CPGE **Moulay Youssef**

Préparation 2025

Probabiltés et algèbre linéaire

Mars 2025 *Corrigé proposé par* Édouard Lucas

Classes MP*

Table des matières

ÉNONCÉ

La loi du demi-cercle

Notations

- Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leqslant q$ on note $[\![p\,;q]\!]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.
- Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille n et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales de taille n.
- Pour toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\lambda_1(M) \geqslant \lambda_2(M) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(M)$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant.
- On note $M^\top$ la transposée d'une matrice M.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on note E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne qui vaut 1 .
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|M\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(MM^\top)}$ sa norme euclidienne canonique.
- Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.
- Étant donnée une variable aléatoire discrète X à valeurs réelles admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance. Si X admet une variance, on note $\mathbf{V}(X)$ sa variance.

Problématique

En essayant d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie des noyaux des atomes lourds, Eugène Wigner a été amené, dans les années 1950, à étudier le spectre de matrices symétriques réelles aléatoires de grande taille. La figure 1 montre un histogramme qui représente la répartition des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle de taille $n = 2500$ constituée de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance égale à 1.

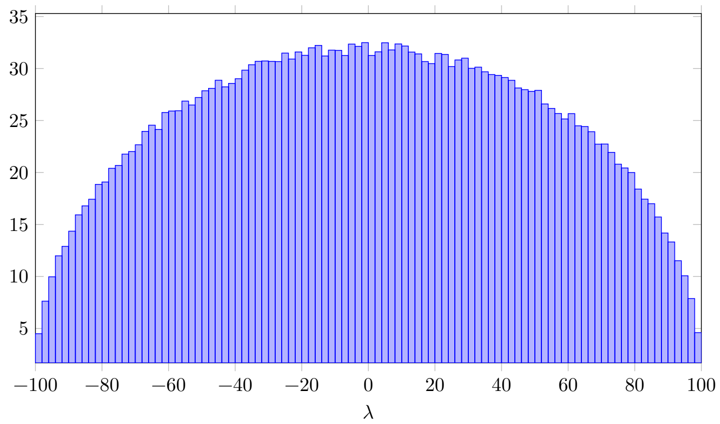

Figure 1

On voit que les valeurs propres se répartissent suivant un profil en demi-cercle de rayon $2\sqrt{n}$. En normalisant par un facteur $1/\sqrt{n}$ on obtient le profil d'un demi-cercle de rayon 2.

Plus précisément, on considère $\left(X_{ij}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires discrètes réelles telles que

- pour tout $(i,j) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^2$, $X_{ij} = X_{ji}$;
- les variables aléatoires X_{ij} sont de même loi, d'espérance nulle et de variance 1 ;
- pour $n \geqslant 1$, les variables aléatoires X_{ij}, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_n(\omega)$ la matrice $\left(X_{ij}(\omega)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\Lambda_{1,n}(\omega) \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n(\omega)$.

On définit ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$, des variables aléatoires réelles discrètes $\Lambda_{i,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On se propose de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME (LOI DU DEMI-CERCLE)

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) \xrightarrow[]{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Dans la partie I, on établit une inégalité portant sur les valeurs propres d'un couple de matrices symétriques. La partie II est consacrée à la résolution d'un problème de dénombrement qui est utilisée dans la partie III où la loi du demi-cercle est démontrée pour des variables aléatoires uniforménent bornées. Dans la partie IV, on établit la loi du demi-cercle dans le cas général en utilisant les résultats des parties I et III.

I : Inégalité de Hoffman-Wielandt

I.A – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous P et Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|PMQ\|_F = \|M\|_F$.
2. On note
$$D_A = \mathrm{diag}(\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A)) \quad \text{et} \quad D_B = \mathrm{diag}(\lambda_1(B),\dots,\lambda_n(B))$$
Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\|A-B\|_F^2 = \|D_AP - PD_B\|_F^2$
3. Montrer que
$$\|A-B\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2\big(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\big)^2$$

I.B – On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

On note
$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\big(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\big)^2 \end{array}$$

4. Justifier que f admet un minimum sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
On se propose de montrer que ce minimum est atteint en la matrice identité.
5. Soit $(i,j,k) \in [\![1\,;n]\!]^3$ tel que $j \geqslant i$ et $k \geqslant i$. Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f\big(M+xE_{ii}+xE_{jk}-xE_{ik}-xE_{ji}\big) - f(M) = 2x\big(\lambda_i(A)-\lambda_j(A)\big)\big(\lambda_k(B)-\lambda_i(B)\big) \leqslant 0$$
6. Soient $n \geqslant 2$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\in n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice différente de l'identité. On note i le plus petit entier appartenant à $[\![1\,;n]\!]$ tel que $m_{i,i} \neq 1$. Montrer qu'il existe une matrice $M' = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M') \leqslant f(M)$ et $m'_{j,j} = 1$ pour tout $j \in [\![1\,;i]\!]$.
7. En déduire que $\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n)$

I.C – En déduire que

8. En déduire que
$$\forall (A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2, \quad \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A)-\lambda_i(B))^2 \leqslant \|A-B\|_F^2$$

II : Dénombrement des mots bien parenthésés

Dans cette partie, on s'intéresse à des chaînes de caractères constituées uniquement des deux caractères parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est bien *parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

( ) (( ))

est bien parenthésé.bigques En revanche, le mot

( )) ( )

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères, chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose par commodité $C_0 = 1$.

II.A –

9. En énumérant les différents mots bien parenthésés de longueur 2, 4 et 6, montrer que $C_1 = 1, C_2 = 2$ et déterminer C_3.

10. Montrer que, pour tout entier naturel $n, C_n \leqslant 2^{2n}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$?

11. Montrer par un raisonnement combinatoire que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i-1}$$

On peut remarquer qu'un mot bien parenthésé est forcément de la forme $(m)m'$ avec m et m' deux mots bien parenthésés, éventuellement vides.

II.B – Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$.

12. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + x(F(x))^2$.

13. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2xF(x) - 1 \end{array} \right.$ ne s'annule pas.

14. Déterminer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, une expression de $F(x)$ en fonction de x.

15. Déterminer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$. On écrira les coefficients sous la forme d'un quotient de factorielles et de puissances de 2.

16. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

III : Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

On suppose, uniquement dans cette partie, que les variables aléatoires X_{ij} sont uniformément bornées :

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \left|X_{ij}\right| \leqslant K.$$

III.A – Pour tout entier naturel k on pose

$$m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

17. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut m_{2k+1} ?

18. En utilisant le changement de variable $x = 2\sin t$, calculer m_0.

19. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel k,

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}$$

20. En déduire que

$$m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

III.B – Soit k un entier naturel. On se propose de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = m_k,$$

où $\Lambda_{i,n}^k = \left(\Lambda_{i,n}\right)^k$ est la puissance k-ième de $\Lambda_{i,n}$.

21. Justifier que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbf{E}\left(\mathrm{tr}\left(M_n^k\right)\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1\,;\,n]\!]^k} \mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)$$

On appelle *cycle* de longueur k à valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]$, tout $(k+1)$-uplet $\vec{\imath} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ d'éléments de $[\![1\,;\,n]\!]$. Les éléments $i_1, \ldots, i_k$ sont appelés *sommets* du cycle $\vec{\imath}$. On dit aussi que le cycle *passe* par ces sommets. On note $|\vec{\imath}|$ le nombre de sommets distincts du cycle $\vec{\imath}$.

On appelle *arêtes* du cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ les couples non ordonnés (l'ordre des deux éléments de chaque couple n'est pas significatif) $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_k, i_1)$.

Par exemple $\vec{\imath} = (1, 3, 5, 3, 2, 2, 1)$ est un cycle de longueur 6 dans $[\![1\,;\,5]\!]$. Les sommets de ce cycle sont les éléments 1, 2, 3 et 5, donc $|\vec{\imath}| = 4$. Les arêtes distinctes de ce cycle sont $(1,3), (3,5), (3,2), (2,2)$ et $(2,1)$. Les arêtes $(3,5)$ et $(5,3)$ sont les mêmes.

22. Montrer que le nombre de cycles de longueur k dans $[\![1\,;\,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts est inférieur ou égal à $n^\ell \ell^k$.

23. En déduire que

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On classe les cycles de longueur k en trois sous-ensembles :

- l'ensemble $\mathcal{A}_k$, constitué des cycles où au moins une arête n'apparaît qu'une fois ;
- l'ensemble $\mathcal{B}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois ;
- l'ensemble $\mathcal{C}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent au moins deux fois et il en existe au moins une qui apparaît au moins trois fois.

24. Montrer que, si le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$, alors

$$\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_ii_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) = 0$$

25. Montrer que, pour tout cycle $\vec{\imath}$ appartenant à $\mathcal{C}_k$, $|\vec{\imath}| \leqslant \frac{k+1}{2}$.

26. Que peut-on dire de $\mathcal{B}_k$ si k est impair ? En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) = 0$ dans ce cas.

On suppose dans la suite que k est pair et que $\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k$ est un cycle passant par $\frac{k}{2}+1$ sommets distincts. Autrement dit $|\vec{\imath}| = \frac{k}{2}+1$.

On parcourt les arêtes de $\vec{\imath}$ dans l'ordre. À chaque arête de $\vec{\imath}$ on associe une parenthèse ouvrante si cette arête apparaît pour la première fois et une parenthèse fermante si elle apparaît pour la deuxième fois. Par exemple, au cycle $(1, 3, 2, 3, 1)$ correspond (( )), au cycle $(1, 2, 1, 3, 1)$ correspond ( ) ( ).

27. Justifier que l'on obtient ainsi un mot bien parenthésé de longueur k.

28. Dénombrer les cycles $\vec{\imath}$ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé.

29. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) = C_{k/2}$$

III.C –

30. En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

III.D – Soit $A > 2$.

31. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} \left|\Lambda_{i,n}\right|^p\right) \leqslant \frac{1}{A^{p+2q}}\,\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\Lambda_{i,n}\right|^{2(p+q)}\right)$$

32. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} \left|\Lambda_{i,n}\right|^p\right) = 0$$

33. Soient f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré p. Justifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\,]-A, A[\,,\ |f(x) - P(x)| \leqslant K|x|^p$$

34. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = 0$$

III.E –

35. Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

IV : Loi du demi-cercle, cas général

On revient au cas général. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et pour tout $C > 0$, on pose

$$\sigma_{ij}(C) = \sqrt{\mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)}$$

Si $\sigma_{ij}(C) \neq 0$, on pose

$$\widehat{X}_{ij}(C) = \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)\right)$$

IV.A –

36. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) \xrightarrow{C\to+\infty} \mathbf{E}(X)$$

37. En déduire que

$$\lim_{C\to+\infty} \sigma_{ij}(C) = 1$$

38. Justifier que, pour C assez grand, les variables $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont bien définies et qu'elles sont alors bornées, centrées, de variance 1 et qu'elles sont mutuellement indépendantes pour $1 \leqslant i \leqslant j$.

39. Montrer que

$$X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)$$

40. Montrer que

$$\lim_{C\to+\infty} \mathbf{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = 0$$

IV.B – Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, on note

$$\widehat{M}_n(C) = \left(\widehat{X}_{ij}(C)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\widehat{\Lambda}_{1,n}(\omega) \geqslant \ldots \geqslant \widehat{\Lambda}_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M}_n(C)(\omega)$ rangées dans l'ordre décroissant.
On obtient ainsi des variables aléatoires réelles discrètes $\widehat{\Lambda}_{1,n}, \ldots, \widehat{\Lambda}_{n,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne.

41. Montrer que

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right)$$

42. On suppose de plus f bornée. Montrer

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

IV.C –

43. Montrer la loi du demi-cercle dans le cas général.

CORRIGÉ

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit P et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Par propriétés de la trace et des matrices orthogonales, on a :

$$\|PMQ\|_F^2 = \operatorname{tr}\left(PMQ(PMQ)^\top\right) = \operatorname{tr}\left(MQQ^\top M^\top P^\top P\right) = \operatorname{tr}\left(MI_nM^\top I_n\right) = \|M\|_F^2$$

On a ainsi

$$\boxed{\|PMQ\|_F = \|M\|_F}$$

Comme A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le théorème spectral nous fournit U et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que : $A = UD_AU^\top$ et $B = VD_BV^\top$.
On a alors avec la question 1 et comme $U^\top = U^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

2. $\|A-B\|_F^2 = \left\|U^\top\left(UD_AU^\top - VD_BV^\top\right)V\right\|_F^2 = \left\|D_AU^\top V - U^\top VD_BV^\top\right\|$
or $U^\top V = U^{-1}V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe
ainsi

$$\boxed{\text{il existe une matrice orthogonale } P = \left(p_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ telle que } \|A-B\|_F^2 = \|D_AP - PD_B\|_F^2}$$

Pour toute matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|M\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ (vu en cours).
De plus, selon la question précédente, on a :

3. $D_AP - PD_B = \left(\lambda_i(A)p_{i,j} - p_{i,j}\lambda_j(B)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(p_{i,j}\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

ainsi $$\boxed{\|A-B\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)^2}$$

4. Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
On a $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$
Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ 0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$. Par conséquent $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}^2} \leqslant \sqrt{n^2} = n$

Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notion indépendante de la norme car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).
Pour k et $i \in [\![1\,;n]\!]$, les applications $\varphi_i : M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{i,j}$, $\varphi_i' : M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{j,i}$ et $\psi_{i,k} : M \mapsto m_{i,k}$ sont continues car ce sont des formes linéaire en dimension finie au départ or

$$\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) = \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_i^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} (\varphi_i')^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i,k\leqslant n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbb{R}^+)\right)$$

De plus $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé de l'ensemble d'arrivée. De plus une intersection de fermés est un fermé
d'où $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie alors $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un compact.
L'application f est une forme linéaire en dimension finie au départ elle est donc continue.
Ainsi selon le théorème des bornes atteintes,

$$\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathcal{B}_n(\mathbb{R})}$$

5. On a par linéarité

$$f\left(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}\right) - f(M) = x\left(f(E_{ii}) + f(E_{jk}) - f(E_{ik}) - f(E_{ji})\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
f(E_{ii}) - f(E_{ik}) + f(E_{jk}) - f(E_{ji}) = {} & \\
& (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 - (\lambda_i(A) - \lambda_k(B))^2 + \\
& \left(\lambda_j(A) - \lambda_k(B)\right)^2 - \left(\lambda_j(A) - \lambda_i(B)\right)^2 = \\
& (2\lambda_i(A) - \lambda_i(B) - \lambda_k(B))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) + \\
& \left(2\lambda_j(A) - \lambda_k(B) - \lambda_i(B)\right)(\lambda_i(B) - \lambda_k(B)) = \\
& (\lambda_k(B) - \lambda_i(B))\left(2\lambda_i(A) - \lambda_i(B) - \lambda_k(B) - 2\lambda_j(A) + \lambda_k(B) + \lambda_i(B)\right)
\end{aligned}$$

donc $$\boxed{\begin{aligned}\left(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}\right) - f(M) = {} \\ 2x\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(A)\right)(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) \leqslant 0\end{aligned}}$$

car $\lambda_i(A) - \lambda_j(A) \geqslant 0$ et $\lambda_k(B) - \lambda_i(B) \leqslant 0$ car $j \geqslant i$ et $k \geqslant i$

6. Par l'absurde si on avait $m_{k,k} = 1$, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ alors on aurait $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j \in [\![1\,;\,n]\!]$, grace à la positivité et les sommes 1 selon les lignes (ou selon colonnes). D'où $M = I_n$ ce qui est absurde.
Ainsi $\left\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \,\middle|\, m_{k,k} \neq 1\right\} \neq \emptyset$. Ceci justifie l'existence de i minimum de la partie non vide de $\mathbb{N}$: $\left\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \,\middle|\, m_{k,ik} \neq 1\right\}$

On a alors $\quad \forall j \in [\![1\,;\,i-1]\!],\ m_{j,j} = 1$(il se peut que $i-1=0$)

$$\text{Comme} \qquad \forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} = 1$$
$$\forall k, j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad m_{j,k} \geqslant 0$$

$$\text{alors} \qquad \forall j \in [\![1\,;\,i-1]\!] \quad \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \setminus \{j\} \quad m_{k,j} = m_{j,k} = 0$$

Par l'absurde si on avait $i = n$, alors on aurait

$$m_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n} = 1 \qquad m_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} m_{n,k} = 1$$

On aurait alors $M = I_n$ ce qui n'est pas. Ainsi $i < n$ et $\sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{j=i}^{n} m_{j,i} = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=i}^{n} m_{i,k} = 1$
Comme $m_{i,i} \neq 1$ ceci nous fournit $j \in [\![i\,;\,n]\!]$ et $k \in [\![i\,;\,n]\!]$ tels que $m_{i,k} > 0$ et $m_{j,i} > 0$.
Je pose $x = \min(m_{i,k}, m_{j,i})$ de sorte que la matrice $M_1 = M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}$ a ses coefficients positifs
Cette matrice vérifie les conditions de sommes égales à 1 sur les lignes et les colonnes donc $M_1 = \left(m_{i,j}^{(1)}\right) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
De plus selon Q5, on a $f(M_1) \leqslant f(M)$ et on remarque qu'un des coefficients (d'indice (i,k) ou (j,i)) de M_1 est nul.
En réitérant le procédé, on obtient ainsi une suite de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) \geqslant f(M_1) \geqslant \cdots f(M_p)$
Comme le nombre de coefficients non nuls sur les rangées i décroit strictement, l'algorithme fini par s'arrêter sur une matrice $M' \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position $(1,1)$ vaut 1.

$$\boxed{\text{Il existe bien une matrice } M' = \left(m'_{\ell,k}\right)_{1\leqslant \ell,k\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } f(M') \leqslant f(M) \text{ et } m'_{j,j} = 1 \text{ pour tout } j \in [\![1\,;\,i]\!]}$$

7. Soit $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$. On note $M = M^{(0)}$.
On construit par récurrence $M^{(k+1)} = \left(M^{(k)}\right)'$ si $M^{(k)} = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq I_n$ comme ci-dessus.
On remarque que là encore l'algorithme termine car le nombre de coefficients diagonaux distincts de 1 est strictement décroissant car dans Q6, seul le coefficient diagonal en position (i,i) change.
Autrement dit la suite $\left(\left|\left\{j \in [\![1\,;\,n]\!] \,\middle|\, m_{j,j}^{(k)} \neq 1\right\}\right|\right)_{k\geqslant 0}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, elle s'annule donc. Ainsi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^{(p)} = I_n$.
De plus la suite finie $\left(f\left(M^{(k)}\right)\right)_{k\in[\![0\,;\,p]\!]}$ est décroissante toujours selon Q6 ainsi $f(I_n) = f\left(M^{(p)}\right) \leqslant f\left(M^{(0)}\right) = f(M)$ de plus on a clairement $I_n \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$
On en déduit que

$$\boxed{\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(R)\} = f(I_n)}$$

8. Je note la matrice $Q = \left(p_{i,j}^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $Q \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
De plus, on a $\|A-B\|_F^2 = f(Q)$ selon Q3 or $f(Q) \geqslant f(I_n) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2$ selon Q7
On en déduit que

$$\boxed{\forall (A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2, \quad \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leqslant \|A-B\|_F^2}$$

9. Pour la longueur 2 il y a uniquement : "()" et donc on a bien

$$\boxed{C_1 = 1}$$

Pour la longueur 4, les mots bien parenthésés sont : "(())" et "()()" et donc on a bien

$$\boxed{C_2 = 2}$$

Pour la longueur 6, les mots bien parenthésés sont : "()(())" et "()()()" et "(())()" et "(()())" donc

$$\boxed{C_3 = 4}$$

10. Un mot de longueur $2n$ constitué de parenthèses est une suite finie avec deux choix possibles par termes. Il y en a donc 2^{2n} qui est donc un majorant du cardinal de l'ensemble des mots bien parenthésés. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n \leqslant 2^{2n}}$$

Comme la série entière $\sum 2^{2k}x^k$ a un rayon de convergence de $1/4$ (série géométrique),
on en déduit :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum C_k x^k \text{ est } \geqslant 1/4}$$

Un mot bien parenthésé de longueur $2k$ est de la forme $(m)m'$ où m et m' sont deux mots bien parenthésés de longueurs respectives $2i$ et $2k-2i-2 = 2(k-i-1)$ avec $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Ainsi si i est choisi dans $[\![0\,;\,k-1]\!]$, on a C_iC_{k-i-1} choix possibles (le cas de longueur 0 ne donnant qu'une seule possibilité).

11. $\boxed{\text{Le nombre de mots bien parenthésés de longueur } 2k \text{ est donc } C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_iC_{k-i-1}}$

12. Le produit de Cauchy de la série entière par elle même aura même rayon de convergence qui est $\geqslant 1/4$.
Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On a alors

$$F(x)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} C_iC_{k-i}\right)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k+1-1} C_iC_{k+1-1-i}\right)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1}x^k$$

d'où en effectuant le changement d'indice en passant par les sommes partielles, on a :

$$1 + x(F(x))^2 = C_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1}x^{k+1} = C_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} C_ix^i$$

On a bien

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, F(x) = 1 + x(F(x))^2}$$

Par l'absurde on suppose l'existence de $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ tel que $f(x) = 0$.
Alors $2xF(x)-1 = 0$ puis d'après la question précédente : $F(x) = 1+F(x)/2$ donc $F(x) = 2$
Ainsi $4x - 1 = 0$ donc $x = 1/4$. Absurde !
Ainsi

13. $\boxed{\text{la fonction } f : \begin{cases} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2xF(x)-1 \end{cases} \text{ ne s'annule pas}}$

14. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

- $x = 0$ d'après 12, on a $F(0) = F(x) = 1$.
- $x \neq 0$ alors selon 12, $F(x)$ est solution de l'équation : $xX^2 - X + 1 = 0$ d'inconnue X. Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4x = 1 - 4x > 0$. Ainsi les deux solutions sont

$$X_1 = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Par ailleurs f est continue sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ car F l'est sur son intervalle ouvert de convergence.
De plus f ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,
alors f y garde un signe constant selon le théorème des valeurs intermédiaires.
Et comme $f(0) = -1 < 0$, on déduit que $2xF(x) < 1$. Or $2xX_1 \geqslant 1$ donc $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

En conclusion

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

15. D'après le cours, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est somme de série entière $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k$ de rayon de convergence 1. Soit $u \in]-1,1[$. On a $-u \in]-1,1[$ et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1-u} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1/2-i)}{k!}(-u)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(\prod_{i=0}^{k-1}(2i-1)\right)\left(\prod_{i=1}^{k-1}(2i)\right)}{2^k\left(\prod_{i=1}^{k-1}(2i)\right)k!}(-u)^k \\ &= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)((2k-2)!)}{2^k\cdot 2^{k-1}((k-1)!)k!}u^k\end{aligned}$$

On a ainsi le développement en série entière

$$\boxed{\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot(k-1)!\cdot k!}u^k \text{ de rayon de convergence } 1}$$

16. Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On pose $u = 4x$ de sorte que $|u| < 1$. D'après la question précédente, on a

$$1-\sqrt{1-4x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\cdot((2k-2)!)}{4^k\cdot(k-1)!\cdot k!}u^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\cdot((2k-2)!)}{(k-1)!\cdot k!}x^k$$

Si $x \neq 0$, alors on a $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{((2k-2)!)}{(k-1)!\cdot k!}x^{k-1}$

Comme la somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1/4, 1/4[$ selon 10. L'égalité précédente est valable pour $x = 0$ puis en effectuant un changement d'indices sur les sommes partielles, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \; F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on peut conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}}$$

17. La fonction $x \mapsto x^{2k+1}\sqrt{4-x^2}$ est impaire et $[-2,2]$ est symétrique par rapport à 0.
On en déduit que

$$\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } m_{2k+1} = 0}$$

On effectue le changement de variable de classe C^1 : $x = 2\sin t$; $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t$.
Pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos(t) \geqslant 0$ donc $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$. Ainsi

18.
$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2(t)}\cdot 2\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$ est nulle sur une période.

Ainsi $\boxed{m_0 = 1}$

19. On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe C^1 :

$$\begin{aligned}
m_{2k+2} &= \frac{1}{-2(2\pi)}\int_{-2}^{2} x^{2k+1}\left(-2x(4-x^2)^{1/2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{4\pi}\left(\left[\frac{x^{2k+1}(4-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}(2k+1)x^{2k}\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3/2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2k+1}{6\pi}\int_{-2}^{2}(4x^{2k}-x^{2k+2})(4-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d'où $$3m_{2k+2} = 4(2k+1)m_{2k} - (2k+1)m_{2k+2}$$

puis $(2k+4)m_{2k+2} = 4(2k+1)m_{2k}$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2}m_{2k}}$$

20. Si k est impair cela a été vu en Q17.

On va montré par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $m_{2p} = C_p$.

Q16 nous donne l'initialisation $m_0 = 1 = C_0$.

Pour l'hérédité, on considère $p \in \mathbb{N}$ tel que $m_{2p} = C_p$. On a alors selon Q19 et Q16 :

$$\begin{aligned}
m_{2p+2} &= \frac{2(2p+1)}{p+2}m_{2p} \\
&= \frac{2(2p+1)}{p+2}C_p \\
&= \frac{2(2p+1)}{p+2}\,\frac{(2p)!}{(p+1)!\cdot p!} = \frac{2(p+1)(2p+1)!}{(p+2)!\cdot(p+1)\cdot p!} \\
&= \frac{(2p+2)!}{(p+2)!\cdot(p+1)!} = C_{p+1}
\end{aligned}$$

On a bien $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}}$$

21. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On montre par récurrence que sur l'entier $k \geqslant 2$ que le coefficient de A^k en position $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ est :

$$\left[A^k\right]_{i_1 j} = \sum_{(i_2,\ldots,i_k)\in[\![1\,;\,n]\!]^{k-1}} a_{ii_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{k-1}i_k}a_{i_kj}$$

donc $$\mathrm{tr}\left(A^k\right) = \sum_{i_1=1}^{n}\left[A^k\right]_{i_1i_1} = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in[\![1\,;\,n]\!]^k} a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{k-1}i_k}a_{i_ki_1}$$

Ainsi $$\mathrm{tr}\left(M_n^k\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[\![1\,;\,n]\!]^k} X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}$$

De plus les variables aléatoires $X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}$ sont bornées ainsi par linéarité on a existence des membres et l'égalité :

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{tr}\left(M_n^k\right)\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[\![1\,;\,n]\!]^k}\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)$$

La matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est symétrique réelle et je note ses valeurs propres $\mu_1\ldots,\mu_n$ comptées avec multiplicité.

Les valeurs propres de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}A\right)^k = \frac{1}{n^{k/2}}A^k$ (encore symétrique réelle) sont : $\mu_1^k\ldots,\mu_n^k$.

Ainsi $\mathrm{tr}\left(\frac{1}{n^{1+k/2}}A^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i^k$ donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k = \frac{1}{n^{1+k/2}}\mathrm{tr}\left(M_n^k\right)$

Ainsi $\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) &= \frac{1}{n^{1+k/2}}\mathbf{E}\left(\mathrm{tr}\left(M_n^k\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^{1+k/2}}\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[\![1\,;\,n]\!]^k}\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)
\end{aligned}$$

À chaque cycle $\vec{\imath} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ de longueur k dans $[\![1\,;\,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts,

on peut associer la liste $J(i) = (j_1,\cdots,j_\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^\ell$ de ces ℓ sommets telle que $(j_i)_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ est croissante et l'application $\pi(i) : \alpha \in [\![1\,;\,k]\!] \mapsto \pi(i)(\alpha) \in [\![1\,;\,\ell]\!]$ telle que $\forall\alpha \in [\![1\,;\,k]\!], i_\alpha = j_{\pi(i)(\alpha)}$

L'application $i \longmapsto (J(i),\pi(i))$ est bien définie sur l'ensemble cycles de longueur k dans $[\![1\,;\,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts à valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]^\ell \times [\![1\,;\,\ell]\!]^{[\![1\,;\,k]\!]}$. Elle est clairement injective et comme le cardinal de $[\![1\,;\,n]\!]^\ell \times [\![1\,;\,\ell]\!]^{[\![1\,;\,k]\!]}$ vaut $n^\ell\ell^k$.

Ainsi

22. $\boxed{\text{le nombre de cycles de longueur } k \text{ dans } [\![1\,;\,n]\!] \text{ passant par } \ell \text{ sommets distincts est inférieur ou égal à } n^\ell \ell^k}$

23. Toutes les variables aléatoires sont bornées et admettent des moments à tout ordre.
Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ell \leqslant (k+1)/2$. Soit $\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k$ tel que $|\vec{\imath}| = \ell$.
On a $\left|X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right| \leqslant K^k$ donc $\left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant K^k$
Selon Q22, on en déduit que

$$\sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| = \ell}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant K^k n^\ell \ell^k$$

ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| = \ell}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant K^k n^{\ell - 1 - k/2} \ell^k$

or $K^k n^{\ell-1-k/2} \ell^k \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ car $\ell - 1 - k/2 \leqslant -1/2 < 0$

donc $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| = \ell}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ selon les gendarmes

puis comme $\left\{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \mid |\vec{\imath}| \leqslant (k+1)/2\right\} = \bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant (k+1)/2} \left\{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \mid |\vec{\imath}| = \ell\right\}$ (union disjointe finie)

Ainsi $$\boxed{\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| \leqslant (k+1)/2}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0}$$

(par somme finie)

24. On suppose que le cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$.
On peut alors trouver $p \in [\![1\,;\,k]\!]$ (avec la convention $i_{k+1} = i_1$) tel que l'arête (i_p, i_{p+1}) n'apparaît qu'une seul fois.
Je note alors Y le produit des $X_{i_1 i_2}, X_{i_i i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}$ dans lequel n'apparaît pas $X_{i_p i_{p+1}}$
de sorte que $X_{i_1 i_2} X_{i_i i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1} = X_{i_p i_{p+1}} Y$

Selon le lemme des koalas, les variables aléatoires Y et $X_{i_p i_{p+1}}$ sont indépendantes

Ainsi $$\boxed{\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_i i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right) = 0 \times \mathbf{E}(Y) = 0}$$

25. Pour $k = 1$ ou $k = 2$, on a $\vec{\imath} \in C_k = \emptyset$ et donc la propriété est triviale.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 3$, on considère $\vec{\imath} \in C_k$.
A priori pour tout cycles de longueur $k+1$, il y a au plus k arêtes.
Mais en les regroupant par paquets (de cardinal d'au moins deux et l'un au moins de cardinal trois), il y a au plus $(k-1)/2$ arêtes distincts.
Toutefois par construction, il faut pouvoir relier les arêtes entres elles pour pouvoir passer par tous les sommets. Une succession de p arêtes passe ainsi par au plus $p+1$ sommets distincts.
Ainsi le nombre de sommets distincts de $\vec{\imath}$ est majoré par $(k-1)/2 + 1 = (k+1)/2$.
On a montré : que

$$\boxed{|\vec{\imath}| \leqslant \frac{k+1}{2}}$$

pour tout $\vec{\imath} \in C_k$

26. Si toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois dans un cycle, chaque sommet apparaît autant de fois que le nombre d'arêtes où il est présent fois deux. Ainsi le nombre de sommets d'un cycle de de $\mathcal{B}_k$ est pair.
Ainsi

$$\boxed{\mathcal{B}_k = \emptyset \text{ si } k \text{ est impair}}$$

Or ici $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Puis $$0 \leqslant \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath} \in C_k} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant$$
$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1\,;\,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| \leqslant (k+1)/2}} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}\right)\right|$$

donc $\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ selon les gendarmes et Q23

et $\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{A}_k} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ selon Q24

On remarque que l'ensemble des cycles de longueurs k est l'union disjointe : $\mathcal{A}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{C}_k$.

Ainsi par somme et selon Q21 :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^{k}\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in[\![1\,;n]\!]^k} \left|\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

27. Lorsque l'on parcourt les arêtes d'un cycles, une parenthèse ouvrante n'est refermées qu'après et exactement une seule fois car le nombre d'occurrences de chaque arête est exactement deux. Ainsi

$$\boxed{\text{on obtient bien un mot bien parenthésé de longueur } k}$$

28. On a un mot de longueur k constitués de $k/2$ parenthèses ouvrantes et autant de fermantes.

Il suffit de choisir les arêtes correspondants aux parenthèses ouvrantes car chaque parenthèse fermante se verra automatiquement associée une arête.

De plus la remarque impose le choix de $\frac{k}{2}+1$ sommets distincts.

Pour le premier sommet, il y a $n = (n-1)+1$ choix possibles, le second $(n-1) = (n-2)+1$ choix possibles et pour le sommets de rang $\frac{k}{2}+1$, il y a $(n-\frac{k}{2}-1)+1 = (n-\frac{k}{2})$ possibilités

$$\boxed{\text{Le nombre de cycles } \vec{\imath} \text{ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé est } \prod_{i=0}^{k/2}(n-i)}$$

29. On remarque que

$$\sum_{\vec{\imath}\in[\![1\,;n]\!]^k} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) = \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{A}_k} 0 + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)$$

Selon Q23 et Q25, on a $\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème des gendarmes. Enfin

$$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) = \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)$$

et toujours selon Q23, on a

$$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour $i,j \in [\![1\,;n]\!]$, on a $\mathbf{E}\left(X_{i,j}^2\right) = \mathbf{V}\left(X_{i,j}\right) + \mathbf{E}\left(X_{i,j}\right)^2 = 1+0 = 1$

De plus pour $\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k$ tel que $|\vec{\imath}| \leqslant (k+1)/2$, on peut regrouper les variables aléatoires deux par deux puis par indépendance et lemme des coalitions, on a $\mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) = 1^{k/2} = 1$.

Ainsi selon Q28 et la partie II :

$$\begin{aligned}\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) &= 1\times\left|\{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k \mid |\vec{\imath}| = k/2+1\}\right| \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k/2}(n-i)\right)C_{k/2}\end{aligned}$$

donc $$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1+k/2}C_{k/2}$$

donc $$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k, |\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbf{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} C_{k/2}$$

Par somme de limites et à l'aide de Q21, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^{k}\right) = C_{k/2}}$$

30. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a selon Q21, Q20, Q26 et Q29 :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Comme tout polynôme est combinaison linéaire de X^k, alors on a pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

31. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$0 \leqslant A^{p+2q} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}$$

Comme $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) < +\infty$ et $A > 0$, on peut conclure que

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \frac{1}{A^{p+2q}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)}$$

32. On a donc $0 \leqslant \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \frac{1}{nA^{p+2q}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)$

Or d'après Q29, on a : $\frac{1}{nA^{p+2q}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{C_{p+q}}{A^{p+2q}}$ $(\star)$ et selon Q10 $\frac{C_{p+q}}{A^{p+2q}} \leqslant \frac{2^{2(p+q)}}{A^{p+2q}} = 2^p\left(\frac{2}{A}\right)^{p+2q}$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $2^p\left(\frac{2}{A}\right)^{p+2q} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$

Ceci nous fournit $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^p\left(\frac{2}{A}\right)^{p+2q_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi $(\star)$ nous fournit $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{1}{nA^{p+2q_0}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) \leqslant \varepsilon$$

On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

On a bien montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) = 0}$$

33. On suppose que $p \in \mathbb{N}$ (P non nul).
Comme f est bornée, on a $|f(x) - P(x)| = \underset{x\to+\infty}{O}(x^p)$ ce qui nous fournit $B > A$ et $K_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in [B, +\infty[\,,\ |f(x) - P(x)| \leqslant K_1|x|^p$$

De plus sur le segment $[A,B]$, l'application $x \longmapsto \frac{|f(x)-P(x)|}{|x|^p}$ est continue.
Ainsi le théorème des bornes atteintes, nous fournit $K_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in [A,B]\,,\ |f(x) - P(x)| \leqslant K_2|x|^p$$

De même on trouve $B' < -A$, $K_3 > 0$ et $K_4 > 0$ tels que :

$$\forall x \in \,]-\infty, B']\,, |f(x) - P(x)| \leqslant K_3|x|^p$$
$$\forall x \in [B', -A]\,, |f(x) - P(x)| \leqslant K_4|x|^p$$

En prenant $K = \max(K_1, K_2, K_3, K_4)$, on a bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \,]-A, A[\,,\ |f(x) - P(x)| \leqslant K|x|^p}$$

En utilisant Q33, on a (les espérances existent bien par majorations)

34. $$0 \leqslant \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |f-P|(\Lambda_{i,n})\right) \leqslant \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right)$$

Le théorème des gendarmes et Q32 permettent de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)=0}$$

35. Soit P un polynôme de degré $p\in\mathbb{N}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Par inégalités triangulaires, on a :

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f-P|\,(\Lambda_{i,n})\right)+\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}|f-P|\,(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On a les existences des espérances car f est bornée et d'après Q30.
Je note $N=\|f-P\|_{\infty,[-A,A]}=\sup_{x\in[-A,A]}|f(x)-P(x)|$ qui existe bien selon le théorème des bornes atteintes. On a alors

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f-P|\,(\Lambda_{i,n})\right)\leqslant\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\leqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)+$$
$$\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)$$
$$\leqslant N+\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)$$

et $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}|f-P|\,(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}N\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=Nm_0=N$

Ainsi $$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$2N+\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)+$$
$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|$$

Soit maintenant $\varepsilon>0$. Je prends $A=3$.
Le théorème de Weierstrass nous fournit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\varepsilon/4$.
Selon Q34 et Q30 :

$$\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)+\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ceci nous fournit $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$,

$$\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|(\Lambda_{i,n})\right)+$$
$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon/2$$

On vient de montrer :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\in\mathbb{N}^*\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$
$$n\geqslant n_0\Longrightarrow\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon$$

c'est à dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\Lambda_{i,n})\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

36. • **Méthode 1 :** Soit $\varepsilon > 0$. Comme X est d'espérance finie. On a par définition des familles sommables :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X|) &= \sum_{x\in X(\Omega)} |x|\,\mathbf{P}(X=x)\\ &= \sup\left\{\sum_{x\in F}|x|\,\mathbf{P}(X=x)\ \middle|\ F\subset X(\Omega), F \text{ fini}\right\}\end{aligned}$$

La caractérisation de la borne supérieure, nous fournit F fini tel que

$$\mathbf{E}(|X|) \geqslant \sum_{x\in F}|x|\,\mathbf{P}(X=x) \geqslant \mathbf{E}(|X|)-\varepsilon$$

Je pose $M=\max\{|x| \mid x\in F\}$ et on a :

$$\mathbf{E}(|X|) \geqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\leqslant M}}|x|\,\mathbf{P}(X=x) \geqslant \mathbf{E}(|X|)-\varepsilon$$

d'où par sommations par paquets :

$$0 \leqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|> M}}|x|\,\mathbf{P}(X=x) \leqslant \varepsilon$$

Soit $C \geqslant M$. La variable aléatoire $X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}$ admet une espérance car $\left|X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right| \leqslant |X|$.
Ainsi

$$\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\leqslant C}} x\,\mathbf{P}(X=x) + 0\,\mathbf{P}(|X|>C) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\leqslant C}} x\,\mathbf{P}(X=x)$$

donc comme $\left|X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}-X\right| = \left|X\mathbb{1}_{|X|>C}\right| \leqslant \left|X\mathbb{1}_{|X|>M}\right|$, alors on a

$$\left|\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right)-\mathbf{E}(X)\right| \leqslant \mathbf{E}\left(\left|X\mathbb{1}_{|X|>M}\right|\right) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|> M}}|x|\,\mathbf{P}(X=x)$$

On vient de montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R}^+,\ \forall C\in\mathbb{R},\ C\geqslant M \Longrightarrow \left|\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right)-\mathbf{E}(X)\right| \leqslant \varepsilon$$

• **Méthode 2 :** L'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on peut donc écrire $X(\Omega)=\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ où (x_k) est une suite injective si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X(\Omega)$ est finie de cardinal c alors

$$X(\Omega)=\{x_k \mid k\in [\![0\,;c-1]\!]\}\quad \text{et}\quad \forall k\geqslant c\quad x_k=0$$

Ainsi par permutation sur une famille sommable puis lien avec une série absolument convergente, on a :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X=x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\,\mathbf{P}(X=x_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\,\mathbf{P}(X=x_k)$$

Soit $C\in\mathbb{R}^+$. On a $\left|X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right| \leqslant |X|$.
Ainsi $X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\leqslant C}} x\,\mathbf{P}(X=x) + 0\,\mathbf{P}(X>C)$$

COnsidérons pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction

$$g_k\ :\ t\in\mathbb{R}\longmapsto\begin{cases} x_k\,\mathbf{P}(X=x_k) & \text{si } |x_k|\leqslant t\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

De sorte que $$\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(C)$$

Par ailleurs, on a $g_k(C) \xrightarrow{C\to+\infty} x_k\,\mathbf{P}(X=x_k)$ et

$$\forall C\in[0,+\infty[\,,\ \forall k\in\mathbb{N},\ |g_k(C)| \leqslant |x_k|\,\mathbf{P}(X=x_k)$$

or la série $\sum_{k\geqslant 0}|x_k|\,\mathbf{P}(X=x_k)$ converge de somme $\mathbf{E}(|X|)$. Ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} g_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$ de somme $C\mapsto \mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right)$.
Ainsi selon le théorème de la double limite :

$$\mathbf{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) \xrightarrow{C\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lim_{C\to+\infty} g_k(C)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\,\mathbf{P}(X=x_k)$$

- **Conclusion :** Par deux méthodes on a montré que

$$\boxed{\mathbf{E}(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}) \xrightarrow{C\to+\infty} \mathbf{E}(X)}$$

37. On a $\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2 \leqslant X_{ij}^2$ donc $X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}$ admet un moment d'ordre 2 et on a selon la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) &= \mathbf{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2\right) - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2\\ &= \mathbf{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2\end{aligned}$$

Avec la question précédente, comme X_{ij} et X_{ij}^2 sont d'espérances finies, on a

$$\mathbf{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2 \xrightarrow{C\to+\infty} \mathbf{E}\left(X_{ij}^2\right) - \mathbf{E}(X_{ij})^2 = \mathbf{V}(X_{ij})$$

or on sait que $\mathbf{V}(X_{ij}) = 1$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{C\to+\infty} \sigma_{ij}(C) = 1}$$

La limite précédente nous fournit un réel $C_0 > 0$ tel que

38.
$$\forall C \geqslant C_0 \quad \sigma_{ij}(C) \geqslant 1/2$$

Ainsi selon le cours, pour $C \geqslant C_0$, la variable $\widehat{X}_{ij}(C)$ est bien définie et c'est la variable centrée réduite de $X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}$. De plus pour $\omega \in \Omega$, on a

$$\left|\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)(\omega)\right| \leqslant C$$

donc $\left|\mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)\right| \leqslant C$ d'où $\left|\widehat{X}_{ij}(C)(\omega)\right| \leqslant \dfrac{2C}{\sigma_{ij}(C)}$

par inégalité triangulaire Ainsi

> pour C assez grand, les variables $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont bien définies, bornées, centrées, de variance 1

Pour $1 \leqslant i \leqslant j$, on pose $\varphi_{ij} : x \longmapsto \dfrac{x\mathbb{1}_{[-C,C]}(x) - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)}{\sigma_{ij}(C)}$ où $\mathbb{1}_{[-C,C]}$ est la fonction caractéristique du segment $[-C,C]$; de sorte que $\widehat{X}_{ij}(C) = \varphi_{ij}(X_{ij})$.

En appliquant le lemme des coalitions, on obtient

> les variables aléatoires $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont mutuellement indépendantes pour $1 \leqslant i \leqslant j$

39. On a :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(C)\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) - \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij}\right) &= X_{ij} - X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} + \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)\\ &= X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} + \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbf{E}(X_{ij})\\ &= X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\end{aligned}$$

On a utilisé : $\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} + \mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} = \mathbb{1}_\Omega$, $\mathbf{E}(X_{ij}) = 0$ et la linéarité de l'espérance. On a bien montré que

$$\boxed{X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)}$$

40. Je note
$$A(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij}$$
$$B(C) = \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbf{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)$$

On montre facilement à l'aide de Q37 que

$$\mathbf{E}\left(A(C)^2\right) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)^2 \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Par ailleurs $\mathbf{E}(B(C)) = 0$ donc

$$\mathbf{E}\left(B(C)^2\right) = \mathbf{V}(B(C)) = \frac{\mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)}{\sigma_{ij}(C)^2}$$

Or

$$\mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) = \mathbf{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)^2\right) - \mathbf{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)$$

donc $\qquad 0 \leqslant \mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \leqslant \mathbf{E}\left(X_{ij}^2\right) - \mathbf{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)$

Ainsi d'après Q36 et les gendarmes :

$$\mathbf{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Ainsi par quotient de limites :

$$\mathbf{E}\left(B(C)^2\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Selon Cauchy-Schwarz, on a $|\mathbf{E}(A(C)B(C))| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(A(C)^2)\,\mathbf{E}(B(C)^2)}$, donc selon les gendarmes

$$\mathbf{E}(A(C)B(C)) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Comme selon Q39, on a :

$$\mathbf{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(A(C)^2\right) + 2\,\mathbf{E}(A(C)B(C)) + \mathbf{E}\left(B(C)^2\right)$$

On peut conclure que

$$\boxed{\lim_{C\to+\infty} \mathbf{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = 0}$$

41.

- **Existences :** Dans un premier temps, on va établir l'existence des espérances de l'inégalité.
  On remarque que $\|M_n\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} X_{i,j}^2$
  d'où $\mathbf{E}(\|M_n\|_F^2) = n < +\infty$ car $\mathbf{E}\left(X_{i,j}^2\right) = \mathbf{V}(X_{i,j}) + \mathbf{E}(X_{i,j})^2 = 1$
  donc $\|M_n\|_F$ admet un moment d'ordre 2 et donc d'ordre 1.
  C'est analogue pour $\widehat{M}_n(C)$ car les $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont mutuellement indépendantes, centrées réduites.

Or par inégalité triangulaire : $0 \leqslant \left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F \leqslant \|M_n\|_F + \left\|\widehat{M}_n(C)\right\|_F$.

Ainsi $\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F$ est d'espérance finie.

De plus d'après Q8 appliquée à $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$ et la matrice nulle, on a

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^2 \leqslant \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n\right\|_F^2$$

comme $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant 1 + x^2$

alors on a $\qquad \sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}| \leqslant n + \frac{\|M_n\|_F^2}{n}$

puis comme f est K-lipschitzienne, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| \leqslant K|x|$$

et donc $\qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n})\right| \leqslant K + \frac{K\,\|M_n\|_F^2}{n^2}$

Par linéarité la variable aléatoire $K\left(1 + \frac{\|M_n\|_F^2}{n^2}\right)$ admet une espérance.

Donc la variable aléatoire $1/n\sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n})$ est d'espérance finie. Il en est de même pour $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)$.

- **L'inégalité :** On a, selon Cauchy-Schwarz et Q8 :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) - \sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right| &\leqslant K\sum_{i=1}^n \left|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}\right| \\ &\leqslant K\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 1\right)\left(\sum_{i=1}^n \left(\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}\right)^2\right)} \\ &\leqslant K\sqrt{n}\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M}_n(C)\right\|_F\end{aligned}$$

donc $\qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F$

Avec la croissance et la linéarité de l'espérance et en utilisant pour X admettant une espérance que $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(|X|)$, on obtient

$$\boxed{\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right)}$$

42. On a $$\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2}$$

Par calcul dans $[0,+\infty]$ avec des variables positives, on a selon Cauchy-Schwarz :

$$\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(1)\,\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F^2\right)}$$

Soit $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $C > C_0$ (C_0 introduit en Q38). On a $X_{ij} \sim X_{11}$.
La loi donnant la variance et l'espérance, on montre facilement que

$$\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right) \sim \left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)$$

Ainsi

$$\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbf{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = n^2\,\mathbf{E}\left(\left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)^2\right)$$

donc $$\mathbf{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right) \leqslant n\,\mathbf{E}\left(\left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)^2\right)$$

et ainsi

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant K\cdot\mathbf{E}\left(\left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)^2\right)$$

Par conséquent :

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant$$
$$K\cdot\mathbf{E}\left(\left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)^2\right) + \left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|$$

Soit $\varepsilon > 0$. La question Q40 nous fournit C_1 tel que

$$\forall C \geqslant C_1 \quad K\cdot\mathbf{E}\left(\left(X_{11} - \widehat{X}_{11}(C)\right)^2\right) \leqslant \varepsilon/2$$

Je fixe désormais $C = \max(C_0, C_1)$. on remarque que

$$\forall i,j \in [\![1\,;\,n]\!] \quad \forall \omega \in \Omega \quad \left|\widehat{X}_{ij}(C)(\omega)\right| \leqslant \frac{2C}{\sigma_{ij}(C)} \leqslant 4C$$

car $\sigma_{ij}(C) \geqslant 1/2$. Ainsi les variables aléatoires $\widehat{X}_{ij}(C)$ ($i \leqslant j$ dans $\mathbb{N}^*$) sont centrées, réduites, uniformément bornées, de même loi et mutuellement indépendantes.
On peut donc appliquer la partie III :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right) \xrightarrow[]{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \quad \left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon/2$$

d'où $$\forall n \geqslant N \quad \left|\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

On vient de montrer que

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) \xrightarrow[]{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

43. On considère désormais que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Je note $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}}|f|$. Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Weierstrass nous fournit un polynôme P tel que $\forall x \in [-3,3],\ |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon$. On définit alors la fonction

$$g : x \longmapsto \begin{cases} P(x) & \text{si } x \in [-3,3] \\ P(3) & \text{si } x \geqslant 3 \\ P(-3) & \text{si } x \leqslant -3 \end{cases}$$

La fonction g étant de classe C^1 sur le segment $[-3,3]$, elle y est à dérivée bornée selon le théorème des bornes atteintes donc lipschitzienne sur $[-3,3]$ d'après les accroissements finis. Ainsi la fonction g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et on montre facilement qu'elle est bornée.

Je pose $h = f - g$ qui est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire. Je considère également la fonction $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in [-2,2],\ H(x) = \varepsilon \\ \forall x \in [3,+\infty[\,,\ H(x) = \sup\limits_{\mathbb{R}} |h| + \varepsilon \\ \forall x \in]-\infty,-3],\ H(x) = \sup\limits_{\mathbb{R}} |h| + \varepsilon \\ H \text{ affine et continue sur } [-3,-2] \text{ et } [2,3] \end{cases}$$

On remarque que H est lipschitzienne et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $H \geqslant |h|$. Comme toutes les fonctions sont bornées, il en est de même pour les variables aléatoires qui suivent et elles admettent toutes une espérances. On a ainsi

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\Lambda_{i,n})\right) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(\Lambda_{i,n})\right)$$

D'après Q42, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} g(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(\Lambda_{i,n})\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} H(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

Or $$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} g(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

et $$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} H(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \qquad (\text{car } m_0 = 1)$$

de plus $$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(\Lambda_{i,n})\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(\Lambda_{i,n})\right)$$

Ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) \xrightarrow[]{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On a bien montré la loi du demi-cercle dans le cas général