC

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et $[\![1\,;\,n]\!]$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n.
$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$). La matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ est notée ${}^tM$.
$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$.
Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice ${}^txy \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geqslant 0$ (resp. $M > 0$).
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on notera $A \geqslant B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geqslant 0$ (resp. $A - B > 0$). Ainsi, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$x \leqslant y \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \quad x_i \geqslant y_i.$$

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_1 = 1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \tag{1}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbb{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $\operatorname{Sp}(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M. Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}.$$

I : Première partie

1 **1a** Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leqslant C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leqslant C\|x\|_1.$$

1b Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

4 Justifier qu'une suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour la norme $\|.\|$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \quad \lim_{k \to +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

5 On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \quad |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \mathrm{diag}(1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5a Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

5b Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

5c En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

II : Deuxième partie

6 Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7 Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mu \in \mathbb{C}$.

i $\rho(\mu A) = |\mu|\rho(A)$

ii $\rho(A+B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$.

iii $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.

iv Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

v $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

8 Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

Dans les questions 9 à 11, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9 Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

10 **10a** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \geqslant \rho(A)^k$.

10b On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \{\alpha > 0 \mid \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\}.$$

Montrer que $E_A = \left]\rho(A)\,;\,+\infty\right[$.

11 Montrer la formule

$$\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

12 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leqslant \rho(A_+).$$

III : Troisième partie

Dans toute cette partie, A est une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i) $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.

(ii) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\mathrm{Ker}(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.

(iii) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \mathrm{Ker}(A - \rho(A)I_n)$.

(iv) Pour tout vecteur positif non nul x, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = c v_0$.

13 Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

14 Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante

$$(Ax = \lambda x \quad \text{et} \quad {}^t A y = \mu y) \Rightarrow {}^t x y = 0.$$

15 On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geqslant \mu w$.

15a Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k w \geqslant \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geqslant \mu$.

15b Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.

15c On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geqslant \mu w$, la k-ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

16 Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ. On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

16a Montrer que $Av_0 \geqslant \rho(A)v_0$, puis que

$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

16b En déduire que $\rho(A) > 0$ et

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \quad (v_0)_i > 0.$$

16c Montrer que x est colinéaire à v_0. En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

17 En appliquant les résultats précédents à la matrice ${}^tA$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que ${}^tAw_0 = \rho(A)w_0$. On pose

$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid {}^txw_0 = 0\}.$$

17a Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A, et que

$$C^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

17b Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété (iii).

18a On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F. Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que

$$\mathrm{Ker}(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

18b Montrer que si $x \in F$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{A^kx}{\rho(A)^k} = 0$.

18c Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\dfrac{A^kx}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.

SUJET 2

Phénomènes de seuil dans les graphes

Mines-Ponts 2024, MP, Maths 2

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1 . On désigne par $[\![1\,;\,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.
Un graphe G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés arêtes du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets distincts de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit isolé. Par convention, le graphe vide est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.
On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1\,;\,9]\!] \text{ et } A = \big\{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,9\},\{2,8\}\big\}$$

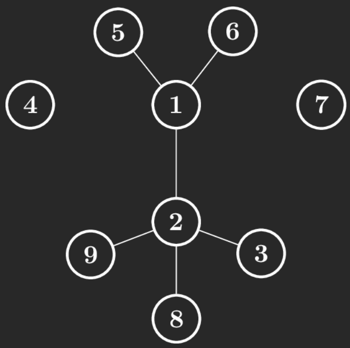


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de "boucles" reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.
Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.
Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \{\{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \ldots, \{s, s_d\}\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

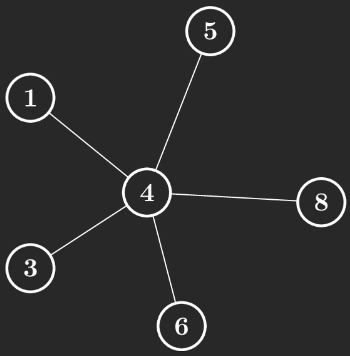


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes; on dit que :

- G' est inclus dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une copie de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall\,(s', t') \in S' \times S' \quad \{s', t'\} \in A' \Longleftrightarrow \{\sigma\,(s')\,, \sigma\,(t')\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la Figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).
Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.
On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires. Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation) σ entre $[\![1\,;\,n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i. Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^e ligne et la j^e colonne est :

$$\left(M_{G,\sigma}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\{i, j\} = \{j, i\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\,\mathrm{Id}}$ du graphe G représenté sur la FIGURE 1 :

$$M_{G,\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique S_n et $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 Montrer que les matrices M et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont semblables. En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).
On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le polynôme caractéristique du graphe G. Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

6 Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geqslant 2$. On note :

$$\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G\backslash s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S\backslash\{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G\backslash 2$:

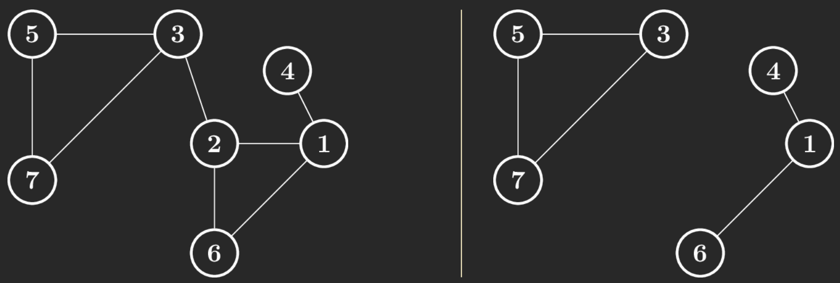


FIGURE 3 – Un graphe G et le graphe $G\backslash 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$. On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$.

8 Montrer que : $\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$

9 Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles. Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1\,;\,n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0;\,1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1\,;\,n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i,j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $\left(X_{\{i,j\}} = 1\right) = \left\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\right\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\{i,j\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\}\in A} \left(X_{\{i,j\}} = 1\right) \bigcap_{\{i,j\}\notin A} \left(X_{\{i,j\}} = 0\right)$$

On admet l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P})$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\{i, j\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\{G\})$ de l'événement élémentaire $\{G\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \text{card}(A)$. Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.
Une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geqslant 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = o(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0
- si $t_n = o(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

II : Une première fonction de seuil

II.A : Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 Montrer que : $$\mathbf{P}(X > 0) \leqslant \mathbf{E}(X)$$

12 Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}$.

INDICATION. on remarquer que $(X = 0) \subset \big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \mathbf{E}(X)\big)$.

II.B : Une fonction de seuil

13 Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 Montrer que si $p_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = o(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A). Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geqslant 2$ et que $a_0 \geqslant 1$.
On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: "contenir une copie de G_0 ".
On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.
On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1 ; n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1 ; n]\!] \right\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1 ; n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \quad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geqslant 1}} \frac{s_H}{a_H}$$

17 Montrer que $\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}$.

18 Soit S_0' un ensemble fixé de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.
Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}\left(X_n^0\right) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leqslant n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 En déduire que si $p_n = o\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(X_n^0 > 0\right) = 0$.

INDICATION. on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^{\omega_0} p_n\right) = +\infty$.

21 Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}.$$

ERRATA. Cette formule est très ambiguë puisqu'elle ne précise pas la nature de G ni la nature des «graphe» $H\cup H'$ et $H\cap H'$. Le développement dans le corrigé les introduira de façon naturelle.

Pour $k \in [0, s_0]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}\left(H \cup H' \subset G\right).$$

22 Montrer que : $$\Sigma_0 \leqslant \left(\mathbf{E}\left(X_n^0\right)\right)^2$$

23 Soit $k \in [\![1\,;\,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \leqslant \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1 \leqslant q \leqslant r$, on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geqslant \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q$$

et en déduire que pour $k \in [1, s_0]$, on a $\Sigma_k = o\left(\mathbf{E}(X_n^0)^2\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 Montrer que : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbf{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = 0.$$

26 Montrer alors que la suite $\left(k^{-\omega_0}\right)_{k\geqslant 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 Retrouver le résultat de la question 16 et déterminer une fonction de seuil pour la propriété « contenir une copie de l'étoile à d branches" avec d entier fixé supérieur à 1.

SUJET 3

Modèles matriciels de dynamique de populations

X-ENS 2023, PC

I : Première partie

1 Justifier que $c \leqslant 1$.

2 Montrer que si $u \in \mathscr{P}$, alors $uP \in \mathscr{P}$.

3 Montrer que pour tous $u, v \in \mathscr{P}$,

$$\|uP - vP\|_1 \leqslant (1-c)\|u - v\|_1.$$

(On pourra introduire $R = P - cN$ où $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ avec $n_{i,j} = v_j$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant d$.)

4 Soit $(x_n)_n \in \mathscr{P}^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 \in \mathscr{P}$ et

$$x_{n+1} = x_n P.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \|x_{n+1} - x_n\|_1$ est convergente.

5 En déduire que $(x_n)_n$ converge vers un élément de $\mathscr{P}$.

6 Montrer qu'il existe un unique élément μ de $\mathscr{P}$ tel que $\mu P = \mu$.

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathscr{P}$,

$$\|xP^n - \mu\|_1 \leqslant 2(1-c)^n.$$

II : Deuxième partie

8 Justifier que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = 1$.

9 Soit $n \geqslant 1$. Donner une expression des coefficients de P^n en fonction des coefficients de M^n, h et λ.

10 **10a** Montrer qu'il existe $\mu \in \mathscr{P}$, $C > 0$ et $\gamma \in [0, 1[$, tels que $\mu P = \mu$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left|\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - h_i\frac{\mu_j}{h_j}\right| \leqslant C\gamma^n.$$

10b Prouver qu'il existe un unique $\pi \in \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda\pi$.

11 Considérons $(c_0, \ldots, c_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ et P le polynôme

$$X^d - c_{d-1}X^{d-1} - \cdots - c_1 X - c_0.$$

Montrer que le polynôme P possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

12 **12a** Considérons $a = (a_1, \ldots, a_d) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ et $b = (b_1, \ldots, b_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{d-1}$ et introduisons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{d-1} \\ a_d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier qu'il existe un unique couple $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda\pi$. On exprimera explicitement π en fonction de a et b et λ.

12b Montrer qu'il existe un unique $h \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $\langle \pi, h\rangle = 1$ et

$$Mh = \lambda h.$$

12c En déduire que la suite $(\lambda^{-n}M^n)_{n\geqslant 1}$ converge quand n tend vers l'infini et donner une expression de sa limite en fonction de h et μ.

III : Troisième partie

Dans toute la suite du sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires du sujet. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles. On note également $\mathrm{Var}(X)$ la variance d'une telle variable aléatoire. Si $A \in \mathcal{A}$ est un événement, on notera 1_A la variable aléatoire définie comme la fonction indicatrice de cet événement.
On suppose que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $N_{i,j}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $N_{i,j}^2$ est d'espérance finie. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on introduit la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$L_i = (N_{i,1}, \ldots, N_{i,d}).$$

On considère maintenant une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$(L_i^{n,k} = (L_{i,1}^{n,k}, \ldots, L_{i,d}^{n,k}))_{n\geqslant 1, k\geqslant 1}.$$

De plus, pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$, $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on suppose que $L_i^{n,k}$ a même loi que L_i. Soit $X_0 = (X_{0,i})_{1\leqslant i\leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ telle que $X_{0,i}^2$ est d'espérance finie pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Partant de cette valeur initiale, nous définissons par récurrence pour $n \geqslant 0$ une suite de variables aléatoires $X_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$:

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_i^{n,k}.$$

La variable $X_{n,i}$ pourra s'interpréter comme le nombre d'individus de type i à la génération n et $L_{i,j}^{n,k}$ comme le nombre d'enfants de type j pour le k-ième individu de type i à la génération n.
On introduit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}_+)$ la matrice définie pour $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ par

$$M_{i,j} = \mathbb{E}(N_{i,j}).$$

On introduit $x_n = (x_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant d} \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ défini pour $n \geqslant 0$ et $j \in \{1, \ldots, d\}$ par

$$x_{n,j} = \mathbb{E}(X_{n,j}).$$

13 **13a** Montrer que, pour tous $y \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ et $1 \leqslant j \leqslant d$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1,j} 1_{X_n=y}) = (yM)_j \mathbb{P}(X_n = y).$$

(On pourra utiliser sans démonstration le fait que les variables aléatoires $L_i^{n,k}$ et $1_{X_n=y}$ sont indépendantes.)

13b En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = x_n M.$$

14 Soit $\mathcal{J}$ un ensemble fini et $(Y_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes deux à deux, à valeurs réelles et dont les carrés sont d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i\in\mathcal{J}} Y_i\right)^2\right) = \left(\sum_{i\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i)\right)^2 + \sum_{i\in\mathcal{J}} \mathrm{Var}(Y_i).$$

15 **15a** Montrer que pour tous $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $y \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ et $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u\rangle^2 1_{X_n=y}\right) = \mathbb{P}(X_n = y)\left(\langle y, Mu\rangle^2 + \langle y, T(u)\rangle\right).$$

(On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour tout $n \geqslant 0$, les variables aléatoires $\sum_{j=1}^d u_j L_{i,j}^{n,k} 1_{X_n=y}$ sont deux à deux indépendantes lorsque k et i varient.)

15b Montrer que pour tous $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u\rangle^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle X_n, Mu\rangle^2\right) + \langle x_0 M^n, T(u)\rangle.$$

16 Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u\rangle^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle X_0, M^n u\rangle^2\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle.$$

(avec la convention que la somme indexée par k est nulle si $n = 0$).

IV : Quatrième partie

Dans toute la suite du sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires du sujet. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles. On note également $\mathrm{Var}(X)$ la variance d'une telle variable aléatoire. Si $A \in \mathcal{A}$ est un événement, on notera 1_A la variable aléatoire définie comme la fonction indicatrice de cet événement.

On suppose que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $N_{i,j}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $N_{i,j}^2$ est d'espérance finie. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on introduit la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$L_i = (N_{i,1}, \ldots, N_{i,d}).$$

On considère maintenant une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$:

$$(L_i^{n,k} = (L_{i,1}^{n,k}, \ldots, L_{i,d}^{n,k}))_{n \geqslant 1, k \geqslant 1}.$$

De plus, pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$, $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on suppose que $L_i^{n,k}$ a même loi que L_i. Soit $X_0 = (X_{0,i})_{1 \leqslant i \leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ telle que $X_{0,i}^2$ est d'espérance finie pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Partant de cette valeur initiale, nous définissons par récurrence pour $n \geqslant 0$ une suite de variables aléatoires $X_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$:

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_i^{n,k}.$$

17 Montrer qu'il existe $\pi \in \mathcal{P}$, $h' \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$, $C > 0$ et $\gamma \in [0, 1[$, tels que $\pi M = \lambda \pi$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h'_i \pi_j \right| \leqslant C \gamma^n.$$

18 On suppose, dans cette question uniquement, que $\lambda \in]0, 1[$. Montrer alors que $\mathbb{E}(\|X_n\|_1)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et $\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 : X_n = 0) = 1$. *On dit que la population s'éteint presque sûrement en temps fini.*

19 **19a** Montrer qu'il existe $c_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on a $\|T(u)\|_1 \leqslant c_0 \|u\|_2^2$.

19b En déduire l'existence de $c_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on a $\|T(u)\|_1 \leqslant c_1 \|u\|_1^2$.

20 **20a** Montrer que pour tous $n \geqslant 0$ et $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle u, \pi \rangle = 0$,

$$\|M^n u\|_1 \leqslant C (\lambda \gamma)^n \|u\|_1.$$

20b En déduire qu'il existe $C_1 \geqslant 0$ tel que pour tous $n \geqslant 0$ et $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ vecteur colonne tel que $\langle u, \pi \rangle = 0$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u \rangle^2 \right) \leqslant C_1 \|u\|_1^2 \left(\lambda^{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k} \right) + (\lambda \gamma)^{2n} \right).$$

21 **21a** Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k} \right)$ converge.

21b Soit $w \in (\mathbb{R}_+)^d$ et soit $e_0 = (1, \ldots, 1)$. Montrer que

$$\langle w - \|w\|_1 \pi, \pi \rangle = \langle w, \pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0 \rangle$$

et que le vecteur $\pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0$ est orthogonal à π.

21c Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{E}\left(\|W_n\|_2^2\right)$ est convergente. En déduire que la suite $\left(\mathbb{E}(\|W_n\|_2^2)\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. (On pourra par exemple décomposer X_n dans une base orthonormale bien choisie de $\mathbb{R}^d$.)

21d Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\|W_n\|_2 \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

22 Montrer que l'événement $\{\lim_{n\to+\infty} W_n = 0_{\mathbb{R}^d}\}$ est presque sûr. (On pourra commencer par calculer la probabilité de l'événement

$$\{\forall m \geqslant 0, \exists k \geqslant m \mid \|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.)

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

théorème de Schur

1.1 Notons que le théorème équivaut à dire qu'il existe une BON de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement asscocié à A est triangulaire supérieuere.

Nous allons procéder par récurrence sur d. La propriété est immédiate lorsque $d = 1$ puisque pour tout $a \in \mathbb{C}$ on peut écrire $a = 1 \cdot a \cdot 1$.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et supposons que la propriété soit vraie pour les matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Soit alors $A \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{C})$ et notons u l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. Soient λ une VAP de A et V un VEP qui lui est associé. Quitte à remplacer V par ${}^1/_\alpha V$, avec $\alpha = ({}^t\overline{V}V)^{1/2}$, on peut supposer que ${}^t\overline{V}V = 1$. La droite vectorielle $D = \mathbb{C}V$ est stable par A donc comme pour les produit scalaire réels, l'ensemble

$$D^\perp = \{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C}) \mid V^* X = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ stable par u. Donc par hypothèse de récurrence, il existe une BON $(V_2, \cdots, V_{d+1})$ de $H = D^\perp$ dans laquelle la matrice de l'enomorphisme induit sur H par u est une matrice T_1 qui est triangulaire supérieure. La matrice de u dans la BON $(V, V_2, \ldots, V_{d+1})$ est alors

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

Elle est triangulaire supérieure.

> N.B. Avec la notion de produit scalaire complexe d'un $\mathbb{C}$-ev, il est possible de justifier le théorème en trigonalisant A dans une base quelconque et en appliquant ensuite le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs de cette base. La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans cette base sera triangulaire supérieure et la matrice de passage de la base canonique dans cette nouvelle base sera unitaire.

1.2 La démonstration précédente s'adapte sans aucun modification à ce cas.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2

Théorème de continuité des racines d'un polynôme

2.1 Si $U \in \mathcal{U}_d$ alors tous les vecteurs colonnes de U sont de norme 1. Ce qui implique que pour tout coefficient $u_{k,h}$ de U on a $|u_{k,h}| \leqslant 1$ et donc que $\|U\|_\infty \leqslant 1$. Ceci montre que $\mathcal{U}_d$ est borné.
Par ailleurs l'application $f : M \longmapsto {}^t\overline{M}M$ est continue comme produit de deux applications continue à valeurs dans une algèbre de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{U}_d$ est l'image réciproque par f du fermé $\{I_d\}$, c'est donc un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Alors

$$\boxed{\mathcal{U}_d \text{ est un compact de } \mathcal{M}_d(\mathbb{C}).}$$

2.2 On munit E et $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de leurs normes $\|.\|_\infty$ dans leurs bases canoniques. On notera alors que

$$\forall P \in E \quad \|C_P\|_\infty = \|P\|_\infty$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ qui ne vérifie par la propriété. Il est alors possible de construire une suite de polynômes $(Q_n)_n \in F^{\mathbb{N}^*}$, telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|Q_n - P\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists \mu_n \in Z(Q_n) \ ; \ \forall \lambda \in Z(P), \quad |\mu_n - \lambda| > \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

Soient deux éléments de E :

$$R = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^{d-1} \qquad S = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^{d-1} \in F$$

on a
$$\|C_R - C_S\|_\infty = \max_{0 \leqslant k \leqslant d-1} |a_k - b_k| = \|R - S\|_\infty$$

Ce qui montre que l'application $R \in F \longmapsto C_R$ est continue. On a selon (1), $Q_n \longrightarrow P$ donc

$$C_{Q_n} \longrightarrow C_P$$

Soit maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $U_n \in \mathcal{U}_d$ telle que

$$C_{Q_n} = U_n T_n U_n^*$$

où T_n est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les racines $\mu_{1,n}, \ldots, \mu_{d,n}$ de Q_n répétées avec leurs multiplicités.
$(U_n)_n$ est une suite d'éléments du compact $\mathcal{U}_d$ donc elle admet au moins une suite extraite $(U_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans $\mathcal{U}_d$. Notons U la limite de celle-ci. On a

$$T_{\varphi(n)} = U_{\varphi(n)}^* C_{Q_{\varphi(n)}} U_{\varphi(n)}$$

et $(C_{Q_{\varphi(n)}})_n$ est extraite de la suite convergente $(C_{Q_n})_n$ donc $(T_{\varphi(n)})_n$ est convergente et sa limite est donnée par $T = UC_PU^*$. Les éléments diagonaux de T sont en particulier les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ du polynôme P répétées avec leurs multiplicités. La convergence de $(T_{\varphi(n)})_n$ vers T implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ \left\|T_{\varphi(n)} - T\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Ce qui implique en prélevant les coefficients diagonaux

$$\forall k \in [\![1\,;\,d]\!], \ |\mu_{k,\varphi(n)} - \lambda_k| \leqslant \varepsilon$$

contredisant ainsi l'hypothèse (1)

> N.B. Séquentiellement, ce résultat implique que si $(Q_n)_n$ est une suite de polynôme de F qui converge vers P dans $\mathbb{C}_d[X]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, chaque racine du polynôme Q_n est au moins dans un disque de la forme $D(\lambda, \varepsilon)$ où λ est une racine de P.

2.3 Si on pose $P = X$ et $Q_n = X - \frac{1}{n}X^2$ alors $(Q_n)_n$ converge vers P mais $Z(P) = \{0\}$ et $Z(Q_n) = \{0, n\}$. Il n'existe aucun réel $\delta > 0$ tel que $\|Q_n - P\| \leqslant \delta$ implique que toutes les racines de Q_n soient dans $D(0, 1/2)$.

2.4 Justifions d'abords le résultat intermédiaire suivant : pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme *unitaire* non constant

$$\forall z \in Z(P), \ |z| \leqslant \|P\|_1$$

où $\|.\|_1$ est la norme 1 de E dans la base canonique de E.
En effet, Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in E$ non constant et considérons $z \in Z(P)$. On a

$$\|P\|_1 = 1 + |a_{p-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

- **Si $|z| \leqslant 1$:** alors $|z| \leqslant \|P\|_1$.
- **Si $|z| > 1$:** alors $z \neq 0$ et on peut écrire :

$$z = -\left(a_{p-1} + \frac{a_{p-2}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{p-2}} + \frac{a_0}{z^{p-1}}\right)$$

Par suite $$|z| \leqslant |a_{p-1}| + \frac{|a_{p-2}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|^{p-2}} + \frac{|a_0|}{|z|^{p-1}}$$

et comme ${}^1/{|z|} < 1$ alors

$$|z| \leqslant |a_{p-1}| + |a_{p-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \leqslant \|P\|_1$$

Raisonnons ensuite par l'absurde. Supposons que pour tout $\delta > 0$, il existe au moins un polynôme $Q \in F$ tel que

$$\|Q - P\| \leqslant \delta \qquad \text{card } Z(Q) \cap D(\lambda, \varepsilon) \neq \alpha$$

On peut alors construire une suite injective de polynômes $Q_n \in F$ telle que

$$\|Q_n - P\| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \operatorname{card}\left(Z(Q_n) \cap D(\lambda, \varepsilon)\right) \neq \alpha$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \ldots, \mu_{d,n}$ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme Q_n numérotées de telle sorte que

$$|\mu_{1,n} - \lambda| \leqslant |\mu_{2,n} - \lambda| \leqslant \cdots \leqslant |\mu_{d,n} - \lambda|$$

La suite $(Q_n)_n$ est convergente (vers P) donc elle est bornée. D'après le résultat intermédiaire démontré ci-dessus, la suite des vecteurs $V_n = (\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \ldots, \mu$ est bornée. Selon le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet donc au moins une suite extraite $(V_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Quitte à remplacer $(Q_n)_n$ par $(Q_{\varphi(n)})_n$ on peut supposer que la suite $(V_n)_n$ converge et on note $V = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$ sa limite. Mais alors la suite $(Q_n)_n$ converge vers le polynôme $(X - \mu_1)(X - \mu_2)\cdots(X - \mu_d)$. Puisque elle converge vers P alors

$$P = (X - \mu_1)(X - \mu_2)\cdots(X - \mu_d)$$

Et en particulier $Z(P) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d\}$.
Supposons dans un premier temps que l'ensemble

$$I = \{n \in \mathbb{N}^* \ / \ \operatorname{card} Z(Q_n) \cap D(\lambda, \varepsilon) < \alpha\}$$

est fini. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait

$$\operatorname{card} Z(Q_n) \cap D(\lambda, \varepsilon) \geqslant \alpha + 1 \tag{2}$$

On a donc pour tout $n \geqslant N$

$$|\mu_{1,n} - \lambda| \leqslant |\mu_{2,n} - \lambda| \leqslant \cdots \leqslant |\mu_{\alpha+1,n} - \lambda| \leqslant \varepsilon$$

Et en faisant tendre n vers $+\infty$

$$|\mu_1 - \lambda| \leqslant |\mu_2 - \lambda| \leqslant \cdots \leqslant |\mu_{\alpha+1} - \lambda| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui signifie que P admet au moins $\alpha+1$ racines dans $D(\lambda, \varepsilon)$, contredisant ainsi le choix de λ et ε. Ainsi notre ensemble I est infini. Il est alors possible de construire une suite extraite $(Q_{\psi(n)})_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{card}\left(Z(Q_{\psi(n)}) \cap D(\lambda, \varepsilon)\right) < \alpha$$

Cette fois cela implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon < |\mu_{\alpha,\psi(n)} - \lambda| \leqslant |\mu_{\alpha+1,\psi(n)} - \lambda| \leqslant \cdots \leqslant |\mu_{d,\psi(n)} - \lambda|$$

Et en faisant tendre n vers $+\infty$

$$\varepsilon \leqslant |\mu_\alpha - \lambda| \leqslant |\mu_{\alpha+1} - \lambda| \leqslant \cdots \leqslant |\mu_d - \lambda|$$

Cela signifie que P admet au moins $d-\alpha+1$ racines en dehors du disque $D(\lambda,\varepsilon)$. Il ne peut donc avoir α racines dans $D(\lambda,\varepsilon)$.
En application de ce résultat, si λ est une racine de multiplicité α de P et $\varepsilon>0$ est un réel tel que le disque fermé $\overline{D}(\lambda,\varepsilon)$ ne contienne aucune autre racine de P que λ alors il existe $\delta>0$ tel que

$$\forall Q\in F,\ \|Q-P\|\leqslant\delta\Longrightarrow \operatorname{card}\Big(Z(Q)\cap D(\lambda,\varepsilon)\Big)=\alpha$$

Vive la compacité.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3

Théorème de Rouché

3.1 On pose $\omega=a-z_0$. Si $|\omega|<r$ alors

$$\begin{aligned}
I(a)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\frac{\omega}{r}\,\mathrm{e}^{-i\theta}}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{r^n}\,\mathrm{e}^{-in\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\omega^n}{r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta && (\text{CVN sur }[0,2\pi])\\
&=1 && \left(\text{car }\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta=\delta_{0n}\right)
\end{aligned}$$

Mais si $|\omega|>r$ alors

$$\begin{aligned}
I(a)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{r}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\frac{r}{\omega}r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\omega^n}\,\mathrm{e}^{in\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{\omega^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta && (\text{CVN sur }[0,2\pi])\\
&=0
\end{aligned}$$

3.2 Posons $P=b\prod_{k=1}^{r}(X-a_k)^{m_k}$. Alors

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{r}\frac{m_k}{X-a_k}$$

$$\text{et donc}\quad \operatorname{Ind}_P(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(z_0 + r\,e^{i\theta})}{P(z_0 + r\,e^{i\theta})} r\,e^{i\theta}\,d\theta = \sum_{k=1}^{r} m_k I(a_k)$$

Selon la question précédente, $\operatorname{Ind}_P(r)$ est donc le nombre de racines a_k de P qui sont dans le disque ouvert $D(z_0, r)$.

3.3 Considérons l'application

$$N : t \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(z_0 + r\,e^{i\theta}) + tQ'(z_0 + r\,e^{i\theta})}{P(z_0 + r\,e^{i\theta}) + tQ(z_0 + r\,e^{i\theta})} r\,e^{i\theta}\,d\theta,\ \ t \in [0, 1]$$

Elle est bien définie car $P + tQ$ ne peut s'annuler sur $\mathcal{C}$ puisque $|Q(z)| < |P(z)|$ si $z \in \mathcal{C}$. De fait, r étant fixé, l'application

$$g : \begin{array}{rcl} [0,1]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,\theta) & \longmapsto & \frac{P'(z_0+r\,e^{i\theta})+tQ'(z_0+r\,e^{i\theta})}{P(z_0+r\,e^{i\theta})+tQ(z_0+r\,e^{i\theta})} \end{array}$$

est continue sur $[0,1]\times[0,2\pi]$. D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre sur un segment, N est donc continue sur $[0, 1]$. D'après la question précédente N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc elle est constante. L'égalité $N(0) = N(1)$ implique alors, selon la question précédente, que les polynômes P et $P + Q$ ont le même nombre de racines dans $D(z_0, r)$.

3.4 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant et soit λ une racine de P de multiplicité α. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(\lambda, \varepsilon)$ ne contienne aucune racine, autre que λ, de P.

P est continue et ne s'annule pas sur le compact $\mathcal{C}$, le cercle de centre λ et de rayon ε, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{C},\ |P(z)| > \delta$$

Considérons maintenant l'application $\|.\|_{\infty,\mathcal{C}}$ définie sur $\mathbb{C}[X]$ par

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ \|Q\|_{\infty,\mathcal{C}} = \sup_{z\in\mathcal{C}} |Q(z)|$$

$\|.\|_{\infty,\mathcal{C}}$ est une norme de $\mathbb{C}[X]$, le seul axiome non trivial étant celui de la séparation et il se justifie grâce au fait que si Q s'annule sur $\mathcal{C}$ alors il admet une infinité de racines et donc $Q = 0$. Si maintenant on prend un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|Q - P\|_{\infty,\mathcal{C}} \leqslant \delta$ alors

$$\forall z \in \mathcal{C},\ |Q(z) - P(z)| \leqslant |P(z)|$$

Et donc selon le théorème de Rouché $Q = P + (Q - P)$ et P ont le même nombre de racines dans $D(\lambda, \varepsilon)$. On a montré que

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ \|Q - P\|_{\infty,\mathcal{C}} \leqslant \delta \Longrightarrow \operatorname{Card}\big(Z(Q) \cap D(\lambda, \varepsilon)\big) = \alpha$$

N.B. Contrairement au résultat de l'exercice précédent, ici aucune condition n'est imposée à Q autre que $\|P - Q\|_{\infty,\mathcal{C}} \leqslant \delta$. Il peut ne pas être unitaire ni de même de degré que P.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4

Disques d'Hadammard

4.1 Soit λ une VAP de A et soit $X = {}^t(x_1\ x_2\ \cdots\ x_d)$ un VEP associé à λ. Alors pour tout $i \in [\![1\,;\,d]\!]$

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$$

et donc

$$\begin{aligned}|\lambda - a_{ii}|\,|x_i| &\leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \\ &\leqslant \|X\|_\infty \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\end{aligned}$$

et en considérant i_0 tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty > 0$

$$|\lambda - a_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}|$$

4.2 Si maintenant A est matrice à diagonale dominante, l'inégalité précédente prouve que 0 ne peut être une VAP de A. A est donc inversible.

4.3 Constatons d'abords que l'hypothèse implique que $a_{j,j}$ est distinct de tous les autres coefficients $a_{i,i}$. Posons $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{dd})$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$B(t) = (1-t)D + tA = D + t(A-D)$$

La matrice $B(t)$ a les mêmes coefficients diagonaux que A et ses autres coefficients sont ceux de A multipliés par t. Alors pour tout $i \in [\![1\,;\,d]\!]$

$$\forall t \in [0,1],\ r_i\big(B(t)\big) = t\, r_i(A) \leqslant r_i(A)$$

et donc $D_i\big(B(t)\big) \subset D_i(A)$. Cela implique en particulier que le disque $D_j(B(t))$ est d'intersection vide avec les autres disques d'Hadamard de $B(t)$ et donc de A. Soit un réel $r > r_j(A)$ tel que $D(a_{j,j}, r)$ soit encore d'intersection vide avec tous les disques $D_i(A)$ lorsque $i \neq j$. Le cercle de centre $a_{j,j}$ et de rayon r est d'intersection vide avec la réunion des disques $D_i(A)$ donc il ne contient aucune valeur propre d'aucune des matrices $B(t)$. Considérons alors l'application

$$f : t \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\chi'_{B(t)}(a_{j,j} + re^{i\theta})}{\chi_{B(t)}(a_{j,j} + re^{i\theta})} re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Selon l'exercice précédent pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)$ est le nombre de racines de $\chi_{B(t)}$ dans le disque $D(a_{j,j}, r)$. f est une fonction continue qui ne prend que des valeurs entières donc elle est constante sur le segment $[0,1]$. En particulier $f(0) = f(1)$. Or $B(0) = D$ donc $f(0) = 1$. Ainsi $f(1) = 1$, c'est à dire que A admet une seule valeur propre dans $D(a_{j,j}, r)$. Comme

$$D(a_{j,j}, r) \cap \left(\bigcup_{i\neq j} D_i(A)\right) = \varnothing$$

alors cette valeur propre est dans $D_j(A)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 13

Matrices stochastiques

D'abords une propriété sur les nombres complexes : soient $z_1, z_2, \dots, z_p$ des nombre complexes. $|z_1 + z_2 + \cdots + z_p|$ est égal à $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_p|$ si et seulement si $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont positivement liés. Ce qui signifie qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $k \in [\![1\,;\,p]\!]$ il existe un réel $\alpha_k \geqslant 0$ tel que $z_k = \alpha_k \omega$. Justifions par récurrence sur p. Pour $p = 1$, c'est évident. Justifions lorsque $p = 2$. Si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ en élevant au carré on obtient $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1||z_2|$ et donc $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$. Par suite $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}) = 0$ et donc $z_1\overline{z_2} = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$. Soit $\alpha = |z_1\overline{z_2}|$, de sorte que $z_1\overline{z_2} = \alpha$. Si $z_2 = 0$ alors $z_2 = \beta z_1$ avec $\beta = 0$. Sinon $z_1 = (\alpha/|z_2^2|)z_2$. Supposons maintenant la propriété vraie pour p nombres complexes et soient $z_1, z_2, \dots, z_{p+1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{p+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{p+1} |z_k|$$

On peut écrire

$$\left|\sum_{k=1}^{p+1} z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| + |z_{p+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |z_k| + |z_{p+1}|$$

Comme les deux extrémités de cette double majoration sont égales, les deux inégalités sont en fait des égalités. Ce qui implique d'un côté que $\left|\sum_{k=1}^{p+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| + |z_{p+1}|$, de l'autre que $\left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| = \sum_{k=1}^{p} |z_k|$. D'un côté donc z_{p+1} est positivement lié à $z_1 + z_2 + \cdots + z_p$, de l'autre $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont positivement liés. Alors $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$ sont tous positivement liés.

N.B. ce résultat est valable pour toute norme dérivant d'un produit scalaire.

13.1 On pose $V = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $A \in S$, $AV = V$ donc 1 est une valeur propre A et V est un vecteur propre qui lui est associé.
On peut même constater que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A \in S \iff (\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0) \text{ et } (AV = V)$$

Si $A, B \in S$ alors pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$ et $ABV = AV = V$. Donc $AB \in S$.

13.2.1 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. On considère un vecteur propre $X = (x_1, \dots, x_n)$ de A associé à λ et $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.
En identifiant le $k^{\text{ème}}$ coefficient dans l'égalité $AX = \lambda X$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j = \lambda x_k$$

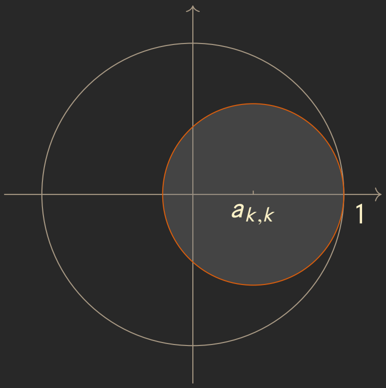
Mais alors $$|\lambda x_k| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\right) |x_k| = |x_k|$$

Comme $X \neq 0$ alors forcément $x_k \neq 0$ et par suite $|\lambda| \leqslant 1$.

N.B. une autre majoration intéressante : $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.

En effet $$|(\lambda - a_{k,k})x_k| = \left|-\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j\right| \leqslant \left(\sum_{j\neq k} a_{j,k}\right)|x_k|$$

et comme $\sum_{j\neq k} a_{j,k} = 1 - a_{k,k}$ alors $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.
Ainsi pour toute valeur propre λ de A, il existe un coefficient diagonal $a_{k,k}$ de A tel que $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$. Majoration qui se réalise pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tels que $|x_k| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Pour de tel k, λ se trouve sur le disque de centre $a_{k,k}$ et de rayon $1 - a_{k,k}$.



13.2.2 On suppose que $|\lambda| = 1$.
Nous allons partir de l'égalité

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{x_k} \tag{1}$$

On a alors en cascade

$$1 = |\lambda| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{x_k}\right| \leqslant \sum_{j=k}^{n} a_{k,j}\frac{|x_j|}{|x_k|} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$$

Toutes les inégalités intermédiaires sont donc des égalités. On ne va conserver dans les sommes que les éléments de $J_k = \{j \in [\![1\,;\,n]\!] \ / \ a_{k,j} \neq 0\}$. L'égalité dans la dernière majoration suggère que pour tout $j \in J_k$, $|x_j|/|x_k| = 1$. On peut donc poser pour tout $j \in J_k$, $x_j = x_k e^{i\theta_j}$, où $\theta_j \in \mathbb{R}$. L'égalité dans la deuxième majoration implique alors que les nombres $a_{k,j}e^{i\theta_j}$, $j \in J_k$ sont positivement lié. En analysant les arguments, on voit que les nombres $e^{i\theta_j}$ sont tous égaux. Soit $e^{i\theta}$ leurs valeurs commune.

$$\forall j \in J_k,\ x_j = x_k e^{i\theta}$$

En reportant dans la relation (**??**) on voit que $\lambda = e^{i\theta}$.

On a ainsi démontré que si x_k est une coordonnée de module maximal de X alors λx_k est encore une coordonnée de X (de module maximal). Par itération, $\lambda^p x_k$ est une coordonnée de X pour tout $p \in \mathbb{N}$. Parmi les $n+1$ coordonnées $x_k, \lambda x_k, \dots, \lambda^n x_k$ il existe forcément deux qui sont égales. Soient $p, q \in [\![0\,;\,n]\!]$ tels que $p > q$ et $\lambda^p x_k = \lambda^q x_k$ et donc $\lambda^p = \lambda^q$. Alors $\lambda^{p-q} = 1$ est donc λ est une racine $(p-q)^{\text{ème}}$ de l'unité avec $p - q \leqslant n$.

13.2.3 On a $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} \leqslant |\lambda - a_{k,k}|$. Or d'après la majoration indiquée dans la question précédente, $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$. Donc $|\lambda - a_{k,k}| = 1 - a_{k,k}$.

λ est alors sur l'intersection du cercle unité et du cercle de centre $a_{k,k}$ et de rayon $1 - a_{k,k}$. Ces deux cercles se touchent seulement en 1 si $a_{k,k} > 0$ et sont confondus si $a_{k,k} = 0$.

Ainsi, si $\lambda \neq 1$ alors pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_k|$ est maximal, le coefficient diagonal $a_{k,k}$ est nul.

Par contre-apposée, si les coefficients $a_{k,k}$ sont tous non nuls alors forcément $\lambda = 1$. 1 est donc la seule valeur propre de module 1 de A dans ce cas.

13.3 On suppose que $A \in S$ et que tous ses coefficients sont strictement positifs. Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A. On reprend les notations de la questions 3-b. Ici $J_k = [\![1\,;\,n]\!]$ donc

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!],\ x_j = x_k$$

Alors X est colinéaire au vecteur V de la question 1. et donc $E_1(A) = \mathrm{vect}\{V\}$.

CORRIGÉ DU SUJET 1

Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients strictement positifs

1a Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $C > 0$.

On fait l'hypothèse $\|M\| \leqslant C$, c'est-à-dire $\sup_{\|x\|=1} \|Mx\| \leqslant C$. Pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$, on a donc la majoration

$$\frac{\|Mx\|}{\|x\|} \leqslant C.$$

On multiplie par $\|x\|$, qui est positif, ce qui donne $\|Mx\| \leqslant C\|x\|$. Cette inégalité est également valable si x est nul.

Réciproquement, on fait l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\| \leqslant C\|x\|$. Pour tout vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$, on en déduit l'inégalité $\frac{\|Mx\|}{\|x\|} \leqslant C$ car $\|x\| > 0$, donc $\|M\| \leqslant C$.

Au final, on a prouvé l'équivalence

$$\|M\| \leqslant C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\| \leqslant C\|x\|.$$

On a prouvé en particulier l'inégalité $\|Mx\| \leqslant \|M\| \cdot \|x\|$ et qu'on possède une méthode pour majorer $\|M\|$ dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

1b Déjà, la fonction $M \mapsto \|M\|$ est à valeurs réelles positives.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|M\| = 0$. À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité $C > 0$. On peut donc

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\| \leqslant 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\| = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{C}^n : Mx = 0$. Les colonnes de la matrice M sont les produits Me_i, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, les colonnes de M sont nulles donc M est la matrice nulle.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Exploitons l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$:

$$\|\lambda Mx\| = |\lambda| \cdot \|Mx\|.$$

On en déduit la majoration $\|\lambda M\| \leqslant |\lambda| \cdot \|M\|$ d'après 1.a. Si $\lambda = 0$, on obtient $\|\lambda M\| = 0 = |\lambda| \cdot \|M\|$. Si $\lambda \neq 0$, on effectue la substitution $(M, \lambda) \mapsto (\lambda M, \frac{1}{\lambda})$ dans l'inégalité $\|\lambda M\| \leqslant |\lambda| \cdot \|M\|$ pour obtenir $\|M\| \leqslant \frac{\|\lambda M\|}{|\lambda|}$, c'est-à-dire $\|\lambda M\| \geqslant |\lambda| \cdot \|M\|$. On obtient donc $\|\lambda M\| = |\lambda| \cdot \|M\|$ dans tous les cas.

> REMARQUE. Ce raisonnement est encore valable si on prend λ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas requis par la définition d'une norme mais cette extension est utile plus loin (à la question 8).

Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_1$ donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \|(M+N)x\|_1 \leqslant \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leqslant \|M\| \cdot \|x\|_1 + \|N\| \cdot \|x\|_1.$$

2 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En appliquant 1.a dans le sens $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|ABx\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

En appliquant 1.a dans le sens $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$, on en déduit l'inégalité $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

3 Posons

$$S(A) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Notons j_0 un indice qui réalise ce maximum. En notant de nouveau $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on observe l'égalité

$$Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1j_0} \\ \vdots \\ a_{nj_0} \end{pmatrix},$$

puis

$$S(A) = \|Ae_{j_0}\|_1.$$

L'égalité $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ donne alors

$$S(A) = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leqslant \|A\|.$$

Pour l'inégalité réciproque, prenons x quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

$$Ax = A \times \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \times Ae_j.$$

L'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_1$ donne alors

$$\|Ax\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \|Ae_j\|_1.$$

Pour tout $j \in [1, n]$, on observe les relations

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant S(A).$$

Donc

$$\|Ax\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot S(A) = S(A) \times \|x\|_1.$$

D'après 1.a, on en déduit la majoration $\|A\| \leqslant S(A)$. Par double inégalité, on a prouvé l'égalité

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

4 On commence par supposer que la suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice B. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque l'encadrement

$$0 \leqslant \|A^{(k)} - B\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}^{(k)} - b_{ij}|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, donc, par le théorème des gendarmes, on voit que 1 $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

5 Réciproquement, on suppose que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Soit $(i,j) \in [1,n]^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'encadrement

$$0 \leqslant |a_{ij}^{(k)} - b_{ij}| \leqslant \sum_{s=1}^{n} |a_{sj}^{(k)} - b_{sj}| \leqslant \|A^{(k)} - B\|.$$

On en déduit que $a_{ij}^{(k)}$ tend vers b_{ij} quand k tend vers $+\infty$. Ainsi, la suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice B.

5a Le calcul donne

$$P_b^{-1}AP_b = \begin{pmatrix} a_{11} & ba_{12} & b^2a_{13} & \cdots & b^{n-1}a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ba_{23} & \cdots & b^{n-2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_b^{-1}AP_b$ tend vers la matrice diagonale $diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ quand b tend vers 0.

5b La norme $\|\cdot\|$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ (car elle est 1-Lipschitzienne). On en déduit que $\|P_b^{-1}AP_b\|$ tend vers $\|diag(a_{11}, ..., a_{nn})\|$ quand b tend vers 0. Cette limite, notée ρ, est égale à $\max(|a_{jj}|; 1 \leqslant j \leqslant n)$. Cette limite est strictement inférieure à 1 par hypothèse. Notons $r = (1+\rho)/2$, ce qui est dans $]0,1[$.

D'après la définition de la limite, il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout $b \in]0, b_0[$, le nombre $\|P_b^{-1}AP_b\|$ est majoré par r. On obtient donc en particulier l'inégalité $\|P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}\| < 1$.

5c Gardons la notation b de la question précédente. Une itération de l'inégalité de la question 2 donne

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 10 \leqslant \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \leqslant \|P_b^{-1}AP_b\|^k.$$

L'inégalité $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$ donne que $\|P_b^{-1}AP_b\|^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Rappelons l'identité $(P_b^{-1}AP_b)^k = P_b^{-1}A^kP_b$. L'inégalité de la question 2 donne maintenant

$$0 \leqslant \|A^k\| \leqslant \|P_b\| \cdot \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \cdot \|P_b^{-1}\|,$$

si bien que $\|A^k\|$ tend également vers 0.
Ainsi, la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

6 Pour la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $Sp(A_1) = \{0,1\}$ donc $\rho(A_1) = 1$.

Pour la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $Sp(A_2) = \{0\}$ donc $\rho(A_2) = 0$.

Pour la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $Sp(A_3) = \{0,1\}$ donc $\rho(A_3) = 1$.

Pour la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $Sp(A_4) = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$ donc $\rho(A_4) = \sqrt{2}$.

Pour la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $Sp(A_5) = \{1, 4\}$ donc $\rho(A_5) = 4$.

i La propriété (i) est vraie en raison de l'égalité

$$Sp(\mu A) = \{\mu x : x \in Sp(A)\}.$$

Pour prouver cette égalité, on remarque pour commencer l'égalité $Sp(0 \times A) = \{0\}$, puis, si $\mu \neq 0$, on remarque l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mu A - \mu x) = \mathrm{Ker}(A - x),$$

qui donne $\mu x \in Sp(\mu A) \iff x \in Sp(A)$.

ii La propriété (ii) est fausse. On peut prendre $A = A_2$ et $B = A_2$, ce qui donne $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, on a donc $\rho(A+B) = 1$ et $\rho(A)+\rho(B) = 0$, donc $\rho(A+B) > \rho(A) + \rho(B)$.

iii La propriété (iii) est fausse. On peut prendre $A = A_2$ et $B = A_2$, ce qui donne $AB = A_1$. Dans ce cas, on a donc $\rho(AB) = 1$ et $\rho(A)\rho(B) = 0$, donc $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$.

iv Les propriétés (iv) est vraie car les matrices $P^{-1}AP$ et A ont le même spectre que A.

v Les propriétés (v) est vraie car les matrices $P^{-1}AP$ et A ont le même spectre que A.

8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Les relations $Ax = \lambda x$ et $x \neq 0$ donnent

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1},$$

donc $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

9 On fait l'hypothèse $\rho(A) < 1$. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$). Il existe donc une matrice P de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A, donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

La matrice T vérifie donc les hypothèses de la question 5, si bien que la suite de matrices $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

Par le même raisonnement qu'en 5.c, on en déduit que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

10a On reprend le raisonnement de la question 8 : soit $\lambda \in Sp(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$A^k x = A^{k-1}\lambda x = A^{k-2}\lambda^2 x = \cdots = \lambda^k x,$$

puis, le vecteur x étant non nul, on obtient $|\lambda^k| = \|A^k x\|_1/\|x\|_1$, donc $\rho(A)^k \leqslant \|A^k\|$.

10b **1.** Soit $\alpha \in [0, \rho(A)[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on observe alors l'inégalité

$$\left\|\left(\frac{A}{\alpha}\right)^k\right\| = \frac{\|A^k\|}{\alpha^k} \geqslant \left(\frac{\rho(A)}{\alpha}\right)^k \geqslant 1,$$

d'après 10.a.

On en déduit que $\|(A/\alpha)^k\|$ ne tend pas vers 0 quand k tend vers $+\infty$, donc α n'est pas dans E_A.

2. Soit $\alpha \in [\rho(A), +\infty[$. L'identité 7.i donne $\rho(A/\alpha) = \rho(A)/\alpha < 1$, donc la suite $((A/\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle d'après le résultat de la question 9, si bien que α est dans E_A.

On a prouvé l'égalité $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

11 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on connaît l'inégalité $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$, qui découle de 10.a.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 10.b, la suite de matrices de terme général $\left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k$ tend vers la matrice nulle.

Il existe donc un entier $k_\varepsilon \geqslant 1$ tel que

$$\forall k \geqslant k_\varepsilon, \quad \|\frac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\| \leqslant 1,$$

ce qui donne ensuite $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant k_\varepsilon, \rho(A) \leqslant \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

On a prouvé que la suite $(\|A^k\|^{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\rho(A)$.

12 Introduisons les coefficients des matrices en présence.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A_+^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

L'énoncé I_1 est vrai par définition des $b_{i,j}$:

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, |a_{i,j}^{(1)}| = |a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'énoncé I_k est vrai. Soit (i,j) un couple d'indices entre 1 et n. La formule du produit matriciel donne

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} a_{l,j}^{(k)}.$$

On applique l'inégalité triangulaire puis on utilise l'hypothèse $\mathcal{I}_k$:

$$|a_{i,j}^{(k+1)}| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |a_{i,l}||a_{l,j}^{(k)}| \leqslant \sum_{l=1}^{n} b_{i,l} b_{l,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

L'énoncé $\mathcal{I}_{k+1}$ est prouvé.

Par récurrence, l'énoncé $\mathcal{I}_k$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Prenons maintenant k quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et considérons un indice j tel que 1 $\|A^k\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}^{(k)}|$. L'énoncé $\mathcal{I}_k$ donne

$$\|A^k\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}^{(k)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} = \|A_+^k\|,$$

puis $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \|A_+^k\|^{\frac{1}{k}}$.

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient l'inégalité $\rho(A) \leqslant \rho(A_+)$.

13 Encore un raisonnement par récurrence. Pour tout entier $k \geqslant 2$, notons $\mathcal{I}_k$ l'énoncé : Pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ qui vérifie l'égalité $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$, le vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ est colinéaire à $(|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Notons $r_1 = |z_1|$ et $r_2 = |z_2|$ et introduisons θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

et

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Le calcul donne

$$r_1 r_2 (1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0$$

et

$$|z_1 + z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

On en déduit que

$$|z_1 + z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Si $r_1 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $r_2 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, alors θ_1 et θ_2 sont congrus modulo π donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ donc $(z_1, z_2) = e^{i\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$.

L'énoncé J_2 est prouvé.

Supposons pour un premier temps que $z_1, \ldots, z_k$ sont tous non nuls.

Supposons $k \geqslant 2$ dans lequel J_k est vrai. Prenons $(z_1, \ldots, z_{k+1})$ tel que $|z_1 + \ldots + z_{k+1}| = |z_1| + \ldots + |z_{k+1}|$. Ce raisonnement se généralise au cas où au moins un des z_i est nul.

L'inégalité triangulaire donne

$$|z_1 + \ldots + z_k + z_{k+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_k| + |z_{k+1}| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

Ces trois nombres sont donc égaux, ce qui donne en particulier

$$|z_1 + \ldots + z_k| + |z_{k+1}| = |z_1| + \ldots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \ldots, z_k) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_k|)$.
On peut aussi organiser l'inégalité triangulaire sous la forme

$$|z_2 + \ldots + z_{k+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_{k+1}| - |z_1| \leqslant |z_2| + \ldots + |z_{k+1}|,$$

et en déduire l'égalité $|z_2+\ldots+z_{k+1}| = |z_2|+\ldots+|z_{k+1}|$. L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(z_2, \ldots, z_{k+1}) = \mu(|z_2|, \ldots, |z_{k+1}|)$.
Le fait que z_2 soit non nul donne $\lambda = \frac{z_2}{\mu z_2}$, donc finalement $(z_1, \ldots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_{k+1}|)$.
L'énoncé J_{k+1} est prouvé. Par récurrence, l'énoncé J_k est vrai pour tout entier $k \geqslant 2$.

14 Le produit $y^T Ax$ s'écrit de deux manières

$$y^T Ax = y^T(\lambda x) = \lambda y^T x$$

et

$$y^T Ax = (\lambda y)^T x = \mu y^T x = \mu y^T x.$$

On en tire l'égalité $(\lambda - \mu)y^T x = 0$ puis $y^T x = 0$ car $\lambda \neq \mu$. On remarque enfin l'égalité $y^T x = \overline{x^T y}$, qui donne finalement $x^T y = 0$.

15a La récurrence est déjà initialisée par l'hypothèse $Aw \geqslant \mu w$.
Remarquons pour plus tard que le produit de deux matrices positives est une matrice positive. Idem avec une somme.
Soit $k1 \in \mathbb{N}$ tel que $A^k w \geqslant \mu^k w$. La colonne $A^{k+1}w - A^k w$ est positive et la matrice A est positive donc la colonne $A(A^k w - \mu^k w)$ est positive. De même, la colonne $(\mu^k Aw - \mu^{k+1}w)$ est positive. Par somme, la colonne $A^{k+1}w - \mu^{k+1}w$ est positive, ce qui donne $A^{k+1}w \geqslant \mu^{k+1}w$.
Par récurrence, l'inégalité $A^k w \geqslant \mu^k w$ est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Les vecteurs en présence sont à coefficients positifs. On en déduit l'inégalité $\|A^k w\|_1 \geq \mu^k \|w\|_1$ puis

$$\frac{\|A^k w\|_1}{\|w\|_1} \geq \mu^k$$

puis

$$\|A^k\| \geq \mu^k$$

ce qui donne $[\rho(A) \geq \mu]$ en faisant tendre k vers $+\infty$ (question 11).

15b L'hypothèse $Aw > \mu w$ s'écrit :

$$(Aw)_1 > \mu w_1, \ldots, (Aw)_n > \mu w_n.$$

On note λ le plus petit des nombres $(Aw)_i / w_i$ où i décrit l'ensemble (non vide) des indices tels que $w_i > 0$. Le résultat de la question précédente donne $\rho(A) \geq \lambda$ donc $\rho(A) > \mu$.

15c Soit un indice i distinct de k. Le calcul donne

$$\frac{(Aw')_i - \mu w'_i}{w'_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w'_j} - \mu + a_{ik} > 0.$$

Il reste un coefficient de $(Aw' - \mu w')$ à étudier

$$\frac{(Aw')_k - \mu w'_k}{w'_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{w_j}{w'_j} - \mu - (\mu - a_{kk})\varepsilon.$$

Le nombre x_k vaut $(Aw)_k - \mu w_k$. Il est donc strictement positif, ce qui permet de choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $x_k - (\mu - a_{kk})\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre $\varepsilon = x_k / (2(\mu - a_{kk}))$.

Si $\mu - a_{kk} \leqslant 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$.

Pour un tel choix de ε, on a alors $Aw' > \mu w'$ et w' est un vecteur positif non nul donc $\rho(A) > \mu$ d'après 15.b.

16a oit $i \in [1, n]$. L'égalité $(Ax)_i = \lambda x_i$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \geq |\lambda| \cdot |x_i|$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| \geq \rho(A) |x_i|.$$

C'est vrai pour tout indice i donc $Av_0 \geq \rho(A) v_0$.

Si on suppose que cette inégalité n'est pas une égalité, alors on est dans le cadre des hypothèses de la question 15.c avec $\mu = \rho(A)$ 1 et $w = v_0$ donc $\rho(A) > \rho(A)$, ce qui est absurde.

Cette absurdité prouve l'égalité $Av_0 = \rho(A) v_0$.

16b Soit k un indice tel que $x_k \neq 0$. On obtient alors les relations

$$\rho(A) = \frac{(Av_0)_k}{(v_0)_k} = \frac{1}{|x_k|} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} |x_j| \geq a_{kk} > 0.$$

Soit $i \in [1, n]$. On a alors

$$\rho(A) = \frac{(Av_0)_i}{(v_0)_i} = \frac{1}{\rho(A)} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \geq \frac{1}{\rho(A)} a_{ii}|x_i| > 0.$$

Toutes les coordonnées de v_0 sont strictement positives.

16c L'inégalité triangulaire écrite à la question 16.a est finalement une égalité. En particulier, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j|.$$

Le cas d'égalité de la question 13 donne donc l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a_{i1}x_1, \dots, a_{in}x_n) = \mu(a_{i1}|x_1|, \dots, a_{in}|x_n|).$$

Les a_{ij} étant tous non nuls, il vient

$$(x_1, \dots, x_n) = \mu(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Ainsi, le vecteur x est colinéaire à v_0. Ces vecteurs sont donc associés à la même valeur propre. Cela prouve l'égalité $\lambda = \rho(A)$.

17a Soit $x \in F$. Le calcul donne

$$(Ax)w_0 = x^T A w_0 = \rho(A) x^T w_0 = 0$$

donc Ax appartient à F. Le sous-espace F est donc stable par A.

Un autre calcul donne

$$x^T w_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)(w_0)_i > 0$$

donc w_0 n'est pas dans F. La droite $\mathbb{C}w_0$ et F sont donc en somme directe.

Le sous-espace F est le noyau de w_0^T, application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas l'application nulle donc son rang vaut au moins 1 ; son image est incluse dans $\mathbb{C}$ et de dimension au moins 1 donc son image est $\mathbb{C}$. La formule du rang donne donc $\dim(F) = n - 1$.

On en déduit l'égalité $\dim(F) + \dim(\mathbb{C}w_0) = \dim(\mathbb{C}^n)$. La somme de F et $\mathbb{C}w_0$ étant directe, on en déduit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

17b Soit μ une valeur propre de A telle que $\mu \neq \rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé. Le résultat de la question 14 donne $v^T w_0 = 0$ donc $v \in F$.

Supposons que v ait tous ses coefficients réels et positifs (l'un d'entre eux au moins est alors strictement positif). On obtient alors $v^T w_0 > 0$, ce qui est contradictoire.

Un tel vecteur propre ne peut donc être associé qu'à la valeur propre $\rho(A)$: l'énoncé (iii) est démontré.

18a Soit $(v_2, \ldots, v_n)$ une base de F. La famille $\mathcal{B} = (v_0, v_2, \ldots, v_n)$ est alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\mathbb{C}w_0$ et F sont supplémentaires. La matrice de φ_A relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est la matrice de φ_A relativement à la base $(v_2, \ldots, v_n)$ de F, d'où la factorisation $\chi_A = (X - \rho(A))\chi_B$.
Aucun élément de F n'est à coordonnées strictement positives donc $\rho(A)$ n'est pas une valeur propre de B. Or les autres valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à $\rho(A)$ donc les racines de χ_B ont un module strictement inférieur à $\rho(A)$.
On en déduit que $\rho(A)$ est une racine de multiplicité 1 de χ_A.
On connaît l'encadrement $1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(A - \rho(A)I)) \leqslant \mathrm{mult}(\rho(A), \chi_A) = 1$.
On en déduit que l'espace propre de A relatif à la valeur propre $\rho(A)$ est de dimension 1 : c'est la droite dirigée par v_0.

18b Le raisonnement de la question précédente donne $\rho(\frac{A}{\rho(A)}) < 1$ donc $\rho(\frac{A}{\rho(A)}) < 1$ en exploitant 7.i.
Le résultat de la question 9 permet d'en déduire que la suite de terme général $(\frac{A}{\rho(A)})^k$ converge vers l'endomorphisme nul de F.
Soit $x \in F$. L'application linéaire $f \mapsto f(x)$, définie de $\mathcal{L}(F)$ vers F, est continue donc la suite de vecteurs de terme général $\frac{1}{\rho(A)^k} A^k(x)$ converge vers le vecteur nul de F.
En d'autres termes, la suite de vecteurs $(\frac{A^k}{\rho(A)^k})_{k \geqslant 1}$ converge vers le vecteur nul.

18c Le vecteur x admet une décomposition (unique) sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, \quad x_2 \in \mathbb{C}w_0.$$

Notons λ le nombre complexe tel que $x_2 = \lambda w_0$. On obtient alors

$$\frac{x^T w_0}{w_0^T w_0} = \frac{\lambda w_0^T w_0}{w_0^T w_0} = \lambda$$

donc

$$\lambda = \frac{x^T w_0}{w_0^T w_0}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le calcul donne

$$\frac{A^k x}{\rho(A)^k} = \frac{A^k x_1}{\rho(A)^k} + \frac{\lambda w_0}{\rho(A)^k}.$$

Quand k tend vers $+\infty$, on obtient pour limite le vecteur $\frac{\lambda w_0}{w_0^T w_0}$, qui est le projeté de x sur $\mathbb{C}w_0$ parallèlement à F.
Le fait que x soit positif et non nul donne $\frac{x^T w_0}{w_0^T w_0} > 0$, ce qui achève de démontrer (iv).

CORRIGÉ DU SUJET 2

Phénomènes de seuil dans les graphes

1 Considérons la matrice $P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker d'indice (i,j), et posons $M' = (m_{\rho(i),\rho(j)})_{i,j}$. Pour tous $i,j \in [\![1\,;\,n]\!]$ on a

$$(MP)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\delta_{\rho^{-1}(k),j} = m_{i,\rho(j)}$$

$$(PM')_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\rho^{-1}(i),k} m_{\rho(k),\rho(j)} = m_{i,\rho(j)}$$

On a donc $MP = PM'$. Il reste à justifier que la matrice P est inversible pour pouvoir écrire $M = PM'P^{-1}$ et ainsi prouver que M' est semblable à M. Or si on examine le j^{eme} vecteur colonne de P on voit que Toutes ses coordonnées sont nulles sauf celle pour l'indice $i = \rho(j)$ qui vaut 1. C'est le vecteur $E_{\rho(j)}$ de la base canonique $\mathscr{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les vecteurs colonnes de P s'obtiennent en appliquant la permutation ρ à la matrice I_n, ils forment donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La matrice P est donc bien inversible.

$$\boxed{P = PM'P^{-1} \text{ avec } P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}}$$

2 Une matrice d'adjacence est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

3 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe non vide. Il existe alors des entiers $i < j$ tels que $m_{i,j} = 1$, et par symétrie, $m_{j,i} = 1$. Le déterminant d'ordre 2 extrait de M :

$$\begin{vmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

est non nul donc

$$\boxed{\operatorname{rg} M \geqslant 2}$$

4 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoiles. Il existe donc des indices distincts $k, k_1, \ldots, k_d$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$ tels que la k^{eme} colonne contienne des 1 sur les positions $k_1, k_2, \ldots, k_d$ et des zéros ailleurs. Par symétrie la k^{eme} ligne de M obéit à la même description. Le reste des coefficients de M sont tous nuls. Si on note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteur colonnes de M, cela signifie que pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$

$$C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \cdots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $E_k \notin \text{vect}\{E_{k_1}, E_{k_2}, \dots, E_{k_d}\}$ alors la famille $(E_k, E_{k_1}+E_{k_2}+\cdots+E_{k_d})$ est libre. C'est une famille libre maximale extraite des colonnes de M donc

$$\boxed{\operatorname{rg} M = 2}$$

5 $G' = (A', S')$ est une copie de $G = (A, S)$ donc par définition il exist une bijection σ de S' dans S telle que

$$\forall (s', t') \in S'^2 \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A \tag{3}$$

Si maintenant ρ est une indexation de S, ie une bijection de $[\![1\,;\,n]\!]$, alors $\sigma^{-1} \circ \rho$ est une indexation de S' et on a selon propriété (3)

$$\{\sigma^{-1} \circ \rho(i), \sigma^{-1} \circ \rho(i)\} \in A' \iff \{\rho(i), \rho(j)\} \in A$$

Ce qui signifie que $M_{G,\rho} = M_{G',\sigma^{-1}\circ\rho}$. Alors

$$\boxed{\chi_{G'} = \chi_G}$$

6 Soit σ une indexation de G. On a posé $\chi_G = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ donc $a_{n-1} = -\operatorname{tr} M_{G,\sigma} = 0$ puisque $M_{G,\sigma}$ est à diagonale nulle.
Posons ensuite $M_{G,\sigma} = (m_{i,j})_{i,j}$. Alors

$$\chi_G(X) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\rho)} P_\rho \quad \text{avec } P_\rho = \prod_{k=1}^{n} \Big(\delta_{\rho(k),k} X - m_{\rho(k),k}\Big)$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\deg P_\rho = \operatorname{card}\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \rho(k) = k\}$$

on voit que seul pour $\rho = \text{id}$ ou lorsque ρ est une transposition, P_ρ est de degré $\geqslant 2$ et donc peut contenir potentiellement un terme en X^{n-2}.
Toutefois $P_{\text{id}} = \prod_{k=1}^{n}(X - m_{k,k}) = X^n$ et pour toute transposition $\tau = (i\ j)$ de $\mathcal{S}_n$ on a

$$P_\tau = m_{i,j} m_{j,i} \prod_{k \notin \{i,j\}} (X - m_{k,k}) = m_{i,j}^2 X^{n-2} = m_{i,j} X^{n-2}$$

Par identification de coefficients on a donc

$$a_{n-2} = -\sum_{\substack{\{i,j\} \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \\ i \neq j}} m_{i,j}$$

Dans cette somme il ne reste que les coefficients $m_{i,j}$ qui correspondent à une arête dans A. Ainsi

$$\boxed{a_{n-2} = -|A|}$$

7 Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches, $1 \leqslant d \leqslant n-1$.
D'après la question 4 [p. 18] (solution 4 [p. 48]), $\operatorname{rg} M = 2$. Donc $\dim \operatorname{Ker} M = n-2$. Alors 0 est une VAP de M de multiplicité au moins $n-2$. Signifiant que X^{n-2} divise χ_G. Par ailleurs question 6 [p. 18] (solution 6 [p. 49]) a montré que les coefficients en X^{n-1} et en X^{n-2} de χ_G sont respectivement 0 et $-|A|$. Comme les seuls sommets non isolés de G forment une étoiles à d branches alors $|A| = d$ et ainsi

$$\boxed{\chi_G = X^{n-2}(X^2 - d)}$$

Supposons que le graphe G soit étoilé en un sommet indexé par $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ et soient $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ les autres indices des sommets qui forment une étoile avec celui-ci. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice M de G qui correspond à cette indexation et reprenons les relations

$$ME_j = C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \cdots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc $\dim \operatorname{Ker} M = n-2$. Tout vecteur E_j avec $j \notin \{k, k_1, \ldots, k_d\}$ est dans $\operatorname{Ker} M$. Par ailleurs pour tout $i \in [\![2\,;\,d]\!]$ on a $M(E_{k_i} - E_{k_1}) = 0$ et donc $E_{k_i} - E_{k_1} \in \operatorname{Ker} M$. La famille des vecteurs E_j avec $j \notin \{k, k_1, \ldots, k_d\}$ et $E_{k_i} - E_{k_1}$ avec $i \in [\![2\,;\,d]\!]$ est libre et contient $n-2 = (n-d-1)+(d-1)$ vecteurs. Cette famille forme donc une base de $E_0(M) = \operatorname{Ker} M$.
Constatons ensuite que si on pose $V = E_{k_1} + \cdots + E_{k_d}$ alors (E_k, V) est une base de $\operatorname{Im} M$ et on a selon les relations (4)

$$ME_k = V \qquad MV = dE_k$$

$\operatorname{Im} M$ étant stable par M, les relations précédentes signifient que la matrice de l'endomorphisme induit par M sur $\operatorname{Im} M$ dans sa base (E_k, V) est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{M_1} = X^2 - d$, les VAP de M_1 sont $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ et on a

$$E_{\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $V_1 = \sqrt{d}\,E_k + V \in E_{\sqrt{d}}(M)$ et $V_2 = \sqrt{d}\,E_k - V \in E_{-\sqrt{d}}(M)$. Puisque $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ sont des VAP simples de M alors leurs SEP sont de dimension 1 et donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_{\sqrt{d}}(M) = \operatorname{vect}\{V_1\} & E_{-\sqrt{d}}(M) = \operatorname{vect}\{V_2\} \\ V_1 = \sqrt{d}\,E_k + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{k_i} & V_2 = \sqrt{d}\,E_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{k_i} \end{array}}$$

8 Notons n_1 et n_2 les cardinaux respectifs de S_1 et de S_2 et Soient σ_1 et σ_2 des indexations respectives de S_1 et de S_2 telles que $\sigma_1(1) = s_1$ et $\sigma_2(1) = s_2$. Considérons l'indexation σ de $S = S_1 \cup S_2$ définie par

$$\sigma(k) = \left| \begin{array}{ll} \sigma_1(k) & \text{si } k \in [\![1\,;\,n_1]\!] \\ \sigma(k-n_1) & \text{si } k \in [\![n_1+1\,;\,n_1+n_2]\!] \end{array} \right.$$

Par définition du graphe G on a

$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} M_{G_1,\sigma_1} & E_{1,1} \\ {}^{\mathrm{t}}E_{1,1} & M_{G_2,\sigma_2} \end{pmatrix}$$

où $E_{1,1}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons pour simplifier les écritures

$$M_1(\lambda) = \lambda I_{n_1} - M_{G_1,\sigma_1} = \left(m_{i,j}^{(1)}(\lambda)\right)_{i,j}$$

$$M_2(\lambda) = \lambda I_{n_1} - M_{G_2,\sigma_2} = \left(m_{i,j}^{(2)}(\lambda)\right)_{i,j}$$

Alors

$$\lambda I_{n_1+n_2} - M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} M_1(\lambda) & K \\ {}^{\mathrm{t}}K & M_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{avec } K = -E_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$$

Soit un scalaire λ qui ne soit pas une VAP de M_{G_1,σ_1}, de telle sorte que la matrice $M_1(\lambda)$ soit inversible. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{vmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -{}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1} & I_{n_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_1(\lambda) & K \\ {}^{\mathrm{t}}K & M_2(\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1(\lambda) & K \\ 0 & M_2(\lambda) - {}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K \end{vmatrix}$$

Le déterminant à gauche vaut 1 donc nous avons

$$\chi_G(\lambda) = \det\Big(M_1(\lambda)\Big)\det\Big(M_2(\lambda) - {}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K\Big) \tag{5}$$

Maintenant

$${}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K = {}^{\mathrm{t}}E_{1,1}M_1(\lambda)^{-1}E_{1,1} = \begin{pmatrix} \nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$$

où ν est le coefficient d'indice $(1,1)$ de la matrice $M_1(\lambda)^{-1}$. Par linéarité du déterminant matriciel par rapport à chaque colonne nous avons donc

$$\det\left(M_2(\lambda) - {}^{t}KM_1(\lambda)^{-1}K\right) = \begin{vmatrix} m_{1,1}^{(2)}(\lambda) - \nu & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ m_{2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n_2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ 0 & m_{2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n_2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu\chi_{G_2\backslash s_2}(\lambda)$$

L'expression de ν peut être prélevée dans la formule $A^{-1} = (1/\det A)\,{}^{t}\operatorname{Com} A$ valable pour toute matrice carrée inversible A :

$$\nu = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\det M_1(\lambda)} = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de $M_1(\lambda)$ en éliminant la première ligne et la première colonne :

$$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda)) = \chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda)$$

soit au final
$$\nu = \frac{\chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda)}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

En revenant maintenant à l'relation (5) nous voyons que

$$\boxed{\chi_G(\lambda) = \chi_{G_1}(\lambda) \times \chi_{G_2}(\lambda) - \chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda) \times \chi_{G_2\backslash s_2}(\lambda)}$$

Égalité qui est valable pour tout λ de l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \operatorname{Sp}(M_{G_1,\sigma_1})$. Elle implique donc l'égalité des polynômes en jeu.

9 Soient G_1 et G_2 deux étoiles disjointes de sommets respectifs s_1 et s_2 et soit G la réunion des deux graphes en ajoutant l'arête $\{s_1, s_2\}$. Selon la question précédente

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$$

Ici les graphes $G_1\backslash s_1$ et $G_2\backslash s_2$ ont tous leurs sommets isolés (et donc leurs matrices d'adjacences sont nulles) donc $\chi_{G_1\backslash s_1} = X^{d_1-1}$ et $\chi_{G_2\backslash s_2} = X^{d_2-1}$. Avec $\chi_{G_1} = X^{d_1-2}(X^2 - d_1)$ et $\chi_{G_2} = X^{d_2-2}(X^2 - d_2)$ on obtient

$$\chi_G = X^{d_1+d_2-4}(X^2 - d_1)(X^2 - d_2) - X^{d_1+d_2-2}$$

soit
$$\boxed{\chi_G = X^{d_1+d_2-4}\left(X^4 - (d_1 + d_2 + 1)X^2 + d_1 d_2\right)}$$

10 Les événements $(X_{\{i,j\}} = 1)$ et $(X_{\{i',j'\}} = 0)$ avec $i, j, i', j' \in S$ sont tous mutuellement indépendants donc selon l'expression

$$\{G\} = \left(\bigcap_{\{i,j\}\in A} \left(X_{\{i,j\}} = 1\right)\right) \bigcap \left(\bigcap_{\{i,j\}\notin A} \left(X_{\{i,j\}} = 0\right)\right) \tag{6}$$

N.B. Attention ! Ne pas confondre $\{G\}$ et G.

on a $$\mathbf{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\}\in A} \mathbf{P}\left(X_{\{i,j\}} = 1\right) \times \prod_{\{i,j\}\notin A} \mathbf{P}\left(X_{\{i,j\}} = 0\right)$$

soit $$\boxed{\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}}$$

le cardinal de $\overline{A}$ étant effectivement $N - a$ puisque $N = \binom{n}{2}$ est le nombre de toutes les paires $\{i, j\}$ lorsque $i, j \in S$ et $i \neq j$.

Ensuite ; notons $\mathcal{A}$ *l'ensemble de toutes les parties à deux éléments de* S. L'ensemble $\mathcal{A}$ est de cardinal N. Pour tout $a \in [\![0\,;\, N]\!]$, posons

$$\Omega_{n,a} = \left\{G = (S, A) \in \Omega_n \mid \operatorname{card} A = a\right\}$$

La famille $(\Omega_{n,a})_{a\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est une partition de Ω_n donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Omega_n) &= \sum_{a=0}^{N} \sum_{G\in\Omega_{n,a}} \mathbf{P}(\{G\}) \\ &= \sum_{a=0}^{N} p_n^a q_n^{N-a} \operatorname{card} \Omega_{n,a}\end{aligned}$$

L'application $A \longmapsto G = (S, A)$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}_a(\mathcal{A})$ de
3 toutes les parties de cardinal a de $\mathcal{A}$ dans $\Omega_{n,a}$ donc

$$\operatorname{card} \Omega_{n,a} = \operatorname{card} \mathcal{P}_a(\mathcal{A}) = \binom{N}{a}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{a=0}^{N} \binom{N}{a} p_n^a (1 - p_n)^{N-a} = 1}$$

11 on a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X = n) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \\ &= \mathbf{P}(X > 0)\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{\mathbf{P}(X > 0) \leqslant \mathbf{E}(X)}$$

12 L'inclusion $(X=0)\subset(|X-\mathbf{E}(X)|\geqslant\mathbf{E}(X))$ fournie en indication est évidente puisque pour tout $\omega\in\Omega$

$$X(\omega)=0\Longrightarrow|X(\omega)-\mathbf{E}(X)|\geqslant|\mathbf{E}(X)|=\mathbf{E}(X)$$

On en déduit que $\mathbf{P}(X=0)\leqslant\mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}(X)|\geqslant\mathbf{E}(X)\big)$ et ensuite selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\boxed{\mathbf{P}(X=0)\leqslant\frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)^2}}$$

13 La variable A_n peut être écrite sous la forme

$$A_n=\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{A}}X_{\{i,j\}}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les paires de $[\![1\,;\,n]\!]$. Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n et on a $\operatorname{card}\mathcal{A}=N$ donc

$$\boxed{\text{La variable } A_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (N,p_n) : \quad A_n\sim\mathcal{B}(N,p_n)}$$

14 On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n>0)&=1-\mathbf{P}(A_n=0)=1-(1-p_n)^N\\&=1-\exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\ln(1-p_n)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\ln(1-p_n)\sim-\frac{1}{2}n^2p_n\qquad(\text{avec } n^2p_n\longrightarrow 0)$$

donc

$$\boxed{\text{si } p_n=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ alors } P(A_n>0)\longrightarrow 0}$$

15 D'après la 12 (sol. 12) on a

$$P(A_n)\leqslant\frac{\mathbf{V}(A_n)}{\mathbf{E}(A_n)^2}$$

La variable A_n suit la loi $\mathcal{B}(N,p_n)$ donc

$$\mathbf{E}(A_n)=Np_n\qquad\mathbf{V}(A_n)=Np_n(1-p_n)$$

Alors

$$\frac{\mathbf{V}(A_n)}{\mathbf{E}(A_n)^2}=\frac{1-p_n}{Np_n}\leqslant\frac{1}{Np_n}$$

Puisque $1/n^2=\mathrm{o}(p_n)$ alors $n^2p_n\longrightarrow+\infty$ et donc $1/(Np_n)\longrightarrow 0$. On en déduit que $P(A_n)\longrightarrow 0$ et ainsi

$$\boxed{\text{si } \frac{1}{n^2}=\mathrm{o}(p_n) \text{ alors } P(A_n>0)\longrightarrow 1}$$

16

P_n est la propriété :

«le graphe aléatoire G choisi selon le modèle du sujet possède au moins une arête»

sa fonction de seuil est la suite $(1/n^2)_{n\geqslant 2}$

17 Sachant que $S_H \subset [\![1\,;\,n]\!]$ on a pour tout $G \in \Omega_n$

$$H \subset G \iff A_H \subset A_G$$

donc
$$(X_H = 1) = \left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G\right\}$$

On peut donc créer une partition de $(X_H = 1)$ sous la forme

$$(X_H = 1) = \bigcup_{b=0}^{N-a_H} \left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b\right\}$$

Or pout tout $b \in [\![1\,;\,N - a_H]\!]$, il y a $\binom{N-a_h}{b}$ façon de compléter A_H en une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal $a_H + b$ et pour chaque partie A de $\mathcal{A}$ qui vérifie cette condition on a selon la question 10 (solution 10)

$$\mathbf{P}(\{(S, A)\}) = p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

donc
$$\mathbf{P}\left(\left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b\right\}\right) = \binom{N-a_h}{b} p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

par suite

$$\mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H} \sum_{b=0}^{N-a_H} \binom{N-a_h}{b} p_n^b (1-p_n)^{N-a_H-b} = p_n^{a_H}$$

La variable X_H suit une loi de Bernoulli donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H}}$$

18 Récapitulons les notations :

- Au départ il y a le graphe $G_0 = (S_0, A_0)$ avec $s_0 = \operatorname{card} S_0 \geqslant 2$ et $a_0 = \operatorname{card} A_0 \geqslant 1$;
- $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des graphes dont les sommets sont contenus dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et qui sont des copies de G_0 (on notera que forcément $s_0 \leqslant n$) ;
- S_0' est un (autre) ensemble de sommets de même cardinal s_0 que S_0 et c_0 est le nombre de graphes de sommets S_0' et qui sont des copies de G_0.

Notons C_0' l'ensemble des graphes de sommets S_0' qui sont des copies de G_0. Soit S une partie quelconque de $[\![1\,;\,n]\!]$ de cardinal s_0 et fixons une bijection $\sigma : S \longmapsto S_0'$. Définissons ensuite pour tout graphe (S, A) de sommets S le graphe (S_0', A_σ) de sommets S_0' par

$$A_\sigma = \Big\{\{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid \{i, j\} \in A\Big\}$$

L'application $(S, A) \longmapsto (S_0', A_\sigma)$ ainsi construite est une bijection. Le graphe (S, A) est une copie de G_0 si et seulement si (S_0', A_σ) en est une. Il y a donc une bijection entre C_0' et l'ensemble des graphes de sommets S qui sont des copies de G_0. Maintenant, si on note $C(S)$ l'ensemble des graphes de sommets S qui sont des copies de G_0 alors on vient de justifier que $|C(S)| = c_0$. Grâce à la partition :

$$C_0 = \bigcup_{S\in\mathcal{P}_{s_0}([\![1\,;\,n]\!])} C(S)$$

on conclut que $$\boxed{|C_0| = \binom{n}{s_0} c_0}$$

Fixons maintenant un graphe (S_0', B_0) dans C_0' et posons pour toute permutation ρ de S_0'

$$B_\rho = \Big\{\{\rho(i), \rho(j)\} \mid \{i, j\} \in B_0\Big\}$$

Par définition mème des copies d'un graphe, pour tout élément (S_0', B) de C_0' il existe ρ telle que $B = B_\rho$, indiquant que l'application $\rho \longmapsto (S_0', B_\rho)$ est une surjection de l'ensemble des permutations de S_0' dans C_0'. On en déduit que

$$c_0 \leqslant s_0!$$

Par suite $$\boxed{|C_0| = \frac{n(n-1)\cdots(n-s_0+1)}{s_0!} c_0 \leqslant n^{s_0}}$$

19 Rappelons, pour tout graphe $G \in \Omega_n$, les notations

- $X_H(G)$ vaut 1 si $H \subset G$, 0 sinon ;
- $X_n^0(G)$ est le nombre de copies de G_0 contenues dans G ;
- C_0 est l'ensemble de toutes les copies de G_0 dont les sommets sont dans $[\![1\,;\,n]\!]$.

Visiblement $$\boxed{X_n^0 = \sum_{H\in C_0} X_H}$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n^0) &= \sum_{H\in C_0} \mathbf{E}(X_H)\\ &= \sum_{H\in C_0} p_n^{a_H}\\ &= \sum_{H\in C_0} p_n^{a_0}\\ &= p_n^{a_0}|C_0|\end{aligned}$$

et donc $$\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) \leqslant n^{s_0} p_n^{a_0}}$$

20 Soit H_0 un sous graphe de G_0 tel que

$$\omega_0 = \frac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$$

On définit la variable Y_0^n liée à H_0 de la même façon que X_0^n est liée à G_0. Puisque $H_0 \subset G_0$, tout graphe G de Ω_n contient au moins autant de copies de H_0 que de copies de G_0. C'est à dire que $X_0^n \leqslant Y_0^n$ et par croissance de l'espérance on a donc

$$\mathbf{E}(X_n^0) \leqslant \mathbf{E}(Y_n^0)$$

D'après la question précédente on a donc

$$0 \leqslant \mathbf{E}(X_n^0) \leqslant n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} \tag{7}$$

Or par hypothèse $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$ donc

$$n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = \mathrm{o}\left(n^{s_{H_0}-\omega_0 a_{H_0}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

D'après la majoration (7) on a donc $\mathbf{E}(X_0^n) \longrightarrow 0$. D'autre part, comme dans la question 14 (solution 14)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n^0 > 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 = k)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X_n^0 = k)\\ &\leqslant \mathbf{E}(X_n^0)\end{aligned}$$

at ainsi $$\boxed{\lim \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0}$$

21 Rappelons l'expression

$$X_n^0 = \sum_{H\in C_0} X_H$$

donc $$\left(X_n^0\right)^2 = \sum_{H,H'\in C_0} X_H X_{H'}$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{H,H'\in\mathcal{C}_0} E(X_H X_{H'})$$

Notons pour deux graphes $H = (S, A)$, $H' = (S', A')$,

$$HUH' = (S \cup S', A_H \cup A_{H'})$$
$$H \cap H' = (S \cup S', A_H \cap A_{H'})$$

On remarquera dès lors que si G est un graphe de Ω_n alors

$$\begin{aligned} H \cup H' \subset G &\iff S_H \cup S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_H \cup A_{H'} \subset A_G \\ &\iff S_H \subset S_G \text{ et } A_H \subset A_G \text{ et } S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_{H'} \subset A_G \\ &\iff H \subset G \text{ et } H' \subset G \end{aligned}$$

et que
$$\begin{aligned} a_{H\cup H'} &= |A_H \cup A_{H'}| \\ &= |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}| \\ &= a_H + a_{H'} - a_{H\cap H'} \end{aligned}$$

Soient maintenant $H, H' \in \mathcal{C}_0$. Alors la variable $X_H X_{H'}$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, c'est à dire qu'elle suit une loi de Bernoulli.

De plus
$$\begin{aligned} (X_H X_{H'} = 1) &= (X_H = 1) \cap (X_{H'} = 1) \\ &= \{G \in \Omega_n \mid H \subset G\} \cap \{G \in \Omega_n \mid H' \subset G\} \\ &= \boxed{\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}} \\ &= (X_{H\cup H'} = 1) \end{aligned}$$

et donc
$$\boxed{\mathbf{P}(X_H X_{H'} = 1) = \mathbf{P}(X_{H\cup H'} = 1) = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$$

N.B. $X_H X_{H'}$ et $X_{H\cup H'}$ étant des variables de Bernoulli, l'égalité $(X_H X_{H'} = 1) = (X_{H\cup H'} = 1)$ signifie en fait que

$$\boxed{X_H X_{H'} = X_{H\cup H'}} \tag{8}$$

et la relation
$$(X_n^0)^2 = \sum_{H,H'\in\mathcal{C}_0} X_{H\cup H'}$$

confirme le fait que $(X_n^0)^2(G)$ est le nombre de double-copies de G_0 contenues dans le graphe G (y compris les double-copies de la forme $H \cup H$).

N.B. Finalement le curieux événement $(H \cup H' \subset G)$ pouvait être écrit de façon plus compréhensible sous la forme

$$\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}$$

ou encore mieux
$$(X_H X_{H'} = 1)$$

$X_H X_{H'}$ est donc la variable de Bernoulli $X_{H\cup H'}$ de paramètre

$$\mathbf{P}(X_{H\cup H'} = 1) = \mathbf{E}(X_{H\cup H'}) = p_n^{a_{H\cup H'}} = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$

finalement
$$\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{H,H'\in\mathcal{C}_0} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$$

22 On a par définition (après adaptation des notations)

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} \mathbf{P}\Big(\{G\in\Omega_n \mid H\cup H'\subset G\}\Big) = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} \mathbf{E}(X_{H\cup H'}) \tag{9}$$

donc
$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$$

Or si $S_H\cap S_{H'}=\varnothing$ alors $A_H\cap A_{H'}=\varnothing$ et donc $a_{H\cap H'}=0$. Ainsi

$$\Sigma_0 = \Big|\Big\{(H,H')\in(\mathcal{C}_0)^2 \mid S_H\cap S'_H=\varnothing\Big\}\Big| p_n^{2a_0} \leqslant |(\mathcal{C}_0)^2| p_n^{2a_0} = \mathbf{E}(X_n^0)^2$$

$$\boxed{\Sigma_0 \leqslant \mathbf{E}(X_n^0)^2}$$

AUTRE MÉTHODE. On peut procéder autrement en remarquant que pour tout $G\in\Omega_n$

$$X_H(G)=1 \iff \forall\{i,j\}\in A_H \quad X_{\{i,j\}}(G)=1$$

ce qui signifie que
$$X_H = \prod_{\{i,j\}\in A_H} X_{\{i,j\}}$$

Si maintenant $S_H\cap S_{H'}=\varnothing$ alors $A_H\cap A_{H'}=\varnothing$. Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes donc par lemme des coalitions les variables X_H et $X_{H'}$ sont indépendantes. En particulier $E(X_HX_{H'})=E(X_H)E(H')$. En reprenant à l'étape équation (9)

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} \mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{H'})\\ &\leqslant \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{H'})\\ &= \Big(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} E(X_H)\Big)^2\\ &= (\mathbf{E}(X_n^0))^2\end{aligned}$$

23 D'après les questions précédentes on a

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{H,H'\in\mathcal{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\Sigma_k = \sum_{H\in\mathcal{C}_0}\ \sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$$

Fixons maintenant un graphe $H\in\mathcal{C}_0$ et considérons l'ensemble

$$\Omega_H = \Big\{(S,A)\in\mathcal{C}_0 \ \Big|\ |S\cap S_H|=k\Big\}$$

Considérons ensuite l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega_H & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(S_H)\times\mathcal{P}_{s_0-k}(\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\setminus S_H) \\ (S,A) & \longmapsto & (S\cap S_H, S\setminus(S\cap S_H)) \end{array}$$

Cette application est surjective car pour tout couple $(S_1,S_2)\in\mathcal{P}_k(S_H)\times\mathcal{P}_{s_0-k}(\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\setminus S_H)$ il y a au moins une copie du graphe G_0 de sommets $S=S_1\cup S_2$ (moyennant une bijection $\sigma : S_0\longrightarrow S$) et que $|S\cap S_H|=|S_1|=k$. Ensuite toute copie de G_0 de sommets $S=S_1\cup S_2$ et un élément de Ω_H. Or d'après la question 18 (solution 18), le nombre de ces copies est c_0. Donc tout élément de $\mathcal{P}_k(S_H)\times\mathcal{P}_{s_0-k}(\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\setminus S_H)$ admet exactement c_0 antécédents par notre application. Alors

$$|\Omega_H| = c_0\left|\mathcal{P}_k(S_H)\times\mathcal{P}_{s_0-k}(\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\setminus S_H)\right| = c_0\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}$$

Par définition du nombre ω_0 on a

$$\forall H'\in\Omega_H\quad a_{H\cap H'}\leqslant\frac{s_{H\cap H'}}{\omega_0}=\frac{k}{\omega_0}$$

Puisque $p_n\in\,]0\,;1[$ on a donc

$$\forall H'\in\Omega_H\quad p_n^{-a_{H\cap H'}}\leqslant p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Ce qui achève de justifier que

$$\boxed{\Sigma_k\leqslant\sum_{H\in\mathcal{C}_0}c_0\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}}$$

Noter que k et n ne dépendent pas de l'indice $H\in\mathcal{C}_0$ donc en fait

$$\boxed{\Sigma_k\leqslant|\mathcal{C}_0|c_0\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}}$$

24

$$\begin{aligned}\binom{r}{q}r^{-q} &= \frac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{q!}r^{-q}\\ &= \frac{1}{q!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{q-1}{r}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q\end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbf{E}(X_n^0)=p_n^{a_0}|\mathcal{C}_0|$ et $|\mathcal{C}_0|=\binom{n}{s_0}c_0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} &\leqslant \frac{1}{\mathbf{E}(X_n^0)^2}c_0|\mathcal{C}_0|\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{c_0}{|\mathcal{C}_0|}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{1}{\binom{n}{s_0}}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\end{aligned}$$

Maintenant $\binom{n}{s_0} = \frac{n(n-1)\cdots(n-s_0+1)}{s_0!} \geqslant \frac{1}{s_0!}(n-s_0)^{s_0}$ donc en posant $M = s_0!\binom{s_0}{k}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} &\leqslant M\binom{n-s_0}{s_0-k}(n-s_0)^{-s_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant M\binom{n-s_0}{s_0-k}(n-s_0)^{k-s_0}(n-s_0)^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{M}{(s_0-k)!}\left(1-\frac{s_0-k-1}{s_0-k}\right)^{s_0-k}(n-s_0)^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\end{aligned}$$

et vu que $(n-s_0)^{-k} \sim n^{-k}$ il existe une constante $M' > 0$ telle que $(n-s_0)^{-k} \leqslant M'n^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a lors

$$0 \leqslant \frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} \leqslant M''n^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = M''\left(n^{\omega_0}p_n\right)^{-k/\omega_0}$$

où $M'' = \frac{MM'}{(s_0-k)!}\left(1-\frac{s_0-k-1}{s_0-k}\right)^{s_0-k}$. Puisque $n^{\omega_0}p_n \longrightarrow 0$ cela implique que

$$\boxed{\Sigma_k = o\left(\mathbf{E}(X_n^0)^2\right)}$$

25 En partitionnant l'ensemble $\mathcal{C}_0^2$ sous la forme

$$\mathcal{C}_0^2 = \bigcup_{k=0}^{s_0}\left\{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2 \;\middle|\; s_{H\cap H'} = k\right\}boh$$

les formules de la 21 (sol. 21) signifient que

$$\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{k=0}^{s_0}\Sigma_k$$

et donc
$$\frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} = \frac{\Sigma_0}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} - 1 + \sum_{k=1}^{s_0}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2}$$

Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{\Sigma_0}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} \longrightarrow 1$

Or
$$\Sigma_0 = \mathbf{E}\Bigg(\sum_{\substack{H,H'\in\mathcal{C}_0\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} X_H X_{H'}\Bigg) = \mathbf{E}\Bigg(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} X_H \underbrace{\Bigg(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0\\ S_{H'}\subset[\![1\,;n]\!]\setminus S_H}} X_{H'}\Bigg)}_{Y_H}\Bigg)$$

Par lemme des coalitions la variable Y_H est indépendante de X_H car toutes les variables $X_{H'}$ sont indépendantes de X_H. De plus elle suit la même loi que $X_{n-s_0}^0$. Donc

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \sum_{H\in\mathcal{C}_0}\mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(Y_H)\\ &= \sum_{H\in\mathcal{C}_0}\mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0)\\ &= \mathbf{E}(X_n^0)\,\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0)\end{aligned}$$

Des calculs effectués précédemment dans les questions 18 et 19 donnent

$$\mathbf{E}(X_n^0) = |C_0| p_n^{a_0} = c_0 \binom{n}{s_0} p_n^{a_0}$$

c_0 étant une constante indépendante de n on a donc

$$\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0) = c_0 \binom{n-s_0}{s_0} p_n^{a_0} \sim c_0 \binom{n}{s_0} p_n^{a_0} = \mathbf{E}(X_n^0)$$

et ainsi $$\Sigma_0 \sim \left(E(X_n^0)\right)^2$$

Ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} = 0}$$

26 Découle des questions 12 (sol. 12), 20 (sol. 20) et 25 (sol. 25)

27 La variable A_n est en fait égale à X_n^0 lorsque le graphe G_0 est formé de deux sommets et une arête. Dans ca cas le seul graphe $H \subset G_0$ qui contient au moins une arête est G_0 lui même et par suite

$$\boxed{\omega_0 = 2}$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 16 (solution 16).
Lorsque G_0 est une étoile à $d \geqslant 1$ branches alors un sous graphe $H \subset G_0$ est soit a sommets isolés s'il ne contient pas le centre s de G_0, soit il est lui même une étoile s'il le contient. Donc

$$\omega_0 = \min_{2\leqslant k\leqslant d} \frac{k}{k-1}$$

Comme pour tout $k \in [\![2; d]\!]$,

$$\frac{k}{k-1} - \frac{d}{d-1} = \frac{k(d-1)-d(k-1)}{(k-1)(d-1)} = \frac{d-k}{(k-1)(d-1)} \geqslant 0$$

alors $$\boxed{\omega_0 = \frac{d}{d-1}}$$

CORRIGÉ DU SUJET 3

Modèles matriciels de dynamique de populations

1 On somme selon $j \in [1; d]$ l'inégalité supposée $P_{i,j} \geqslant cv_j$, et on obtient :

$$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} \geqslant c \sum_{j=1}^{d} v_j \text{ c'est-à-dire } 1 \geqslant c.$$

2 On note e le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

On note que, pour tout vecteur ligne v à coefficients positifs, on a $v \in \mathscr{P}$ si et seulement si $ve = 1$, et que $Pe = e$. Supposons que $u \in \mathscr{P}$. Alors :

$$(uP)e = ue = 1$$

ce qui montre que $uP \in \mathscr{P}$.

3 Soit $u, v \in \mathscr{P}$. On note que

$$\sum_{k=1}^{d}(u_k - v_k)v_j = 0 \text{ pour tout } j, \text{ si bien que, pour tout } j \in [1;d],$$

$$(uP - vP)_j = \sum_{k=1}^{d}(u_k - v_k)(P_{k,j} - cv_j)$$

Puis, puisque $P_{k,j} - cv_j \geqslant 0$:

$$\|uP - vP\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{d}|u_k - v_k| \sum_{j=1}^{d}(P_{k,j} - cv_j)$$

ce qui donne

$$\|uP - vP\|_1 \leqslant (1-c)\sum_{k=1}^{d}|u_k - v_k|$$

puisque $v \in \mathscr{P}$.

4 Le résultat de la question 2 justifie que les termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent bien à $\mathscr{P}$. En itérant l'inégalité de la question précédente (avec $(u,v) = (x_n, x_{n-1})$ et les précédents), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leqslant (1-c)^n \|x_1 - x_0\|$$

Comme $(1-c) \in [0;1[$, la série de terme général $(1-c)^n$ converge, donc, par majoration, celle de terme général $\|x_{n+1} - x_n\|_1$ converge également.

5 Soit $j \in [1;d]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1,j} - x_{n,j}| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\|_1$$

donc, par majoration et par lien suite-série, la série de terme général $x_{n+1,j} - x_{n,j}$ converge (à j fixe). Ainsi, la suite de vecteurs $(x_n)_n$ converge, composante par composante, donc converge.

De plus, $\mathscr{P}$ est fermé, car il s'agit de l'image réciproque du singleton $\{1\}$ (fermé) par l'application $x \mapsto \sum_{k=1}^{d} x_k$, qui est continue, car polynomiale en les composantes de $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $\lim(x_n) \in \mathscr{P}$.

6 La continuité de l'application $t \mapsto tP$ sur $\mathbb{R}^d$ (elle est polynomiale en les composantes de t) permet d'obtenir $\mu = \mu \cdot P$ en passant à la limite $n \longrightarrow +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = x_n P$.
De plus, $\mu \in \mathscr{P}$, car $\mathscr{P}$ est fermé.
Si deux vecteurs μ, μ' conviennent, l'inégalité de la question 3 donne $\|\mu' - \mu\|_1 \leqslant (1-c)\|\mu' - \mu\|_1$, ce qui n'est possible que si $\mu = \mu'$ puisque $c > 0$.

7 Soit $x \in \mathscr{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|xP^n - \mu\|_1 = \|xP^n - \mu P^n\|_1 \leqslant (1-c)^n \|x - \mu\|_1 \leqslant 2(1-c)^n$$

par itération de l'inégalité de la question 3. De plus, pour tout $y \in \mathscr{P}$, on a

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{d} y_j = 1$$

Ceci donne le facteur 2 recherché dans l'inégalité.

8 Soit $i \in [\![1; d]\!]$. On calcule la somme :

$$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} = \frac{(Mh)_i}{\lambda h_i} = \frac{\lambda h_i}{\lambda h_i} = 1$$

9 En notant $D = \mathrm{Diag}(h_1, \ldots, h_d)$, matrice diagonale inversible, on a :

$$P^n = \frac{1}{\lambda^n} D^{-1} M^n D$$

ou encore, pour tous $i, j \in [\![1; d]\!]$:

$$P^n_{i,j} = \frac{(M^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}.$$

10a Pour commencer, les h_i étant tous > 0, on peut donc trouver $c' > 0$ tel que $P_{i,j} \geqslant c' \nu_j$ pour tous $i, j \in [\![1; d]\!]$. Partant de l'inégalité $P_{i,j} \geqslant \frac{c h_j}{\lambda h_i} \nu_j$, il suffit en effet de prendre $c' = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \frac{c h_j}{\lambda h_i}$, qui est bien > 0.
Ainsi, d'après la partie I, on peut se donner $\mu \in \mathscr{P}$ (unique) tel que $\mu P = \mu$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour n'importe quel vecteur $x \in \mathscr{P}$, on applique l'inégalité de la question 7 et on obtient :

$$\sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{i=1}^{d} x_i \left(\frac{h_j}{h_i} \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \right) \right| \leqslant 2(1-c')^n.$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{i=1}^{d} \frac{h_j}{h_i} x_i \left(\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leqslant 2(1-c')^n.$$

En particulier, pour chaque $j \in [\![1; d]\!]$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{h_i} \left(\lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right) \right| \leqslant \frac{2}{h_j} (1-c')^n$$

Il suffit alors d'appliquer cette inégalité avec deux vecteurs x :

— l'un avec des composantes nulles dès que $\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \leqslant 0$, égales par ailleurs

— l'autre avec des composantes nulles dès que $\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} > 0$, égales par ailleurs

en notant qu'alors $x_i \geqslant \frac{1}{d}$ dès qu'il est non nul, dans les deux cas (puisque $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$).

On obtient, en sommant les deux inégalités produites :

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{hd} \left| \lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - \mu_j \frac{h_i}{h_j} \right| \leqslant \frac{4}{h_j}(1-c')^n$$

où $h = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} h_i$.

Il ne reste plus qu'à sommer sur $j \in [\![1; d]\!]$ pour obtenir l'inégalité voulue, avec $C = 4hd \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{h_j}$ et $\gamma = 1 - c' \in [0; 1[$.

10b Soit $\pi \in M_{1,d}(\mathbb{R}_+)$. L'équation $\pi M = \lambda \pi$ équivaut à $(\pi D)P = \pi D$ (où D est la matrice introduite dans la réponse à la question 9). Pour chaque $\pi \in M_d(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$, on dispose de $\beta(\pi) \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $\frac{1}{\beta(\pi)} \pi D \in \mathscr{P}$ (c'est d'ailleurs $\beta(\pi) = \|\pi D\|_1$).

Comme il existe un unique $\mu \in \mathscr{P}$ tel que $\mu P = \mu$ (résultat de la question 6), on obtient alors que l'équation $\pi M = \lambda \pi$ équivaut à $\frac{\pi}{\beta(\pi)} D = \mu$. On trouve donc π nécessairement colinéaire à μD^{-1}.

Réciproquement, en posant $\pi = \alpha \mu D^{-1}$, on trouve un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\pi \in \mathscr{P}$ (puisque les composantes de μD^{-1} sont toutes positives). Ceci assure existence et unicité de π tel que recherché.

11 On voit que, pour tout $k \in [\![0; d-1]\!]$, on a $P^{(k)}(0) < 0$ et $P^{(k)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par ailleurs, on démontre par récurrence descendante sur $k \in [\![0; d-1]\!]$ que $P^{(k)}$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un certain a_k, avec $P^{(k)}$ strictement négatif sur $]0; a_k[$.

— **Initialisation ($k = d-1$)** : on a $P^{(d-1)} = d! \cdot X - c_{d-1}(d-1)!$ avec $c_{d-1} > 0$, donc le résultat apparaît.

— **Hérédité** : soit $k \in [\![1; d-1]\!]$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Alors $P^{(k-1)}$ est strictement décroissante sur $]0; a_k]$ et strictement croissante sur $[a_k; +\infty[$, avec $P^{(k-1)}(0) < 0$ et $P^{(k-1)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $P^{(k-1)}$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème de la bijection continue, sur $]a_k; +\infty[$. En notant a_{k-1} son point d'annulation, $P^{(k-1)}$ est de plus strictement négative sur $]0; a_{k-1}[$ et strictement positive sur $]a_{k-1}; +\infty[$.

12a On pose le système $\pi M = \lambda \pi$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\pi \in \mathbb{R}^d$. On obtient les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{d} \pi_j a_j = \lambda \pi_1 \text{ et } \forall k \in [\![1; d-1]\!], b_k \pi_k = \lambda \pi_{k+1} \quad (\star)$$

Il est possible de trouver $\pi \neq 0$ solution de ce système si et seulement si

$$\lambda^d - \sum_{j=1}^{d} \left[a_j \prod_{k=1}^{j-1} b_k \right] \lambda^{d-j} = 0$$

Or cette équation polynomiale est exactement de la forme étudiée en question 11, donc elle admet une unique solution $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Prenons un tel λ. D'après les équations, il reste à fixer π_d de telle sorte que

$$\pi_d \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k} = 1$$

ce qui est possible de manière unique, car le coefficient $\alpha = \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda^{d-j}}{\prod_{k=j}^{d-1} b_k}$ est strictement positif.
Finalement, on dispose bien d'un unique couple $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda \pi$ et on a alors

$$\pi = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda^{d-1}}{b_1 \times \cdots \times b_{d-1}}, \frac{\lambda^{d-2}}{b_2 \times \cdots \times b_{d-1}}, \ldots, \frac{\lambda}{b_{d-1}}, 1 \right).$$

12b On applique les résultats des questions 9 à 10-b à la matrice M^T, qui vérifie les bonnes conditions :
- M^T est à coefficients positifs
- on dispose du vecteur $\pi^T \in \mathscr{P}$, de la question précédente, tel que $M^T \pi^T = \lambda \pi^T$
- le vecteur π^T a toutes ses composantes strictement positives
- il s'agit de trouver $v \in \mathscr{P}$ et $c > 0$ tels que $\forall i, j \in [1; d], M^T_{i,j} \geqslant c v_j$, et, pour cela,

il suffit de prendre $v = \left(\frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d} \right)$ et $c = d \cdot \min(a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_{d-1})$,

qui est bien strictement positif.
Ainsi, on dispose d'un (unique) $\mu \in \mathscr{P}$ tel que $\mu M^T = \lambda \mu$. On pose alors $h = \mu^T$ et on a alors $Mh = \lambda h$.
Montrons que les composantes de h sont strictement positives. Supposons par l'absurde qu'on dispose de $k \in [1; d]$ tel que $h_k = 0$ et supposons k minimal. Si $k = 1$ alors la dernière ligne du produit $Mh = \lambda h$ donne $h_d = 0$. Puis, la précédente donne $h_{d-1} = 0$. Par conséquent, tout le vecteur h est nul, ce qui est absurde.
Supposons $k \geqslant 2$. Alors la k-ième ligne du produit matriciel donne $a_k h_1 + b_k h_{k+1} = 0$. Par positivité de tous les termes et stricte positivité de a_k et b_k, ceci implique $h_1 = 0$, ce qui est absurde.
Concernant la condition sur le produit scalaire, puisque $\pi \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ et $h \in (\mathbb{R}_+^*)^d$, on a $\langle \pi, h \rangle > 0$. Il suffit donc de modifier h d'un facteur α adéquat pour aboutir à $\langle \pi, h \rangle = 1$.
L'existence de h tel que recherché est désormais démontrée.

Concernant l'unicité, si h et h' conviennent, alors on dispose de $\beta, \beta' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que βh et $\beta' h'$ appartiennent à $\mathscr{P}$. Or le vecteur μ tel que $\mu M^T = \lambda\mu$ est unique, donc h et h' sont colinéaires. Dès lors, l'égalité entre h et h' résulte de ce que $\langle \pi, h\rangle = \langle \pi, h'\rangle = 1$.

12c L'inégalité de la question 10-a devient disponible, dans laquelle on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$. On obtient alors

$$\lambda^{-n} M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(h_i \frac{\mu_j}{h_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d}.$$

13a Soit $y \in \mathscr{M}_{1,d}(\mathbb{N})$ et $j \in [\![1; d]\!]$. Sous réserve d'existence, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1,j} 1_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{X_{n,i}} L_{i,j}^{n,k} 1_{X_n=y}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{y_i} \mathbb{E}(L_{i,j}^{n,k} 1_{X_n=y})\end{aligned}$$

Or, l'expression de X_n ne dépend que des variables $L_i^{p,k}$ avec $p \in [\![0; n-1]\!]$, donc, par lemme des coalitions :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1,j} 1_{X_n=y}) &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{y_i} \mathbb{E}(L_{i,j}^{n,k}) \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \sum_{i=1}^{d} y_i M_{i,j} \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= (yM)_j \mathbb{P}(X_n = y).\end{aligned}$$

Comme les variables en jeu sont positives, le calcul légitime l'existence de l'espérance.

13b Il suffit de sommer pour $y \in X_n(\Omega)$, sous réserve d'existence, en notant que

$$\sum_{y \in X_n(\Omega)} 1_{X_n=y} = 1.$$

Ainsi, pour $j \in [\![1; d]\!]$:

$$\begin{aligned}x_{n+1,j} &= \mathbb{E}(X_{n+1,j}) \\ &= \sum_{y\in X_n(\Omega)} \mathbb{E}(X_{n+1,j} 1_{X_n=y}) \\ &= \sum_{y\in X_n(\Omega)} (yM)_j \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \mathbb{E}((X_n M)_j) \quad \text{par théorème de transfert}\end{aligned}$$

$$= (x_n M)_j \quad \text{par linéarité de l'espérance.}$$

Le calcul est légitime pour les mêmes raisons que précédemment : tous les termes en jeu sont positifs.
Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1;d]\!]$, on a $x_{n+1} = x_n M$.

14 On note que, pour tous $i, j \in \mathcal{J}$, $Y_i Y_j$ admet une espérance, puisque

$$|Y_i Y_j| \leqslant \frac{Y_i^2 + Y_j^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i\in\mathcal{J}} Y_i\right)^2\right) = \sum_{i,j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i Y_j)$$

$$= \sum_{i\neq j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i^2) \quad \text{par indépendance}$$

$$= \sum_{i\neq j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{J}} [\mathrm{Var}(Y_i) + \mathbb{E}(Y_i)^2]$$

$$= \sum_{i,j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) + \sum_{i\in\mathcal{J}} \mathrm{Var}(Y_i)$$

$$= \left(\sum_{i\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(Y_i)\right)^2 + \sum_{i\in\mathcal{J}} \mathrm{Var}(Y_i).$$

15a Soit $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{N})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u\rangle^2 1_{X_n=y}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k} 1_{X_n=y}\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} u_j L_{i,j}^{n,k}\right)^2\right] \mathbb{P}(X_n = y)$$

par indépendance de l'événement $[X_n = y]$ vis-à-vis des variables aléatoires $L_{i,j}^{n,k}$.
Les variables $\sum_{j=1}^{d} u_j L_{i,j}^{n,k} 1_{X_n=y}$ sont indépendantes pour i et k variant. On peut donc utiliser l'identité montrée à la question 14 avec l'ensemble fini suivant :

$$\mathcal{J} = \left\{(i,k) \in \mathbb{N}^2 : i \in [\![1;d]\!] \text{ et } (\forall i \in [\![1;d]\!], k \in [\![1;y_i]\!])\right\}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u\rangle^2 1_{X_n=y}\right) = \mathbb{P}(X_n = y)\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{d} u_j L_{i,j}^{n,k}\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{y_i} \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{d} u\right.\right.$$

$$= \mathbb{P}(X_n = y) \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{y_i} \sum_{j=1}^{d} u_j M_{i,j} \right)^2 + \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{y_i} \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{d} u_j L_{i,j} \right) \right]$$

$$= \mathbb{P}(X_n = y) \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{d} y_i (Mu)_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{d} y_i T(u)_i \right]$$

$$= \mathbb{P}(X_n = y) \cdot \left[\langle y, Mu \rangle^2 + \langle y, T(u) \rangle \right]$$

15b Cette fois encore, on somme sur $y \in X_n(\Omega)$ l'égalité obtenue à la question précédente, en utilisant le théorème de transfert pour X_n :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u \rangle^2 \right) = \mathbb{E}\left(\langle X_n, Mu \rangle^2 \right) + \mathbb{E}\left(\langle X_n, T(u) \rangle \right).$$

Or, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, T(u) \rangle \right) = \langle \mathbb{E}(X_n), T(u) \rangle$$

puis, $x_n = x_0 M^n$ en itérant la relation obtenue à la question 13-b. Finalement :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, T(u) \rangle \right) = \langle x_0 M^n, T(u) \rangle$$

ce qui donne la relation attendue.

16 On démontre ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec une initialisation évidente. Supposons l'égalité établie au rang $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. On repart du résultat de la question précédente :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_{n+1}, u \rangle^2 \right) = \mathbb{E}\left(\langle X_n, Mu \rangle^2 \right) + \langle x_0 M^n, T(u) \rangle$$

$$= \mathbb{E}\left(\langle X_0, M^{n+1} u \rangle^2 \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k} Mu) \rangle + \langle x_0 M^n, T(u) \rangle$$

$$= \mathbb{E}\left(\langle X_0, M^{n+1} u \rangle^2 \right) + \sum_{k=0}^{n} \langle x_0 M^k, T(M^{n-k} u) \rangle$$

ce qui achève la récurrence.

17 Reprenons les résultats du début de la seconde partie, aux questions 9, 10-a et 10-b. Avec ces résultats, on trouve un vecteur $\mu \in \mathscr{P}$, des constantes $C > 0$ et $\gamma \in [0, 1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \left| \lambda^{-n} (M^n)_{i,j} - h_i \frac{\mu_j}{h_j} \right| \leqslant C \gamma^n.$$

On trouve ensuite un unique vecteur $\pi \in \mathscr{P}$ tel que $\pi M = \lambda \pi$. Ce vecteur π, dans la réponse apportée à la question 10-b, est colinéaire au vecteur $\left(\frac{\mu_1}{h_1}, \ldots, \frac{\mu_d}{h_d} \right)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\pi = \alpha \cdot \left(\frac{\mu_1}{h_1}, \ldots, \frac{\mu_d}{h_d} \right)$.

Alors on obtient le résultat voulu en prenant ce vecteur π et en posant $h_i' = \frac{h_i}{\alpha}$, qui est bien > 0 pour tout $i \in [1; d]$.

18 On note que $\mathbb{E}(\|X_n\|_1) = \sum_{k=1}^d x_{n,k} = x_n e$ où $e = (1,\dots,1)^\top$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(\|X_n\|_1) = x_0 M^n e.$$

Or, la majoration de la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left|(M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j\right| \leqslant C(\gamma\lambda)^n.$$

Ceci montre que $(M^n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tous $i,j \in [1;d]$.

Ainsi $\mathbb{E}(\|X_n\|_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour le second résultat, les X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}^d$. On a, par inégalité de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[X_k \neq 0]\right) \leqslant \mathbb{P}(X_n \neq 0) \leqslant \mathbb{P}(\|X_n\|_1 \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(\|X_n\|_1).$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[X_k \neq 0]\right) = 0$. Ainsi, l'événement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[X_k = 0]$ est presque sûr, ce qui donne le résultat.

19a Soit $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. On a $T(u)_i = \mathrm{Var}(\langle L_i, u\rangle)$ pour tout $i \in [1;d]$. Or, pour tout $i \in [1;d]$,

$$\mathrm{Var}(\langle L_i, u\rangle) \leqslant \mathbb{E}(\langle L_i, u\rangle^2) \leqslant \mathbb{E}(\|L_i\|_2^2)\|u\|_2^2.$$

En posant $c_0 = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(\|L_i\|_2^2)$, on obtient bien

$$\forall u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), \|T(u)\|_1 = \sum_{i=1}^d \mathrm{Var}(\langle L_i, u\rangle) \leqslant c_0\|u\|_2^2.$$

19b Il suffit de noter que, pour tout $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^d u_i^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} |u_i||u_j| = \left(\sum_{k=1}^d |u_k|\right)^2.$$

Ainsi, en reprenant $c_1 = c_0$, on obtient

$$\forall u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), \|T(u)\|_1 \leqslant c_1\|u\|_1^2.$$

20a Soit $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle \pi, u\rangle = 0$. En particulier, on a

$$\forall i \in [1;d], \sum_{j=1}^d \lambda^n h'_i \pi_j u_j = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|M^n u\|_1 &= \sum_{i=1}^d \left|\sum_{j=1}^d (M^n)_{i,j} u_j - \sum_{j=1}^d \lambda^n h'_i \pi_j u_j\right| \\ &= \sum_{i=1}^d \left|\sum_{j=1}^d \left((M^n)_{i,j} - \lambda^n h'_i \pi_j\right) u_j\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left|(M^n)_{i,j} - \lambda^n h_i' \pi_j\right| |u_j|$$

$$\leqslant \lambda^n \|u\|_1 \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left|\lambda^{-n}(M^n)_{i,j} - h_i'\pi_j\right|$$

$$\leqslant C(\lambda\gamma)^n \|u\|_1.$$

20b On va utiliser conjointement les résultats des questions 16, 19-b et 20-a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ avec $\langle \pi, u\rangle = 0$. On part de l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u\rangle^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle X_0, M^n u\rangle^2\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle.$$

Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\mathbb{E}\left(\langle X_0, M^n u\rangle^2\right) \leqslant \|M^n u\|_2^2 \cdot \mathbb{E}(\|X_0\|_2^2).$$

Par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^d$, et en utilisant 20-a, on dispose d'une première constante K_1 (indépendante de n et de u) telle que

$$\mathbb{E}\left(\langle X_0, M^n u\rangle^2\right) \leqslant K_1(\lambda\gamma)^{2n}\|u\|_1^2.$$

Il faut désormais s'occuper des termes de la somme. On fixe $k \in [0; n-1]$ et on décompose :

$$x_0 = \alpha\pi + u_0$$

decomposition sur la somme directe orthogonale $\mathbb{R}\cdot\pi \oplus (\mathbb{R}\cdot\pi)^{\perp}$.
Alors :

$$\left|\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle\right| \leqslant |\alpha\langle \pi M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle| + |\beta\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle|.$$

Pour le second terme, on peut effectuer la majoration suivante :

$$|\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle| \leqslant \|u_0 M^k\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k}u)\|_1 \quad \text{car composantes positiv}$$

$$\leqslant C(\lambda\gamma)^k\|u_0\|_1 \cdot c_1\|M^{n-1-k}u\|_1^2.$$

et on utilise alors 20-a pour obtenir une nouvelle constante K_2, indépendante de n, de u et de k, telle que

$$|\langle u_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle| \leqslant K_2 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-k}\gamma^{2n-k}.$$

On peut reprendre les mêmes idées pour majorer le terme $|\alpha\langle \pi, T(M^{n-1-k}u)\rangle|$:

$$|\alpha\langle \pi, T(M^{n-1-k}u)\rangle| \leqslant |\alpha| \cdot \|\pi\|_1 \cdot \|T(M^{n-1-k}u)\|_1$$

$$\leqslant |\alpha| \cdot c_1\|M^{n-1-k}u\|_1^2$$

$$\leqslant K_3 \cdot \|u\|_1^2 \cdot \lambda^{2n-2k}\gamma^{2n-2k}.$$

Comme $\gamma^{2n-2k} \geqslant \gamma^{2n-k}$, on obtient

$$|\langle x_0 M^k, T(M^{n-1-k}u)\rangle| \leqslant \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2 \gamma^k) \lambda^{2n-k} \gamma^{2n-2k}$$

$$\leqslant \|u\|_1^2 (K_3 + |\beta| K_2) \lambda^{2n-k} \gamma^{2n-2k}.$$

On pose alors $C_1 = K_1 + |\beta| K_2 + K_3$ et on obtient, pour tous $u \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ avec $\langle \pi, u\rangle = 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(\langle X_n, u\rangle^2\right) \leqslant C_1 \|u\|_1^2 \left(\lambda^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k} + (\lambda\gamma)^{2n}\right).$$

21a Il s'agit du produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \gamma^{2n}$, qui convergent toutes les deux (absolument). On trouve donc que la série de terme général $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} \gamma^{2n-2k}$ converge, donc celle proposée par l'énoncé également (puisque le terme général est à un facteur γ^2 près).

21b On calcule le produit scalaire :

$$\langle w - \|w\|_1 \pi, \pi\rangle = \sum_{i=1}^d w_i \pi_i - \sum_{i=1}^d w_i \sum_{j=1}^d \pi_j^2$$

$$= \sum_{i=1}^d w_i \left(\pi_i - \sum_{j=1}^d \pi_j^2\right)$$

$$= \langle w, \pi - \|\pi\|_2^2 e_0\rangle.$$

Concernant l'orthogonalité :

$$\langle \pi - \|\pi\|_2^2 e_0, \pi\rangle = \|\pi\|_2^2 - \|\pi\|_2^2 \langle \pi, e_0\rangle$$

avec $\langle \pi, e_0\rangle = 1$ car $\pi \in \mathcal{P}$.

21c Fixons $n \in \mathbb{N}$. On décompose X_n sur une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec u_1 positivement colinéaire à π. On dispose donc de $\alpha > 0$ (indépendant de n) tel que $u_1 = \alpha\pi$.

On a alors $\|W_n\|_2^2 = \lambda^{-2n} \left(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi\rangle^2 + \sum_{i=2}^d \langle X_n, u_i\rangle^2\right)$ si bien que :

$$\mathbb{E}\left(\|W_n\|_2^2\right) = \lambda^{-2n} \cdot \mathbb{E}\left(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi\rangle^2\right) + \lambda^{-2n} \cdot \sum_{i=2}^d \mathbb{E}\left(\langle X_n, u_i\rangle^2\right).$$

La majoration de la question 20-b (applicable, car $u_i \perp \pi$ pour tout $i \in [\![2; d]\!]$) et la convergence de la question 21-a montrent que la série de terme général $\lambda^{-2n}\mathbb{E}\left(\langle X_n, u_i\rangle^2\right)$ converge pour tout $i \in [\![2; d]\!]$.

Il reste à nous occuper du premier terme. Or d'après le résultat de la question 21-b,

$$\lambda^{-2n} \cdot \mathbb{E}\left(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi\rangle^2\right) = \alpha^2 \lambda^{-2n} \cdot \mathbb{E}\left(\langle X_n, \pi - \langle \pi, \pi\rangle e_0\rangle^2\right).$$

Comme le vecteur $\pi - \langle \pi, \pi \rangle e_0$ est orthogonal à π, la majoration de la question 20-b s'applique à nouveau, ce qui entraîne la convergence de la série de terme général $\lambda^{-2n} \cdot \mathbb{E}\left(\langle X_n - \|X_n\|_1 \pi, \alpha\pi \rangle^2\right)$.
Par combinaison linéaire, la série de terme général $\mathbb{E}\left(\|W_n\|_2^2\right)$ converge. Il en découle directement que $\mathbb{E}\left(\|W_n\|_2^2\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

21d On utilise l'inégalité de Markov, pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\|W_n\|_2 \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\|W_n\|_2^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\|W_n\|_2^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

et on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$ en utilisant la conclusion de la question précédente.

22 On s'intéresse à l'événement $A_\varepsilon = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant m} \{\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\}$, pour $\varepsilon > 0$. On note que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\|W_k\|_2^2\right)}{\varepsilon^2},$$

ce qui montre que la série de terme général $\mathbb{P}\left(\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\right)$ converge, d'après le résultat de la question 21-c.
Ainsi, comme

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant m} \{\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\right),$$

on a donc que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant m} \{\|W_k\|_2 \geqslant \varepsilon\}\right) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$.
Pour conclure, on séquentialise le problème en appliquant le résultat ci-dessus à $\varepsilon = 2^{-N}$ pour $N \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} W_n = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{N>0} A_{2^{-N}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}\right).$$

Or l'événement $\bigcap_{N>0} \overline{A_{2^{-N}}}$ est une intersection d'événements presque sûrs, donc

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} W_n = 0\right) = 1.$$