1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le thème du problème était un théorème de stabilité de Liapounov. Il s'agissait d'un sujet commun aux filières MP et MPI.
Il permettait d'aborder un nombre significatif de parties du programme, topologie, algèbre linéaire et calcul différentiel.
Le problème était de longueur raisonnable, peut-être un peu long pour une épreuve de trois heures, mais un candidat l'a traité quasiment en totalité.
Le sujet était progressif, il a permis de classer correctement les candidats, pour le CCMP comme pour le CMT. La dernière partie, assez difficile et qui portait sur le calcul différentiel, a été très peu abordée, donc le barème valorisait les seize premières questions.
Les correcteurs ont observé une dégradation de la présentation des copies. L'interdiction des effaceurs et autres ne justifie pas les torchons, rappelons que le brouillon est fourni par le concours, par ailleurs les encres pâles passent mal à la numérisation. Que cela soit bien clair : si le correcteur n'arrive pas à lire, parce que l'encre est trop pâle, parce que l'écriture est indéchiffrable ou parce que les fragments de la démonstration sont noyés dans des ratures, il mettra zéro à la question. On ne met pas des points au bénéfice du doute. Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.2.2 Conclusion

En résumé, on peut conseiller aux futurs candidats de rédiger soigneusement les questions de début du problème, d'écrire en noir et d'éviter l'excès de ratures. Une bonne méthode pour ce dernier point est de commencer les questions au brouillon, jusqu'à ce que l'on soit raisonnablement convaincu d'avoir compris la démarche à appliquer. On peut alors rédiger directement pour ne pas perdre de temps.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

On se proposait, dans cette épreuve de quatre heures, d'étudier « la fonction de Wallis », notée f, sous différents aspects. Le but était, successivement, d'en préciser le domaine de définition, d'étudier sa régularité, ses variations, sa convexité, sa « «développabilité en série entière »... puis de la caractériser par une relation fonctionnelle. Elle concernait la presque totalité du programme d'analyse de première et seconde années de CPGE, dans les filières MPSI, MP et MPI. La difficulté et la longueur étaient raisonnables et sa résolution ne nécessitait que des techniques et savoirs conformes aux programmes officiels et à l'esprit de ces filières.
La première partie incluait l'étude d'une série entière (utile ultérieurement) et permettait, grâce à une méthode très classique, d'évaluer $\zeta(2)$.

La deuxième permettait d'établir des résultats asymptotiques relatifs à f et d'en obtenir une représentation graphique. Elle utilisait les corollaires du théorème de la convergence dominée figurant au programme.

L'objectif de la troisième partie était de déterminer un équivalent simple de $f(n)(0)$ lorsque n tend vers l'infini puis de prouver qu'elle était développable en série entière au voisinage de 0.

Celui de la quatrième, plus technique, était d'évaluer précisément $f''(0)$ en utilisant sans la nommer la formule de Parseval et le théorème de la convergence dominée.

La dernière partie, enfin, permettait de montrer que f est la seule fonction numérique vérifiant certaines propriétés (convexité logarithmique et relation fonctionnelle) puis d'étudier rapidement une généralisation de ce problème. Elle exploitait opportunément l'inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz.

1.3.2 Remarques sur la présentation des copies

Il convient de mentionner, dans ce rapport, qu'une partie non négligeable des copies présente des insuffisances criantes en terme de présentation, de lisibilité et de syntaxe (exemple : « c'est du Riemann avec 2>1 »).

L'usage d'un brouillon semble être désormais abandonné, à tort, par de nombreux candidats. Les correcteurs ont parfois l'impression de parcourir le résultat d'un premier jet, illisible, truffé d'abréviations incompréhensibles ou de flèches, contenant aussi des parties entières raturées. A titre d'exemple, un grand nombre de candidats écrivent de la même façon e et ρ, x et n,... Il faut absolument écrire lisiblement, pour éviter d'être légitimement sanctionné par le correcteur. Une copie doit être claire, bien rédigée, agréable à parcourir et dépourvue de ratures, de taches, de symboles abscons, d'abréviations cabalistiques, etc... Elle doit contenir des phrases structurées, précises et sans équivoque. Dans leurs appréciations par le jury, les copies de cette épreuve n'ayant pas été l'objet d'un minimum de soins ont été l'objet de pénalisations dommageables.

Enfin, trop d'étudiants tentent de berner le correcteur qui n'est jamais dupe : une affirmation ne constitue pas une démonstration. Un résultat correct, simplement tiré de l'énoncé et obtenu à l'issue de calculs manifestement erronés ou incomplets, n'apporte rien si ce n'est de mettre en doute l'honnêteté de ce qui suit et de mettre le correcteur de mauvaise humeur.

1.4 Remarques générales sur le contenu mathématique des copies

D'une façon générale, le vocabulaire et les notions utilisées ne sont pas maitrisés par les candidats. On observe des confusions sur les concepts un peu partout. A titre d'exemples, que signifient « un réel converge », « un réel est continu », « un réel est majoré », « $f(t)$ est intégrable », « $f(x,t)$ est dérivable »... Un rayon de convergence est-il un intervalle ? Que dire de cette affirmation « une série entière est continue sur son rayon de convergence » ?

On observe un refus quasi-systématique d'utiliser les quantificateurs (ce qui rend bon nombre d'affirmations erronées ou incompréhensibles).

On remarque également un manque flagrant de rigueur. On confond très souvent inégalités strictes et larges, intervalles ouverts et fermés, etc... La gestion conjointe de l'ordre et de la fonction « valeur absolue » est désastreuse.

Même si le programme tolère l'absence de vérifications des hypothèses de régularité, dans l'emploi d'un changement de variable usuel dans une intégrale sur un segment, il est impératif que celui-ci apparaisse explicitement (une phrase de commentaire étant même vivement appréciée).

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.4.1 Conclusion

Si de nombreuses copies trahissent une méconnaissance du cours, témoignent de la difficulté à élaborer ou rédiger des raisonnements structurés, de mener à bien des calculs classiques, un nombre certain de candidats parviennent toutefois à tirer leur épingle du jeu, en exploitant habilement les différentes questions du problème et leur variété.
En résumé, pour les prochaines années, le jury attend surtout des efforts de la part des candidats pour que leurs copies soient lisibles et agréables à parcourir, pour améliorer la justesse des propos et la rigueur de leurs argumentations. Cela nécessitera inévitablement une bonne connaissance du cours, des techniques et compétences exigibles, dans le cadre des programmes.

1.5 Mathématiques 1 - filière PC

1.5.1 Présentation du sujet

Le sujet a pour thème des inégalités portant sur des fonctions réelles définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Certaines de ces inégalités sont bien connues : concavité logarithmique du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, inégalité de Minkowski.

La partie **I**, proche du cours, est consacrée aux points suivants :

- équivalence entre les deux définitions de la positivité d'une matrice symétrique réelle (point de vue forme quadratique et point de vue spectral) ;
- convexité des ensembles $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- racine carrée d'un élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- inégalité de convexité de Jensen.