*CPGE* **Moulay Youssef**

# Préparation 2025

## Algèbre bilinéaire

*Mars 2025* *Corrigé proposé par* Jennifer Mirebeau

**Classes MP***

## Table des matières

Énoncé

# Exemples de contraintes symplectiques linéaires

## Notations

- Dans tout le problème, $n$ et $m$ désignent des entiers naturels non nuls.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et $I_n$ la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tous entiers naturels non nuls $p$ et $q$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à $n$ lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre $n$ (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1 :
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}\,.$$
- On note $A^\top$ la transposée d'une matrice $A$.
- Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$.
- Le groupe orthogonal réel d'ordre $n$ est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ :
$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\right\}.$$
- Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$.

**Objectif**

Ce problème a pour objectif de définir la notion d'espace symplectique réel et d'étudier certaines propriétés des endomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^n$.
La première partie établit quelques résultats utiles dans la suite.
La deuxième partie définit toutes les notions relatives aux objets symplectiques utilisés dans la suite du problème.
La troisième partie vise plus spécifiquement à montrer que toute matrice symplectique réelle a un déterminant égal à 1 .
La quatrième partie aborde la définition des contraintes permettant d'injecter un objet dans un autre au moyen d'un endomorphisme symplectique.

Les deux dernières parties sont largement indépendantes.

# I : Préliminaires

**Q 1..** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \quad X^\top AY = X^\top BY.$$

Montrer que $A = B$.

**Q 2..** Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $M^\top M$ sont toutes strictement positives.

En déduire qu'il existe une matrice $S$ symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

# II : Objets symplectiques

## I.A : *Structure d'espace vectoriel symplectique réel*

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

On appelle *forme symplectique* sur $E$ toute application $\omega$ de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- bilinéarité : $\forall (x,y,z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(x+\lambda y, z) = \omega(x,z) + \lambda\omega(y,z)$ et $\omega(x, y+\lambda z) = \omega(x,y) + \lambda\omega(x,z)$ ;
- antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2, \omega(x,y) = -\omega(y,x)$ ;
- non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* $(E,\omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $E$ muni d'une forme symplectique $\omega$ sur $E$.

**Q 3..** Montrer que, si $\omega$ est une forme symplectique sur $E$, alors pour tout vecteur $x$ de $E, \omega(x,x) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace symplectique $(E,\omega)$, on appelle $\omega$*-orthogonal* de $F$ et on note $F^\omega$ l'ensemble

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\}.$$

Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique $(E,\omega)$.

**Q 4..** Justifier que $F^\omega$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Q 5..** Le sous-espace $F^\omega$ est-il nécessairement en somme directe avec $F$ ?

Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x,\cdot)$ l'application linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x,y)$ et on considère

$$\begin{array}{rccc} d_\omega : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}$$

**Q 6..** Montrer que $d_\omega$ est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on note $\ell_{|F}$ la restriction de $\ell$ à $F$.

**Q 7..** Montrer que l'application de restriction

$$\begin{array}{rccc} r_F : & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ & \ell & \longmapsto & \ell_{|F} \end{array}$$

est surjective.

**Q 8..** Préciser le noyau de $r_F \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

**Q 9..** Montrer que la restriction $\omega_F$ de $\omega$ à $F^2$ définit une forme symplectique sur $F$ si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

## II.B : *Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$*

On suppose qu'il existe une forme symplectique $\omega$ sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = \left(\omega\left(e_i, e_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Q 10..** Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x, y) = X^\top \Omega Y$$

où $X$ et $Y$ désignent les colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Q 11..** En déduire que $\Omega$ est antisymétrique et inversible.

**Q 12..** Conclure que l'entier $n$ est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que $n$ est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $j$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $J$.

**Q 13..** Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} b_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{array}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.

La forme symplectique $b_s$ est appelée la *forme symplectique standard* sur $\mathbb{R}^n$.

## III.C : *Endomorphismes et matrices symplectiques réels*

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel $(E, \omega)$ tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y)$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique $(E, \omega)$.

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de $E$.

Soient $\lambda, \mu$ des valeurs propres réelles de $u$, et soient $E_\lambda(u), E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

**Q 14..** Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont $\omega$-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x, y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note $M$ la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Q 15..** Montrer que $u$ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top JM = J$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $M^\top JM = J$.

On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ :

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top JM = J\right\}.$$

**Q 16..** Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice $J$.

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ondre $n = 2m$.*

Soient $A, B, C, D$ dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

**Q 17..** Montrer que $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques} \quad \text{et} \quad A^\top D - C^\top B = I_m.$$

# III : Déterminant d'une matrice symplectique réelle

L'objectif de cette partie est de montrer l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par deux méthodes différentes qui reposent chacune sur une propriété structurelle du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ qu'on examine au préalable.

## I.A : *Le cas de la dimension 2*

**Q 18..** Montrer que $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

## II.B : *Commutant de J*

On note $C_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice $J$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec $J$.

**Q 19..** Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$,

$$M \in C_J \iff \exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

**Q 20..** En déduire que, pour toute matrice $M \in C_J$, $\det(M) \geqslant 0$.

*On pourra considérer le produit de matrices par blocs*

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ i\, I_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -i\, I_m & I_m \end{pmatrix}$$

## III.C : *Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle*

On note $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques et orthogonales réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie.

**Q 21..** Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

**Q 22..** Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset C_J$.

**Q 23..** En déduire que, pour toute matrice $M$ de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = 1$.

Jusqu'à la fin de la sous-partie III.C, on considère une matrice $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

**Q 24..** Montrer que $S$ est symplectique.

*On pourra considérer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme $s$ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $S$, et montrer que $s$*

*est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.*

**Q 25..** Justifier que $S$ est inversible puis montrer que la matrice $O$ définie par $O = MS^{-1}$ appartient au groupe $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

**Q 26..** Conclure que le déterminant de la matrice $M$ est égal à 1 .

## IV.D : *Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques*

Soit $(E, \omega)$ un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$. On appelle transvection de $E$ tout endomorphisme $\tau$ de $E$ tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \tau(x) = x + \ell(x)a.$$

### III.IV.1 – Transvection symplectique.

**Q 27..** Soit $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application $\tau_a^\lambda$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a, x)a$$

est une transvection de $E$ et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de ce même espace.

Les applications $\tau_a^\lambda$ pour $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques* de $E$.

**Q 28..** Soit $a \in E$ un vecteur non nul et soient $\lambda$ et $\mu$ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

**Q 29..** Soient $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda$ un réel. Montrer que $\det\left(\tau_a^\lambda\right) > 0$.

**Q 30..** La réciproque $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}$ est-elle encore une transvection symplectique ?

On se propose de montrer le théorème suivant :

**THÉORÈME**

Tout endomorphisme symplectique de $E$ peut s'écrire comme la composée d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques de $E$ :
si $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$, il existe un entier $p \leqslant 4m$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $E$ telles que $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$

### III.IV.2 – Un lemme.

On commence par montrer le lemme suivant :

**LEMME**

Pour tous vecteurs non nuls $x$ et $y$ de $E$ il existe une composée $\gamma$ d'au plus deux transvections symplectiques de $E$ telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe $x$ et $y$, non nuls, dans $E$.

**Q 31..** Supposons que $\omega(x,y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^{\lambda}(x) = y$.

**Q 32..** Supposons que $\omega(x,y) = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in E$ tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$.

**Q 33..** Montrer le lemme cité ci-dessus.

**III.IV.3 – Le théorème.** Soit $u \in \operatorname{Symp}_{\omega}(E)$ un endomorphisme symplectique de $E$.
Soit $e_1 \in E$ un vecteur non nul.

**Q 34..** Justifier l'existence de $f_1 \in E$, non colinéaire à $e_1$, tel que $\omega\left(e_1, f_1\right) = 1$.

On pose $P = \operatorname{Vect}\left(e_1, f_1\right)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_1$ et $f_1$. On va montrer l'existence d'une composée $\delta$ d'au plus quatre transvections symplectiques de $E$ telle que

$$\begin{cases} \delta\left(u\left(e_1\right)\right) = e_1 \\ \delta\left(u\left(f_1\right)\right) = f_1 \end{cases}$$

**Q 35..** Pourquoi existe-t-il une composée $\delta_1$ d'au plus deux transvections symplectiques de $E$ telle que $\delta_1\left(u\left(e_1\right)\right) = e_1$?

**Q 36..** Notons $\widetilde{f_1}$ le vecteur $\delta_1\left(u\left(f_1\right)\right)$. Montrer qu'il existe une composée $\delta_2$ d'au plus deux transvections symplectiques de $E$ telle que

$$\begin{cases} \delta_2\left(e_1\right) = e_1 \\ \delta_2\left(\widetilde{f_1}\right) = f_1 \end{cases}$$

*On pourra adapter la démonstration du lemme précédent.*

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie bien les conditions (III.1) souhaitées.

On pose $v = \delta \circ u$.

**Q 37..** Montrer que $P$ est stable par $v$ et déterminer $v_P$, endomorphisme induit par $v$ sur $P$.

**Q 38..** Montrer que $P^{\omega}$ est stable par $v$.

**Q 39..** Montrer que la restriction $\omega_{P^{\omega}}$ de $\omega$ à $P^{\omega} \times P^{\omega}$ munit $P^{\omega}$ d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme $v_{P^{\omega}}$ induit par $v$ sur $P^{\omega}$ est un endomorphisme symplectique.

**Q 40..** à l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.

**III.IV.4 – Une conséquence topologique.** On munit toujours l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé.

**Q 41..** Montrer que le groupe symplectique $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R})$ est une partir connexe par arcs de cet espace.

**III.IV.5 – Deuxième conséquence.**

**Q 42..** Utiliser les résultats de cette sous-partie III.D pour prouver l'inclusion $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{SL}_n(\mathbb{R})$.

# IV : Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

Dans cette partie, on fixe $n = 2m \geqslant 4$.

On rappelle que $\operatorname{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ désigne le groupe des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique standard $\left(\mathbb{R}^{2m}, b_s\right)$. On note de plus $\operatorname{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ le groupe des endomorphismes de $\mathbb{R}^{2m}$ de déterminant égal à 1 .

Pour $r \geqslant 0$, on considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^{2m}$.

- La boule euclidienne fermée de rayon $r$ :

$$B^{2m}(r) = \left\{(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + \cdots + x_m^2 + y_1^2 + \cdots + y_m^2 \leqslant r^2\right\}.$$

- Le cylindre symplectique de rayon $r$ basé sur les axes de coordonnées numéro 1 et $m+1$ :

$$Z^{2m}(r) = \left\{(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + y_1^2 \leqslant r^2\right\}$$

Sur des exemples (boules ou cylindres) de parties $A$ et $B$ de $\mathbb{R}^{2m}$, on étudie l'existence d'un endomorphisme $u$ tel que $u(A) \subset B$ lorsque $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$, puis lorsque $u \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$.

## I.A : Injection par $u \in SL\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans un cylindre

**Q 43..** Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r)$.

## II.B : Injection par $u \in SL\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans une autre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$.
Notons $U \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice $U$.

**Q 44..** Montrer que $|\lambda| \leqslant r$.

> INDICATION. Pour le cas $\lambda$ non réel, si $P$ et $Q$ dans $M_{2m,1}(R)$ sont telles que $Z = P + iQ$ est une colonne propre de $U$ pour la valeur propre $\lambda$,on pourra montrer que $\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right)$.

**Q 45..** En déduire que $1 \leqslant r$.

**Q 46..** à quelle condition nécessaire et suffisante sur $r > 0$ existe-t-il $u$ appartenant à $\mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$ ?

## III.C : *Injection symplectique d'une boule dans un cylindre*

Soit $r > 0$ tel qu'il existe un endomorphisme symplectique $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $\psi\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r)$.
On note $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de $\psi$ dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbb{R}^{2m}$ et $\psi^\top$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M^\top$.

**Q 47..** Montrer que $|b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1))| = 1$ puis que $\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1$ ou $\|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1$.

**Q 48..** Montrer que $1 \leqslant r$.

**Q 49..** Montrer le théorème de non-tassement linéaire :

> **THÉORÈME**
>
> Pour $R > 0$ et $R' > 0$, il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $\psi\left(B^{2m}(R)\right) \subset Z^{2m}(R')$ si et seulement si $R \leqslant R'$

CORRIGÉ

# Exemples de contraintes symplectiques linéaires

# 1 : Préliminaires

**Q 1..** ◆ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On calcule :

$$\begin{aligned} X^\top AY = X^\top(AY) &= \sum_{i=1}^n X_i(AY)_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i a_{i,j}y_j.\ X^\top AY = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i a_{i,j}y_j. \end{aligned}$$

◆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top AY = 0$.
Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \delta_{i,k}$, et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall j \in [\![1,n]\!], y_j = \delta_{j,\ell}$.
D'après le calcul précédent :

$$\begin{aligned} X^\top AY = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i a_{i,j}y_j &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \delta_{i,k}a_{i,j}\delta_{j,\ell} \\ &= a_{k,\ell} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} = 0$, d'où la matrice $A$ est nulle. On a montré que :

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top AY = 0, \text{ alors } A = 0.}$$

◆ Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top AY = X^\top BY$.
Alors $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top(A-B)Y = 0$.
Par le point précédent, la matrice $A-B$ est nulle, donc $A = B$.
Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } A,B \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ vérifient} \\ \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top AY = X^\top BY \\ \text{alors } A = B. \end{array}}$$

**Q 2..** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

◆ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^\top M)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$ un vecteur propre (donc non nul) de $M^\top M$ associé à la valeur propre $\lambda$. Alors $M^\top MX = \lambda X$. Il vient

$$\begin{aligned} X^\top M^\top MX = (MX)^\top(MX) &\quad = \|MX\|^2 \\ = X^\top(M^\top MX) &\quad = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X \quad = \lambda\|X\|^2. \end{aligned}$$

Le vecteur $X$ est non nul donc $\|X\| > 0$. De plus $M$ est inversible et $X \neq 0$, donc $MX \neq 0$ et $\|MX\| > 0$.

On obtient $\lambda = \dfrac{||MX||^2}{||X||^2} > 0$.

Ainsi $$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M^\mathsf{T} M),\ \lambda > 0}$$

- La matrice $M^\mathsf{T} M$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthonormale. De plus on vient de montrer que ses valeurs propres sont strictement positives.
  Donc il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale contenant les valeurs propres strictement positives de $M^\mathsf{T} M$, et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, telles que $P^\mathsf{T} M^\mathsf{T} M P = D$. On a $M^\mathsf{T} M = PDP^\mathsf{T}$.
  Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0$.
  Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, de sorte que $\Delta^2 = D$.
  On pose $S = P\Delta P^\mathsf{T}$. Alors
  $$\begin{aligned} S^2 = (P\Delta P^\mathsf{T})^2 &= P\Delta^2 P^\mathsf{T} \\ &= PDP^\mathsf{T} = M^\mathsf{T} M. \end{aligned}$$
  La matrice $S$ est symétrique car $S^\mathsf{T} = (P\Delta P^\mathsf{T})^\mathsf{T} = P\Delta^\mathsf{T} P^\mathsf{T} = P\Delta P^\mathsf{T} = S$.
  $S$ est semblable à $\Delta$ donc a le même spectre : $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$.
  On a $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0$ donc $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et $S$ est à valeurs propres strictement positives.

  $$\boxed{\text{Il existe une matrice } S \text{ symétrique réelle à valeurs propres strictement positives, telle que } S^2 = M^\mathsf{T} M.}$$

## 2 : Objets symplectiques

**Q 3..** Soit $\omega$ une forme symplectique sur $E$. Soit $x \in E$.
Par antisymétrie de $\omega$, on a $\omega(x, x) = -\omega(x, x)$, donc $2\omega(x, x) = 0$, d'où $\omega(x, x) = 0$.

Ainsi $$\boxed{\forall x \in E,\ \omega(x, x) = 0.}$$

**Q 4..** Montrons que $F^\omega = \{x \in E, \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- Par définition, on a $F^\omega \subset E$.
- Par bilinéarité de $\omega$, le vecteur nul vérifie $\forall y \in F, \omega(0_E, y) = 0$. Donc $0_E \in F^\omega$ et $F^\omega \neq \emptyset$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, x_2) \in (F^\omega)^2$. Soit $y \in F$.
  Par bilinéarité de $\omega$,
  $$\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \omega(x_1, y) + \lambda_2 \omega(x_2, y) = 0.$$
  Donc $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in F^\omega$ et $F^\omega$ est stable par combinaison linéaire.

Finalement
$$\boxed{F^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

**Q 5..** Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Posons $F = \mathrm{vect}(x)$ la droite engendrée par $x$. On a évidemment $x \in F$.
Soit $y \in F$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $y = \lambda x$.

D'après la question 3 (sol. 3) , on a $\omega(x,x)=0$.
Par bilinéarité de $\omega$, on a $\omega(x,y)=\omega(x,\lambda x)=\lambda\omega(x,x)=0$. Ainsi $\forall y\in F, \omega(x,y)=0$ i.e. $x\in F^{\omega}$.
Ainsi $x\in F\cap F^{\omega}$ avec $x\neq 0_E$, donc $F\cap F^{\omega}\neq\{0_E\}$. Dans cet exemple, $F$ et $F^{\omega}$ ne sont pas en somme directe.

$$\boxed{\text{Non, le sous-espace vectoriel } F^{\omega} \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec } F.}$$

**Q 6..** On considère $d_\omega : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \omega(x,\cdot)\end{array}\right.$

- Montrons que $d_\omega$ est une application linéaire. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(x_1,x_2)\in E^2$. Par bilinéarité de $\omega$, pour tout $y\in E$ :

$$\begin{aligned} d_\omega(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)(y) &= \omega(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y) \\ &= \lambda_1\omega(x_1,y)+\lambda_2\omega(x_2,y) \\ &= \lambda_1 d_\omega(x_1)(y)+\lambda_2 d_\omega(x_2)(y). \end{aligned}$$

  Donc $d_\omega(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1d_\omega(x_1)+\lambda_2d_\omega(x_2)$ et $d_\omega$ est linéaire.
- Montrons que $d_\omega$ est bijective.
  Soit $x\in\mathrm{Ker}(d_\omega)$. Alors $d_\omega(x)=\omega(x,\cdot)=0$, i.e. $\forall y\in E, \omega(x,y)=0$.
  Puisque $\omega$ est une forme symplectique, elle vérifie la non dégénérescence, donc $x=0_E$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(d_\omega)=\{0_E\}$, donc $d_\omega$ est injective de $E$ dans $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Puisque $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}))=\dim(E)\times 1=\dim(E)$, l'injectivité de $d_\omega$ équivaut à sa bijectivité, donc $d_\omega$ est bijective.

Finalement

$$\boxed{d_\omega \text{ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme.}}$$

**Q 7..** On considère $r_F : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \longmapsto & \ell|_F\end{array}\right.$ .

Montrons que $r_F$ est surjective. Soit $u\in\mathcal{L}(F,\mathbb{R})$.
$F$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ qui est de dimension finie.
Soit $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ : $E=F\oplus G$.
On définit $\ell$ sur $E$ par : $\forall x\in E$, qui s'écrit de manière unique $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$, $\ell(x)=u(x_F)$. Autrement dit, on pose $\ell : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x=x_F+x_G & \longmapsto & u(x_F)\end{array}\right.$ .

- Montrons que $\ell$ est linéaire. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\in E^2$, qui s'écrivent de manière unique $x=x_F+x_G$ et $y=y_F+y_G$ avec $x_F,y_F\in F$ et $x_G,y_G\in G$.

$$\begin{aligned} \ell(\lambda x+\mu y) &= \ell(\lambda x_F+\lambda x_G+\mu y_F+\mu y_G) \\ &= \ell\left(\underbrace{(\lambda x_F+\mu y_F)}_{\in F}+\underbrace{(\lambda x_G+\mu y_G)}_{\in G}\right) \\ &= u(\lambda x_F+\mu y_F) \\ &= \lambda u(x_F)+\mu u(y_F) \text{ car } u \text{ est linéaire} \\ &= \lambda\ell(x)+\mu\ell(y). \end{aligned}$$

  Ainsi $\ell$ est linéaire, donc $\ell\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

- De plus, $\forall x \in F$, on a $\ell(x) = u(x)$ donc $r_F(\ell) = \ell|_F = u$.

On a montré que $\forall u \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}), \exists \ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $r_F(\ell) = u$.
Donc

$$\boxed{\text{l'application de restriction } r_F \text{ est surjective.}}$$

**Q 8..** Calculons le noyau de $r_F \circ d_\omega$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(r_F \circ d_\omega) &= \{x \in E,\ r_F \circ d_\omega(x) = 0\}\\ &= \{x \in E,\ \forall y \in F,\ d_\omega(x)(y) = 0\}\\ &= \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\} = F^\omega.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(r_F \circ d_\omega) = F^\omega.}$

D'une part, puisque $d_\omega$ est un isomorphisme, $d_\omega$ conserve le rang ; d'autre part, puisque $r_F$ est surjective, on a $\operatorname{Im}(r_F) = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$. Il vient

$$\operatorname{rg}(r_F \circ d_\omega) = \operatorname{rg}(r_F) = \dim(\mathcal{L}(F, \mathbb{R})) = \dim(F).$$

On applique le théorème du rang à l'application linéaire $r_F \circ d_\omega : E \longrightarrow \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$ :

$$\dim(E) = \operatorname{rg}(r_F \circ d_\omega) + \dim(\operatorname{Ker}(r_F \circ d_\omega)) = \dim(F) + \dim(F^\omega).$$

Ainsi $\boxed{\dim(F^\omega) = \dim(E) - \dim(F).}$

**Q 9..** Soit $\omega$ une forme symplectique sur $E$. Soit $\omega_F$ la restriction à $F^2$ de $\omega$. On a donc $\omega_F : F^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- $\omega$ vérifie la bilinéarité donc par restriction aux vecteurs de $F$, $\omega_F$ vérifie aussi la bilinéarité pour tout pour tout $(x, y, z) \in F^3$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases}\omega(x + \lambda y, z) &= \omega(x, z) + \lambda\omega(y, z).\\ \omega(x, y + \lambda z) &= \omega(x, y) + \lambda\omega(x, z).\end{cases}$$
- $\omega$ vérifie l'antisymétrie donc pour tout $(x, y) \in F^2$, , $\omega_F(x, y) = \omega(x, y) = -\omega(y, x) = -\omega_F(y, x)$.
  Donc $\omega_F$ vérifie aussi l'antisymétrie.
- On en déduit que $\omega_F$ est une forme symplectique sur $F$ si et seulement si $\omega_F$ vérifie la non dégénérescence. Or
$$\begin{aligned}\{x \in F,\ \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\} &= F \cap \{x \in E,\ \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}\\ &= F \cap F^\omega.\end{aligned}$$
  Ainsi
$$\begin{aligned}\omega_F \text{ est non dégénérescente} &\iff (F \cap F^\omega = \{0_E\})\\ &\iff E = F \oplus F^\omega\end{aligned}$$

D'après la question 8 (sol. 8) , si $F$ et $F^\omega$ sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus F^\omega) = \dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$, donc $F \oplus F^\omega = E$. Réciproquement, si $F \oplus F^\omega = E$, alors $F$ et $F^\omega$ sont évidemment en somme directe. D'où :

$$\begin{aligned}\omega_F \text{ est une forme symplectique sur } F &\iff \omega_F \text{ vérifie la non dégénérescence}\\ &\iff F \cap F^\omega = \{0_E\}\\ &\iff F \text{ et } F^\omega \text{ sont en somme directe}\\ &\iff F \oplus F^\omega = E.\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\omega_F \text{ est une forme symplectique sur } F \text{ si et seulement si } F \oplus F^\omega = E.}$

**Q 10..** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les colonnes des coordonnées de $x$ et de $y$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$.

Par bilinéarité de $\omega$, on obtient :

$$\omega(x, y) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \Omega_{i,j} y_j = X^{\mathsf{T}} \Omega Y,$$

d'après le calcul préliminaire effectué à la question 1 (sol. 1) .

D'où $\boxed{\omega(x, y) = X^{\mathsf{T}} \Omega Y.}$

**Q 11..** ◆ Montrons que $\Omega$ est antisymétrique.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base canonique.

D'après la question 10 (sol. 10) et par antisymétrie de $\omega$ :

$$\begin{aligned} X^{\mathsf{T}} \Omega Y = \omega(x, y) &= -\omega(y, x) \\ &= -Y^{\mathsf{T}} \Omega X \\ &= -\left(Y^{\mathsf{T}} \Omega X\right)^{\mathsf{T}} \\ &= -X^{\mathsf{T}} \Omega^{\mathsf{T}} Y \\ &= X^{\mathsf{T}} (-\Omega^{\mathsf{T}}) Y. \end{aligned}$$

On a donc $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^{\mathsf{T}} \Omega Y = X^{\mathsf{T}} (-\Omega^{\mathsf{T}}) Y$.

D'après la question 1 (sol. 1) , $\Omega^{\mathsf{T}} = -\Omega$, donc

$$\boxed{\Omega \text{ est antisymétrique.}}$$

◆ Montrons que $\Omega$ est inversible. Soit $X \in \mathrm{Ker}(\Omega)$. On a donc $\Omega X = 0$.

Par transposition et en utilisant que $\Omega$ est antisymétrique : $0 = (\Omega X)^{\mathsf{T}} = X^{\mathsf{T}} \Omega^{\mathsf{T}} = -X^{\mathsf{T}} \Omega$, d'où $X^{\mathsf{T}} \Omega = 0$.

Ainsi $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^{\mathsf{T}} \Omega Y = 0$.

En notant $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ les vecteurs de coordonnées $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on en déduit que :

$\forall y \in \mathbb{R}^n, \omega(x, y) = X^{\mathsf{T}} \Omega Y = 0$. Or $\omega$ est non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, donc $x = 0$, d'où $X = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\Omega) = \{0\}$ et

$$\boxed{\Omega \text{ est inversible.}}$$

**Q 12..** D'après la question 11 (sol. 11) , $\Omega$ est une matrice antisymétrique et inversible.

$\Omega$ est antisymétrique donc $\Omega^{\mathsf{T}} = -\Omega$. En passant au déterminant,

$$\det(\Omega) = \det(\Omega^{\mathsf{T}}) = \det(-\Omega) = (-1)^n \det(\Omega).$$

Supposons par l'absurde que $n$ est impair. Il vient $\det(\Omega) = -\det(\Omega)$, donc $\det(\Omega) = 0$ et $\Omega$ n'est pas inversible, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{n \text{ est pair.}}$

**Q 13..** On considère $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x\,;\, j(y)\rangle \end{array} \right.$.

- $j$ est une application linéaire et le produit scalaire est bilinéaire, donc

$$\boxed{b_s \text{ est bilinéaire sur } (\mathbb{R}^n)^2.}$$

- Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $j$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $J$, le vecteur $j(y)$ est de coordonnées $JY$ dans la base canonique. D'où :

$$b_s(x, y) = \langle x\,;\, j(y)\rangle = X^\top JY.$$

Or $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique : $J^\top = -J$, donc :

$$b_s(x, y) = X^\top JY = (X^\top JY)^\top = Y^\top J^\top X = -Y^\top JX = -b_s(y, x).$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, b_s(x, y) = -b_s(y, x)$.

Donc $\boxed{b_s \text{ est antisymétrique.}}$

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n, b_s(x, y) = 0$.
Notons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne des coordonnées de $x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Alors $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top JY = 0$. En transposant, et avec $J^\top = -J$, on a $Y^\top JX = 0$.
On applique avec $Y = JX$ : $(JX)^\top(JX) = \|JX\|^2 = 0$.
Par séparation de la norme, $JX = 0$. Or $J^2 = -I_n$ donc $J$ est inversible (d'inverse $-J$).
Donc $JX = 0$ entraîne $X = 0$, puis $x = 0$.

Ainsi $\boxed{b_s \text{ est non dégénérée.}}$

$$\boxed{b_s : (\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée, donc une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n.}$$

**Q 14..** On suppose que $\lambda\mu \neq 1$. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$.
Puisque $u$ est un endomorphisme symplectique, et puisque $\omega$ vérifie la bilinéarité, on a :

$$\omega(x, y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\, \omega(x, y).$$

D'où $(1 - \lambda\mu)\, \omega(x, y) = 0$ or $1 - \lambda\mu \neq 0$, donc $\omega(x, y) = 0$. Finalement, $\forall x \in E_\lambda(u)$, $\forall y \in E_\mu(u)$, $\omega(x, y) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda\mu \neq 1, \text{ alors } E_\lambda(u) \text{ et } E_\mu(u) \text{ sont } \omega\text{-orthogonaux.}}$$

**Q 15..** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans $\mathcal{B}$.
On a montré à la question 13 (sol. 13) que $b_s(x, y) = X^\top JY$.
De plus, le vecteur $u(x)$ est de coordonnées $MX$ dans $\mathcal{B}$, et le vecteur $u(y)$ est de coordonnées $MY$ dans $\mathcal{B}$.

Donc $b_s(u(x), u(y)) = (MX)^\top J(MY) = X^\top M^\top JMY$.

$$\begin{aligned} u \text{ est symplectique dans } (\mathbb{R}^n, b_s) &\iff \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ b_s(u(x), u(y)) = b_s(x,y) \\ &\iff \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^\top M^\top JMY = X^\top JY. \\ &\iff M^\top JM = J \qquad \text{(d'après 1 (sol. 1))} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathbb{R}^n, b_s) \iff M^\top JM = J.}$

**Q 16..** $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\top JM = J\}$.

- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^\top JM = J$ donc $JM^\top JM = J^2 = -I_n$ et $(-JM^\top J)M = I_n$.
  On en déduit que $M$ est inversible d'inverse $-JM^\top J$.
  On a $\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, $M$ est inversible, donc
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}).}$$
- On a $I_n^\top JI_n = J$ donc $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset.}$$
- Soit $(M,N) \in (\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}))^2$. Alors $(MN)^\top J(MN) = N^\top (M^\top JM)N = N^\top JN = J$.
  Donc $MN \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par produit.}}$$
- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^\top JM = J$.
  On multiplie à gauche par $(M^{-1})^\top$ et à droite par $M^{-1}$ : $J = (M^{-1})^\top JM^{-1}$.
  Donc $M^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par passage à l'inverse.}}$$
- On a montré que
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}).}$$
- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On a montré que$(-JM^\top J)M = I_n$ donc $M$ est inversible d'inverse $-JM^\top J$. On a donc également
  $$M(-JM^\top J) = I_n.$$
  En multipliant à droite par $J$, on obtient $MJM^\top = J$, i.e. $M^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
  On a montré que $\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), M^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Donc
  $$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par transposition.}}$$
- On a $J^2 = -I_n$ donc $J^\top JJ = (-J)J^2 = -J(-I_n) = J$.
  Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ contient } J.}$

Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}), \text{ stable par transposition et contenant } J.}$$

**Q 17..** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^4$. Calculons :

$$\begin{aligned}
M^{\mathsf{T}} J M - J &= \begin{pmatrix} A^{\mathsf{T}} & C^{\mathsf{T}} \\ B^{\mathsf{T}} & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{\mathsf{T}} & C^{\mathsf{T}} \\ B^{\mathsf{T}} & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -A^{\mathsf{T}} C + C^{\mathsf{T}} A & -A^{\mathsf{T}} D + C^{\mathsf{T}} B + I_m \\ D^{\mathsf{T}} A - B^{\mathsf{T}} C - I_m & -B^{\mathsf{T}} D + D^{\mathsf{T}} B \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) &\iff M^{\mathsf{T}} J M - J = 0 \\
&\iff \begin{cases} A^{\mathsf{T}} C &= C^{\mathsf{T}} A = (A^{\mathsf{T}} C)^{\mathsf{T}}. \\ B^{\mathsf{T}} D &= D^{\mathsf{T}} B = (B^{\mathsf{T}} D)^{\mathsf{T}}. \\ A^{\mathsf{T}} D - C^{\mathsf{T}} B &= I_m. \\ D^{\mathsf{T}} A - B^{\mathsf{T}} C &= I_m \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} A^{\mathsf{T}} C \text{ et } B^{\mathsf{T}} D \text{ sont symétriques} \\ \text{et } A^{\mathsf{T}} D - C^{\mathsf{T}} B = I_m. \end{cases}}$

## 3 : Déterminant d'une matrice symplectique réelle

**Q 18..** On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $a, b, c, d \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

D'après la question 17 (sol. 17) , $M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $((ac)$ et $(bd)$ sont symétriques et $(ad - bc) = I_1 = (1))$.

Une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est toujours symétrique, donc la condition ci-dessus équivaut à $\det(M) = ad - bc = 1$.

Finalement, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \iff \det(M) = 1 \iff M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).}$

**Q 19..** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix}$, avec $(U, V, W, Z) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^4$. Calculons :

$$\begin{aligned}
JM - MJ &= \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -V & -Z \\ U & W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W & -U \\ Z & -V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -V - W & U - Z \\ U - Z & V + W \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} M=\begin{pmatrix}U & W\\ V & Z\end{pmatrix}\in \mathcal{C}_J &\iff JM-MJ=0\\ &\iff Z=U \text{ et } W=-V\\ &\iff M=\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc $$\boxed{M\in\mathcal{C}_J \iff \exists (U,V)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2,\ M=\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}.}$$

**Q 20..** Soit $M\in\mathcal{C}_J$. D'après la question 19 (sol. 19) , $\exists (U,V)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2,\ M=\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}$.
Calculons :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ iI_m & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -iI_m & I_m\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}I_m & 0\\ iI_m & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U+iV & -V\\ V-iU & U\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}U+iV & -V\\ 0 & U-iV\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les matrices $\begin{pmatrix}I_m & 0\\ iI_m & I_m\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -iI_m & I_m\end{pmatrix}$ sont de déterminant 1, car triangulaires avec des 1 sur la diagonale. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}\\ &=\det\begin{pmatrix}U+iV & -V\\ 0 & U-iV\end{pmatrix}\\ &=\det(U+iV)\det(U-iV)\\ &=\det(U+iV)\det(\overline{U+iV})\\ &=\det(U+iV)\overline{\det(U+iV)}\\ &=|\det(U+iV)|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

En effet, $\forall A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{C}),\ \det(\overline{A})=\overline{\det(A)}$.

D'où $$\boxed{\forall M=\begin{pmatrix}U & -V\\ V & U\end{pmatrix}\in\mathcal{C}_J,\ \det(M)=|\det(U+iV)|^2\geqslant 0.}$$

**Q 21..** $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})$.

- D'après le cours, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
  En effet, $O_n(\mathbb{R})$ contient $I_n$, est stable par produit et par passage à l'inverse.
- D'après la question Q 16, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
- Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe, donc $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
- On a l'inclusion $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})\subset\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, où $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par produit et par passage à l'inverse, donc

$$\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).}$$

- $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, donc une partie de $M_n(\mathbb{R})$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
- Montrons que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est bornée.
  Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc on peut choisir la norme infinie définie par : $\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.
  Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $AA^\top = I_n$ :
  $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ (I_n)_{i,i} = (AA^\top)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(A^\top)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2 = 1.$$
  Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{i,j}| \leqslant 1$, et ainsi $\|A\|_\infty \leqslant 1$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est bornée.
  On a $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est bornée,
  $$\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est bornée.}}$$
- Montrons que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est fermée.
  $$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), M^\top M = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\}) \qquad \text{en posant } f(M) = M^\top M.$$
  $$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), M^\top JM = J\} = g^{-1}(\{J\}) \qquad \text{en posant } g(M) = M^\top JM.$$
  Un singleton est fermé, donc les singletons $\{I_n\}$ et $\{J\}$ sont fermés.
  La transposition $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}\right.$ est continue, car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie.
  Le produit matriciel $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}\right.$ est continu, car bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ de dimension finie.
  Par composition, les deux applications $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top M \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top JM \end{array}\right.$ sont continues.
  L'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermée.
  Donc les parties $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ et $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{J\})$ sont fermées dans $M_n(\mathbb{R})$.
  Une intersection de fermés est fermée, donc
  $$\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est fermée.}}$$
- $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est fermée et bornée, donc c'est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact de } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).}$

**Q 22..** Soit $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$.
Puisque $M \in O_n(\mathbb{R})$, $M$ est inversible d'inverse $M^{-1} = M^\top$.
Puisque $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, on a $M^\top JM = J$ donc $M^{-1}JM = J$.
En multipliant à gauche par $M$, on obtient $JM = MJ$ donc $M \in C_J$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset C_J.}$

**Q 23..** Soit $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$.
Puisque $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^\top M = I_n$ donc $\det(M)^2 = \det(M^\top)\det(M) = \det(M^\top M) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(M)^2 = 1$ et par suite $\boxed{\det(M) = \pm 1.}$
D'après la question 22 (sol. 22) , $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset C_J$ donc $M \in C_J$. D'après la question 20 (sol. 20) , puisque $M \in C_J$, on a de plus $\det(M) \geqslant 0$ d'où $\det(M) = 1$.

Donc $$\boxed{\forall M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1.}$$

**Q 24..** On considère $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ une matrice symplectique.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, symétrique à valeurs propres strictement positives, telle que $S^2 = M^\top M$.
D'après la question 16 (sol. 16) , $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition et par produit, donc la matrice $S^2 = M^\top M$ est symplectique.
Soit $s$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $S$.
Alors $s^2$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $S^2 \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, donc $s^2$ est un endomorphisme symplectique.
La matrice $S$ est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale, de même que l'endomorphisme $s$.
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de $s$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (réelles) de $s$, telles que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ s(v_i) = \lambda_i v_i$.
On remarque que $(v_1, \dots, v_n)$ est aussi formée de vecteurs propres de $s^2$.
D'après la question 14 (sol. 14) , appliquée à l'endomorphisme symplectique $s^2$, si $\lambda^2\mu^2 \neq 1$, les sous-espaces propres $E_{\lambda^2}(s^2)$ et $E_{\mu^2}(s^2)$ sont $b_s$-orthogonaux. Puisque les valeurs propres de $s$ sont strictement positives, la condition $\lambda^2\mu^2 \neq 1$ équivaut à $\lambda\mu \neq 1$.
En particulier :
$$\text{Si } \lambda_i\lambda_j \neq 1,\ \text{alors } b_s(v_i, v_j) = 0.$$
Soit $x \in E$, qui se décompose dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs propres :
$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i v_i. \\ s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i s(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i. \\ s^2(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i s^2(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^2 v_i. \end{cases}$$
Soit $(x, y) \in E^2$ qui se décomposent dans la base de vecteurs propres : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i v_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^n y_j v_j$.
Il vient
$$\begin{aligned} b_s(s^2(x), s^2(y)) &= b_s\left(\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i^2 v_i, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^2 v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda_i\lambda_j)^2 x_i y_j b_s(v_i, v_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} (\lambda_i\lambda_j)^2 x_i y_j b_s(v_i, v_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} x_i y_j b_s(v_i, v_j). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
b_s(s(x), s(y)) &= b_s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j v_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i\lambda_j)x_i y_j b_s(v_i, v_j)\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j=1}(\lambda_i\lambda_j)x_i y_j b_s(v_i, v_j)\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j=1} x_i y_j b_s(v_i, v_j)\\
&= b_s(s^2(x), s^2(y)) = b_s(x, y),
\end{aligned}$$

car $s^2$ est un endomorphisme symplectique.
On a montré que $\forall (x,y) \in E^2,\ b_s(s(x), s(y)) = b_s(x,y)$, donc $s$ est un endomorphisme symplectique.
On en déduit que

$$\boxed{\text{la matrice } S \text{ est symplectique.}}$$

**Q 25..** ◆ On a $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ d'après la question 16 (sol. 16) , donc $M$ est inversible et $\det(M) \neq 0$.
Or $S^2 = M^\top M$ d'où $\det(S)^2 = \det(S^2) = \det(M^\top M) = \det(M^\top)\det(M) = \det(M)^2 \neq 0$.
Donc $\det(S) \neq 0$ et

$$\boxed{S \text{ est inversible.}}$$

◆ On pose $O = MS^{-1}$.
D'une part, les matrices $M$ et $S$ sont symplectiques. D'après la question 16 (sol. 16) , $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse et par produit, donc $S^{-1}$ puis $O = MS^{-1}$ sont également symplectiques.
D'autre part, puisque $S$ est symétrique,

$$O^\top O = (S^{-1})^\top M^\top M S^{-1} = (S^\top)^{-1}(M^\top M)S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

Ainsi $O$ est une matrice orthogonale.
On a donc $O \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$, donc

$$\boxed{O = MS^{-1} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}).}$$

**Q 26..** D'après la question 23 (sol. 23) , puisque $O = MS^{-1} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(O) = 1$.
Or $\det(O) = \det(MS^{-1}) = \det(M)\det(S)^{-1}$, donc $\det(M) = \det(S)$.
La matrice $S$ est diagonalisable et de valeurs propres strictement positives, donc $\det(S) > 0$, d'où $\det(M) > 0$.
Puisque $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, on a $M^\top JM = J$ donc $\det(J) = \det(M^\top JM) = \det(J)\det(M)^2$. Or $J$ est inversible donc $\det(J) \neq 0$ et $\det(M)^2 = 1$. Ainsi $\det(M) = \pm 1$, or $\det(M) > 0$, donc

$$\boxed{\det(M) = 1.}$$

**Q 27..** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\forall x \in E, \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)a$.

- Montrons que $\tau_a^\lambda$ est une transvection de $E$.
  $\tau_a^\lambda : E \longrightarrow E$ est linéaire (par linéarité de l'identité $\mathrm{id}_E$ et par bilinéarité de $\omega$) donc $\tau_a^\lambda$ est bien un endomorphisme de $E$.
  Posons $\forall x \in E, \ell(x) = \omega(a, x)$.
  $\omega$ est bilinéaire donc $\ell$ est linéaire et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
  D'après la question 3 (sol. 3) , $\ell(a) = \omega(a, a) = 0$ donc $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$.
  On en déduit que $\forall x \in E, \tau_a^\lambda(x) = x + \ell(x)a$ avec $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$, donc $\tau_a^\lambda$ est une transvection.
- Montrons que $\tau_a^\lambda$ est un endomorphisme symplectique de $E$. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) &= \omega\Big(x + \lambda\omega(a, x)a, y + \lambda\omega(a, y)a\Big) \\
&= \omega(x, y) + \lambda\omega(x, a)\omega(a, y) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) \\
&\qquad\qquad + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a) \\
&= \omega(x, y) + \lambda\omega(a, y)\Big(\omega(x, a) + \omega(a, x)\Big) \\
&= \omega(x, y)
\end{aligned}$$

  Ainsi $\forall (x, y) \in E^2,\ \omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) = \omega(x, y)$ donc $\tau_a^\lambda$ est un endomorphisme symplectique.

$$\boxed{\text{Donc } \tau_a^\lambda \text{ est une transvection de } E \text{ et un endomorphisme symplectique de } E.}$$

**Q 28..** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) &= \tau_a^\mu\Big(x + \lambda\omega(a, x)a\Big) \\
&= \tau_a^\mu(x) + \lambda\omega(a, x)\tau_a^\mu(a) && \text{car } \tau_a^\mu \text{ est linéaire} \\
&= \tau_a^\mu(x) + \lambda\omega(a, x)a && \text{car } \omega(a, a) = 0 \text{ donc } \tau_a^\mu(a) = a \\
&= x + \mu\omega(a, x)a + \lambda\omega(a, x)a \\
&= x + (\lambda + \mu)\omega(a, x)a \\
&= \tau_a^{\lambda+\mu}(x).
\end{aligned}$$

Donc $$\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}.}$$

**Q 29..** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La famille $(a)$ est libre (car $a$ est non nul) donc on peut la compléter en une base $\mathcal{B}' = (a, e_2, \dots, e_n)$ de $E$. On a

$$\begin{cases} & \tau_a^\lambda(a) &= a. \\ \forall i \in [\![2, n]\!], & \tau_a^\lambda(e_i) &= e_i + \lambda\omega(a, e_i)a. \end{cases}$$

Donc la matrice $T_a^\lambda$ de $\tau_a^\lambda(a)$ dans la base $\mathcal{B}'$ vaut :

$$T_a^\lambda = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^\lambda(a)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda\omega(a, e_2) & \dots & \dots & \lambda\omega(a, e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\det(\tau_a^\lambda) = \det(T_a^\lambda) = 1$.
Finalement, $\forall a \in E \setminus \{0_E\}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \det(\tau_a^\lambda) = 1 > 0$.

**Q 30..** Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^{\lambda-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{id}_E$.
Donc $\tau_a^\lambda$ est bijectif, de bijection réciproque $\tau_a^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{La réciproque } \left(\tau_a^\lambda\right)^{-1} = \tau_a^{-\lambda} \text{ est encore une transvection symplectique.}}$$

**Q 31..** On suppose que $\omega(x,y) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On remarque que $\omega(y-x,x) = \omega(y,x) - \omega(x,x) = \omega(y,x)$ car $\omega(x,x) = 0$. il vient :

$$\begin{aligned}\tau_{y-x}^\lambda(x) &= x + \lambda\omega(y-x,x)(y-x)\\ &= x + \lambda\omega(y,x)(y-x)\\ &= \lambda\omega(y,x)y + (1-\lambda\omega(y,x))x.\end{aligned}$$

On a $\omega(y,x) = -\omega(x,y) \neq 0$. Posons $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(x,y)}$, alors $\lambda\omega(y,x) = 1$ donc $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

$$\boxed{\text{Si } \omega(x,y) \neq 0, \text{ en posant } \lambda = -\frac{1}{\omega(x,y)}, \text{ on a } \tau_{y-x}^\lambda(x) = y.}$$

**Q 32..** On suppose que $\omega(x,y) = 0$.
Pour $v \in E$ un vecteur non nul, on pose $H(v) = \{a \in E,\ \omega(v,a) = 0\}$.
Puisque $\omega$ est bilinéaire, $a \mapsto \omega(v,a)$ est une forme linéaire.
Puisque $\omega$ est non dégénérée et $v$ est non nul, $a \mapsto \omega(v,a)$ est non nulle.
Alors $H(v)$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $a \mapsto \omega(v,a)$, donc un hyperplan de $E$.
Posons

$$\begin{aligned}H(x) &= \{a \in E,\ \omega(x,a) = 0\}.\\ H(y) &= \{a \in E,\ \omega(y,a) = 0\}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $x$ et $y$ sont non nuls, donc $H(x)$ et $H(y)$ sont deux hyperplans de $E$ donc l'union $H(x) \cup H(y) \neq E$. En effet, l'union est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si les deux hyperplans sont égaux, mais dans ce cas l'union est un hyperplan.
Alors il existe $z \in E \setminus (H(x) \cup H(y))$.

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } z \in E \text{ tel que } \omega(x,z) \neq 0 \text{ et } \omega(y,z) \neq 0.}$$

**Q 33..** Démontrons le lemme. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs non nuls de $E$.

- **Premier cas :** $\omega(x,y) \neq 0$.

  D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(x,y) \neq 0$, en posant $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(x,y)}$, on a $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

  On pose $\gamma = \tau_{y-x}^\lambda$. Alors $\gamma(x) = y$ et $\gamma$ est une transvection symplectique.
- **Deuxième cas : $\omega(x,y) = 0$..**

  D'après 32 (sol. 32) , il existe $z \in E$ tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$. En particulier, $z$ est non nul.

  D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(x,z) \neq 0$, en posant $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\omega(x,z)}$, on a $\tau_{z-x}^{\lambda_1}(x) = z$.

D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(z,y) \neq 0$, en posant $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\omega(z,y)}$, on a $\tau_{y-z}^{\lambda_2}(z) = y$.

On pose $\gamma = \tau_{y-z}^{\lambda_2} \circ \tau_{z-x}^{\lambda_1}$. Alors $\gamma(x) = y$ et $\gamma$ est la composée de deux transvections symplectiques.

- **Conclusion :.**

il existe une composée $\gamma$ d'au plus deux transvections symplectiques de $E$, telle que $\gamma(x) = y$.

**Q 34..** Soit $u$ un endomorphisme symplectique de $E$ et $e_1$ un vecteur non nul.

Puisque $\omega$ est non dégénérée et $e_1 \neq 0_E$, il existe $z \in E$ tel que $\omega(e_1, z) \neq 0$. Posons $f_1 = \dfrac{1}{\omega(e_1,z)} z$.

- Par bilinéarité de $\omega$, on a $\omega(e_1, f_1) = \dfrac{1}{\omega(e_1,z)}\omega(e_1, z) = 1$.
- Supposons par l'absurde que $f_1$ est colinéaire à $e_1$. Alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $f_1 = te_1$.
  D'où $1 = \omega(e_1, f_1) = \omega(e_1, te_1) = t\omega(e_1, e_1) = 0$, ce qui est absurde. Donc $e_1$ et $f_1$ ne sont pas colinéaires.

Il existe $f_1 \in E$, non colinéaire à $e_1$, tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

**Q 35..** Montrons qu'un endomorphisme symplectique $u$ est bijectif.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0$. Puisque $u$ est symplectique :

$$\forall y \in E,\ \ \omega(x,y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(0, u(y)) = 0$$

par bilinéarité de $\omega$. Or $\omega$ est non dégénérée, donc $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc $u$ est injectif, or $E$ est de dimension finie donc $u$ est bijectif.
Puisque $e_1 \neq 0$ et $u$ est bijectif, on a $u(e_1) \neq 0$.
Alors $e_1$ et $u(e_1)$ sont deux vecteurs non nuls de $E$.

D'après le lemme, il existe une composée $\delta_1$ d'au plus deux transvections symplectiques, telle que $\delta_1(u(e_1)) = e_1$.

**Q 36..** On a $\omega(e_1, f_1) = 1$ et de plus :

$$\omega(e_1, \widetilde{f_1}) = \omega(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))) = \omega(u(e_1), u(f_1)) = \omega(e_1, f_1) = 1.$$

car $\delta_1$ et $u$ sont des endomorphismes symplectiques.

- **Premier cas :** $\omega(\widetilde{f_1}, f_1) \neq 0$.
  D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(\widetilde{f_1}, f_1) \neq 0$, en posant $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(\widetilde{f_1}, f_1)}$, on a $\tau^{\lambda}_{f_1-\widetilde{f_1}}(\widetilde{f_1}) = f_1$.
  De plus, $\omega(f_1 - \widetilde{f_1}, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(\widetilde{f_1}, e_1) = -1 + 1 = 0$, donc $\tau^{\lambda}_{f_1-\widetilde{f_1}}(\widetilde{f_1})(e_1) = e_1$.
  Ainsi $\delta_2 = \tau^{\lambda}_{f_1-\widetilde{f_1}}$ est une transvection symplectique et convient car $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta_2(\widetilde{f_1}) = f_1$.
- **Deuxième cas :** $\boldsymbol{\omega(\widetilde{f_1}, f_1) = 0}$**..**

- Montrons qu'il existe $z \in E$ tel que $\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0$ et $\omega(f_1, z) \neq 0$ et $\omega(e_1, z) = 1$.
  Pour $v \in E$ un vecteur non nul, on a montré en 32 (sol. 32) que $H(v) = \{a \in E,\ \omega(v, a) = 0\}$ est un hyperplan de $E$. Posons

$$H(\widetilde{f_1}) = \{a \in E,\ \omega(\widetilde{f_1}, a) = 0\}.$$
$$H(f_1) = \{a \in E,\ \omega(f_1, a) = 0\}.$$
$$H(e_1) = \{a \in E,\ \omega(e_1, a) = 0\}.$$

  Les vecteurs $\widetilde{f_1}$, $f_1$ et $e_1$ sont non nuls, donc $H(\widetilde{f_1}), H(f_1)$ et $H(e_1)$ sont trois hyperplans de $E$, donc l'union $H(\widetilde{f_1}) \cup H(f_1) \cup H(e_1) \neq E$. En effet, l'union est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si les trois hyperplans sont égaux, mais dans ce cas l'union est un hyperplan.
  Alors il existe $z_0 \in E \setminus (H(\widetilde{f_1}) \cup H(f_1) \cup H(e_1))$.
  On a donc $\omega(\widetilde{f_1}, z_0) \neq 0$ et $\omega(f_1, z_0) \neq 0$ et $\omega(e_1, z_0) \neq 0$.
  En posant $z = \dfrac{1}{\omega(e_1, z_0)} z_0$, on a

$$\boxed{\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0 \text{ et } \omega(f_1, z) \neq 0 \text{ et } \omega(e_1, z) = 1.}$$

- On utilise le vecteur $z$ obtenu.
  D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0$, en posant $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\omega(\widetilde{f_1}, z)}$, on a $\tau^{\lambda_1}_{z-\widetilde{f_1}}(\widetilde{f_1}) = z$.
  D'après 31 (sol. 31) , puisque $\omega(z, f_1) \neq 0$, en posant $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\omega(z, f_1)}$, on a $\tau^{\lambda_2}_{f_1-z}(z) = f_1$.
  On pose $\delta_2 = \tau^{\lambda_2}_{f_1-z} \circ \tau^{\lambda_1}_{z-\widetilde{f_1}}$. $\delta_2$ est la composée de deux transvections symplectiques.

$$\omega(z - \widetilde{f_1}, e_1) = \omega(z, e_1) - \omega(\widetilde{f_1}, e_1) = -1 + 1 = 0, \quad \text{donc } \tau^{\lambda_1}_{z-\widetilde{f_1}}(e_1) = e_1.$$
$$\omega(f_1 - z, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(z, e_1) = -1 + 1 = 0, \quad \text{donc } \tau^{\lambda_2}_{f_1-z}(e_1) = e_1.$$

  $\delta_2$ convient car $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta_2(\widetilde{f_1}) = f_1$.

◆ Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe une composée } \delta_2 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques, telle que } \begin{cases} \delta_2(e_1) &= e_1 \\ \delta_2(\widetilde{f_1}) &= f_1 \end{cases}}$$

**Q 37..** La famille $(e_1, f_1)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de $P = \mathrm{vect}(e_1, f_1)$, donc $(e_1, f_1)$ est une base de $P$.
D'après la condition **(III.1)**, on a $v(e_1) = \delta \circ u(e_1) = e_1$ et $v(e_2) = \delta \circ u(e_2) = e_2$.
Soit $x \in P$. $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, x = \lambda e_1 + \mu f_1$, donc par linéarité de $v$, $v(x) = \lambda v(e_1) + \mu v(f_1) = \lambda e_1 + \mu f_1 = x \in P$.
On a $\forall x \in P, v(x) \in P$ donc

$$\boxed{P \text{ est stable par } v.}$$

De plus, $\boxed{v_P = \mathrm{id}_P \text{ est l'endomorphisme induit par } v \text{ sur } P.}$

**Q 38..** Montrons que $v$ est un endomorphisme symplectique.
Soient $u_1$ et $u_2$ deux endomorphismes symplectiques de $(E,\omega)$. Alors

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \omega(u_1\circ u_2(x),u_1\circ u_2(y))=\omega(u_2(x),u_2(y))=\omega(x,y),$$

donc $u_1\circ u_2$ est un endomorphisme symplectique.
Puisque $v$ est une composée d'endomorphismes symplectiques, $v$ est un endomorphisme symplectique.
Par définition, $P^\omega=\{x\in E,\forall y\in P,\omega(x,y)=0\}$.
Soit $x\in P^\omega$. Soit $y\in P$. D'après la question 37 (sol. 37) , $v(y)=y$. En utilisant que $v$ est symplectique :

$$\omega(v(x),y)=\omega(v(x),v(y))=\omega(x,y)=0$$

car $x\in P^\omega$ et $y\in P$.
On a $\forall y\in P,\omega(v(x),y)=0$, d'où $v(x)\in P^\omega$. Finalement

$$\boxed{P^\omega \text{ est stable par } v.}$$

**Q 39..** 
- Soit $x\in P\cap P^\omega$. Puisque $x\in P=\mathrm{vect}(e_1,f_1)$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x=\lambda e_1+\mu f_1$. On utilise que $x\in P^\omega$ et que les vecteurs $e_1,f_1$ sont dans $P$. On rappelle que $\omega(e_1,f_1)=1$.

$$\begin{aligned}0=\omega(x,e_1)=\omega(\lambda e_1+\mu f_1,e_1) &=\lambda\omega(e_1,e_1)+\mu\omega(f_1,e_1)=-\mu.\\ 0=\omega(x,f_1)=\omega(\lambda e_1+\mu f_1,f_1) &=\lambda\omega(e_1,f_1)+\mu\omega(f_1,f_1)=\lambda.\end{aligned}$$

  Donc $\lambda=\mu=0$ et $x=0_E$. On a $P\cap P^\omega=\{0_E\}$.
  Or $\dim(P)+\dim(P^\omega)=\dim(E)$, donc

$$\boxed{P\oplus P^\omega=E.}$$

- On a $$\forall x\in P,\ \forall y\in P^\omega,\ \omega(x,y)=-\omega(y,x)=0,$$
  donc $P\subset(P^\omega)^\omega$. De plus,

$$\dim((P^\omega)^\omega)=\dim(E)-\dim(P^\omega)=\dim(P).$$

  Donc $P=(P^\omega)^\omega$. On en déduit que

$$\boxed{(P^\omega)^\omega\oplus P^\omega=E.}$$

  D'après la question 9 (sol. 9) ,

$$\boxed{\text{la restriction } \omega_{P^\omega} \text{ de } \omega \text{ à } (P^\omega)^2 \text{ définit une forme symplectique sur } P^\omega.}$$

- Puisque l'endomorphisme $v$ est symplectique :

$$\forall (x,y)\in(P^\omega)^2,\ \omega(v_{P^\omega}(x),v_{P^\omega}(y))=\omega(v(x),v(y))=\omega(x,y).$$

  Donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } v_{P^\omega}\text{, induit par } v \text{ sur } P^\omega\text{, est symplectique.}}$

**Q 40..** Démontrons le théorème par récurrence sur $m\geqslant 1$, où $\dim(E)=n=2m$.

$(H_m)$ : Soit $(E,\omega)$ un espace symplectique de dimension $2m$. Soit $u\in\mathrm{Symp}_\omega(E)$. Il existe un entier $p\leqslant 4m$ et $\tau_1,\ldots,\tau_p$ des transvections symplectiques de $\mathbb{R}^n$, telles que $u=\tau_p\circ\ldots\circ\tau_1$.

- **Initialisation :** $m = 1$. Soit $(E, \omega)$ un espace symplectique de dimension 2. Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$.
  On fixe $e_1 \in E$ non nul puis on construit $f_1$ comme dans la question 34 (sol. 34) . On a donc $P = \mathrm{vect}(e_1, f_1) = E$.
  Par la question 36 (sol. 36) , il existe $\delta$ composée d'au plus $4 = 4m$ transvections symplectiques de $E$, telle que $v = \delta \circ u$, et on a montré que $v = v_P = \mathrm{id}_P = \mathrm{id}_E$. Donc $u = \delta^{-1}$ est la composée d'au plus 4 bijections réciproques de transvections symplectiques de $E$, qui sont encore des transvections symplectiques par 30 (sol. 30) .
- **Hérédité : $(H_{m-1}) \Rightarrow (H_m)$..** Supposons le résultat vrai au rang $(m-1)$ et montrons-le au rang $m$.
  Soit $(E, \omega)$ un espace symplectique de dimension $2m$. Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$.
  On fixe $e_1 \in E$ non nul puis on construit $f_1$ comme dans la question 34 (sol. 34) . On pose $P = \mathrm{vect}(e_1, f_1)$.
  Par la question 36 (sol. 36) , il existe $\delta$ composée d'au plus 4 transvections symplectiques de $E$, telle que $v = \delta \circ u$. Par la question 37 (sol. 37) , $P$ est stable par $v$ et $v_P = \mathrm{id}_P$.
  Par les questions 38 (sol. 38) et 39 (sol. 39) , $P^\omega$ est stable par $v$ ; $(P^\omega, \omega_{P^\omega})$ est un espace symplectique de dimension $\dim(P^\omega) = \dim(E) - \dim(P) = 2m - 2$ ; $v_{P^\omega}$ est un endomorphisme symplectique de $P^\omega$.
  Par hypothèse de récurrence, appliquée à l'endomorphisme symplectique $v_{P^\omega}$, il existe un entier $p \leqslant 4(m-1)$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $P^\omega$, telles que

$$v_{P^\omega} = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1.$$

  De plus, chaque transvection $\tau_k$ est de la forme $\tau_k = \tau_{a_k}^{\lambda_k}$ avec $a_k \in P^\omega$ non nul et $\lambda_k \in \mathbb{R}$. D'où

$$\forall x \in P,\ \tau_k(x) = \tau_{a_k}^{\lambda_k} = x + \lambda_k \underbrace{\omega(a_k, x)}_{=0} = x = \mathrm{id}_P(x) = v_P(x).$$

  Ainsi la transvection $\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$ coïncide avec $v$ sur $P$ et sur $P^\omega$, donc sur $E$ par linéarité et car $E = P \oplus P^\omega$. On a donc

$$\delta \circ u = v = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1.$$

  donc

$$u = \delta^{-1} \circ v = \delta^{-1} \circ \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1,$$

  où $\delta^{-1}$ est la composée d'au plus 4 bijections réciproques de transvections symplectiques de $E$, qui sont des transvections symplectiques par 30 (sol. 30) .
  Finalement, $u$ est la composée d'au plus $p + 4 \leqslant 4(m-1) + 4 = 4m$ transvections symplectiques de $E$, ce qui achève la récurrence.

  On a donc démontré le théorème par récurrence sur $m$.

**Q 41..** Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ où $n = 2m$ est pair.
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$. D'après 15 (sol. 15) , $u$ est un endomorphisme symplectique.
D'après le théorème démontré en question 40 (sol. 40) , il existe un entier $p \leqslant 4m$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $\mathbb{R}^n$, telles que $u = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un vecteur non nul $a_k \in E$ et un réel $\lambda_k$, tels que $\tau_k = \tau_{a_k}^{\lambda_k}$.
Si $a \in E$ est un vecteur non nul et $\lambda$ un réel, on note $T_a(\lambda)$ la matrice de la transvection symplectique $\tau_a^\lambda$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
On a donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau_{a_1}^{\lambda_1} \circ \ldots \circ \tau_{a_p}^{\lambda_p}) = T_{a_1}(\lambda_1) \times \ldots \times T_{a_p}(\lambda_p).$$

Posons

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = T_{a_1}(t\lambda_1) \times \ldots \times T_{a_p}(t\lambda_p). \end{array} \right.$$

- Chaque matrice $T_{a_k}(t\lambda_k)$ est la matrice d'une transvection symplectique, donc est une matrice symplectique.
  De plus $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, donc $\forall t \in [0,1],\ \gamma(t) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. L'application $\gamma$ est bien à valeurs dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$, on a $\tau_a^0 = \mathrm{id}_E$ donc $T_a(0) = I_n$ donc

$$\boxed{\gamma(0) = I_n.}$$

- On a clairement $\boxed{\gamma(1) = M.}$
- Montrons que l'application $t \mapsto T_a(t\lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Comme dans la question 29 (sol. 29) , on complète la famille libre $(a)$ en une base $\mathcal{B}' = (a, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$. Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$P^{-1}T_a(t\lambda)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^{t\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & t\lambda\omega(a,e_2) & \ldots & \ldots & t\lambda\omega(a,e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Les coefficients de cette matrice sont polynomiaux en $t$, et le produit matriciel est continu, donc l'application $t \mapsto T_a(t\lambda) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^{t\lambda})P^{-1}$ est continue.
  Le produit matriciel est continu donc

$$\boxed{\gamma \text{ est une application continue sur } [0,1].}$$

- Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence :

$$\forall (M,N) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})^2,\ M \,\mathcal{R}\, N \Longleftrightarrow M \text{ et } N \text{ sont JPCC}^{1}\ \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$$

  On vient de montrer que $\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), I_n \,\mathcal{R}\, M$.
  Soit $(M,N) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})^2$. Par transitivité et symétrie de $\mathcal{R}$, $I_n \mathcal{R} M$ et $I_n \mathcal{R} N$ implique $M \mathcal{R} N$. Donc

$$\boxed{\text{le groupe symplectique } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

**Q 42..** Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ où $n = 2m$ est pair.
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$. D'après 15 (sol. 15) , $u$ est un endomorphisme symplectique.

D'après le théorème démontré en question 40 (sol. 40) , il existe un entier $p \leqslant 4m$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $\mathbb{R}^n$, telles que $u = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$.
On a montré à la question 29 (sol. 29) qu'une transvection symplectique est de déterminant 1.
Ainsi, $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \det(\tau_k) = 1$. Il vient

$$\det(M) = \det(u) = \det(\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1) = \prod_{k=1}^{p} \det(\tau_k) = 1,$$

donc $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. On a donc l'inclusion

$$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).}$$

## 4 : Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

**Q 43..** Soit $r > 0$ et $t > 0$. Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$ est la matrice diagonale $U = \mathrm{Diag}(r, t, \ldots, t, r, t, \ldots, t)$, c'est à dire

$$U_{i,i} = \begin{cases} r & \text{si } i = 1 \text{ ou } i = m+1, \\ t & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\det(U) = r^2 t^{2m-2} = 1 \iff rt^{m-1} = 1 \iff t = (1/r)^{1/(m-1)}.$$

Pour cette valeur de $t$, on a $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$.
Soit $(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) \in B^{2m}(1)$, alors :

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 + y_1^2 + \ldots + y_m^2 \leqslant 1 \ \Rightarrow\ x_1^2 + y_1^2 \leqslant 1.$$

De plus

$$u(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) = (rx_1, tx_2, \ldots tx_m, ry_1, ty_2, \ldots ty_m).$$

Ce vecteur vérifie :

$$(rx_1)^2 + (ry_1)^2 = r^2(x_1^2 + y_1^2) \leqslant r^2,$$

donc $u(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) \in Z^{2m}(r)$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } r > 0, \text{ il existe } u \in SL(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que } u(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r).}$$

**Q 44..** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de $U$.

- **Premier cas : $\lambda \in \mathbb{R}$..**
  Soit $X \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre (donc non nul) de $U$ associé à $\lambda$ : $UX = \lambda X$.
  Quitte à diviser $X$ par sa norme, on suppose que $X$ est de norme 1 : $\|X\| = 1$.
  Puisque $X \in B^{2m}(1)$ et $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, on a $\|UX\| \leqslant r$. Or

$$\|UX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\| = |\lambda| \leqslant r \ \text{ donc } \ |\lambda| \leqslant r.$$

- **Deuxième cas : $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$..**
  Soit $Z \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre (donc non nul) de $U$ associé à $\lambda$ : $UZ = \lambda Z$.
  On pose $Z = P + iQ$ où $P, Q \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$0 \neq Z^{\mathsf{T}}\overline{Z} = (P+iQ)^{\mathsf{T}}(P-iQ) = P^{\mathsf{T}}P + Q^{\mathsf{T}}Q + i\underbrace{(Q^{\mathsf{T}}P - P^{\mathsf{T}}Q)}_{=0} = \|P\|^2 + \|Q\|^2.$$

  D'où

$$(\lambda Z)^{\mathsf{T}}\overline{(\lambda Z)} = |\lambda|^2 Z^{\mathsf{T}}\overline{Z} = |\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right).$$

  Par ailleurs, puisque la matrice $U$ est réelle :

$$\begin{aligned}(\lambda Z)^{\mathsf{T}}\overline{(\lambda Z)} &= (UZ)^{\mathsf{T}}\overline{(UZ)}\\ &= (UP+iUQ)^{\mathsf{T}}(UP-iUQ)\\ &= (UP)^{\mathsf{T}}(UP) + (UQ)^{\mathsf{T}}(UQ) + 0\\ &= \|UP\|^2 + \|UQ\|^2.\end{aligned}$$

  Il vient $$\boxed{\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right).}$$

  Or $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, donc $\|UP\| \leqslant r\|P\|$ et $\|UQ\| \leqslant r\|Q\|$. Il vient

$$\begin{aligned}|\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right) &= \|UP\|^2 + \|UQ\|^2\\ &\leqslant r^2\|P\|^2 + r^2\|Q\|^2\\ &= r^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right).\end{aligned}$$

  D'où $|\lambda|^2 \leqslant r^2$ et $|\lambda| \leqslant r$.

**Q 45..** L'endomorphisme $u$ vérifie $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ donc $\det(u) = 1$. Ainsi sa matrice $U$ vérifie $\det(U) = 1$.
D'après 44 (sol. 44) , on a $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U),\ |\lambda| \leqslant r$.
Par trigonalisation de $U$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(U)$ est le produit des valeurs propres complexes de $U$, comptées avec multiplicité :

$$\begin{aligned}1 = |\det(U)| &= \left|\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}(U)}} \lambda\right|\\ &= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U)} |\lambda|\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{2m} r = r^{2m}.\end{aligned}$$

Donc $1 \leqslant r^{2m}$. Supposons par l'absurde que $0 < r < 1$, alors $r^{2m} \leqslant r < 1$, ce qui est absurde. D'où $1 \leqslant r$.

**Q 46..** Soit $r > 0$.

- D'après 45 (sol. 45) , s'il existe $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, alors $1 \leqslant r$.
- Réciproquement, supposons que $1 \leqslant r$. Posons $u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2m}} \in SL(\mathbb{R}^{2m})$.
  Alors $u(B^{2m}(1)) = B^{2m}(1) \subset B^{2m}(r)$ car $1 \leqslant r$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } r > 0, \text{ il existe } u \in SL(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que} \\ u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r) \iff (1 \leqslant r)\end{array}}$$

**Q 47..** $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
D'après la question 15 (sol. 15) , un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ est symplectique si et seulement si sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est symplectique.
$\psi$ est un endomorphisme symplectique, donc sa matrice $M$ dans $\mathcal{B}$ est symplectique : $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
D'après la question 16 (sol. 16) , $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition, d'où $M^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Donc $\psi^\top$, qui est de matrice $M^\top$ dans $\mathcal{B}$, est un endomorphisme symplectique.
En particulier, on a :

$$b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)) = b_s(e_1, f_1) =< e_1, j(f_1) >=< e_1, -e_1 >= -\|e_1\|^2 = -1.$$

Ainsi $$\boxed{\left|b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1))\right| = 1.}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} 1 = \left|b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1))\right| &= \left| < \psi^\top(e_1), j(\psi^\top(f_1)) > \right| \\ &\leqslant \|\psi^\top(e_1)\| \, \|j(\psi^\top(f_1))\| \\ &= \|\psi^\top(e_1)\| \, \|\psi^\top(f_1)\|. \end{aligned}$$

En effet, l'endomorphisme $j$ conserve la norme, car $J^\top J = I_{2m}$ donc $J \in O_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
Supposons par l'absurde que $\|\psi^\top(e_1)\| < 1$ et $\|\psi^\top(f_1)\| < 1$.
Alors $1 \leqslant \|\psi^\top(e_1)\| \, \|\psi^\top(f_1)\| < 1$, ce qui est absurde.
D'où

$$\boxed{\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1 \text{ ou } \|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1.}$$

**Q 48..** D'après la question 47 (sol. 47) , on a $\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1$ ou $\|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1$.
On a $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ de coordonnées respectives $X$ et $Y$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ :

$$< \psi(x), y >= (MX)^\top Y = X^\top M^\top Y = \left\langle x \, ; \, \psi^\top(y) \right\rangle.$$

- **Premier cas : on suppose que** $\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1$.
  Posons $v = \dfrac{1}{\|\psi^\top(e_1)\|}\psi^\top(e_1)$. Alors $\|v\| = 1$, donc $v \in B^{2m}(1)$ et $\psi(v) \in Z^{2m}(r)$.
  Ainsi $$\langle \psi(v) \, ; \, e_1 \rangle^2 + \langle \psi(v) \, ; \, f_1 \rangle^2 \leqslant r^2.$$
  On obtient
  $$r^2 \geqslant \; < \psi(v), e_1 >^2 =< v, \psi^\top(e_1) >^2 \; = \|\psi^\top(e_1)\|^2 \geqslant \; 1.$$
  Donc $1 \leqslant r$.
- **Deuxième cas : on suppose que $\|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1$..**
  Posons $v = \dfrac{1}{\|\psi^\top(f_1)\|}\psi^\top(f_1)$. Alors $\|v\| = 1$, donc $v \in B^{2m}(1)$ et $\psi(v) \in Z^{2m}(r)$.
  Ainsi $$\langle \psi(v) \, ; \, e_1 \rangle^2 + \langle \psi(v) \, ; \, f_1 \rangle^2 \leqslant r^2.$$

On obtient

$$r^2 \geqslant \ < \psi(v), f_1 >^2 =< v, \psi^{\mathsf{T}}(f_1) >^2 \ = \|\psi^{\mathsf{T}}(f_1)\|^2 \geqslant \ 1.$$

Donc $1 \leqslant r$.

Dans les deux cas, on obtient $\boxed{1 \leqslant r.}$

**Q 49..** Soient $R > 0$ et $R' > 0$.

- On suppose qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $\psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R')$. Par linéarité de $\psi$,

$$R\psi(B^{2m}(1)) = \psi(RB^{2m}(1)) = \psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R').$$

Donc

$$\psi(B^{2m}(1)) \subset \frac{1}{R} Z^{2m}(R') = Z^{2m}\left(\frac{R'}{R}\right).$$

D'après 48 (sol. 48) , puisque $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifie $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(R'/R)$, on a $1 \leqslant \dfrac{R'}{R}$ donc $R \leqslant R'$.

- Réciproquement, supposons que $R \leqslant R'$. Posons $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2m}} \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$.
Soit $(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) \in B^{2m}(R)$, alors :

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 + y_1^2 + \ldots + y_m^2 \leqslant R^2 \ \Rightarrow \ x_1^2 + y_1^2 \leqslant R^2 \leqslant (R')^2.$$

D'où $\psi(B^{2m}(R)) = B^{2m}(R) \subset Z^{2m}(R')$.

Pour $R > 0$ et $R' > 0$, il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $\psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R')$ si et seulement si $R \leqslant R'$.