CPGE **Moulay Youssef**
Rabat

Concentration

Polynômes orthogonaux

Sujets de synthèse

Mars 2025

Proposé par Sadik Boujaida

Classes MP*

TABLE DES MATIÈRES

Le premier problème est consacré à quelques propriétés communes aux différentes familles de polynômes orthogonaux ainsi qu'à leurs justification dans un cadre global. Le deuxième sujet étudie, au travers d'exemples, les opérateurs différentiels associés aux polynômes orthogonaux usuels. Le troisième donne une condition suffisante pour qu'une famille de polynôme orthogonaux associés à un poids ω donné soit totale. Le dernier propose une généralisation de la notion de suite de polynômes orthogonaux associée à un produit scalaire et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle suite existe.

Dans un espace préhilbertien E, une suite $(e_n)_n$ de vecteurs de E est dite totale si le SEV $V = \mathrm{vect}\left\{e_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans E.

EXERCICE 1

Formules de Parseval

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. On suppose que E admet une suite de vecteurs $(e_n)_n$ orthonormale totale. C'est-à-dire que

- $(e_n)_n$ est une famille orthonormale de E ;
- $\mathrm{vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E.

Montrer les formules dite de PARSEVAL

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n\,;\,x\rangle^2$$

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x\,;\,y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n\,;\,x\rangle\langle e_n\,;\,y\rangle$$

PROBLÈME 1

Les propriétés de base

1 : Le cadre général

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad \omega(t) > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad t \longmapsto \omega(t)t^n \text{ est intégrable sur } I \end{cases} \tag{C.M}$$

On note $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ l'ensemble des fonctions f continue de I dans $\mathbb{R}$ tels que $t \longmapsto \omega(t)f(t)^2$ soit intégrable sur I. et on pose pour tout couple de fonctions (f,g) de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$

$$\langle f,g\rangle = \int_I \omega(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

1.1 Montrer que $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ est un $\mathbb{R}$-ev et que $\langle .,.\rangle$ est bien défini et que c'est un produit scalaire de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. On notera $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

On notera $\mathcal{P}(I)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ formé des fonctions polynomiales.

1.2 Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N} \quad \deg P_n = n \\ (P_n)_n \text{ est une famille orthogonale pour } \langle .,.\rangle \end{cases}$$

$(P_n)_n$ est dite une suite de polynômes orthogonaux associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

1.3 Montrer que pour toutes les suites de polynômes orthogonaux $(Q_n)_n$, tous les polynômes Q_n sont colinéaires pour un n donné et en déduire qu'il existe une seule suite de polynômes orthogonaux unitaires (au sens polynomial).

2 : Polynômes de Legendre

On pose dans cette partie $I = [-1,1]$ et $w = 1$. On considère la suite $(L_n)_n$ des polynômes de LEGENDRE, suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

1.4 Montrer que $(L_n)_n$ est une suite totale de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}^2_I(1)$.

1.5 Montrer en utilisant le théorème de ROLLE que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme L_n est scindé à racines simples.

1.6 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

3 : Polynômes de Tchebychev

On pose dans cette partie

$$I =]-1,1[\quad \text{et} \quad \forall t\in I \ \ \omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

1.7 Montrer que I et ω vérifient les conditions (C.M) et que

$$\forall (f,g) \in \left(\mathcal{L}^2_\omega(I)\right)^2 \quad \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

1.8 Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Préciser le coefficient dominant du polynôme T_n.

1.9 Montrer que $(T_n)_n$ est une suite de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

1.10 Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les racines de T_n de la forme $\cos\theta$ et en déduire que T_n est scindé à racines simples, ses racines étant toutes dans I.

ind

1.11 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

4 : Polynôme de Laguerre

Dans cette partie on pose

$$I = [0,+\infty[\quad \omega(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$$

1.12 Montrer que I et ω vérifient les conditions (C.N) et que les fonctions P_n sont bien polynomiales.

1.13 Montrer que

$$\forall Q \in \mathcal{P}(I) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \langle P_n, Q\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n Q^{(n)}(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t$$

En déduire que la suite $(P_n)_n$ est orthonormale dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

1.14 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n est scindé à racine simples, racines qui sont toutes dans I.

1.15 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1-X)P_n - n^2 P_{n-1}$$

5 : Le cas général

On retourne au cas général et on considère une suite $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

1.16 Soit $n \geqslant 1$. Montrer que P_n admet au moins une racine de multiplicité impaire dans I.

On note $x_1, x_2, \ldots, x_r$ les racines de P_n dans I ayant des multiplicité impaires. Montrer en utilisant le polynôme $Q = \prod_{k=1}^r (X - x_k)$ que P_n est scindé à racines simples, toutes ces racines étant dans I.

1.17 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$ il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1} \tag{E.R}$$

PROBLÈME 2

Opérateurs différentiel relatifs aux polynômes orthogonaux usuels

On conserve les notations du problème précédent.

1 : Construction commune

On suppose que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il existe des polynômes réels A et B sans racines dans I tels que

$$\begin{cases} (A\omega)' = B\omega \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad t \mapsto t^n A(t)\omega(t) \text{ est de limites nulles aux bornes de } I \end{cases}$$

et on pose pour tout $P \in \mathcal{P}(I)$

$$U(P) = AP'' + BP'$$

2.1 Montrer que $U(P) = \frac{1}{\omega}(A\omega P')'$. En déduire que

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{P}(I)^2 \quad \langle U(P), Q \rangle = -\int_I A\omega P'Q'$$

On suppose désormais que $\deg A \leqslant 2$ et $\deg B \leqslant 1$

2.2 Montrer que U est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{P}(I)$.

2.3 Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ et une suite réelle $(\lambda_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad AP_n'' + BP_n' = \lambda_n P_n \tag{EDL}$$

en précisant ce que représentent les scalaires λ_n pour l'endomorphisme U.

2.4 On note a et b les coefficients dominants respectifs de A et B. Montrer que si $-b/a$ n'est pas un entier naturel alors les réels λ_n sont deux à deux distincts.

2.5 **Construction alternative d'une SPO.**

2.5.1 Sachant que ω est seulement de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \omega(t)A(t)^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ il existe un polynôme $Q_{n,k}$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big(\omega(t)A(t)^n\big) = \omega(t)A(t)^{n-k}Q_{n,k}(t)$$

Noter qu'en particulier

$$Q_{n,n}(t) = \frac{1}{\omega(t)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\omega(t)A(t)^n\right)$$

(Formule de RODRIGUEZ)

2.5.2 Montrer que $(Q_{n,n})_n$ est une SPO.

2 : Construction au cas par cas

Construire des polynômes A et B et écrire les équations (EDL) qui correspondent aux polynômes de

2.6 LEGENDRE : $I = [-1, 1]$ et $\omega = 1$;

2.7 TCHEBYCHEV : $I =]-1, 1[$ et $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$;

2.8 LAGUERRE : $I = [0, +\infty[$ et $\omega(t) = \mathrm{e}^{-t}$;

2.9 HERMITE : $I = \mathbb{R}$ et $\omega(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.

PROBLÈME 3 — Étude de densité

On reprend toutes les notations du premier problème et on considère une suite de polynômes orthogonaux de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

1 : Le cas où l'intervalle I est borné

3.1 Montrer que si I est un segment alors $(P_n)_n$ est une famille totale de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ (penser au théorème de WEIERSTRASS).

On suppose dans le reste de cette partie que I est borné.

3.2 Montrer que $\mathcal{P}(I)$ est dense dans le sous-espace C de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ formé des fonctions prolongeable par continuité sur $\overline{I}$.

3.3 Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C$ telle que $\|f - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$.

En déduire que la suite $(P_n)_n$ est totale dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

2 : Condition nécessaire et contre-exemple

3.4 **Une condition nécessaire.** montrer que si la suite $(P_n)_n$ est totale alors $\mathcal{P}(I)^\perp$ est le sous-espace vertoriel nul.

3.5 **Un contre-exemple :.** On pose dans cette question $I = [0, +\infty[$ et $\omega(t) = \mathrm{e}^{-t^{1/4}}$ pour tout $t \in I$.

3.5.1 Montrer que I et ω vérifient bien les conditions (C.M).

3.5.2 On considère la fonction $f : t \longmapsto \sin(t^{1/4})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = 0$$

3.5.3 En déduire qu'aucune suite de polynômes orthogonaux ne peut être totale dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

On suppose désormais que l'intervalle I est non borné et on admet le résultat suivant :

> *La suite $(P_n)_n$ est totale dans $\mathcal{L}^2_I(\omega)$ si et seulement l'orthogonal de $\mathcal{P}(I)$ dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ est nul.*

3 : Injectivité de la transformée de Laplace

Soit E l'ensemble des fonctions continues $g : [0, +\infty[\longrightarrow I$ telles que

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt} \text{ est intégrable}$$

et on pose pour tout $g \in E$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$Lg(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$

3.6 Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et que l'application L est linéaire.

3.7 Soit $g \in E$. On pose pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$G(t) = \int_0^{t} g(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$$

3.7.1 Montrer que $G' \in E$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \int_0^{+\infty} G(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}Lg(x+1)$$

3.7.2 Déterminer une fonction continue $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} G(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = \int_0^{1} t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

3.8 Montrer que l'application L est injective.

4 : Un critère de densité lorsque $I = [0,+\infty[$

On pose dans cette partie $I = [0,+\infty[$ et on suppose qu'il existe $c > 0$ telle que ω vérifie la condition

$$\forall t \in I \quad \omega(t) \leqslant e^{-ct} \tag{C.S.D}$$

On considère une fonction $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$.

3.9 Montrer que $\omega f \in E$, que $L(f\omega)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad L(\omega f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)\omega(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

3.10 Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. On pose $f_{x_0}(t) = f(t)e^{-x_0 t}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. Montrer que pour tout $h \in I \cap]-c/2, c/2[$

$$L(\omega f)(x_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\langle t^n, f_{x_0}\rangle h^n$$

3.11 On suppose que $f \in \mathcal{P}(I)^\perp$ et on considère l'ensemble

$$Z = \{x \in [0,+\infty[\mid \forall n \in \mathbb{N} \ \ L(\omega f)^{(n)}(x) = 0\}$$

3.11.1 Montrer que Z est un ouvert relatif de $[0,+\infty[$ et en déduire que $Z = [0,+\infty[$.

3.11.2 Montrer que $f = 0$. Conclure.

On peut aussi démontrer que lorsque $I = \mathbb{R}$, un critère suffisant pour que $\mathcal{P}(I)$ soit dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ est donné par

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \omega(x) \leqslant e^{-c|x|}$$

On y parvient selon le même schéma que lorsque $I = [0,+\infty[$ mais en faisant cette fois intervenir la transformé de FOURIER d'une fonction continue intégrable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$$

et la fameuse formule d'inversion de FOURIER qui affirme que si f et $\widehat{f}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$$

et garantit de ce fait l'injectivité de la transformation de FOURIER (Voir CNC 2003 — MATH I à ce propos)

PROBLÈME 4

Approximation par des polynômes orthogonaux

Dans ce problème on étudie la possibilité d'effectuer une approximation ponctuelle (au sens de la convergence simple) d'un élément de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ par des fonctions polynomiales s'exprimant à l'aide de polynômes orthogoanaux. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes orthogonaux de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. On conserve sous sa forme l'équation de récurrence (E.R)

$$XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1} \tag{E.R}$$

On note en plus λ_n le coefficient dominant de P_n et on pose $\rho_n = \lambda_n / \|P_n\|^2$.

1 : Noyaux relatifs à une suite de polynômes orthogonaux

On pose pour tout $(x,t) \in I^2$ tel que $x \neq t$

$$K_n(x,t) = \frac{a_n}{\|P_n\|^2} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)}{t-x}$$

K_n est appelée noyau d'ordre n de la suite $(P_n)_n$.

4.1 Montrer que K_n est une fonction polynomiale en x et t.

4.2 Montrer que si Q est un polynôme de degré n et de coefficient dominant λ alors $\lambda_n \langle P_n, Q\rangle = \lambda \|P_n\|^2$ et en déduire que

$$a_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}$$

4.3 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$K_n(x,t) - K_{n-1}(x,t) = \frac{P_n(x)P_n(t)}{\|P_n\|^2}$$

et en déduire que

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(t)}{\|P_k\|^2}$$

4.4 **Une application.**

4.4.1 Montrer que $K_n(x,x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Montrer que

$$K_n(x,x) = \frac{a_n}{\|P_n\|^2}\left(P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)\right)$$

4.4.3 En déduire que si $n \geqslant 1$ alors entre deux racines de P_{n+1} il y a exactement une racine de P_n.

2 : Le problème de l'approximation ponctuelle

On suppose que la suite $(P_n)_n$ est totale et on note S_n la projection orthogonale de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}(I)_n$ formé des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à n.

4.5 Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$

$$\forall x \in I \quad S_n(f)(x) = \int_I K_n(x,t)f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

Que donne ce résultat si on prend $f = 1$.

On suppose désormais que f est un élément de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. On fixe x dans I et on définit la fonction g_x sur I par

$$g_x(t) = \left| \begin{array}{ll} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{si } t \neq x \\ f'(x) & \text{si } t = x \end{array} \right.$$

4.6 Montrer que g_x est un élément de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

4.7 Montrer que pour tout $x \in I$,

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{a_n}{\|P_n\|^2}\big(P_n(x)\langle P_{n+1}, g_x\rangle - P_{n+1}(x)\langle P_n, g_x\rangle\big)$$

4.8 Justifier que la suite $(\langle P_n, g_x\rangle)_n$ converge vers 0 et en déduire que si la suite de terme

$$\delta_n = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}|}\frac{\|P_{n+1}\|}{\|P_n\|}\left(\frac{|P_n(x)|}{\|P_n\|} + \frac{|P_{n+1}(x)|}{\|P_{n+1}\|}\right)$$

est bornée alors $(S_n(f)(x))_n$ converge vers $f(x)$.

4.9 Traiter le cas des polynômes de LEGENDRE, TCHEBYCHEV et LAGUERRE.

PROBLÈME 5

Polynôme orthogonaux relatifs à une forme linéaire

On considère une forme linéaire L de l'espace $\mathbb{R}[X]$. On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = L(X^n)$, la suite $(\mu_n)_n$ est alors dite suite des moments de la forme linéaire L.

Une suite de polynôme $(P_n)_n$ est dite une suite de polynôme orthogonaux (en abrégé SPO) relativement à la forme linéaire L si et seulement si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & \deg P_n = n \\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 & L(P_nP_m) = h_n\delta_{nm} \end{cases} \tag{P.O}$$

où $(h_n)_n$ est une suite de réels non nuls.

1 : Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une spo

5.1 Montrer que L est entièrement déterminée par la suite de ses moments $(\mu_n)_n$.

5.2 Montrer que si $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ sont deux SPO relatives à L alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q_n = \alpha_n P_n$.

5.3 Existe-t-il une SPO de L lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = a^n$ où a est un réel fixé non nul ?

5.4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$H_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \det H_n$$

Montrer que L admet au moins une SPO si et seulement si $\Delta_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dira que la forme linéaire L est presque définie lorsque elle vérifie cette condition.

5.5 On suppose que L est presque définie montrer que la suite de polynômes $(P_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

est une SPO relative à L.

2 : Quelques propriétés des matrices symétriques

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
On rappelle que A est dite définie positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad {}^tXAX > 0$$

On pose pour tout $p \in [\![1\,;\,n]\!]$, $A_p = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
On veut montrer que A est définie positive si seulement si

$$\forall p \in [\![1\,;\,n]\!] \quad \det(A_p) > 0 \tag{CDP}$$

5.6 Montrer que si A est définie positive alors elle vérifie la condition (CDP).

5.7 Dans cette question on démontre la réciproque par récurrence sur n.

5.7.1 Traiter le cas où $n = 1$.

On suppose maintenant que toute matrice symétrique d'ordre n vérifiant la propriété (CDP) est définie positive et on considère une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant (CDP).

On pose

$$A = \begin{pmatrix} A_n & {}^tV \\ V & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

5.7.2 Montrer que $\alpha - {}^tVA_n^{-1}V > 0$.

5.7.3 Déterminer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = {}^tBB \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

puis conclure.

5.8 On suppose dans cette question que A admet n valeurs propres distinctes et on considère une BON $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A avec $AV_k = \lambda_k V_k$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$.

On pose $B = A_{n-1}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Sp}(A)$

$$r(x) = \frac{\det(xI_{n-1} - B)}{\det(xI_n - A)}$$

On note $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

5.8.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Sp}(A)$

$$r(x) = \langle (xI_n - A)^{-1}E_n, E_n\rangle$$

et en déduire que

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle E_n, V_k\rangle^2}{x - \lambda_k}$$

5.8.2 Montrer que r est continue strictement décroissante sur chacun des intervalles composant son domaine de définition.

5.8.3 Montrer que si E_n n'est orthogonal à aucun des vecteurs V_k alors B admet $n-1$ valeurs propres distinctes et qu'entre deux valeurs propres de A il y a exactement une valeur propre de B.

5.8.4 Que peut-on dire si pour certains k on a $\langle E_n, V_k\rangle = 0$?

3 : Produit scalaire associé à une forme linéaire et étude des propriétés d'une spo

On pose $\qquad \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \quad B(P, Q) = L(PQ)$

5.9 Montrer que B est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\} \quad L(P^2) > 0$$

Nous dirons alors que la forme linéaire L est définie positive.

5.10 Montrer que pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$L(P^2) = {}^t V H_n V \quad \text{où} \quad V = {}^t \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

En déduire que L est définie positive si et seulement si $\Delta_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose dans la suite que L est définie positive et on considère une SPO $(P_n)_n$ *relative à L.*

5.11 Montrer que le polynôme P_n est scindé à racines simples pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine en commun.

5.12 Montrer l'existence de suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ telles que

$$\begin{cases} XP_0 = a_0 P_1 + b_0 P_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1} \end{cases}$$

5.13 On suppose dans cette question que $L(P_n^2) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.13.1 Montrer que $c_n = a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose dans la suite

$$S_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & 0 \\ a_0 & b_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & & a_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} P_0(\lambda) \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

5.13.2 Calculer $(S_n - \lambda I_n)V_n(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et en déduire que les valeurs propres de S_n sont exactement les racines de P_n.

5.13.3 Montrer qu'entre deux racines de P_{n+1} il y a exactement une racine de P_n.

5.14 Généraliser le résultat de la question précédente à une SPO quelconque (sans les conditions $L(P_n^2) = 1$).

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

Considérons un vecteur x de E. Posons pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,;\, x\rangle e_k$$

x_n est le projeté orthogonal de x sur le *sous-espace vectoriel (sev)* $F_n = \mathrm{vect}\{e_k \mid k \in [\![0\,;\, n]\!]\}$ de E.
Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathrm{vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dans E il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $y \in F_{n_0}$ tel que

$$\|x - y\| \leqslant \varepsilon$$

De part sa définition en tant que projeté orthogonale de F_{n_0} on a

$$\mathrm{d}(x, F_{n_0}) = \left\|x - x_{n_0}\right\| \leqslant \|x - y\|$$

et donc $\left\|x - x_{n_0}\right\|$. Maintenant par craoissance de la suite de sev $(F_n)_n$ on a

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ \|x - x_n\| = \mathrm{d}(x, F_n) \leqslant \mathrm{d}(x, F_{n_0}) \leqslant \varepsilon$$

Ce qui signifie que la suite $(x_n)_n$ converge vers x pour la norme $\|.\|$ de E et donc par continuité de la norme $\|.\|$ la suite $(\|x_n\|)_n$ converge vers $\|x\|$. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|x_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \,;\, x\rangle^2$$

on en déduite que la série $\sum \langle e_n \,;\, x\rangle^2$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n \,;\, x\rangle = \|x\|^2}$$

Si maintenant x et y sont des vecteurs de E alors identité de polarisation

$$\begin{aligned}
\langle x \,;\, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n \,;\, x+y\rangle^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n \,;\, x\rangle^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n \,;\, y\rangle^2\right)
\end{aligned}$$

$$\langle x\,;\,y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n\,;\,x\rangle\langle e_n\,;\,y\rangle$$

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

Les propriétés de base

1 : Le cadre général

1.1 Constatons d'abords que pour deux fonctions réelles f et g on a $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$.
$\mathcal{L}^2_\omega(I)$ contient la fonction nulle et si $f,g \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\omega(f+\lambda g)^2 \leqslant \omega f^2 + \lambda^2\omega g^2 + \lambda\left(\omega f^2 + \omega g^2\right)$$

Et donc $f+\lambda g \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$. Alors $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ est *sev* de $\mathbb{R}^I$.
Par ailleurs $\langle .,.\rangle$ est bien défini grâce à la majoration $\omega|fg| \leqslant \frac{\omega}{2}(f^2+g^2)$. Il est linéaire à droite par linéarité de l'intégrale, naturellement symétrique, positif par positivité de l'intégrale et défini positif par propriété de séparation de l'intégrale d'une fonction continue. C'est donc un produit scalaire de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

1.2 La condition $(C.M)$ assure que $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ contient $\mathcal{P}(I)$. Il suffit ensuite d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la suite $(e_n)_n$ des fonctions e_n : $t \longmapsto t^n,\ t \in I$.

1.3 Soient $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ deux suites de polynômes orthogonaux associées au même produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n(I)$ le *sev* de $\mathcal{P}(I)$ formé des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$.
$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base (échelonnée) de $\mathcal{P}_n(I)$ et $Q_n \in \mathcal{P}_n(I)$ donc on peut écrire

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$$

Puisque Q_n et orthogonal à $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ alors il est orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}(I)$. Donc $\langle P_k, Q_n\rangle = 0$, et donc $a_k = 0$, pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. Ainsi $Q_n = a_nP_n$.

2 : Polynômes de Legendre

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$, de telle sorte que

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} A_n^{(n)}$$

1.4 Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$

$$\begin{aligned}
\langle A_n^{(n)}, A_m^{(m)} \rangle &= \int_{-1}^{1} A_n^{(n)}(x) A_m^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[A_n^{(n)}(x) A_m^{(m-1)}(x) \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} A_n^{(n+1)}(x) A_m^{(m-1)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} A_n^{(n+1)}(x) A_m^{(m-1)}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Car 1 et -1 sont des racines de multiplicité m de A_m et donc $A_m^{(m-1)}(1) = A_m^{(m-1)}(-1) = 0$. En observant que $A_n^{(2n)} = (2n)!$ on arrive donc à

$$\begin{aligned}
\langle A_n^{(n)}, A_m^{(m)} \rangle &= (2n)! \int_{-1}^{1} A_m^{(m-n)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (2n)! \left(A_m^{(n-m-1)}(1) - A_m^{(m-n-1)}(-1) \right)
\end{aligned}$$

Soit finalement, sachant que $m - n - 1 \leqslant m - 1$,

$$\forall m > n,\ \langle L_n, L_m \rangle = 0$$

N.B. Parce que ce sera utile dans la suite, notons que les calculs précédents donnent aussi

$$\|L_n\|^2 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} A_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrons maintenant que la famille orthogonale $(L_n)_n$ est totale dans $(\mathcal{L}_\omega^2(I), \langle .$ Soit donc $f \in \mathcal{L}_\omega^2(I)$ et soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le segment I donc, d'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathcal{P}(I)$ tel que

$$\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Et comme pour tout $g \in \mathcal{L}_\omega^2(I)$, $\|f\| \leqslant \sqrt{2}\,\|g\|_\infty$ alors

$$\|f - P\| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$$

Ce qui montre que $\mathcal{P}(I) = \mathrm{Vect}\{L_n \ /\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{L}_\omega^2(I)$. Ainsi

$$\boxed{(L_n)_n \text{ est une base orthogonale totale de } \mathcal{L}_\omega^2(I)}$$

1.5 Il suffit d'utiliser le résultat usuel suivant : si P est un polynôme réel de degré $n > 0$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ alors pour tout entier $k < n$, $P^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Ce dernier est une application du théorème de Rolle.

1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. XL_n est un élément de $\mathcal{P}_{n+1}(I)$ et de ce fait il est une combinaison linéaire de $L_0, L_1, \ldots, L_{n+1}$. Par ailleurs, pour tout $k < n-1$ on peut écrire

$$\langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle$$

Et comme $\deg(XL_k) < n$ alors $\langle XL_n, L_k \rangle = 0$. Alors XL_n est une combinaison linéaire de L_{n-1}, L_n et L_{n+1}. Posons donc

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}$$

On peut observer que le polynôme L_n est paire si n est paire et impaire si n est impaire (A_n est paire donc sa dérivée n^{eme} à la même parité que n). En écrivant

$$XL_n - a_n L_{n+1} - c_n L_{n-1} = b_n L_n \tag{$*$}$$

les polynômes des deux côtés de cette égalité sont de parités inverses. Il sont donc nuls. On en déduit que $b_n = 0$.

Ensuite, L_n admet pour coefficient dominant $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, donc en comparant les termes en X^{n+1} dans l'égalité $(*)$ on obtient

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = a_n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!^2} = a_n \frac{(2n+1)!}{2^n (n+1) n!^2}$$

et donc
$$a_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

Et enfin, grâce à la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
L_n(X) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} (X-1)^{n-k} (X+1)^k \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k
\end{aligned}$$

En particulier $L_n(1) = 1$. En appliquant à 1 la relation $(*)$ cela donne $1 = a_n + c_n$ et donc

$$c_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n}{n+1}$$

En conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)XL_n = (n+1)L_{n+1} + nL_{n-1}}$$

3 : Polynômes de Tchebychev

1.7 ω est bien continue strictement positive sur I et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x^n\omega(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \qquad x^n\omega(x) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}}$$

Ce qui montre que toutes les fonctions $x \longmapsto x^n\omega(x)$ sont intégrables sur I. Par ailleurs la fonction $\theta \longmapsto \cos\theta$ étant une bijection de classe $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, le changement de variable $x = \cos\theta$ donne pour tous $f, g \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

1.8 $T_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, cela peut se faire par calcul directe :

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\right)\\
&= \sum_{2k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta\\
&= \sum_{2k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k\\
\cos n\theta &= T_n(\cos\theta)
\end{aligned}$$

avec
$$\boxed{T_n(X) = \sum_{2k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k}$$

T_n est de degré $\leqslant n$ et le coefficient du terme en X^n est

$$\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\left((1+1)^n + (1-1)^n\right) = 2^{n-1}$$

Il est non nul donc c'est le coefficient dominant de T_n.

1.9 Soient $n, m \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m\rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\langle T_n, T_m\rangle = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0\\ \pi & \text{si } n = m = 0\\ 0 & \text{si } n \neq m\end{array}\right.$$

1.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons les racines de T_n qui sont de la forme $\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$

$$\begin{aligned} T_n(\cos\theta) = 0 &\Longleftrightarrow \cos n\theta = 0 \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!],\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

La fonction cos induisant une injection sur $]0, \pi[$ les racines $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, de T_n ainsi déterminées sont distinctes. Comme il y en a n et T_n est de degré n alors ce sont les seules.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors T_n est scindé à racines simples et ses racines

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$$

sont toutes dans l'intervalle I.

1.11 Il suffit de constater que

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

4 : Polynômes de Laguerre

1.12 La fonction $\omega : x \longmapsto e^{-x}$ est bien continue partout strictement positive sur $I = [0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n\omega(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $x \longmapsto x^n\omega(x)$ qui est continue sur I est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc sur I.

Par ailleurs, grâce à la formule de Leibniz

$$P_n(x) = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^k e^{-x} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k \tag{1}$$

P_n est bien polynomiale et elle est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$.

1.13 On pose $f_n(x) = x^n e^{-x}$ de telle sorte que

$$P_n(x) = \frac{e^x}{n!}f_n^{(n)}(x)$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ étant convergente pour toute $\in \mathcal{P}(I)$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\langle P_n, Q\rangle &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} f_n^{(n)}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n!}\Big[Q(x)f_n^{(n-1)}(x)\Big]_{x=0}^{x\to+\infty} - \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} Q'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Grâce à la formule de Leibniz, $f_n^{(n-1)}(x)$ est de la forme $xR_{n-1}(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ (voir ci-après). Donc $f_n^{(n-1)}(0) = 0$ et $Q(x)f_n^{(n-1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Alors

$$\langle P_n, Q\rangle = -\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} Q'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

En répétant ces intégrations par parties, ceci mène vers

$$\langle P_n, Q\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} Q^{(n)}(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\forall Q \in \mathcal{P}(I),\ \langle P_n, Q\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n Q^{(n)}(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x} \qquad (2)$$

Notons alors que dès que $\deg Q < n$ alors $\langle P_n, Q\rangle = 0$. Ce qui suffit pour justifier que

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_n \text{ est orthogonale}}$$

1.14 On a $f_n'(x) = (nx^{n-1} - x^n)\,\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}R_1(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ où le polynôme $R_1(x)$ est de degré 1 et sa racine est dans I. Supposons par récurrence qu'à un ordre $k < n$ on ait

$$f_n^{(k)}(x) = x^{n-k}R_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

R_k étant un polynôme de degré k scindé à racines simples dans $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}f_n^{(k+1)}(x) &= x^{n-k-1}\big((n-k-x)R_k(x) + xR_k'(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}\\ &= x^{n-k-1}R_{k+1}(x)\,\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

avec
$$R_{k+1}(x) = (n-k-x)R_k(x) + xR_k'(x)$$

On a bien $\deg R_{k+1} = k+1$ et on note en plus que le coefficient dominant de R_{k+1} est l'opposé de celui de R_k.
Soient maintenant $a < b$ deux racines successives de R_k. Alors

$$R_{k+1}(a) = aR_k'(a) \qquad R_{k+1}(b) = bR_k'(b)$$

R_k est scindé à racines simples donc selon le théorème de Rolle R_k' est aussi scindé à racines simples et chacune de ces racines et comprise entre deux racines de R_k. Il admet exactement une racine entre a et b, racine en laquelle R_k présente un extrémum local. Ce qui signifie que R_k' s'annule et change de signe une seule fois entre a et b. Alors $R'_k(a)R'_k(b) < 0$ et donc $R_{k+1}(a)R_{k+1}(b) < 0$. D'après le TVI R_{k+1} admet au moins une racine dans $]a, b[$.

Supposons ensuite que a est la plus petite des racines de R_k. On a $R_{k+1}(0) = (n-k)R_k(0)$ donc $R_{k+1}(0)$ et $R_k(0)$ ont le même signe, celui de $R_1(0) = n > 0$. R'_k n'a pas de racines entre 0 et a donc elle garde un signe constant sur $]0, a[$. Ce qui signifie que R_k est strictement monotone sur $]0, a[$. Puisque $R_k(0) > 0$ et $R_k(a) = 0$ alors R_k est strictement décroissante sur $]0, a[$ ce qui implique que $R'_k(a) < 0$ et donc que $R_{k+1}(a) < 0$. Alors R_{k+1} admet au moins une racine entre 0 et a.

Supposons finalement que b est la plus grande des racines de R_k. Au delà de b il n'y a plus aucune racine de R'_k est donc R_k est strictement monotone sur $]b, +\infty[$. $R'_k(b)$ a donc le même signe que la limite (infinie) de R_k en $+\infty$. Puisque R_k et R_{k+1} ont des coefficients dominants de signes opposés, leurs limites en $+\infty$ sont de signes opposés. On en déduit que $R_{k+1}(b)$ et $\lim_{+\infty} R_{k+1}$ ont des signes opposés. R_{k+1} admet donc au moins une racine dans $]b, +\infty[$.

En conclusion, R_{k+1} est scindé à racines simples dans $]0, +\infty[$. Ce qui achève de montrer par récurrence que tous les polynômes $R_k,\ k \in [\![1\,;\,n]\!]$ sont scindés à racines simples dans $]0, +\infty[$.

À l'ordre $k = n$, on a $f_n^{(n)}(x) = R_n(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et donc $P_n = \frac{1}{n!}R_n$. Alors

$$\boxed{P_n \text{ est scindé à racines simples qui se trouvent toutes dans }]0, +\infty[.}$$

1.15 Comme pour les polynômes de Legendre, on peut justifier qu'il existe $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$XP_n = a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1} \tag{3}$$

Sachant que P_n a pour coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$, en comparant les termes de plus haut degré dans cette égalité on obtient

$$\boxed{a_n = -(n+1)}$$

Par ailleurs, grâce à l'expression de P_n donnée en (1)

$$P_n^{(n)}(x) = (-1)^n \qquad P_n^{(n-1)}(x) = (-1)^n(x-n)$$

et via (2)
$$\langle P_n, P_n\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned}
\langle P_n, XP_n\rangle &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n\big(xP_n(x)\big)^{(n)}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n\big(xP_n^{(n)}(x)+nP_n^{(n-1)}(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n\big(x+n(x-n)\big)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n!}\Big((n+1)\cdot(n+1)!-n^2\cdot n!\Big)\\
&= 2n+1
\end{aligned}$$

En composant (3) en produit scalaire avec P_n on obtient donc

$$\boxed{b_n = 2n+1}$$

Ensuite en substituant 0 à X dans (3), $a_n+b_n+c_n=0$ et donc

$$\boxed{c_n = -n}$$

D'où $$\boxed{XP_n = -(n+1)P_{n+1}+(2n+1)P_n - nP_{n-1}}$$

1.16 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Grâce à l'orthogonalité de la suite $(P_n)_n$ on a

$$\forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P_n, Q\rangle = 0$$

Pour $Q=1$ on voit que $\int_I \omega(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=0$. Par propriété de séparation de l'intégrale d'une fonction continue, P_n ne peut garder un signe constant sur $[0,+\infty[$. Il admet donc au moins une racine de multiplicité impaire dans I. Notons alors $x_1, x_2, \dots, x_r$ les racines de multiplicité impaire de P_n dans I et supposons par l'absurde que $r<n$.

Posons $Q=(X-x_1)\cdots(X-x_r)$. Toutes les racines de QP_n dans I sont de multiplicité paires. Il garde donc un signe constant sur I. Ce qui est impossible puisque $\deg Q<r$ et donc $\int_I \omega(x)Q(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont dans I

1.17 L'existence de a_n, b_n et c_n se justifie exactement comme pour les polynômes de Legendre.

Ensuite a_n est non nul pour une histoire de degré est pour c_n on a

$$|c_n|\,\|P_{n-1}\|^2 = \langle XP_n, P_{n-1}\rangle = \langle P_n, XP_{n-1}\rangle$$

Mais puisque XP_{n-1} est degré n, il peut être écrit par division euclidienne sous la forme $\alpha P_n + R$ avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\deg R<n$ et donc $\langle P_n, XP_n\rangle = |\alpha|\,\|P_n\|^2\neq 0$. Par suite $c_n\neq 0$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

Opérateur différentiel

1 : Construction commune

2.1 On calcule

$$(A\omega P')' = (A\omega)'P' + A\omega P'' = B\omega P' + A\omega P''$$

donc

$$\boxed{U(P) = \frac{1}{\omega}(A\omega P')'} \tag{4}$$

Soient maintenant $P, Q \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$. Selon (4)

$$\langle U(P), Q\rangle = \int_I (A\omega P')'Q$$

L'intégrale $\int_I \omega AP'Q'$ est convergente et les limites de la fonction $\omega AP'$ existent et sont nulles aux extrémité de l'intervalle I par hypothèses. Il est donc possible de procéder à une intégration par parties. Elle donne

$$\boxed{\langle U(P), Q\rangle = -\int_I \omega AP'Q'}$$

2.2 Cette dernière expression est symétrique par rapport à P et à Q. Ce qui signifie que U est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

N.B. Bien que le programme se limite aux espaces euclidiens en ce qui concerne la notion d'endomorphisme symétrique, celle-ci ne perd rien de son intérêt en cas de dimension infinie.

2.3 Notons $\mathcal{P}_n(I)$ le *sev* de $\mathcal{P}(I)$ formé des éléments de degré $\leqslant n$. Les hypothèses $\deg A \leqslant 2$ et $\deg B \leqslant 1$ impliquent que $\mathcal{P}_n(I)$ est stable par U. On notera U_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ induit par U. U_n est ainsi un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathcal{P}_{n+1}(I)$.

Construisons les termes de la suite $(P_n)_n$ par récurrence sur n.

$U(1) = 0$ donc il suffit de prendre $P_0 = 1$ à l'ordre 0.

Supposons qu'à l'ordre on ait construit une famille échelonnée orthogonale formée de *vecteur propre* (VEP) de U. Cette famille est alors une base orthogonale de $\mathcal{P}_n(I)$ formée de VEP de U_n. L'espace $\mathcal{P}_n(I)$ est stable par U_{n+1} donc son orthogonal dans $\mathcal{P}_{n+1}(I)$ est stable par U_{n+1}. Cet orthogonal est une droite vectorielle, il existe donc un VEP P_{n+1} de U dans $\mathcal{P}_{n+1}(I)$ et qui est orthogonal à $\mathcal{P}_n(I)$. Puisque $P_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}(I) \setminus \mathcal{P}_n(I)$ alors $\deg P_{n+1} = n+1$.

Ce qui achève la construction des vecteurs P_n. Ce sont des VEP de U donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$AP_n'' + BP_n' = \lambda_n P_n$$

2.4 Pour $n = 0$, P_0 est constant donc dans tous les cas $\lambda_0 = 0$.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. En comparant les termes de plus haut degré dans l'égalité $AP_n'' + BP_n' = \lambda_n P_n$ on obtient

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_n = n(n-1)a + nb & \text{si } \deg A = 2, \deg B = 1 \\ \lambda_n = n(n-1)a & \text{si } \deg A = 2, \deg B = 0 \\ \lambda_n = nb & \text{si } \deg A \leqslant 1, \deg B = 1 \\ \lambda_n = 0 & \text{sinon} \end{array}} \tag{5}$$

Dans le troisième cas l'application $n \longmapsto \lambda_n$ est injective. Elle l'est sur $\mathbb{N}^*$ dans le deuxième mais $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.
Dans le premier cas, pour des entiers n et m distincts on a

$$\begin{aligned} \lambda_m = \lambda_n &\iff \big(m(m-1) - n(n-1)\big)a + (m-n)b = 0 \\ &\iff (m-n)(m+n-1)a + (m-n)b = 0 \\ &\iff (m+n-1)a + b = 0 \end{aligned}$$

Si $-b/a \notin \mathbb{N}$ alors les *valeur propre (VAP)* λ_n de U sont deux à deux distinctes.
Dans le quatrième il n'y a qu'une valeur propre possible : 0.

- CAS IMPOSSIBLE :. D'un autre côté, la fonction A ne s'annulant pas sur I, la théorie des équations différentielles impose que l'ensemble S_0 des solutions de l'équation différentielle

$$A(t)y'' + B(t)y' = 0$$

soit de dimension 2. Il est impossible donc que tous les polynômes P_n soient associés à la même VAP 0. Ce cas devrait donc être exclu par l'énoncé. On devrait imposer la condition

$$\boxed{\deg A = 2 \quad \text{ou} \quad \deg B = 1}$$

- EN GÉNÉRAL. pour tout réel λ, l'ensemble S_λ des solutions sur I de l'équation différentielle

$$A(t)y'' + B(t)y' - \lambda y = 0$$

est un espace vectoriel de dimension 2. Le réel λ est donc une valeur propre de U et S_λ est le sous-espace propre associé. Sachant l'ensemble des éléments polynomiaux de S_λ est un *sev* de E_λ, on en déduit qu'en général au plus deux polynômes P_n peuvent être associés à une même VAP λ de U.

2.5.1 La condition liant A et B s'écrit

$$A\omega' = (B - A')\omega \tag{6}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la fonction ωA^n est de classe $\mathcal{C}^n$.
Pour $n = 1$, ωA est bien de classe $\mathcal{C}^1$ puisque ω l'est.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que ωA^n est de classe $\mathcal{C}^n$. ωA^{n+1} est alors au moins de classe $\mathcal{C}^n$ et on peut écrire

$$(A^{n+1}\omega)' = nA'A^n\omega + A^{n+1}\omega' = (nA' + B - A')A^n\omega \tag{7}$$

Par hypothèse de récurrence ωA^n est de classe $\mathcal{C}^n$ donc l'expression précédente montre que c'est le cas de $(A^{n+1}\omega)'$. Alors $A^{n+1}\omega$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

N.B. Si A n'admet pas de racine dans I, la relation (6) montre que ω est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. C'est le cas bien sûr pour toutes les fonctions ωA^n.

Si maintenant on suppose qu'en, à l'ordre n, il existe pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ un polynôme $Q_{n,k}$ de degré $\leqslant k$ tel que $(\omega A^n)^{(k)} = \omega A^{n-k} Q_{n,k}$, alors la relation (7) donne pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$

$$(\omega A^{n+1})^{(k)} = \big((n-1)A' + B)A^n\omega\big)^{(k-1)}$$

Le polynôme $C_n = (n-1)A' + B$ est de degré $\leqslant 1$, la formule de Leibniz donne donc

$$\begin{aligned}
(\omega A^{n+1})^{(k)} &= C_n \cdot (\omega A^n)^{(k-1)} + (k-1)C_n' \cdot (\omega A^n)^{(k-2)} \\
&= \omega C_n A^{n+1-k} Q_{n,k-1} + (k-1)\omega C_n' A^{n+2-k} Q_{n,k-2} \\
&= \omega A^{n+1-k} Q_{n+1,k} \\
\text{avec} \quad Q_{n+1,k} &= C_n Q_{n,k-1} + (k-1)C_n' A Q_{n,k-2}
\end{aligned}$$

En outre on a bien $\deg Q_{n+1,k} \leqslant k$.
Pour $k=1$, il suffit de remarquer que $(\omega A^{n+1})' = \omega A^n C_n$ et il suffit donc de prendre $Q_{n+1,1} = C_n = (n-1)A' + B$. En conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ωA^n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ (\omega A^n)^{(k)} = \omega A^{n-k} Q_{n,k}$$

où $Q_{n,k}$ est un polynôme de degré $\leqslant k$.

2.5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\omega Q_{n,n} = (\omega A^n)^{(n)}$ donc pour tout polynôme P

$$\langle Q_{n,n}, P\rangle = \int_I (\omega A^n)^{(n)} P$$

Sachant que $(\omega A^n)^{(n-1)} = \omega A Q_{n,n-1}$ et que $AQ_{n,n-1}$ est une fonction polynomiale, alors $(\omega A^n)^{(n-1)}$ admet des limites nulles aux extrémités de I. Une intégration par partie donne alors

$$\langle Q_{n,n}, P\rangle = -\int_I (\omega A^n)^{(n-1)} P'$$

Plusieurs intégrations par parties nous mènent pour les mêmes raisons vers

$$\langle Q_{n,n}, P\rangle = (-1)^n \int_I \omega A^n P^{(n)}$$

Ce qui implique en particulier que si $\deg P < n$ alors $\langle Q_{n,n}, P\rangle = 0$. Le polynôme $Q_{n,n}$ de $\mathcal{P}_n(I)$ est ainsi orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}(I)$. Il est donc soit nul soit de degré n.

2 : Construction au cas par cas

2.6 Pour Legendre $I = [-1, 1]$ et $\omega = 1$ donc il suffit de prendre $A = X^2 - 1$ et $B = 2X$. Selon (5), $\lambda_n = n(n-1) + 2n = n(n+1)$ donc

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) = n(n+1)P_n(x) \tag{EDL}$$

2.7 Pour Tchebychev, $I =]-1, 1[$ et $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On a $\omega'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc

$$(1 - x^2)\omega'(x) = x\omega(x)$$

On cherche donc des polynômes A et B tels que

$$A = X^2 - 1 \qquad B - A' = -X$$

Les polynômes $A = X^2 - 1$ et $B = X$ conviennent, sachant qu'en plus $A(1) = A(-1) = 0$. Selon (5), $\lambda_n = n(n-1) + n = n^2$ donc

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + xP_n'(x) = n^2 P_n(x) \tag{EDL}$$

2.8 Pour Laguerre $I = [0, +\infty[$ et $\omega(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On a $\omega'(x) = -\omega(x)$ donc on cherche des polynômes A et B tels que $A = A' - B$ soit

$$A' - A = B$$

Ceci impose que A et B soient de degré commun 1. A devrait en plus s'annuler en 0, donc $A = X$ et par suite $B = 1 - X$. Selon (5), $\lambda_n = -n$ donc

$$xP_n''(x) + (1 - x)P_n'(x) = -nP_n(x) \tag{EDL}$$

2.9 Pour Hermite $I =]-\infty, +\infty[$ et $\omega(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. On a $\omega'(x) = -x\omega(x)$ donc on cherche des polynômes tels que $B - A' = -XA$ soit

$$A' - XA = B$$

Les conditions sur les degrés sont satisfaites lorsque $A = 1$ et $B = -X$. Selon (5) on a alors $\lambda_n = -n$.

$$P_n''(x) - xP_n'(x) = -nP_n(x) \tag{EDL}$$

CORRIGÉ DU PROBLÈME 3

Étude de densité

1 :

3.1 Si I est un segment $[a, b]$ alors, selon le théorème de Weierstrass, $\mathcal{P}(I)$ est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Puisque pour tout $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ on a $\|f\| \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$, alors il est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ pour la norme ∞. Puisque $\mathcal{P}(I)$ est engendré par la suite $(P_n)_n$ alors $(P_n)_n$ est une famille orthogonale totale de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

3.2 Supposons que I est borné mais qu'il n'est pas un segment. Notons a et b ses extrémités.

Soient $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ et $\varepsilon > 0$. Puisque l'intégrale $\in_a^b \omega(x)f(x)^2\,\mathrm{d}x$ est convergente alors il existe $\delta > 0$ voisin de 0 tel que

$$\int_a^{a+\delta} \omega(x)f(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} \omega(x)f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$$

f et ω étant continues, et donc bornées, sur le segment $[a+\delta, b-\delta]$, soit

$$M = \sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]} |f(x)| \qquad K = \sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]} |f(x)|$$

Considérons alors la fonction g continue sur le segment $[a, b]$, qui coïncide avec f sur $[a+\delta+\varepsilon, b-\delta-\varepsilon]$, qui est nulle sur $[a, a+\delta]$ et $[b-\delta, \delta]$ et qui est affine sur les intervalles $[a+\delta, a+\delta+\varepsilon]$ et $[b-\delta-\varepsilon, b-\delta]$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2 = \int_a^{a+\delta} \omega(x)f(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} \omega(x)f(x)^2\,\mathrm{d}x &+ \\ \int_{a+\delta}^{a+\delta+\varepsilon} \omega(x)\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x &+ \\ \int_{b-\delta-\varepsilon}^{b+\delta} \omega(x)\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x&\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a+\delta, a+\delta+\varepsilon] \cup [b-\delta-\varepsilon, b-\delta]$ on a

$$\begin{aligned}\omega(x)\big(f(x)-g(x)\big)^2 &\leqslant 2\omega(x)\big(f(x)^2+g(x)^2\big) \\ &\leqslant 2KM + 2Kg(x)^2\end{aligned}$$

D'autre part $g(x) = \frac{f(a+\delta+\varepsilon)}{\varepsilon}(x-a-\delta)$ quand $x \in [a+\delta, a+\delta+\varepsilon]$ donc

$$\int_{a+\delta}^{a+\delta+\varepsilon} g(x)^2\,dx \leqslant \frac{1}{3}M\varepsilon^2$$

et de même

$$\int_{b-\delta-\varepsilon}^{b-\delta} g(x)^2\,dx \leqslant \frac{1}{3}M\varepsilon^2$$

Au final

$$\|f-g\|^2 \leqslant \left(1+4KM+\frac{2}{3}M\varepsilon\right)\varepsilon$$

On vient de démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur I prolongeable par continuité en a et en b est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ pour sa norme $\|.\|$.

3.3 Comme $\mathcal{P}(I)$ est dense dans $\mathcal{C}$ pour la norme $\|.\|_\infty$, et donc pour $\|.\|$, alors il est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ pour $\|.\|$.

2 :

3.4 Supposons que $(P_n)_n$ est totale dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. Ce qui revient à dire que $\mathcal{P}(I)$ est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. Soit $f \in \mathcal{P}(I)^\perp$ et considérons une suite $(Q_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(I)$ qui converge vers f. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle P_n, f\rangle = 0$$

La forme linéaire $g \in \mathcal{L}^2_\omega(I) \longmapsto \langle g, f\rangle$ est continue (grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz) donc en passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient $\langle f, f\rangle = 0$. Par suite $f = 0$. Alors

$$\boxed{\text{Si } (P_n)_n \text{ est totale alors } \mathcal{P}(I)^\perp = \{0\}}$$

3.5.1 I et ω vérifient les conditions (C.M).

3.5.2 On a pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\omega(t)f(t)^2 \leqslant \omega(t)$ donc $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = u^4$, la fonction $u \longmapsto u^4$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ et $t \longmapsto t^n\omega(t)f(t)$ étant intégrable sur I, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^n\omega(t)f(t)\,\mathrm{d}t &= 4\int_0^{+\infty} u^{4n+3}\sin u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= 4\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} u^{4n+3}\,\mathrm{e}^{-(1-i)u}\,\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

Des intégrations par parties (à justifier) donnent ensuite

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} u^{4n+3}\,\mathrm{e}^{-(1-i)u}\,\mathrm{d}u &= \frac{4n+3}{1-i}\int_0^{+\infty} u^{4n+2}\,\mathrm{e}^{-(1-i)u}\,\mathrm{d}u\\ &\ \vdots\\ &= \frac{(4n+3)!}{(1-i)^{4n+3}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1-i)u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{(4n+3)!}{(1-i)^{4n+4}}\end{aligned}$$

Or, il se trouve que $(1-i)^2 = -2i$ et donc $(1-i)^4 = 4$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^{4n+3}\,\mathrm{e}^{-(1-i)u}\,\mathrm{d}u$ est réelle et par suite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^n\omega(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

3.5.3 La fonction f est clairement non nulle et elle est dans $\mathcal{P}(I)^\perp$. D'après une question précédente $\mathcal{P}(I)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

3 :

3.6 E contient la fonction nulle et si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction $t \longmapsto (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable pour tout $x \in [0,+\infty[$ par combinaison linéaire de fonctions intégrables. Alors E est un *sev* de $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$. La linéarité de L découle simplement de la linéarité de l'intégrale.

3.7.1 G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et on a $G'(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction G admet une limite finie en $+\infty$ car $t \mapsto g(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc si $x > 0$ alors $G(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}$ est en outre convergente puisque $g \in E$. Une intégration par partie est ainsi possible. Elle donne pour tout $x > 0$

$$\boxed{LG(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-(x+1)t} = \frac{1}{x}LG(x+1)}$$

3.7.2 Considérons le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ étant bien une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ et la fonction $t \longmapsto G(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$

$$\int_0^{+\infty} G(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 G(-\ln u)u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{+\infty} u^n\varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

où $\varphi(u) = G(-\ln t)$.

3.8 L étant une application linéaire soit $g \in \operatorname{Ker} L$. En posant

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$$

On a selon une question précédente $LG(x) = \frac{1}{x}Lg(x+1)$ pour tout $x > 0$ donc LG est nulle sur $]0,+\infty[$. Étant continue sur $[0,+\infty[$ elle est donc partout nulle sur $[0,+\infty[$. En posant ensuite $\varphi(t) = G(-\ln t)$ on a selon la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

L'intervalle $]0,1]$ étant borné, on a selon la première partie de ce sujet $\varphi = 0$. Donc $G = 0$ et en dérivant, $g = 0$.

d'où $\boxed{\text{L'application } L \text{ est injective}}$

4 :

3.9 Soit $x \in [0,+\infty[$. On a $0 \leqslant \omega(t)\,\mathrm{e}^{-2xt} \leqslant \mathrm{e}^{-ct}$ donc la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est un élément de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$. Puisque $f \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ alors La fonction $t \longmapsto \omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur I. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{L}^2_\omega(I) \text{ alors } \omega f \in E}$$

Par ailleurs pour tout $x \geqslant 0$

$$L(\omega f)(x) = \int_0^{+\infty} \omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $g : (x,t) \longmapsto \omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ définie sur $D = [0,+\infty[^2$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}$ continues sur D pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n \omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$$

et donc $$\forall (x,t) \in D,\ \left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant t^n\omega(t)|f(t)|$$

Les fonctions f et $t \longmapsto t^n$ sont des éléments de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ donc les fonction $\varphi_n : t \longmapsto \omega(t)t^n|f(t)|$ sont intégrables sur I. D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, la fonction $L(\omega f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{L(\omega f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n\omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t} \tag{8}$$

3.10 Soit $h \in I \cap]-c/2, c/2[$.

$$L(\omega f)(x_0+h) = \int_0^{+\infty} \omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-(x_0+h)t}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$L(\omega f)(x_0+h) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\omega(t)f_{x_0}(t)(ht)^n\,\mathrm{d}t$$

Les fonction $u_n : t \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!}\omega(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-x_0t}(ht)^n$ sont continues sur I, la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement (cvs)* sur I et sa somme est continue sur I et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |u_k(t)| &= \omega(t)|f_{x_0}(t)| \sum_{k=0}^{n} \frac{(ht)^n}{n!} \\
&\leqslant \omega(t)|f_{x_0}(t)|\,\mathrm{e}^{ht} \\
&\leqslant \frac{\omega(t)}{2}\left(f_{x_0}(t)^2 + \mathrm{e}^{2ht}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\omega(t)f_{x_0}(t)^2 + \mathrm{e}^{(2h-c)t}\right)
\end{aligned}$$

$f_{x_0} \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ et $2h - c < 0$ donc les fonctions $\omega f_{x_0}^2$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{(2h-c)t}$ sont intégrables sur I. Une intégration terme à terme de la relation (9) est donc possible par domination. Elle donne

$$\boxed{L(\omega f)(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle t^n, f_{x_0}\rangle h^n} \tag{10}$$

N.B. $\langle t^n, f_{x_0}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ de la fonction $t \longmapsto t^n$ avec f_{x_0}.

3.11.1 Soit $x_0 \in Z$. Alors selon (8)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 = L(\omega f)^{(n)}(x_0) = \langle t^n, f_{x_0}\rangle$$

Selon (10) on a donc

$$\forall x \in I \cap \,]x_0 - c/2, x_0 + c/2[,\ \ L(\omega f)^{(n)}(x) = 0$$

Ainsi $I \cap \,]x_0 - c/2, x_0 + c/2[\subset Z$. Alors

$$\boxed{Z \text{ est un ouvert relatif de } I.}$$

3.11.2 Avec $x_0 = 0$, (10) donne pour tout $h \in [0, c/2[$

$$L(\omega f)(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle t^n, f\rangle h^n = 0$$

Et donc $[0, c/2[\subset Z$ et en particulier Z est non vide.

Notons ensuite que Z est un fermé relatif de $[0, +\infty[$ comme intersection de fermés relatifs de I.

L'intervalle I est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et Z en est une partie qui est à la fois un fermé et un ouvert relatif. Comme Z est non vide alors nécessairement $Z = I$, et donc $L(\omega f) = 0$. Par injectivité de L on a donc $\omega f = 0$. Comme ω est supposée partout strictement positive alors $f = 0$.

$$\boxed{\mathcal{P}(I)^\perp = \{0\} \text{ est donc } \mathcal{P}(I) \text{ est dense dans } \mathcal{L}^2_\omega(I)}$$

CORRIGÉ DU PROBLÈME 4

Approximation par des polynômes orthogonaux

1 : Noyaux relatif à une SPO

N.B. L'identité $XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ est valable pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, on l'étendra sous la forme $XP_0 = a_0 P_1 + b_1 P_0$.

4.1 Si on fixe t la fonction $x \longmapsto P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)$ est polynomiale et s'annule pour $x = t$. Elle est donc divisible par $x - t$. $K_n(x, t)$ est donc une expression polynomiale en (x, t).

4.2 Soit Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant λ. Le polynôme $R = \lambda P_n - \lambda_n Q$ est de degré $< n$ donc $\langle P_n, R\rangle = 0$. Ce qui donne :

> Si Q est un polynôme de degré n et de coefficient dominant λ alors $\lambda_n\langle P_n, Q\rangle = \lambda \|P_n\|^2$.

Ceci étant acquis on peut alors faire :

$$\begin{aligned} a_n \|P_{n+1}\|^2 &= \langle XP_n, P_{n+1}\rangle \\ &= \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|P_{n+1}\|^2 \\ c_n \|P_{n-1}\|^2 &= \langle XP_n, P_{n-1}\rangle \\ &= \langle P_n, XP_{n-1}\rangle \\ &= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|P_n\|^2 \end{aligned}$$

Soit $$\boxed{a_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \qquad c_n = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}}$$

N.B. on a donc $$\frac{c_n}{\|P_n\|^2} = \frac{a_{n-1}}{\|P_{n-1}\|^2} \tag{11}$$

En particulier si $(P_n)_n$ est supposée orthonormale ou si plus généralement les polynômes P_n ont la même norme alors alors $c_n = a_{n-1}$.

En outre, $P_0 = \lambda_0$ et $XP_0 = a_0P_1 + b_0P_0$ donc $a_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$

4.3

$$\begin{aligned} a_n\big(P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)\big) = P_n(x)\big(tP_n(t) - b_nP_n(t) - c_nP_{n-1}(t)\big) - \\ P_n(t)\big(xP_n(x) - b_nP_n(x) - c_nP_{n-1}(x)\big) \end{aligned}$$

Comme $\frac{c_n}{\|P_n\|^2} = \frac{a_{n-1}}{\|P_{n-1}\|^2}$ alors

$$\boxed{K_n(x,t) - K_{n-1}(x,t) = \frac{P_n(x)P_n(t)}{\|P_n\|^2}}$$

Par ailleurs $P_0 = \lambda_0$ et en posant $P_1 = \lambda_1 X + \alpha$

$$\begin{aligned} K_0(x,t) &= \frac{a_0}{\lambda_0^2}\frac{(P_1(t) - P_1(x))\lambda_0}{x-t} \\ &= a_0\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 \\ K_0(x,t) &= \frac{P_0(x)P_0(t)}{\|P_0\|^2} \end{aligned}$$

On en déduit par télescopage que

$$\boxed{K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(t)}{\|P_k\|^2}} \tag{12}$$

4.4.1 On a
$$K_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)^2}{\|P_n\|^2}\geqslant\frac{P_0(x)^2}{\|P_0\|^2}>0$$

4.4.2 Si $x\neq t$ on peut écrire
$$K_n(x,t)=\frac{a_n}{\|P_n\|^2}\left(P_n(x)\frac{P_{n+1}(t)-P_{n+1}(x)}{t-x}+P_{n+1}(x)\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}\right)$$

Et en faisant tendre t vers x
$$\boxed{K_n(x,x)=\frac{a_n}{\|P_n\|^2}\left(P_n(x)P'_{n+1}(x)-P_{n+1}(x)P'_n(x)\right)}$$

4.4.3 Soit $n\geqslant 1$. Notons $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$ les racines (simples) de P_{n+1} et considérons la fonction rationnelle $F_n=\frac{P_n}{P_{n+1}}$. F_n est de classe $\mathcal{C}_1$ sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$ et
$$F'_n(x)=-\frac{a_nK_n(x,x)}{\|P_n\|^2\,P_{n+1}(x)^2}$$

Puisque $K_n(x,x)>0$ alors F_n est strictement monotone sur $]x_k,x_{k+1}[$ et ses limites aux extrémités sont infinies et nécessairement de signes opposés. Elle s'annule donc une seule fois entre x_k et x_{k+1}. Alors P_n admet une racine unique entre x_k et x_{k+1}

Entre deux racines successives de P_{n+1} il y a exactement une racine de P_n.

VOCABULAIRE. On dira que les racines de P_n et P_{n+1} sont entrelacées.

4.5 Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$S_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle P_k,f\rangle}{\|P_k\|^2}P_k$$

Donc pour tout $x\in I$
$$\begin{aligned}S_n(f)(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)}{\|P_k\|^2}\int_I\omega(t)P_k(t)f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_I\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)P_k(t)}{\|P_k\|^2}\right)\omega(t)f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{13}$$
$$\boxed{S_n(f)(x)=\int_I\omega(t)f(t)K_n(x,t)\,\mathrm{d}t}$$

Ensuite si $f=1$ alors $f\in\mathcal{P}_n(I)$ et donc $S_n(f)=f$ pour tout $n\geqslant 1$. Ce qui signifie que
$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \forall x\in I,\ \int_I\omega(t)K_n(x,t)\,\mathrm{d}t=1}\tag{14}$$

N.B. Soit en général un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et soit q son degré. Pour tout $n \geqslant q$ on a $Q \in \mathcal{P}_n(I)$ et donc $S_n(Q) = Q$. Cela implique que

$$\forall n \geqslant q,\ \forall x \in I,\ Q(x) = \int_I \omega(t)Q(t)K_n(x,t)\,\mathrm{d}t$$

En particulier $$\forall n \geqslant q,\ \forall x \in I,\ x^q = \int_I t^q\omega(t)K_n(x,t)\,\mathrm{d}t$$

4.6 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I donc g_x est continue sur I. Sa continuité en x implique l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]x-\delta, x+\delta[,\ |g_x(t)| \leqslant |f'(x)| + 1$$

On pose $J = I \cap]x-\delta, x+\delta[$. On peut ensuite écrire

$$\forall t \in I \setminus J,\ |g_x(t)| \leqslant \frac{1}{\delta}|f(t) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\delta}|f(t)| + \frac{1}{\delta}|f(x)|$$

Si on pose maintenant $M = 1 + |f'(x)| + \frac{1}{\delta}|f(x)|$, alors

$$\forall t \in I,\ |g_x(t)| \leqslant M + \frac{1}{\delta}|f(t)|$$

La fonction $t \longmapsto M + \frac{1}{\delta}|f(t)|$ est un élément de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ donc $g_x \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$.

4.7 Selon et (14) on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) = & \\ & \int_I \omega(t)K_n(x,t)\big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t = \\ & \frac{a_n}{\|P_n\|^2}\int_I \omega(t)\big(P_{n+1}(t)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(t)\big)g_x(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n(f)(x) - f(x) = a_n\frac{P_n(x)\langle P_{n+1}, g_x\rangle - P_{n+1}(x)\langle P_n, g_x\rangle}{\|P_n\|^2}} \tag{15}$$

4.8 La famille $(P_n)_n$ étant orthogonale et la fonction g_x un élément de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$, on a selon l'inégalité de Bessel

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle P_k, g_x\rangle^2}{\|P_k\|^2} \leqslant \|g_x\|^2$$

La série de termes réels positifs $\sum \frac{\langle P_n, g_x\rangle^2}{\|P_n\|^2}$ est donc convergente. Par condition nécessaire de convergence d'une série on a donc

$$\boxed{\frac{\langle P_n, g_x\rangle^2}{\|P_n\|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \big|\langle P_n, g_x\rangle\big| \leqslant \varepsilon\,\|P_n\|$$

On a alors selon pour tout $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\left|S_n(f)(x) - f(x)\right| &\leqslant \varepsilon \frac{|a_n|}{\|P_n\|^2}\left(|P_n(x)|\,\|P_{n+1}\| + |P_{n+1}(x)|\,\|P_n\|\right)\\ &\leqslant \varepsilon \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}|}\frac{\|P_{n+1}\|}{\|P_n\|}\left(\frac{|P_n(x)|}{\|P_n\|} + \frac{|P_{n+1}(x)|}{\|P_{n+1}\|}\right)\end{aligned}$$

Si on pose plutôt

$$\delta_n(x) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}|}\frac{\|P_{n+1}\|}{\|P_n\|}\left(\frac{|P_n(x)|}{\|P_n\|} + \frac{|P_{n+1}(x)|}{\|P_{n+1}\|}\right)$$

alors $$\forall n \geqslant N,\ \left|S_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\delta_n(x)$$

et ainsi

> Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors la suite $\big(S_n(f)(x)\big)_n$ converge vers x en tout $x \in I$ pour lequel la suite $(\delta_n(x))_n$ est bornée.

- N.B. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  Si $(\delta_n(x))_n$ est bornée en tout $x \in I$ alors $\big(S_n(f)\big)_n$ cvs vers f sur I. En outre si $(\delta_n)_n$ est uniformément bornée sur I, c'est à dire s'il existe $M > 0$ tel que

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |\delta_n(x)| \leqslant M$$

  Alors $\big(S_n(f)\big)_n$ *converge uniformément (cvu)* vers f sur I. Noter toutefois que cette majoration n'est pas possible si l'intervalle I n'est pas borné.

- SYNTHÈSE. Si $\mathcal{P}(I)$ est dense dans $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ alors la suite des fonctions $S_n(f)$ converge vers f pour la norme $\|.\|$ pour tout élément f de $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

  $$\forall f \in \mathcal{L}^2_\omega(I),\ S_n(f) \xrightarrow{\|.\|} f$$

  Ceci implique en particulier la formule de Parseval

  $$\forall f \in \mathcal{L}^2_\omega(I),\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle P_n, f\rangle^2}{\|P_n\|^2} = \int_I \omega f^2$$

  Ce dont traite cette partie est autre chose. C'est la convergence « ponctuelle » de la suite $\big(S_n(f)(x)\big)_n$ vers $f(x)$ pour un $x \in I$ donné. Cette convergence ne dépend plus seulement de la suite $(P_n)_n$ mais aussi de la fonction f. Cette partie à démontré que si la suite $(\delta_n(x))_n$ est bornée (condition qui dépend seulement de la suite $(P_n)_n$) et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (condition qui dépend de f) alors $(S_n(f)(x))_n$ converge vers $f(x)$.
  Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, cela signifie qu'en tout $x \in I$ où la première condition se vérifie on a

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle P_n, f\rangle}{\|P_n\|}P_n(x)$$

  Si cette première condition se réalise en tout $x \in I$ alors la série de fonctions $\sum \frac{\langle P_n, f\rangle}{\|P_n\|}P_n$ cvs sur I et sa somme est f.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 5

Polynômes orthogonaux relatifs à une forme linéaire positive

1 :

N.B. il sera plus pratique de considérer que les numérotations des lignes et des colonnes des matrices en jeu commencent à partir de 0.

5.1 Si les moments μ_n sont connus alors pour toute élément $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ on a

$$L(P) = \sum_{k=0}^{n} \mu_n a_n$$

Ce qui détermine entièrement L.

5.2 Soient $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ deux SPO de $\mathbb{R}[X]$. Le raisonnement est exactement le même que pour un produit scalaire : on pose

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$$

Puisque pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $L(PQ_n) = 0$ alors $0 = L(P_k Q_n) = \alpha_k h_k$ et donc $a_k = 0$ pour tout $k < n$. Ainsi $Q_n = \alpha_n P_n$.

5.3 On considère ici la forme linéaire L déterminée par les conditions $L(X^n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De cette définition il découle que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ L(P) = P(a)$$

S'il existait une SPO $(P_n)_n$ pour L on aurait $P_0 L(P_n) = L(P_0 P_n) = 0$ et donc $P_n(a) = L(P_n) = 0$ pour tout $n > 0$. Mais alors on aura $L(P_n^2) = P_n(a)^2 = 0$ ce qui contredira la deuxième condition que doit remplir une SPO.

5.4 Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_n : & \mathbb{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & L(PQ) \end{array}$$

Φ_n est une forme bilinéaire symétrique et H_n représente sa matrice dans la base $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (ie $H_n = (\Phi_n(X_i, X_j))_{i,j}$). Pour deux éléments P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ on a

$$\Phi_n(P, Q) = {}^tY H_n Z = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \mu_{i+j} y_i z_j$$

où $Y = [P]_{\mathcal{B}_n} = {}^t(y_0\ y_1\ \dots\ y_n)$ et $Z = [Q]_{\mathcal{B}_n} = {}^t(z_0\ z_1\ \dots\ z_n)$.

On suppose que L admet au moins une SPO $(P_n)_n$. Selon le même principe que dans $\mathcal{B}_n$, l'écriture de $\Phi_n(P,Q)$ dans la base $\mathcal{P}_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est de la forme

$$\Phi_n(P,Q) = {}^tY' D_n Z'$$

où $D_n = (\Phi_n(Pi, P_j))_{i,j} = (h_i \delta_{i,j})_{i,j}$, $Y' = [P]_{\mathcal{P}_n}$ et $Z' = [Q]_{\mathcal{P}_n}$. Maintenant si on pose $U = P_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{B}_n}$ alors $Y' = UY$ et $Z' = UZ$ et on en déduit que

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tXH_nY = {}^tX{}^tUD_nUY$$

et donc que
$$H_n = {}^tUD_nU$$

Or D_n est diagonale inversible donc H_n est inversible.

Réciproquement, supposons que les matrices H_n sont toutes inversibles. Considérons une famille de polynômes $(P_n)_n$ qui est échelonnée et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = [P_n]_{\mathcal{B}_n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est « L – orthogonale » et montrons que P_{n+1} peut être choisi de telle sorte que $L(P_{n+1}P_k) = 0$ pour tout $k < n$. Pour cela il faut et il suffit que $L(P_{n+1}Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons donc

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & C_n \\ {}^tC_n & \mu_{2n+2} \end{pmatrix} \qquad Z_{n+1} = \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$$

où V représente la matrice des coordonnées d'un polynôme quelconque Q de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathcal{B}_{n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} L(P_{n+1}Q) &= {}^tZ_{n+1}H_{n+1}V \\ &= \begin{pmatrix} {}^tZ & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_nU \\ {}^tC_nU \end{pmatrix} \\ &= {}^tZH_nU + z{}^tC_nU \\ &= ({}^tZH_n + z{}^tC)U \end{aligned}$$

Sachant que ${}^tZH_n + z{}^tC \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$, on en déduit les équivalences

$$\begin{aligned} &\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P_{n+1}Q) = 0 \Longleftrightarrow \\ &\qquad \forall U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}),\ ({}^tZH_n + z{}^tC)U = 0 \Longleftrightarrow {}^tZH_n + z{}^tC = 0 \end{aligned}$$

On peut prendre un scalaire non nul z quelconque (qui sera le coefficient dominant du polynôme P_{n+1} à construire) et il suffit donc de définir Z par

$$Z = -zH_n^{-1}C$$

5.5 Si on développe le déterminant $P_n(x)$ selon la dernière ligne on voit que les cofacteurs utilisés sont les mêmes que ceux de la matrice H_n.

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \alpha_{n,j} x^j$$

et puisque $\mathrm{Com}(H_n)H_n = \Delta_n I_{n+1}$ on a

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\mu_{i+j}\alpha_{n,j} = 0 \qquad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$
$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\mu_{i+j}\alpha_{n,j} = \Delta_n$$

Pour un polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} z_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (avec $z_n = 0$ donc), on a

$$\begin{aligned} L(QP_n) &= \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \mu_{i+j} z_i \cdot (-1)^{n+j}\alpha_{n,j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} z_i \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\mu_{i+j}\alpha_{n,j}\right) \\ &= z_n\Delta_n = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs un développement similaire donne

$$L(P_nP_n) = \alpha_{n,n}\Delta_n = \Delta_{n-1}\Delta_n \neq 0$$

Alors $\boxed{(P_n)_n \text{ est une SPO pour } L.}$

AUTRE MÉTHODE :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On peut écrire

$$Q(x)P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ Q(x) & xQ(x) & \cdots & x^nQ(x) \end{vmatrix}$$

Si on développe ce déterminant selon la dernière ligne et on applique ensuite L au résultat on voit par linéarité de L que

$$L(QP_n) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ L(Q) & L(XQ) & \cdots & L(X^nQ) \end{vmatrix} \tag{16}$$

En particulier pour $Q = X^k$, $k \in \mathbb{N}$

$$L(X^kP_n) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{k+n} \end{vmatrix}$$

Avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, la dernière ligne dans $L(X^k P_n)$ est égale à celle portant le numéro k donc $L(X^k P_n) = 0$. Alors P_n est « L-orthogonal » à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Ensuite, en posant $P_n = a_n X^n + Q_n(X)$ avec $\deg Q_n < n$ on voit que

$$L(P_n^2) = a_n L(X^n P_n) = a_n \Delta_n$$

a_n est le coefficient dominant de P_n or en développant $P_n(x)$ selon la dernière ligne on voit que $a_n = \Delta_{n-1}$. On retrouve ainsi la relation

$$L(P_n^2) = \Delta_{n-1}\Delta_n$$

2 :

5.6 On suppose que A est symétrique définie positive. Soit $p \in [\![1; n]\!]$ et considérons $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $X = \binom{Y}{0} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $X \neq 0$ donc ${}^tXAX = 0$. Or, tout calcul fait on a ${}^tXAY = {}^tYA_pY$ et ainsi ${}^tYA_pY > 0$. La matrice A_p est ainsi symétrique définie positive. Il est connu que dans ce cas les VAP de A_p sont > 0 et par suite

> Si A est symétrique définie positive Alors
> $$\forall p \in [\![1; p]\!],\ \det(A_p) > 0$$

5.7.1 Suivons d'abords la démarche de l'énoncé.
Lorsque $n = 1$, une matrice $A = (\lambda)$ d'ordre 1 est symétrique et elle est définie positive si et seulement si $\lambda > 0$.

5.7.2 Sachant que A_n est inversible on a (en terme d'opérations par blocs)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_n & V \\ {}^tV & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & -A_n^{-1}V \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A_n & 0 \\ {}^tV & \alpha - {}^tVA_n^{-1}V \end{vmatrix}$$
$$\boxed{\det A = \left(\alpha - {}^tVA_n^{-1}V\right)\det A_n} \tag{17}$$

Et puisque $\det A > 0$ et $\det A_n > 0$ alors

$$\boxed{\alpha - {}^tVA_n^{-1}V > 0}$$

5.7.3 Posons $B = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & x \end{pmatrix}$ où M, X et x sont des inconnues avec $M \in$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
A = {}^tBB &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_n & V \\ {}^tV & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tM & 0 \\ {}^tX & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & X \\ 0 & x \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_n & V \\ {}^tV & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tMM & {}^tMX \\ {}^tXM & {}^tXX + x^2 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^tMM = A_n \\ {}^tMX = V \\ {}^tXX + x^2 = \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence A_n est symétrique définie positives, donc il existe effectivement au moins une matrice inversible $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tMM$. Posons ensuite

$$X = {}^tM^{-1}V \qquad \begin{aligned} x &= \left(\alpha - {}^tXX\right)^{1/2} \\ &= \left(\alpha - {}^tVA_n^{-1}V\right)^{1/2} \end{aligned}$$

la définition de x étant possible grâce au résultat de la question précédente. On a alors B est inversible $(\det B = x \det M \neq 0)$ et ${}^tBB = A$. On en déduit que A est symétrique définie positive. En conclusion

Si $\det A_p > 0$ pour tout $p \in [\![1\,;\,n]\!]$ alors la matrice symétrique A est définie positive.

AUTRE MÉTHODE : Une méthode qui s'inspire des calculs faits dans la partie précédente. On considère la matrice inversible P d'ordre $n+1$ dont les n premiers vecteurs colonnes sont ceux de la base canonique et le dernier est le dernier vecteur colonne de ${}^t\operatorname{Com} A$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1,n+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \alpha_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

qu'on peut réécrire par blocs sous la forme $P = \begin{pmatrix} I_n & \wedge \\ 0 & \det A_n \end{pmatrix}$. L'idée de base est d'utiliser l'égalité $A^t\operatorname{Com} A = \det(A) I_n$, qui donne en prélevant juste la dernière colonne

$$A\begin{pmatrix} \wedge \\ \det A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \det A \end{pmatrix}$$

impliquant en particulier que $A_n\Lambda + (\det A_n)V = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^t\Lambda & \det A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & V \\ {}^tV & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \Lambda \\ 0 & \det A_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^t\Lambda & \det A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ {}^tV & \det A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & (\det A_n)(\det A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si maintenant $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, en posant $Y = P^{-1}X = \left(\begin{smallmatrix} Y_1 \\ y \end{smallmatrix}\right)$ on a

$$ {}^tXAX = {}^tY\,{}^tPAPY = {}^tY_1A_nY_1 + (\det A_n)(\det A)y^2 $$

Par hypothèse de récurrence ${}^tY_1A_nY_1 \geqslant 0$ donc ${}^tXAX \geqslant 0$ avec

$$ {}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow {}^tY_1A_nY_1 = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow Y_1 = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow X = 0 $$

Alors A est définie positive.

5.8.1 Puisque $x \notin \mathrm{Sp}(A)$ alors la matrice $xI_n - A$ est inversible. Le scalaire $s(x) = \langle (xI_n - A)^{-1}E_n, E_n\rangle$ est le coefficient d'indice (n,n) de la matrice $(xI_n - A)^{-1}$. En utilisant l'expression $(xI_n - A)^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{Com}(xI_n - A)}{\det(xI_n - A)}$ on en déduit que

$$ s(x) = (-1)^{n+n}\frac{\Delta_{n,n}(xI_n - A)}{\det(xI_n - A)} = \frac{\det(xI_{n-1} - B)}{\det(xI_n - A)} = r(x) $$

soit

$$ \boxed{r(x) = \langle (xI_n - A)^{-1}E_n, E_n\rangle} $$

Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, V_k est un VEP de $(xI_n - A)^{-1}$ associé à la VAP $\frac{1}{x-\lambda_k}$:

$$ (xI_n - A)^{-1}V_k = \frac{1}{x - \lambda_k}V_k $$

En écrivant $E_n = \sum_{k=1}^n \langle E_n, V_k\rangle V_k$ on obtient donc

$$ \boxed{r(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\langle E_n, V_k\rangle^2}{x - \lambda_k}} \tag{18} $$

5.8.2 Quitte à changer l'ordre des vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ on peut supposer que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. En dérivant l'expression de $r(x)$ donnée en (18) on obtient pour tout $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$$ r'(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{\langle E_n, V_k\rangle^2}{(x - \lambda_k)^2} $$

On a donc $r'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in D$ avec

$$ r(x) = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![1\,;\,n]\!],\ \langle E_n, V_k\rangle = 0 \Longrightarrow E_n = 0 $$

Ce qui est bien sûr exclu. Alors r est strictement croissante sur tout intervalle de D.

5.8.3 On suppose que $\langle E_n, V_k\rangle \neq 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Si $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ alors

$$\lim_{\lambda_k^+} r = +\infty \qquad \lim_{\lambda_{k+1}^-} r = -\infty$$

Selon TVI, r admet au moins un zéro dans $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$. Ce zéro est unique puisque r est strictement décroissante sur cet intervalle. Mais puisque par définition $r(x) = \frac{\chi_B(x)}{\chi_A(x)}$ alors

$$\boxed{\text{B admet exactement une VAP entre chaque deux VAP successives de A}}$$

5.8.4 La fraction rationnelle $F = \frac{\chi_B}{\chi_A}$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle E_n, V_k\rangle^2}{X - \lambda_k}$$

Dire que pour un certain $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\langle E_n, V_k\rangle = 0$ revient à dire que λ_k n'est pas un pôle de F. Ce serait donc une racine de χ_B aussi.

- N.B. Ce cas est tout à fait possible. Penser au cas d'une matrice diagonale à éléments diagonaux distincts par exemple. Les racines de χ_B sont alors toutes des racines de χ_A.

3 :

5.9 L'application B est bilinéaire symétrique. Elle est définie positives si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\},\ L(P^2) > 0$$

5.10 C'est une expression déjà justifiée et utilisée dans ce corrigé :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ L(PQ) = {}^tUH_nV \quad \text{où } U = [P]_{\mathcal{B}_n},\ V = [Q]_{\mathcal{B}_n}$$

B étant bilinéaire symétrique, il est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement s'il est défini positif sur chaque sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$. L'expression ci-dessus indique que B est définie positif sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si la matrice symétrique H_n est définie positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la partie précédente ceci équivaut à $\Delta_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.11 Puisque $\Delta_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors selon la question (solution 5.5 [p. 38]) la suite $(P_n)_n$ est une SPO.

Nous allons commencer par montrer le résultat suivant :

- LEMME :. Si P est un polynôme réel partout positif sur $\mathbb{R}$ alors il existe deux polynômes réels P_1, P_2 tel que $P = P_1^2 + P_2^2$.

DÉM :. Supposons donc que P est un polynôme réels partout positifs sur $\mathbb{R}$. La racines réelles éventuelles de P sont donc toute de multiplicités paires. Celles non réelles sont deux à deux conjuguée. Le théorème de la décomposition en facteur irréductible permet alors d'écrire P sous la forme

$$P = Q^2 R\overline{R}$$

où Q^2 rassemble les racines réelles de P et $R\overline{R}$ ses racines complexes non réelles. Ce qui nous permet ensuite d'écrire

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}\left((R+\overline{R})^2 - (R-\overline{R})^2\right)Q^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((R+\overline{R})^2 + (i(R-\overline{R}))^2\right)Q^2 \\ &= P_1^2 + P_2^2 \end{aligned}$$

où les polynômes $P_1 = \frac{1}{2}(R+\overline{R})Q$ et $P_2 = \frac{i}{2}(R-\overline{R})Q$ sont bien réels.

Revenons maintenant aux polynômes P_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. P_0 est constant non nul et on a $P_0 L(P_n) = L(P_0 P_n) = 0$ donc $L(P_n) = 0$. Supposons que P_n garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Quitte à le remplacer par $-P_n$ on peut supposer que ce signe est positif. Il existe donc deux polynômes réels Q_1 et Q_2 tels que $P_n = Q_1^2 + Q_2^2$ et ainsi

$$L(Q_1^2) + L(Q_2^2) = 0$$

L étant définie positive ceci n'est possible que si $Q_1 = Q_2 = 0$. Ce qui est impossible car $P_n \neq 0$.

N.B. Entre temps on aura démontré qu'une forme linéaire définie positive vérifie la propriété suivante qui rappelle la propriété de séparation de l'intégrale : si P garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et $L(P) = 0$ alors $P = 0$.

Ainsi P_n ne peut garder un signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui implique qu'il admet au moins une racine réelle de multiplicité impaire. La justification s'achève ensuite de la même façon que dans le cas d'une SPO d'un espace $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

5.12 Il découle de l'aspect SPO de la suite (P_n) qu'il existe des suites $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\begin{aligned} XP_0 &= a_0 P_1 + b_0 P_0 \\ XP_n &= a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}} \tag{19}$$

N.B. Les résultats démontrés dans les questions et restent valables puisqu'il ne dépendent que du fait que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire et non de son expression spécifique à l'espace $\mathcal{L}^2_\omega(I)$.

5.13.1 L'hypothèse faite signifie que la suite $(P_n)_n$ est orthonormale pour le produit scalaire B.

5.13.2 Sachant que $XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ on a

$$a_n = B(XP_n, P_{n+1}) \qquad c_n = B(XP_n, P_{n-1})$$

Mais puisque $B(XP_n, P_{n-1}) = B(XP_{n-1}, P_n)$ alors $c_n = a_{n-1}$.

5.13.3 Les relations (19) donnent ici

$$S_nV_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda P_0(\lambda) \\ \lambda P_1(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda P_{n-2}(\lambda) \\ a_{n-2}P_{n-2}(\lambda) + b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P_0(\lambda) \\ \lambda P_1(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda P_{n-2}(\lambda) \\ \lambda P_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}P_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_nV_n(\lambda) = \lambda V_n(\lambda) - a_{n-1}P_n(\lambda)E_n}$$

où E_n est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Pour toute racine λ de P_n on a donc $S_nV_n(\lambda) = \lambda V_n(\lambda)$. Ayant $P_0(\lambda) \neq 0$, le vecteur $V_n(\lambda)$ est non nul et donc λ est une VAP de S_n et $V_n(\lambda)$ est un VEP associé. Puisque P_n est scindé à racines simples et S_n est une matrice carré d'ordre n alors ce sont les seules VAP de S_n.

5.14 S_n s'obtient à partir de S_{n+1} en éliminant la dernière ligne et la dernière colonne. Selon la deuxième partie de ce sujet, les VAP de S_n et S_{n+1} sont entrelacées. Il en est de même des racines de P_n et P_{n+1}.

FixMe Le résultat de la question précédente est valable pour la suite $(Q_n)_n$ lorsque on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n = \frac{P_n}{L(P_n^2)}$$

P_n étant associé à Q_n il en a les mêmes racine. Les racines de P_n et P_{n+1} sont donc entrelacées.