CPGE **Moulay Youssef**
Rabat

Sujet de concours

Centrale

Session 2018

MATHÉMATIQUES 2

Rédigé par SADIK OMAR
https://texbouja.github.io/cpge-preparation

MP

ÉNONCÉ

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

- Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$D(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < R\}$$
La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a, R)}$.
- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$
- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in U, \quad \Delta f(x) = 0$$
L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est noté $\mathcal{H}(U)$.

I : Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

1 Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

2 Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

3 On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

4 Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II : Exemples de fonctions harmoniques

II.A : Fonctions harmoniques à variables séparables

On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = u(x)v(y).$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

5 Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations :

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0.$$

6 Donner, en fonction du signe de λ, la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B : Fonctions harmoniques radiales

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

7 Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

8 Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

9 Exprimer également $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

10 Montrer que f appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$

11 Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

12 Soient a, b, r_1 et r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta f = 0, \\ f(x,y) = a \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_1, \\ f(x,y) = b \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_2. \end{cases}$$

II.C : Fonctions harmoniques à variables polaires séparables

Dans cette sous-partie, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta).$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

13 Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

14 Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1) :

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0 \quad \text{(II.1)},$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2) :

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \quad \text{(II.2)}.$$

II.C.1 – Cas $\lambda = 0$

15 Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

16 Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^+$.

17 En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2 – Cas $\lambda \neq 0$

18 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

19 Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^+$.

20 Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

III : III – Principe du maximum faible

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible :

Si f est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, alors

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y),$$

où ∂U désigne la frontière de U.

III.A : Cas général

21 Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$.

22 On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in U$, $\Delta f(x) > 0$. Montrer que $x_0 \in \partial U$ et en déduire que $\forall x \in U$, $f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

III.B : Application aux fonctions harmoniques

23 Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$. Montrer que g_ε est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et telle que $\forall x \in U$, $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

24 En déduire que $\forall x \in U$, $f(x) \leqslant \sup_{y\in\partial U} f(y)$.

25 Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur ∂U, alors f_1 et f_2 sont égales sur U.

IV : IV – Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

On dit qu'une fonction f, définie sur $D(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs complexes, se développe en série entière sur $D(0,R)$ s'il existe une suite complexe (a_n) telle que :

$$\forall (x,y) \in D(0,R), \quad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n.$$

Dans toute cette partie, f désigne une fonction se développant en série entière sur $D(0,R)$.

IV.A : Propriétés de base

26 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0,R)$ et que ses dérivées partielles se développent en série entière sur $D(0,R)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

27 On note u et v les parties réelle et imaginaire de f, de sorte que, quel que soit $(x,y) \in D(0,R)$,

$$u(x,y) \in \mathbb{R}, \quad v(x,y) \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Montrer que u et v sont des fonctions harmoniques sur $D(0,R)$.

IV.B : Fonctions inverses et produits

28 On admet le résultat suivant : une fonction h de $D(0,R)$ dans $\mathbb{C}$ se développe en série entière sur $D(0,R)$ si et seulement si h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0,R)$ et pour tout $(x,y)\in D(0,R)$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$.

Montrer que si f ne s'annule pas sur $D(0,R)$, alors $1/f$ se développe en série entière sur $D(0,R)$.

29 Montrer que la fonction uv est harmonique sur $D(0,R)$.

IV.C : Fonctions harmoniques et séries entières

30 Soit g une fonction de $D(0,R)\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est harmonique. Montrer que la fonction h définie sur $D(0,R)$ par

$$h : (x,y) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

se développe en série entière sur $D(0,R)$.

31 Montrer que si g appartient à $\mathcal{H}(D(0,R))$, alors il existe une fonction H se développant en série entière sur $D(0,R)$ telle que g est la partie réelle de H.

IV.D : Propriétés supplémentaires

32 Montrer que pour tout $r\in[0,R[$, on a :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt.$$

33 Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

34 Montrer que $\forall r\in[0,R[$,

$$|f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|.$$

35 Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

36 Montrer que si $|f|$ admet un maximum en 0, alors f est constante sur $D(0,R)$.

37 Montrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.

V : V – Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème de Dirichlet sur le disque unité; autrement dit, il s'agit de déterminer, s'il y en a, la ou les fonctions f définies et continues sur $D(0,1)$ (disque fermé), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(0,1)$, et telles que :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } D(0,1), \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(\cos(t), \sin(t)) = h(t). \end{cases}$$

Pour cela, on pose, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,dt \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(t,z) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \quad (\text{Re désigne la partie réelle}).$$

38 Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$ et calculer son développement en série entière. En déduire que la fonction $(x,y) \mapsto g(x+iy)$ est une fonction harmonique sur $D(0,1)$.

39 Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z)\,dt = 1$.

40 Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,dt$.

41 Montrer que, pour tout $r \in [0,1[$ et tous réels t et θ,

$$\mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}.$$

42 Montrer que, pour tout $\delta \in [0,\pi[$ et tout réel φ, $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,dt \to 0$ lorsque $|z| \to 1$.

43 En utilisant le théorème de Heine, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,dt + \varepsilon.$$

44 Montrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet étudié dans cette partie.

CORRIGÉ

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

1 On a $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. La fonction nulle est harmonique. Soient $f, g \in \mathcal{H}(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+\lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est linéaire, donc $\Delta(f+\lambda g) = \Delta(f) + \lambda\Delta(g) = 0$. Ainsi, $f+\lambda g \in \mathcal{H}(U)$, et $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

2 Supposons que $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}(U)$. Soit $p \in \mathbb{N}$, posons $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_p}} = g$. Par application du théorème de Schwartz et de la linéarité de l'opérateur dérivée partielle, on a :

$$\Delta(g) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = 0.$$

Ainsi, $g \in \mathcal{H}(U)$.

3 Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Donc :

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Ainsi, $\Delta(f^2) = 0$ si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + f\Delta(f) = 0.$$

Comme $f \in \mathcal{H}(U)$, $\Delta(f) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$. Cela implique que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Ainsi, f est constante sur U.
Réciproquement, toute fonction constante sur U vérifie $f^2 \in \mathcal{H}(U)$. Donc l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ telles que $f^2 \in \mathcal{H}(U)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur U.

4 L'application $f : x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_1$ est harmonique, car $\Delta(f) = 0$. Cependant, f^2 n'est pas harmonique, car $\Delta(f^2) = 2 \neq 0$. Ainsi, le produit de deux fonctions harmoniques sur U n'est pas nécessairement harmonique sur U.

5 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\Delta(f)(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y).$$

Comme f est harmonique, $\Delta(f)=0$, donc :

$$u''(x)v(y)+u(x)v''(y)=0.$$

Puisque f n'est pas identiquement nulle, il existe $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0,y_0)\neq 0$, c'est-à-dire $u(x_0)v(y_0)\neq 0$. Ainsi, $u(x_0)\neq 0$ et $v(y_0)\neq 0$.
En divisant par $u(x)v(y)$, on obtient :

$$\frac{u''(x)}{u(x)}=-\frac{v''(y)}{v(y)}.$$

Cette égalité doit être valable pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, donc les deux membres sont égaux à une constante réelle λ. Ainsi :

$$u''(x)+\lambda u(x)=0 \quad \text{et} \quad v''(y)-\lambda v(y)=0.$$

6 — Si $\lambda=0$, alors f est de la forme :

$$f(x,y)=(ax+b)(cy+d),$$

où a,b,c,d sont des constantes arbitraires.

— Si $\lambda>0$, alors f est de la forme :

$$f(x,y)=\left(a\cos(\sqrt{\lambda}x)+b\sin(\sqrt{\lambda}x)\right)\left(ce^{\sqrt{\lambda}y}+de^{-\sqrt{\lambda}y}\right),$$

où a,b,c,d sont des constantes arbitraires.

— Si $\lambda<0$, alors f est de la forme :

$$f(x,y)=\left(ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)\left(c\cos(\sqrt{-\lambda}y)+d\sin(\sqrt{-\lambda}y)\right),$$

où a,b,c,d sont des constantes arbitraires.

7 L'application $h:(r,\theta)\mapsto(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, car ses composantes le sont. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, la composée $g=f\circ h$ est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.

8 On a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)),$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

9 On a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial}$$

10 En utilisant les expressions des dérivées partielles de g, on montre que :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+r\frac{\partial g}{\partial r}=r^2\Delta(f).$$

Ainsi, f est harmonique si et seulement si $\Delta(f)=0$, ce qui équivaut à :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+r\frac{\partial g}{\partial r}=0.$$

11 Si f est radiale, alors $g(r,\theta)=g(r)$. Ainsi, $\frac{\partial g}{\partial \theta}=0$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=0$. L'équation harmonique se réduit à :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+r\frac{\partial g}{\partial r}=0.$$

En posant $z(r)=g(r)$, on obtient l'équation différentielle :

$$r^2 z''(r)+rz'(r)=0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$z(r)=\lambda\ln(r)+\mu,$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires. Ainsi, les fonctions harmoniques radiales sont de la forme :

$$f(x,y)=\lambda\ln(\sqrt{x^2+y^2})+\mu.$$

12 D'après la question précédente, les fonctions harmoniques radiales sont de la forme :

$$f(x,y)=\lambda\ln(\sqrt{x^2+y^2})+\mu.$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{cases}\lambda\ln(r_1)+\mu=a,\\ \lambda\ln(r_2)+\mu=b.\end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$\lambda=\frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)},\quad \mu=a-\frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)}\ln(r_1).$$

Ainsi, la fonction cherchée est :

$$f(x,y)=\frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)}\ln(\sqrt{x^2+y^2})+a-\frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)}\ln(r_1).$$

13 On a :

$$f(r\cos(\theta+2\pi), r\sin(\theta+2\pi)) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Ainsi, $u(r)v(\theta+2\pi) = u(r)v(\theta)$. Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $u(r_0)v(\theta_0) \neq 0$. Par conséquent, $u(r_0) \neq 0$, et donc $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, v est 2π-périodique.

14 Si f est harmonique, alors $\Delta(f) = 0$. En coordonnées polaires, cela donne :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial g}{\partial r} = 0,$$

où $g(r,\theta) = u(r)v(\theta)$. En substituant, on obtient :

$$r^2u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0.$$

En divisant par $u(r)v(\theta)$ (qui est non nul car f n'est pas identiquement nulle), on a :

$$r^2\frac{u''(r)}{u(r)} + r\frac{u'(r)}{u(r)} = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}.$$

Les deux membres de cette équation doivent être égaux à une constante réelle λ. Ainsi, on obtient les deux équations différentielles :

$$r^2u''(r) + ru'(r) - \lambda u(r) = 0 \quad \text{(II.1)},$$

et

$$v''(\theta) + \lambda v(\theta) = 0 \quad \text{(II.2)}.$$

15 Si $\lambda = 0$, l'équation (II.2) devient :

$$v''(\theta) = 0.$$

Les solutions générales sont de la forme :

$$v(\theta) = A\theta + B,$$

où A et B sont des constantes. Pour que v soit 2π-périodique, il faut que $A = 0$. Ainsi, les solutions 2π-périodiques sont les fonctions constantes :

$$v(\theta) = B.$$

16 Si $\lambda = 0$, l'équation (II.1) devient :

$$r^2z''(r) + rz'(r) = 0.$$

En posant $w(r) = z'(r)$, on obtient :

$$r^2w'(r) + rw(r) = 0.$$

Cette équation se résout en :

$$w(r) = \frac{C}{r},$$

où C est une constante. En intégrant, on trouve :

$$z(r) = C\ln(r) + D,$$

où D est une autre constante. Ainsi, les solutions de (II.1) sont de la forme :

$$z(r) = C\ln(r) + D.$$

17 D'après les questions précédentes, si $\lambda = 0$, alors $v(\theta) = B$ et $u(r) = C\ln(r) + D$. Ainsi, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont de la forme :

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (C\ln(r) + D)B.$$

En posant $\alpha = CB$ et $\beta = DB$, on obtient :

$$f(x, y) = \alpha\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \beta.$$

18 L'équation (II.2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Les solutions générales sont de la forme :

$$v(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Pour que v soit 2π-périodique, il faut que $\sqrt{\lambda}$ soit un entier $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante est que $\lambda = k^2$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions 2π-périodiques non nulles sont alors de la forme :

$$v(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta).$$

19 L'équation (II.1) est une équation d'Euler. En posant $z(r) = Z(\ln(r))$, on obtient :

$$Z''(\ln(r)) - Z'(\ln(r)) + Z'(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r)) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r)) = 0.$$

Les solutions générales sont de la forme :

$$Z(\ln(r)) = Ae^{\sqrt{\lambda}\ln(r)} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ln(r)} = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}.$$

Ainsi, les solutions de (II.1) sont de la forme :

$$z(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}.$$

20 Pour que $z(r)$ soit prolongeable par continuité en 0, il faut que $B = 0$ si $\lambda > 0$ (car $r^{-\sqrt{\lambda}}$ diverge en 0). Si $\lambda < 0$, aucune solution ne se prolonge par continuité en 0 sauf la solution nulle. Ainsi, les solutions prolongeables par continuité en 0 sont de la forme :

$$z(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} \quad \text{si } \lambda > 0.$$

21 Comme U est un ouvert borné, son adhérence $\overline{U}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact. La fonction f est continue sur $\overline{U}$, donc elle est bornée et atteint sa borne supérieure en un point $x_0 \in \overline{U}$.

22 Supposons par l'absurde que $x_0 \in U$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet un maximum en x_0, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $\Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\Delta f(x_0) > 0$. Par conséquent, $x_0 \in \partial U$. Ainsi, $\sup_{y\in U} f(y) = \sup_{y\in\partial U} f(y) = f(x_0)$. Comme $x_0 \in \partial U$, on a $\forall x \in U$, $f(x) < f(x_0) = \sup_{y\in\partial U} f(y)$.

23 La fonction g_ε est continue sur $\overline{U}$ car f est continue sur $\overline{U}$ et $\|x\|^2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. De plus, g_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $\|x\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + \varepsilon\Delta(\|x\|^2) = 0 + \varepsilon \cdot 2n = 2n\varepsilon > 0.$$

Ainsi, $\forall x \in U$, $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

24 D'après la question précédente, g_ε est continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Par application de la partie III.A, on a :

$$\forall x \in U, \quad g_\varepsilon(x) < \sup_{y\in\partial U} g_\varepsilon(y).$$

Or, pour tout $y \in \partial U$, $g_\varepsilon(y) = f(y) + \varepsilon\|y\|^2$. Comme $\|y\|^2$ est borné sur $\overline{U}$, on a :

$$\sup_{y\in\partial U} g_\varepsilon(y) \leqslant \sup_{y\in\partial U} f(y) + \varepsilon \sup_{y\in\partial U} \|y\|^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in U$:

$$f(x) + \varepsilon\|x\|^2 < \sup_{y\in\partial U} f(y) + \varepsilon \sup_{y\in\partial U} \|y\|^2.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$f(x) \leqslant \sup_{y\in\partial U} f(y).$$

25 Posons $h = f_1 - f_2$. Alors h est continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et harmonique sur U. De plus, $h = 0$ sur ∂U.

Par application de la question précédente, on a :

$$\forall x \in U, \quad h(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} h(y) = 0.$$

De même, en considérant $-h$, on a :

$$\forall x \in U, \quad -h(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} (-h(y)) = 0.$$

Ainsi, $\forall x \in U$, $h(x) = 0$, c'est-à-dire $f_1(x) = f_2(x)$.

26 La fonction f est développable en série entière sur $D(0,R)$, donc elle est analytique sur $D(0,R)$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$. En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0,R)$.

Les dérivées partielles de f sont obtenues en dérivant terme à terme la série entière :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x+iy)^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i n a_n (x+iy)^{n-1}.$$

Ces séries entières ont le même rayon de convergence que la série de f, donc les dérivées partielles se développent également en série entière sur $D(0,R)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$ et que toutes ses dérivées partielles sont également développables en série entière.

27 La fonction f est développable en série entière, donc elle est analytique sur $D(0,R)$. Par conséquent, f vérifie les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En dérivant ces équations, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

En additionnant ces deux équations, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Ainsi, $\Delta u = 0$, et de même, $\Delta v = 0$. Par conséquent, u et v sont des fonctions harmoniques sur $D(0,R)$.

28 Si f ne s'annule pas sur $D(0,R)$, alors $1/f$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0,R)$. De plus, comme f est analytique, elle vérifie $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. En dérivant $1/f$, on obtient :

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial y} = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{f^2}\left(i\frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\left(-\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\frac{\partial(1/f)}{\partial x}.$$

Ainsi, $1/f$ vérifie les conditions du résultat admis, donc $1/f$ se développe en série entière sur $D(0,R)$.

29 On a :

$$\Delta(uv) = \Delta(u)v + u\Delta(v) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Comme u et v sont harmoniques, $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$. De plus, d'après les équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Par conséquent, $\Delta(uv) = 0$, et uv est harmonique sur $D(0,R)$.

30 Comme g est harmonique, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$. La fonction h est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0,R)$. De plus, comme g est harmonique, on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi, en dérivant h, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - i\left(-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = i\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right) = i\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Ainsi, h vérifie les conditions du résultat admis, donc h se développe en série entière sur $D(0,R)$.

31 D'après la question précédente, la fonction $h = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$ se développe en série entière sur $D(0,R)$. Posons :

$$H(x,y) = \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n+1}(x+iy)^{n+1},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et (b_n) est la suite des coefficients de la série entière de h. Alors H se développe en série entière sur $D(0,R)$, et on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = h(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Ainsi, la partie réelle de H est g, car $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont les dérivées partielles de g.

32 Pour $0 < r < R$, on a :

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}\,dt.$$

Comme la série converge normalement, on peut intervertir la somme et l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int}\,dt.$$

Or, pour $n \geqslant 1$, $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = 0$, et pour $n = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{i0t}\,dt = 2\pi$. Ainsi :

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt = 2\pi a_0 = 2\pi f(0).$$

Donc :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt.$$

Pour $r = 0$, le résultat est évident.

33 Soit $g \in \mathcal{H}(D(0,R))$. D'après la question 31, il existe une fonction H se développant en série entière sur $D(0,R)$ telle que g est la partie réelle de H. Par la question précédente, on a :

$$H(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(r\cos(t), r\sin(t))\,dt.$$

En prenant la partie réelle, on obtient :

$$g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos(t), r\sin(t))\,dt.$$

34 D'après la question 32, on a :

$$|f(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,dt.$$

Comme $|f(r\cos(t), r\sin(t))| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|$, on a :

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,dt = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|.$$

35 Soit $g \in \mathcal{H}(D(0,R))$. D'après la question 33, on a :

$$|g(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos(t), r\sin(t))\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(r\cos(t), r\sin(t))|\,dt.$$

Comme $|g(r\cos(t), r\sin(t))| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos(t), r\sin(t))|$, on a :

$$|g(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos(t), r\sin(t))|.$$

36 Si $|f|$ admet un maximum en 0, alors pour tout $r \in [0, R[$, on a :

$$|f(0)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|.$$

Ainsi, $|f|$ est constante sur $D(0, R)$. Comme f est analytique, cela implique que f est constante sur $D(0, R)$.

37 Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme complexe non constant P qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors $1/P$ est une fonction entière. Comme P est non constant, $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$. Ainsi, $1/P$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, $1/P$ est constante, ce qui contredit l'hypothèse que P est non constant. Par conséquent, P admet au moins une racine.

38 Pour $|z| < 1$, on a :

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = (1+ze^{-it})\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} e^{-i(n+1)t}.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-int}.$$

Ainsi, la fonction $z \mapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$.
En prenant la partie réelle, on a :

$$\mathcal{P}(t,z) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(z^n e^{-int}).$$

La fonction $g(z)$ est donc définie par :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(z^n e^{-int})\right) dt.$$

Comme h est continue et 2π-périodique, on peut intervertir la somme et l'intégrale, et on obtient :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\operatorname{Re}(z^n e^{-int})dt\right).$$

Ainsi, $g(z)$ est une série entière en z, donc $(x, y) \mapsto g(x+iy)$ est une fonction harmonique sur $D(0, 1)$.

39 D'après le développement en série entière de $\mathcal{P}(t,z)$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(t,z)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}(z^ne^{-int})\right)dt.$$

En intervertissant la somme et l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\,dt+2\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(z^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-int}dt\right).$$

Or, pour tout $n\geqslant 1$, $\int_0^{2\pi}e^{-int}dt=0$. Ainsi, il reste :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\,dt=1.$$

40 L'application $t\mapsto h(t)\mathcal{P}(t,z)$ est 2π-périodique, donc :

$$\int_\varphi^{\varphi+2\pi}h(t)\mathcal{P}(t,z)\,dt=\int_0^{2\pi}h(t)\mathcal{P}(t,z)\,dt.$$

Ainsi, $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{\varphi+2\pi}h(t)\mathcal{P}(t,z)\,dt$.

41 On a :

$$\mathcal{P}(t,re^{i\theta})=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right).$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-it}, on obtient :

$$\mathcal{P}(t,re^{i\theta})=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right).$$

En utilisant l'identité $\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, on a :

$$\mathcal{P}(t,re^{i\theta})=\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}.$$

42 Pour $z=re^{i\theta}$ avec $r\in[0,1[$, on a :

$$\mathcal{P}(t,z)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}.$$

Lorsque $r\longrightarrow 1$, $\mathcal{P}(t,z)$ tend vers 0 uniformément pour $t\in[\varphi+\delta,\varphi+2\pi-\delta]$. Ainsi, l'intégrale $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\,dt$ tend vers 0 lorsque $|z|\longrightarrow 1$.

43 La fonction h est continue et 2π-périodique, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Heine, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [\varphi - \delta, \varphi + \delta]$, $|h(t) - h(\varphi)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, on a :

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z)\, dt.$$

Le premier terme est majoré par ε, et le second terme est majoré par $\frac{2\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z)$

Ainsi, on obtient :

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \varepsilon + \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z)\, dt.$$

44 D'après les questions précédentes, la fonction g est harmonique sur $D(0, 1)$ et vérifie $g(\cos(t), \sin(t)) = h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, g est une solution du problème de Dirichlet.

Pour l'unicité, supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet. Alors $f_1 - f_2$ est harmonique sur $D(0, 1)$ et nulle sur $\partial D(0, 1)$. Par le principe du maximum faible, $f_1 - f_2 = 0$ sur $D(0, 1)$. Ainsi, $f_1 = f_2$, et la solution est unique.