

CPGE

MOULAY YOUSSEF
RABAT

Sujet de concours

X-ENS

Session 2024

MATHÉMATIQUES B

Rédigé par SADIK BOUJAIDA

<https://github.com/texbouja/XENS2024>

MP

ÉNONCÉ

Maths B, MP, 2024

● Notations

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs, \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On note également \mathbb{C}^* l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel et si v_1, \dots, v_k sont des éléments de E , on note $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_k .

Si $k \geq 1$ est un entier et si E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R} dans E .

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie. Si U est un ouvert de E et $f : U \rightarrow E$ une fonction différentiable, pour tout $x \in U$ on note $df(x)$ la différentielle de f en x . On rappelle que $df(x)$ est alors un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire de E . Si g est un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire de E , on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à-dire

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| \mid v \in E, \|v\| \leq 1\}.$$

Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel positif, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r et $\bar{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et rayon r .

On note Id_E l'application identité de E dans E .

Si p et q désignent deux entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans \mathbb{C} . Si $p = q$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On identifie également le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^p avec le \mathbb{C} -espace vectoriel des vecteurs colonnes $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\exp(A) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'exponentielle de la matrice A .

● PREMIÈRE PARTIE :

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0. \quad (1)$$

1

1a Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à (1) telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Justifier que $\text{vect}(y_1, y_2)$ est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1b

Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

2

Montrer que si $y \in \mathcal{V}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de (1), alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

3 Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

a L'équation (1) possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t).$$

b Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))x + 1 = 0.$$

c L'équation différentielle (1) possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} u(t),$$

où $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction T -périodique.

4 Soient μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))x + 1 = 0.$$

4a Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de (1), il existe deux fonctions T -périodiques w_1 et w_2 , ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t).$$

4b Supposons que $\mu_1 = \mu_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation (1) admet une solution périodique dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

● DEUXIÈME PARTIE :

Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a . Soit $f : U \rightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que $df(a) = \text{Id}_E$.

5 **5a** Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe \mathcal{C}^1 de V dans E . On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leq C$. Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V , on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$.

5b Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subset U$ et

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions de cette deuxième partie.

5c Montrer que pour tout $x \in B(a, r)$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

6 Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$.

6a Montrer que l'application

$$\begin{aligned} g : \overline{B(a, r)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|y_0 - f(x)\|^2 \end{aligned}$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a, r)$.

6b Montrer que $f(x_0) = y_0$.

7 On note $W = \{y \in E \mid \|y - f(a)\| < \frac{r}{4}\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a, r)$.

7a Justifier que V et W sont des ouverts de E .

7b Montrer que

$$\begin{aligned} f|_V : V &\longrightarrow W \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W .

● TROISIÈME PARTIE :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme. On note

$$(\mathbb{C}[A])^* = \{B \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B^{-1} \in \mathbb{C}[A]\}.$$

8 **8a** Justifier que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

8b Montrer que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

9 Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$

10 Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$\begin{aligned} Z_a : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t + iat(1 - t). \end{aligned}$$

10a Montrer que l'application

$$\begin{aligned}]0; 1[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, a) &\longmapsto Z_a(t) \end{aligned}$$

est injective.

10b Soient M_1 et M_2 deux éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], \quad M(t) = Z_n(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*.$$

10c En déduire que $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11 **11a** Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant 0 et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant la matrice identité I_n tels que la fonction exponentielle induit une bijection continue de $U \subset \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V .

11b En déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

12 Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

13 On veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$. On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ et on fixe $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

13a Montrer qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\{0, 1\}$ telle que $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$.

13b Conclure.

14 Conclure que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{C})) = \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

● QUATRIÈME PARTIE :

Soient $T > 0$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Soit

$$A : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto A(t) \end{array}$$

une application continue sur \mathbb{R} et T -périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (2)$$

où X est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

15 Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et une solution $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ non nulle de (2) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t).$$

Soit \mathcal{S} l'espace des solutions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2). Soit (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) une base de \mathcal{S} . Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$. On dispose ainsi d'une application M de \mathbb{R} dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

16 **16a** Montrer que pour tout nombre réel t , $M(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$.

16b Montrer que la matrice $(M(t))^{-1}M(t+T)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

16c En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t) \exp(TB).$$

16d En déduire qu'il existe une application $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ continue sur \mathbb{R} et T -périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = Q(t) \exp(tB).$$

(On appelle cette identité la forme normale de la matrice M). On admet qu'il existe deux matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B = D + N \text{ et } DN = ND.$$

Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

17 **17a** Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t) \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de la matrice $M(t)P$. Montrer que (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) est une base de l'espace \mathcal{S} .

17b Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\frac{1}{i!} Q(t) N^i P$. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t) \right)$$

et vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur \mathbb{R} et T -périodiques.

17c En déduire que si les parties réelles des λ_i pour $1 \leq i \leq n$ sont strictement négatives et si Y est une solution quelconque de (2), alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0.$$

18 **18a** Montrer que si B a une valeur propre de la forme $\lambda = i \frac{2k\pi}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors (2) a une solution mT -périodique non nulle.

18b On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que (2) possède une solution mT -périodique non nulle. Montrer que $\exp(TB)$ possède une valeur propre qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

19 Dans cette question, on suppose que (2) possède une solution T' -périodique X avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$A(u)X(t) = A(t)X(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors G est dense dans \mathbb{R} .

20 On suppose dans cette question qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$, différent de $\{0\}$ et \mathbb{C}^n , tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, V est stable par $A(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et sur B pour que (2) ait au moins une solution périodique non nulle.

21 Soit le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \tag{3}$$

où $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction continue sur \mathbb{R} et T -périodique. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$. Montrer que (3) possède une unique solution T -périodique.

22 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}$$

et déterminer sa forme normale (voir la question 16d).

CORRIGÉ

1a L'équation (1) est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2. Elle est normalisée et la fonction q est continue sur \mathbb{R} . Le théorème de Cauchy-Lipschitz, implique alors l'existence et l'unicité de deux solutions y_1 et y_2 sur \mathbb{R} telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Par ailleurs (1) est homogène donc son ensemble des solutions S sur \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Le wronskien W des solutions y_1 et y_2 défini par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

vérifie $W(0) = 1 \neq 0$ donc (y_1, y_2) est une base de S .

Les fonctions y_1 et y_2 définies par les conditions (4) forment une base de l'ensemble des solutions S de (1) sur \mathbb{R} .

1b L'équation du wronskien de (1) s'écrit ici

$$w' = 0$$

Le wronskien W de y_1 et y_2 est donc une fonction constante. Puisque $W(0) = 1$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1$$

► (rappel) L'équation du wronskien d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène et normalisable sur un intervalle I :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

s'écrit

$$a(t)w' + b(t)w = 0$$

2 Soit y une solution sur \mathbb{R} de (1) et posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(t + T)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y''(t + T) + q(t + T)y(t + T)$$

Grâce à la T -périodicité de la fonction q , on a donc

$$z''(t) + q(t)z(t) = 0$$

La fonction $z : t \mapsto y(t + T)$ est donc une solution sur \mathbb{R} de l'équation (1)

Ensuite, puisque (y_1, y_2) est une base de S , il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. En dérivant cette expression et appliquant z et z' à 0 on obtient

$$\begin{cases} z(0) = \lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) = \lambda_1 \\ z'(0) = \lambda_1 y_1'(0) + \lambda_2 y_2'(0) = \lambda_2 \end{cases}$$

soit $\lambda_1 = y(T)$ et $\lambda_2 = y'(T)$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t + T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t) \quad (5)$$

► **N.B.** Noter l'intérêt du choix des solutions y_1 et y_2 : toute solution f de (1) s'écrit de manière simple sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = f(0)y_1(t) + f'(0)y_2(t)$$

3 Introduisons l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Phi : S &\longrightarrow S \\ y &\longmapsto z : t \mapsto y(t+T) \end{aligned}$$

Selon la question précédente, Φ est bien à valeurs dans S et elle vérifie

$$\forall y \in S \quad \Phi(y) = y(T)y_1 + y'(T)y_2$$

Sa matrice dans la base (y_1, y_2) de S est en outre :

$$R = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$$

et de ce fait son polynôme caractéristique est

$$\chi_\Phi = X^2 - \text{tr}(R)X + \det(R) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1$$

- **(a) \Leftrightarrow (b)** La propriété (a) équivaut à dire que μ est une *valeur propre* (VAP) de Φ . La propriété (b), que μ est une racine de χ_Φ . Les deux propriétés sont donc équivalentes.
- **(a) \Leftrightarrow (c)** Considérons une solution non nulle y quelconque de (1) et posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^{-\lambda t} y(t)$. La fonction u est de classe \mathcal{C}^2 comme produit de fonction de classe \mathcal{C}^2 et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} u(t+T) = u(T) &\iff e^{-\lambda(t+T)} y(t+T) = e^{-\lambda t} y(t) \\ &\iff y(t+T) = e^{\lambda T} y(t) \\ &\iff y(t+T) = \mu y(t) \end{aligned}$$

u est donc T -périodique si seulement si y vérifie la propriété (a).

$$(a) \iff (b) \iff (c)$$

4a Supposons que $\mu_1 \neq \mu_2$. Le polynôme caractéristique χ_Φ est donc scindé à racines simples et de ce fait Φ est diagonalisable. En outre $\mu_1 \mu_2 = \det \Phi = 1$ donc si on pose $\mu_1 = e^{\lambda T}$ alors $\mu_2 = e^{-\lambda T}$. Considérons ensuite une base (v_1, v_2) de S formée de *vecteur propre* (VEP) respectivement associés à μ_1 et à μ_2 . Selon la question précédente, il existe des fonctions T -périodiques et de classe \mathcal{C}^2 telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$v_1(t) = e^{\lambda t} w_1(t) \quad v_2(t) = e^{-\lambda t} w_2(t)$$

(v_1, v_2) étant une base de S on a donc

Pour toute solution y de (1), il existe des complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t)$$

4b Supposons que $\mu_1 = \mu_2$ alors $\mu_1^2 = \det \Phi = 1$ et donc $\mu_1 = \pm 1$. Soit y un VEP de Φ associé à μ_1 . Selon la question précédente il existe une fonction u T -périodique et de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = \mu_1 y(t)$$

- Si $\mu_1 = 1$: alors y est T -périodique
- Si $\mu_1 = -1$: alors $y(t + 2T) = y(t)$ et donc y est $2T$ -périodique.

Dans tous les cas on a donc

Si $\mu_1 = \mu_2$ alors (1) admet au moins une solution non nulle périodique.

5a Soient x_1, x_2 deux éléments de V . L'ouvert V étant convexe la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : [0; 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto h((1-t)x_1 + tx_2) \end{aligned}$$

est bien définie et elle est de classe \mathcal{C}^1 par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . En outre on a par règle de différentiation d'une composée :

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi'(t) = dh((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)$$

et donc $\forall t \in [0; 1] \quad \|\varphi'(t)\| \leq \|dh((1-t)x_1 + tx_2)\| \|x_2 - x_1\| \leq C \|x_2 - x_1\|$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction vectorielle φ entre 0 et 1 donne ensuite

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$$

5b Soit un réel $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset U$. Considérons la fonction h définie sur le convexe $B(a, \rho)$ par

$$h(x) = f(x) - x$$

h est de classe C^1 sur $B(a, \rho)$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 et on a

$$dh(a) = 0 \quad (\text{car } df(a) = \text{id}_E)$$

L'application $x \mapsto dh(x)$ est continue donc il existe un $r \in]0; \rho[$ tel que

$$\forall x \in B(a, r) \quad \|dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

D'après la question précédente on a donc

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$$

Soit $\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$

Et comme $\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \geq \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\|$ on en déduit que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

Quitte à remplacer r par une rayon légèrement plus petit on a démontré que

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)} \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$$

► **N.B.** Cette propriété implique en particulier que f induit une injection sur $\overline{B(a, r)}$. Remarque qui sera utilisée plus en avant dans le sujet.

5c Soit $x \in B(a, r)$. Par différentiabilité de f en x il existe $\delta > 0$ tel que pour tout vecteur $h \in E$ vérifiant $\|h\| \leq \delta$ on ait $x + h \in U$ et

$$\|f(x+h) - f(x) - df(x)(h)\| \leq \frac{1}{4}\|h\|$$

et donc

$$\|df(x)(h)\| \geq \|f(x+h) - f(x)\| - \frac{1}{4}\|h\|$$

Puisque x est dans la boule ouverte $B(a, r)$, en posant $\rho = \frac{1}{2}(r - \|x - a\|)$ on a $B(x, \rho) \subset B(a, r)$. Si h est un vecteur de E tel que $\|h\| \leq \rho$ alors $x+h \in B(a, r)$ et donc d'après la question précédente,

$$\|f(x+h) - f(x)\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$$

Quitte à remplacer δ par $\min(\delta, \rho)$, on peut ainsi écrire

$$\forall h \in E \quad \|h\| \leq \delta \implies \|df(x)(h)\| \geq \frac{1}{4}\|h\|$$

Si maintenant h est un vecteur non nul quelconque de E alors, ceci implique que

$$\left\| df(x) \left(\frac{\delta}{\|h\|} h \right) \right\| \geq \frac{1}{4} \left\| \frac{\delta}{\|h\|} h \right\|$$

et par linéarité de l'application $df(x)$

$$\|df(x)(h)\| \geq \frac{1}{4}\|h\|$$

On en déduit que $\text{Ker } df(x) = \{0_E\}$ et ainsi

Pour tout $x \in B(a, r)$, $df(x)$ est un endomorphisme injectif de E .

► **N.B.** On peut y parvenir plus rapidement en constatant que l'application

$$x \in U \longmapsto \det(df(x))$$

est continue et qu'elle ne s'annule pas en a . Il existe donc une boule $B(a, r)$ voisinage de a sur laquelle elle ne s'annule pas.

6a En tant qu'application de classe \mathcal{C}^1 , f est continue. Par composition d'applications continues, g est donc continue sur le compact $\overline{B(a, r)}$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de $x_0 \in \overline{B(a, r)}$ tel que

$$\|y_0 - f(x_0)\|^2 = \min_{x \in \overline{B(a, r)}} \|y_0 - f(x)\|^2$$

Supposons maintenant que x_0 est sur la sphère $S(a, r)$. On aura alors

$$\begin{aligned} \|f(x_0) - y_0\| &\geq \|f(x_0) - f(a)\| - \|f(a) - y_0\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|x_0 - a\| - \|f(a) - y_0\| \\ &\geq \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4} \\ &\geq \|f(a) - y_0\| \end{aligned}$$

ou encore $g(x_0) \geq g(a)$ et donc $g(x_0) = g(a)$.

On en déduit que soit x_0 est dans $B(a, r)$ soit il est sur la sphère $S(a, r)$ mais dans ce cas g atteint aussi son minimum en a qui est dans $B(a, r)$. Dans tous les cas :

g atteint son minimum sur le compact $\overline{B(a, r)}$ en un point x_0 de la boule ouverte $B(a, r)$.

6b Nous allons traiter le cas où la norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E .

► **N.B.** L'énoncé fait le choix de définir la fonction g par $g(x) = \|y_0 - f(x)\|^2$. Le carré dans cette expression trouve toute sa pertinence dans le fait que si $\|\cdot\|$ est euclidienne alors l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est de classe \mathcal{C}^1 . Ce n'est pas le cas d'une norme quelconque de E .

Posons alors pour tout $x \in E$

$$\rho(x) = \|x\|^2$$

ρ est une application de classe \mathcal{C}^1 sur E avec pour tout $x \in E$:

$$\forall h \in E \quad d\rho(x)(h) = 2\langle x; h \rangle$$

► **N.B.** ce qui revient à dire que $\nabla \rho(x) = 2x$.

g est la composée de ρ avec l'application de classe \mathcal{C}^1 , $x \mapsto f(x) - y_0$, elle est donc de classe \mathcal{C}^1 par composition d'application de classe \mathcal{C}^1 et pour tout $x \in U$

$$dg(x) = d\rho(f(x) - y_0) \circ df(x)$$

Soit $\forall h \in E \quad dg(x)(h) = 2\langle f(x) - y_0; df(x)(h) \rangle$

g admet un minimum local au point x_0 de l'ouvert $B(a, r)$ donc sa différentielle est nulle en x_0 . Ce qui donne

$$\forall h \in E \quad \langle f(x_0) - y_0; df(x_0)(h) \rangle = 0$$

Mais puisque $df(x_0)$ est un automorphisme de E , cela implique que le vecteur $f(x_0) - y_0$ est orthogonal à E et en particulier à lui même. Il est donc nul.

$$\forall y_0 \in \overline{B(f(a), r/4)} \quad \exists x_0 \in B(a, r) ; f(x_0) = y_0$$

► **N.B.** Nous nous contenterons de cette justification ($\|\cdot\|$ est une norme euclidienne) sachant que le résultat final de cette partie et qui en est le but sera lui valable pour toute norme de E .

7a W est la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon $r/4$, c'est donc un ouvert de E . Ensuite $f^{-1}(W)$ est un ouvert relatif de U comme image réciproque d'un ouvert de E par une application continue. Comme U est lui-même un ouvert de E alors $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E . Finalement $V = f^{-1}(W) \cap B(a, r)$ est un ouvert de E puisque c'est l'intersection de deux ouverts de E .

W et V sont des ouverts de E .

7b Soit $x \in V$. On a $x \in f^{-1}(W)$ donc $f(x) \in W$. Ainsi l'application $f|_V$ est bien définie de W dans V . Si maintenant y est un élément de W alors $y \in B(a, r/4)$ et donc il existe, selon la question 6 (sol. 6), $x \in B(a, r)$ tel que $f(x) = y$. Puisque $f(x) \in W$, on a en fait $x \in V$. Ce qui montre que $f|_V$ est une application surjective.

Selon la propriété (??) on a

$$\forall x_1, x_2 \in B(a, r) \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

Ce qui montre que f induit une injection sur $B(a, r)$. Comme $V \subset B(a, r)$ alors $f|_V$ est injective.

À ce stade on a justifié que $f|_V$ est une bijection de V sur W . Notons g sa bijection réciproque. La propriété (??) s'écrit alors (en posant $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$)

$$\forall y_1, y_2 \in W \quad \|g(y_1) - g(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$$

Montrant que g est lipschitzienne et de ce fait qu'elle est continue. Concluons :

Il existe un ouvert V voisinage de a et un ouvert W voisinage de $f(a)$ tels que f induise une bijection de V sur W et telle que sa bijection réciproque soit continue.

► **N.B.** Tel qu'il est exprimé ici, ce résultat ne dépend plus de la norme utilisée dans E puisque toutes les normes de E sont équivalentes et de ce fait, elles définissent exactement les mêmes ouverts dans E .

► **N.B.** Ce résultat correspond partiellement à un théorème fondamental du calcul différentiel (hors programme pour les CPGE) connu sous le nom de théorème d'inversion local et qui s'énonce de la façon suivante :

Soit une application de classe \mathcal{C}^1 $f : U \longrightarrow E$ et soit $a \in U$. Si $df(a)$ est un endomorphisme inversible de E alors il existe des ouverts V et W de E , voisinages respectifs de a et de $f(a)$ tel que f induise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de V sur W . C'est à dire une bijection de classe \mathcal{C}^1 de V sur W dont l'application réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur W .

Noter que l'hypothèse trop spécifique $df(a) = \text{id}_E$ n'est pas essentielle dans le sujet. On peut s'y ramener en remplaçant f par $(df(a))^{-1} \circ f$ lorsque $df(a)$ est supposée seulement inversible.

8a $(\mathbb{C}[A])^*$ est tout simplement le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[A]$. Il est contenu dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ donc il en est un sous groupe. Son caractère abélien découle en outre du fait que $\mathbb{C}[A]$ est un anneau commutatif.

8b De par sa définition, on a $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Réciproquement, considérons un élément $M \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons D le pgcd de P avec π_A , le polynôme minimal de A , et considérons $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\pi_A = DQ$. Le polynôme QP est alors divisible par π_A est donc $Q(A)M = (QP)(A) = 0$. La matrice M étant inversible cela implique que $Q(A) = 0$ et donc que π_A divise Q signifiant que $Q = \pi_A$ ou encore que $D = 1$. Ainsi P est premier avec π_A .

Soit alors, selon le théorème de Bezout, $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UP + V\pi_A = 1$. En appliquant à A on obtient $U(A)M = I_n$. Donc $M^{-1} = U(A)$ et par suite $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$. Alors $M \in (\mathbb{C}[A])^*$.

$$(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

► **N.B.** \mathbb{C} étant algébriquement clos on peut aussi justifier que du moment que $M = P(A)$ est inversible alors $P \wedge \pi_A = 1$ de la façon suivante : comme A est trigonalisable sur \mathbb{C} , les VAP de $P(A)$ sont les complexes de la forme $P(\lambda)$ où λ est une VAP quelconque de A . Puisque $P(A)$ est inversible, aucun des scalaires $P(\lambda)$ n'est nul. Les VAPs de A sont les racines de π_A donc P et π_A n'ont aucune racine en commun. Ils sont donc premiers entre eux.

9 En tant que sous-espace vectoriel (de dimension finie) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[A]$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit maintenant $B \in \mathbb{C}[A]$. la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{k!} B^k$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$ car celui-ci est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette suite converge vers e^B . Puisque $\mathbb{C}[A]$ est un fermé alors $e^B \in \mathbb{C}[A]$. L'inverse e^{-B} de e^B est aussi dans $\mathbb{C}[A]$ pour les mêmes raisons puisque $-B \in \mathbb{C}[A]$.

$$\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$$

10a Notons σ l'application en question et considérons des éléments (t, a) et (s, b) de $]0; 1[\times \mathbb{R}$ tels que $\sigma(t, a) = \sigma(s, b)$. Alors :

$$t + iat(1 - t) = s + ibs(1 - s)$$

L'identification des parties réelles dans cette égalité donne $t = s$, celle des parties imaginaires donne ensuite $a = b$ (car $t(1 - t) \neq 0$). D'où l'injectivité de σ .

10b Apparemment $M(t) \in \mathbb{C}[A]$ pour tout $t \in [0; 1]$ quelque soit le choix du réel a . Considérons le polynôme

$$P = \det(XM_1 + (1 - X)M_2)$$

P est non nul car $P(0) = \det M_2 \neq 0$ donc il admet un nombre fini de racines qu'on va noter z_1, z_2, \dots, z_r . Posons ensuite

$$Z = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \llbracket 1; r \rrbracket, \exists t \in]0; 1[; Z_a(t) = z_k \right\}$$

Par injectivité de l'application σ introduite dans la question précédente, l'ensemble des couples $(t, a) \in]0; 1[\times \mathbb{R}$ tels que

$$Z_a(t) \in \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$$

est fini. L'ensemble Z est donc fini. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus Z$. Alors, pour tout $t \in]0; 1[$, $Z_a(t)$ n'est pas une racine de P . En posant pour tout $t \in [0; 1]$

$$M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2$$

on a donc

$$\forall t \in]0; 1[\quad \det(M(t)) \neq 0$$

Cette observation s'étend aussi à $t \in \{0, 1\}$ puisque $M(0) = M_2$ et $M(1) = M_1$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $M(t)$ est donc un élément de $\mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$, soit

$$\forall t \in [0; 1] \quad M(t) \in (\mathbb{C}[A])^*$$

10c M_1 et M_2 étant des points quelconques de $(\mathbb{C}[A])^*$, l'application M ainsi définie est continue et elle est à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$. C'est un chemin continu qui permet de joindre M_2 à M_1 dans $(\mathbb{C}[A])^*$. Alors :

$$(\mathbb{C}[A])^* \text{ est connexe par arcs}$$

11a Considérons pour toute la suite de cette partie le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{C}[A]$ et l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto e^M \end{aligned}$$

f est bien à valeur dans E d'après la question 9 (sol. 9). Rappelons en outre que E est aussi un anneau commutatif.

► **N.B.** Tout \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$. Dans notre cas, $\dim_{\mathbb{C}} E = \deg \pi_A$ donc E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2 \deg \pi_A$.

Fixons $M \in E$ et soit $H \in E$ quelconque. Puisque $MH = HM$ alors

$$e^{M+H} - e^M = e^M (e^H - I_n) = e^M H + e^M \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \quad (6)$$

Par ailleurs, en utilisant une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ de E , par convergence absolue de la série exponentielle on a

$$\left\| e^M \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq \|e^M\| \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \right) = \|e^M\| (e^{\|H\|} - 1 - \|H\|)$$

Sachant qu'au voisinage de 0 on a $e^t - 1 - t = o(t)$ alors

$$e^M \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = o(\|H\|)$$

En constatant que l'application $H \mapsto e^M H$ est linéaire, la relation (6) signifie alors que f différentiable en M et que

$$\forall H \in E \quad df(M)(H) = e^M H \quad (7)$$

► **N.B.** Prendre conscience que ce calcul n'a été possible que parce qu'on s'est placé dans E qui est commutatif. La différentiabilité de \exp en tant qu'application du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est beaucoup moins aisée.

Ensuite pour tout $H \in E$, l'application $M \mapsto D_H f(M) = e^M H$ est continue par continuité de l'application exponentielle donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur E . Par ailleurs, la relation (7) implique en particulier que

$$df(0) = \text{id}_E$$

Finalement, selon la question 7b (sol. 7b),

Il existe un ouvert U de E voisinage de la matrice nulle et un ouvert V voisinage de $I_n = e^0$ telle que f induise une bijection de classe \mathcal{C}^1 de U sur V et dont la réciproque est continue.

11b Soit $M_0 \in E$. Puisque la matrice e^{M_0} est inversible et que E est stable par multiplication matricielle, l'application $u : H \in E \mapsto e^{M_0} H$ est un automorphisme de E . L'espace E étant de dimension finie, u et u^{-1} sont continues. L'ensemble $e^{M_0} V$ est donc un ouvert de E comme image réciproque par u^{-1} de l'ouvert V de E . Puisque $I_n \in V$ alors $e^{M_0} \in e^{M_0} V$ et donc $e^{M_0} V$ est un voisinage de e^{M_0} . Alors

$$\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}[A]$$

12 Rappelons que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $M \in \mathbb{C}[A]$, e^M est inversible et $e^M \in \mathbb{C}[A]$ donc on a bien $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$. Soit maintenant $(e^{M_k})_k$ une suite convergente d'éléments de $\exp(\mathbb{C}[A])$ et notons L sa limite. Rappelons que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\det(e^M) = e^{\text{tr } M}$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \nu : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto |\det M| \end{aligned}$$

v est continue par composition des applications continues \det et $|\cdot|$. Donc la suite $(v(e^{M_k}))_k$ converge vers $v(L)$. Soit

$$|\det L| = \lim |\det(e^{M_k})| = \lim |e^{\operatorname{tr} M_k}| = \lim (e^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)})$$

La suite $(e^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)})_k$ est ainsi convergente. Par continuité de l'application \ln , la suite $(\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k))_k$ est convergente. Si on note α sa limite alors $\lim (e^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)}) = e^\alpha$ et ainsi

$$|\det L| = e^\alpha \neq 0$$

La matrice L est ainsi inversible. La suite $(L^{-1} e^{M_k})_k$ converge vers la matrice I_n . Puisque V est un voisinage de I_n alors il existe un entier $k_0 > 0$ tel que

$$\forall k \geq k_0 \quad L^{-1} e^{M_k} \in V$$

Puisque $V = f(U)$, il existe $N \in U$ tel que $L^{-1} e^{M_{k_0}} = e^N$. Par suite

$$L = e^{M_{k_0}} e^{-N} = e^{M_{k_0} - N} \quad (NM_{k_0} = M_{k_0}N)$$

Comme $M_{k_0} - N \in E$ alors $L \in \exp(E)$. Finalement :

$$\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un fermé de } (\mathbb{C}[A])^*.$$

13a Notons $f : (\mathbb{C}[A])^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application caractéristique de $W = (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ dans $(\mathbb{C}[A])^*$. Elle est définie par

$$\forall M \in (\mathbb{C}[A])^* \quad f(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De par leurs choix, on a $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$. Soit maintenant un ouvert I de \mathbb{R} . On a les situations suivantes

- **Si $0 \in I$ et $1 \notin I$** : alors $f^{-1}(I) = \exp(\mathbb{C}[A])$. Or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenu dans $(\mathbb{C}[A])^*$, il en est donc un ouvert relatif.
- **Si $1 \in I$ et $0 \notin I$** : alors $f^{-1}(I) = (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$. Or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$ donc $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$.
- **Si $1 \in I$ et $0 \in I$** : alors $f^{-1}(I) = (\mathbb{C}[A])^*$;
- **Si $1 \notin I$ et $0 \notin I$** : alors $f^{-1}(I) = \emptyset$.

Dans tous les cas $f^{-1}(I)$ est donc un ouvert relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$, prouvant ainsi que

$$f \text{ est continue avec } f(M_1) = 0 \text{ et } f(M_2) = 1$$

13b À cause de l'hypothèse $\exp(\mathbb{C}[A]) \subsetneq (\mathbb{C}[A])^*$ on a pu construire une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans \mathbb{R} telle que

$$f((\mathbb{C}[A])^*) = \{0, 1\}$$

Mais puisque $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs et f est continue alors $f((\mathbb{C}[A])^*)$ devrait être une partie de connexe par arcs de \mathbb{R} . Ce n'est pas le cas car les connexes par arcs de \mathbb{R} sont ses intervalles. On a donc prouvé par l'absurde que

$$\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$$

14 On sait que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit inversement $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A étant inversible 0 n'en est pas une VAP. Par suite 0 n'est pas une racine de son polynôme minimale. On peut donc écrire par division euclidienne $\pi_A = a + XQ$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. En appliquant à A on voit que

$$-\frac{1}{a}Q(A)A = I_n$$

prouvant que $A^{-1} \in \mathbb{C}[A]$. Alors $A \in (\mathbb{C}[A])^*$. Selon la question précédente on a donc $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Autrement dit, il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$A = e^{L(A)}$$

Ce qui montre que $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Ainsi

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

► **N.B.** Puisque \exp est continue, cela prouve par exemple que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Cette connexité peut être directement prouvée par une démarche similaire à celle suivie dans la question 10b (sol. 10b).

► **N.B.** L'application \exp induit ainsi une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Cette surjectivité n'est plus valide si on remplace \mathbb{C} par \mathbb{R} car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A} > 0$$

On peut prouver que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A = B^2$$

15 Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (2) et considérons l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ Y &\longmapsto t \mapsto Y(t+T) \end{aligned}$$

Φ est linéaire et elle est bien à valeurs dans \mathcal{S} puisque pour toute solution Y de (2), la fonction $t \mapsto Y(t+T)$ est une solution de (2). En outre Φ est bijectif de bijection réciproque l'application

$$\Phi^{-1} : Y \longmapsto (t \mapsto Y(t-T))$$

Ainsi toutes les valeurs propres de Φ sont non nulles. Soient donc μ une VAP de Φ et Y un VEP qui lui est associé. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t+T) = \mu Y(t)$$

16a La famille (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) est un système fondamental de solutions de (2), donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ la famille $(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de \mathbb{R}^n . Ce qui signifie que les vecteurs colonnes de la matrice $M(t)$ forment une base de \mathbb{R}^n . Elle est donc inversible. Par ailleurs on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad Y'_k(t) = A(t)Y_k(t)$$

Ce qui ne représente que l'identification colonne par colonne dans l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t) = A(t)M(t)$$

16b Considérons l'application U définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad U(t) = M(t)^{-1} M(t+T)$$

Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$M(t)^{-1} = \frac{1}{\det M(t)} {}^t \text{Com}(M(t)) = \frac{1}{\det M(t)} \left((-1)^{i+j} \Delta_{j,i}(t) \right)$$

où $(-1)^{i+j} \Delta_{j,i}(t)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i, j) de $M(t)$. Les fonctions $t \mapsto \det M(t)$ et $t \mapsto \Delta_{j,i}(t)$ sont des sommes de produits des applications composantes de l'application M . Elles sont donc de classe \mathcal{C}^1 . L'application $t \mapsto M(t)^{-1}$ est donc de classe \mathcal{C}^1 car ses composantes sont de classe \mathcal{C}^1 . En dérivant ensuite la relation

$$M(t)^{-1} M(t) = I_n$$

on déduit que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{dM(t)^{-1}}{dt} = -M(t)^{-1} M'(t) M(t)^{-1}$$

U est ainsi une fonction de classe \mathcal{C}^1 comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans une algèbre normée et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U'(t) &= -M(t)^{-1} M'(t) M(t)^{-1} M(t+T) + M(t)^{-1} M'(t+T) \\ &= -M(t)^{-1} A(t) M(t) M(t)^{-1} M(t+T) + M(t)^{-1} A(t) M(t+T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc U est partout constante sur l'intervalle \mathbb{R} .

La matrice $M(t)^{-1} M(t+T)$ ne dépend pas de $t \in \mathbb{R}$.

(8)

Autre méthode : D'après la question précédente M est une solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$R' = A(t)R \tag{9}$$

dont la fonction inconnue R est définie de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La fonction A étant T -périodique on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t+T) = A(t)M(t+T)$$

Ce qui signifie que l'application $N : t \mapsto M(t+T)$ est aussi une solution de l'équation (9). Soit maintenant un élément quelconque U_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est immédiat que la fonction $t \mapsto M(t)U_0$ est une solution de (9). En posant $U_0 = M(0)^{-1} M(T)$ on voit que celle-ci prend la même valeur en 0 que la solution N . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles sont donc égales.

Ainsi
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)U_0$$

D'où le résultat voulu.

► **N.B.** Voir la note page 18 pour plus de propriétés de l'équation (9).

16c Posons $U_0 = M(0)^{-1} M(T)$. D'après la question précédente on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)U_0$$

La matrice U_0 est inversible comme produit de matrices inversibles donc par surjectivité de l'application exp il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U_0 = e^{TB}$. On a alors

$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)e^{TB}$

16d Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Q(t) = M(t) e^{-tB}$$

$Q(t)$ est inversible car c'est le produit de deux matrices inversibles. Les applications M et $t \mapsto e^{-tB}$ sont continues (cette dernière est même de classe \mathcal{C}^∞ , résultat de cours) donc Q est continue comme produit d'applications continues à valeurs dans une algèbre normée. Soit ensuite $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= M(t+T) e^{-(t+T)B} \\ &= M(t) e^{TB} e^{-(t+T)B} \\ &= M(t) e^{-tB} \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

Ce qui montre que Q est T -périodique.

Il existe une application $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et T -périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t) = Q(t) e^{tB} \quad (10)$$

► **N.B.** Q est même de classe \mathcal{C}^1 de par sa définition.

17a Notons V_1, V_2, \dots, V_n les vecteurs colonnes de la matrice P . On a alors pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Z_k(t) = M(t) V_k$$

► **N.B.** Les vecteurs V_1, V_2, \dots, V_n sont des VEP de la matrice D puisque P est une matrice de diagonalisation de D

Si V est un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}(M(t)V) = M'(t)V = A(t)M(t)V$$

Ce qui signifie que la fonction $t \mapsto M(t)V$ est une solution du système différentiel $X' = A(t)X$. Les fonctions Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont donc des éléments de \mathcal{S} . Ensuite, puisque $M(t)$ et P sont inversibles alors $M(t)P$ est inversible et donc $(Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t))$ est une base de \mathbb{C}^n pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) est un système fondamental de solutions du système $X' = A(t)X$.

(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) est une base de \mathcal{S} .

► **N.B.** Comme expliqué ci-dessus, pour tout $V \in \mathbb{C}^n$, la fonction $t \mapsto M(t)V$ est une solution de (2). Réciproquement si Y est une solution de (2), en posant $V = M(0)^{-1}Y(0)$, la fonction $Z : t \mapsto M(t)V$ est une solution de (2) et elle vérifie $Z(0) = Y(0)$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $Z = Y$. On a ainsi prouvé l'existence d'un vecteur tel $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y(t) = M(t)V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour résumer

Les solutions du système différentiel $X' = A(t)X$ sont les fonctions

$$t \mapsto M(t)V \quad (11)$$

où V est un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n .

Nous allons utiliser l'écriture (11) dans la suite. Noter que ce résultat généralise l'expression des solutions d'un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants $Y' = CY$, puisque celles-ci sont les fonctions

$$t \mapsto e^{tC} V \quad V \in \mathbb{C}^n$$

les vecteurs colonnes de $M(t) = e^{tC}$ permettant effectivement ici de former un système fondamental de solutions de $Y' = CY$.

Voir les notes suivantes pour un complément d'information sur ces matrices « $M(t)$ ».

- **N.B.** Sans supposer que la fonction A est périodique, considérons maintenant l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$R' = A(t)R \quad (12)$$

dont l'inconnue R est une fonction de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette équation sera dite équation résolvente du système différentiel $X' = A(t)X$.

Si R en est une solution et si on note $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ les vecteurs colonnes de $R(t)$ alors les fonctions C_1, C_2, \dots, C_n sont des solutions de (2). Leur wronskien est la fonction $t \mapsto \det(R(t))$. On en déduit que $R(t)$ est soit inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit elle ne l'est pour aucun.

Ainsi il suffit que $R(0)$ soit inversible, par exemple $R(0) = I_n$, pour que $R(t)$ soit inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons maintenant une solution R_0 qui vérifie cette condition. Alors pour tout $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la fonction $t \mapsto R_0(t)U$ est une solution de (12). Inversement, si R est une solution quelconque de (12) alors elle prend la même valeur en 0 que la solution $t \mapsto R_0(t)U$ avec $U = R_0(0)^{-1}R(0)$ et donc $R(t) = R_0(t)U$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation résolvente (12) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto R_0(t)U$$

où U est un élément quelconque de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. R_0 étant une solution donnée telle que $R_0(0)$ soit inversible.

Ceci indique en particulier que pour toute solution R , $R(t)$ conserve le même rang en tout $t \in \mathbb{R}$, celui de U .

- **N.B.** Autre propriété remarquable : si R_1 et R_2 sont des solutions de (12) telles que $R_1(t)$ et $R_2(t)$ soient partout inversibles et si $s \in \mathbb{R}$ alors les fonctions $t \mapsto R_1(t)R_1(s)^{-1}$ et $t \mapsto R_2(t)R_2(s)^{-1}$ sont des solutions de (12) et elle prennent la même valeur en s , à savoir I_n . Elles sont donc partout égales. Signifiant que

$$\forall t, s \in \mathbb{R} \quad R_2(t)^{-1}R_1(t) = R_2(s)^{-1}R_1(s) \quad (13)$$

ou encore que la fonction $t \mapsto R_2(t)^{-1}R_1(t)$ est constante sur \mathbb{R} . Cette propriété généralise le résultat (8) de la question 16b (sol. 16b).

- 17b** Comme $B = D + N$, $DN = ND$ et N est nilpotente alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$e^{tB} = e^{tN} e^{tD} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} N^j e^{tD}$$

Soit maintenant $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par définition du vecteur V_k on a $DV_k = \lambda_k V_k$ et donc $e^{tD} V_k = e^{\lambda_k t} V_k$. Alors

$$Z_k(t) = Q(t) e^{tB} V_k = e^{\lambda_k t} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} Q(t) N^j V_k \right)$$

En posant pour tout $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $R_{j,k}(t) = (1/j!) Q(t) N^j V_k$ on voit que :

les fonctions $R_{0,k}, R_{1,k}, \dots, R_{n-1,k}$ sont continues T -périodiques et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^j R_{j,k}(t) \right) \quad (14)$$

- 17c** On suppose que les parties réelles des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont strictement négatives. Sachant que toute solution Y de (2) est une combinaison linéaire des fonctions Z_1, Z_2, \dots, Z_n il suffit de justifier que

$$\forall k \in \llbracket 1; l \rrbracket \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Z_k(t) = 0$$

Soit donc $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Les fonctions $R_{j,k}$, $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ sont continues périodiques sur \mathbb{R} donc elles sont bornées sur \mathbb{R} . Notons K un majorant commun de tous les réels $\|R_{j,k}(t)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'expression de $Z_k(t)$ donnée en (14) aboutit alors à

$$\forall t \in [1; +\infty[\quad \|Z_k(t)\| \leq K e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} \sum_{j=0}^{n-1} t^j \leq nK t^n e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}$$

Puisque $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ alors $t^n e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $Z_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{C}^n}$.

Si $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ alors pour toute solutions Y du système différentiel (2) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0_{\mathbb{C}^n}$$

18a On suppose que B admet une VAP de la forme $\lambda = i2k\pi/(mT)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit V un VEP qui lui est associé. La fonction $Y : t \mapsto M(t)V$ est une solution de (2) et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = Q(t) e^{tB} V = Q(t) e^{\lambda t} V = Q(t) e^{i\frac{2k\pi}{mT}t} V$$

Les application Q et $t \mapsto e^{i\frac{2k\pi}{mT}t}$ sont respectivement T -périodique et mT -périodique donc

Y est une solution de (2) qui est mT -périodique

18b On suppose que (2) admet une solution non nulle mT -périodique. Selon (11), il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y(t) = M(t)V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors, en utilisant l'écriture (10)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = Q(t) e^{tB} V$$

Puisque Y et Q sont mT -périodique on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$Q(t) e^{(t+mT)B} V = Q(t) e^{tB} V$$

et donc

$$e^{mTB} V = V$$

signalant que 1 est une VAP de la matrice e^{mTB} . Puisque les valeurs propres de e^{mTB} sont les nombres de la formes λ^m où λ décrit le spectre complexe de e^{TB} , on en déduit que :

Si (2) admet une solution mT -périodique alors la matrice e^{TB} admet au moins une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

► **N.B.** Pour résumer les questions 18a (sol. 18a) et 18b (sol. 18b)

Sachant que l'application A est T -périodique, si $m \in \mathbb{N}^*$, alors le système différentiel $X' = A(t)X$ admet une solution mT -périodique non nulle si et seulement si la matrice $e^{TB} = M(0)^{-1}M(T)$ admet au moins une VAP μ qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

► **N.B.** Soit maintenant un scalaire $\mu \in \mathbb{C}$ et un vecteur $V \in \mathbb{C}^*$ tous les deux non nuls et considérons la solution $X : t \mapsto M(t)V$ du système différentiel $X' = A(t)X$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} M(0)^{-1}M(T)V = \mu V &\iff M(T)V = \mu M(0)V \\ &\iff X(T) = \mu X(0) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad X(t+T) = \mu X(t) \end{aligned}$$

La dernière équivalence découle du fait que les fonctions $t \mapsto X(t+T)$ et $t \mapsto \mu X(t)$ sont des solutions du système $Y' = M(t)V$ et sont donc égales si et seulement si elles prennent la même valeur en 0. Les VAP de $M(0)^{-1}M(T)$ sont donc exactement les VAP de l'opérateur Φ de \mathcal{S} introduit dans la question 15 (sol. 15). De plus pour toute VAP μ de $M(0)^{-1}M(T)$, V est un VEP qui lui est associé si et seulement si la fonction $X : t \mapsto M(t)V$ est un VEP de Φ associé à μ . Sachant que cela signifie que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t+T) = \mu X(t)$$

on voit immédiatement que si μ est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité alors X est mT -périodique.

Cette causalité entre éléments propres de Φ et ceux de la matrice $M(0)^{-1}M(T)$ s'explique très bien matriciellement. En effet si $X : t \mapsto M(t)V$ est un élément de \mathcal{S} alors V est le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) de \mathcal{S} . Il est donné par $V = M(0)^{-1}X(0)$. Celui de $\Phi(X)$ est donc donné par

$$\begin{aligned} V' &= M(0)^{-1}\Phi(X)(0) = M(0)^{-1}X(T) \\ &= M(0)^{-1}M(T)V \end{aligned}$$

donc $M(0)^{-1}M(T)$ est tout simplement la matrice de Φ dans la base (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) de \mathcal{S} .

19 On suppose que (2) admet une solution X qui est T' -périodique avec $T'/T \notin \mathbb{Q}$. On a alors la relation

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(t+kT')X(t) = A(t)X(t)$$

découlant de l'égalité $X'(t+kT') = X'(t)$. Et puisque A est T -périodique on a même

$$\forall k, h \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(t+kT'+hT)X(t) = A(t)X(t)$$

ou encore, en posant $G = T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z}$

$$\forall g \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(g+t)X(t) = A(t)X(t)$$

G est une sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque $T \in G$ et $T' \in G$, il existerait $u, u' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $T = au$ et $T' = au'$. Ce qui impliquerait que $T'/T \in \mathbb{Q}$, entrant en contradiction avec l'hypothèse faite sur T' . G n'est donc pas un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ et donc il est dense dans \mathbb{R} . Pour un réel t fixé, l'application $s \mapsto A(s+t)X(t) - A(t)X(t)$ est continue sur \mathbb{R} et elle est partout nulle sur la partie dense G . Elle est donc partout nulle sur \mathbb{R} . On conclut en posant $u = t + s$ que

Si X est une solution T' -périodique de $X' = A(t)X$ avec $T' \notin T\mathbb{Q}$ alors

$$\forall t, u \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(t)X(t)$$

20 On suppose qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel (sev) non trivial V de \mathbb{C}^n qui soit stable par tous les $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ et que (2) admet au moins une solution non nulle X qui est T' -périodique. Supposons que $T'/T \notin \mathbb{Q}$.

Il découle de la question précédente que

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(v)X(t) \quad (15)$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$V_k = \bigcap_{u, v \in \mathbb{R}} \text{Ker}(A(u)^k - A(v)^k)$$

et ensuite

$$V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} V_k$$

de telle sorte que pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ on ait

$$x \in V \iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k x = A(v)^k x$$

Revenons à la relation (15) et dérivons là par rapport à t :

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)A(t)X(t) = A(v)A(t)X(t)$$

et en recourant encore à (15)

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^2 X(t) = A(v)^2 X(t)$$

Par récurrence sur k on démontre selon la même idée que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k X(t) = A(v)^k X(t)$$

V contient donc tous les vecteurs $X(t)$. Puisque la fonction X est non nulle alors le sev V est non nul. Il est inclus strictement dans E car sinon on aura $V_1 = \mathbb{C}^n$. Ce qui signifierait que l'application A est constante contredisant ainsi l'hypothèse de départ de la question.

Soient maintenant $x \in V$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k A(t)x = A(u)^{k+1} x = A(v)^{k+1} x = A^k(v)A(t)x$$

et donc $A(t)x \in V$. Le sev non trivial V est donc stable par tous les $A(t)$, amenant une contradiction. Ainsi $T'/T \in \mathbb{Q}$. Il existe alors des entiers $m, m' \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $m'T' = mT$. La solution X est $m'T'$ -périodique et donc mT -périodique. D'après la question 18b (sol. 18b), la matrice e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

Réciproquement supposons que e^{TB} admet une telle VAP et notons la $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Les VAP de e^{TB} sont les complexes de la forme $e^{T\lambda}$ où λ est une VAP de B . Il existe donc une VAP λ de B telle que $e^{T\lambda} = \mu$ et par suite

$$\exists h \in \mathbb{Z} ; \quad T\lambda - \frac{2ik\pi}{m} = 2ih\pi$$

ou encore

$$\lambda = \frac{2i(k + mh)\pi}{mT}$$

Selon la question 18a (sol. 18a), (2) admet bien une solution mT -périodique non nulle. Concluons :

S'il n'existe aucun sev non trivial de \mathbb{C}^n qui soit stable par toutes les matrices $A(t)$ alors (2) admet au moins une solution T' -périodique non nulle si et seulement si il existe $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité et $T' = (mT)/m'$ (et donc $T' \in T\mathbb{Q}$).

► **N.B.** Résumons l'étude effectuée jusqu'à maintenant.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, des solutions mT -périodiques non nulles de $X' = A(t)X$ existent si et seulement si e^{TB} admet au moins une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.
- Si le système $X' = A(t)X$ admet une solution non nulle X qui est T' -périodique telle que $T' \notin T\mathbb{Q}$, alors X vérifie

$$\forall u, v, t \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(v)X(t)$$

Ce qui permet de construire des sev non triviaux de \mathbb{C}^n qui sont stables par toutes les matrices $A(t)$.

- En conséquence si \mathbb{C}^n ne contient aucun SEV non trivial qui est stable par toutes les matrices $A(t)$, toute solution périodique non nulle de $X' = A(t)X$ ne peut être que rT -périodique avec $r \in \mathbb{Q}$. Plus précisément si $r = m'/m$ avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$ alors $X' = A(t)X$ admet une solution rT périodique si et seulement si e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

21 On a vu que les solutions de l'équation homogène de (3) sont les fonctions de la forme $X : t \mapsto M(t)V$ où V est le vecteur colonne des coordonnées de X dans un système fondamental de solutions de celle-ci. La méthode de la variation des constantes revient donc ici à poser $X(t) = M(t)V(t)$ en supposant que V est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Dans ce cas

$$\begin{aligned} X'(t) = A(t)X(t) + b(t) &\iff M(t)V'(t) = b(t) \\ &\iff V'(t) = M(t)^{-1}b(t) \end{aligned}$$


Les primitives de la fonction $t \mapsto M(t)^{-1}b(t)$ peuvent être écrite sous la forme

$$t \mapsto V_0 + \int_0^t M(s)^{-1}b(s) ds$$

où V_0 est un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n . Les solutions de (3) sont donc les fonctions

$$X : t \mapsto M(t)V_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s) ds$$

avec V_0 quelconque dans \mathbb{C}^n .

 **(.)** Rappel) Soit une fonction CPM $f : [a, b] \rightarrow E$. Pour toute application linéaire u définie sur E on a

$$u\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b u(f(t)) dt$$

Pour un réel t fixé, l'application $V \mapsto M(t)V$ est un endomorphisme de \mathbb{C}^n , ce qui explique l'égalité

$$M(t)\left(\int_0^t M(s)b(s) ds\right) = \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s) ds$$

Soit $V_0 \in \mathbb{C}^n$ et considérons la fonction X ci-dessus. Selon la question 16d (sol. 16d), $M(t) = Q(t)e^{tB}$ où Q est une fonction continue T -périodique de \mathbb{R} dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = Q(t)e^{tB}V_0 + \int_0^t Q(t)e^{(t-s)B}Q(s)^{-1}b(s) ds$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on aura

$$\begin{aligned} X(t+T) - X(t) &= Q(t)e^{tB}(e^{TB} - I_n)V_0 + \\ &Q(t)e^{tB}\left(e^{TB}\int_0^{t+T} e^{-sB}Q(s)^{-1}b(s) ds - \int_0^t e^{-sB}Q(s)^{-1}b(s) ds\right) \end{aligned}$$

Sachant que Q et b sont T -périodiques, avec la translation de la variable $s = u + T$ on a

$$e^{TB}\int_0^{t+T} e^{-sB}Q(s)^{-1}b(s) ds = \int_{-T}^t e^{-uB}Q(u)^{-1}b(u) du$$

$Q(t)e^{tB}$ étant inversible on a ainsi

$$X(t+T) = X(t) \iff (e^{TB} - I_n)V_0 + \int_{-T}^0 e^{-sB}Q(s)^{-1}b(s) ds = 0$$

Puisque 1 n'est pas une VAP de e^{TB} alors $e^{TB} - I_n$ est une matrice inversible. X est donc T -périodique si et seulement si

$$V_0 = -(e^{TB} - I_n)^{-1} \int_{-T}^0 e^{-sB} Q(s) b(s) ds = 0$$

D'où l'existence et l'unicité d'une solution T périodique de (3). Résumons :

Si les applications A et b sont continues et T -périodiques et si la matrice e^{TB} ne possède pas 1 comme VAP alors le système différentiel

$$X' = A(t)X + b(t)$$

admet une unique solution T -périodique.

► **N.B.** Maintenant qu'on connaît l'importance des VAP de la matrice $e^{TB} = M(0)^{-1}M(T)$, dans quelle mesure le choix initial de l'application M va influencer sur ces VAP ?

En fait quelque soit le choix de la base de \mathcal{S} qui permet de former l'application M on a vu que la matrice $M(0)^{-1}M(T)$ représente dans cette base la matrice de l'endomorphisme Φ de \mathcal{S} . Toutes les matrices $M(0)^{-1}M(T)$ sont donc semblables et de ce fait ont les mêmes VAP.

22 En posant $X = (x, y)$ le système différentiel s'écrit matriciellement

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (16)$$

où
$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} = I + \cos(t)J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction A est ici 2π -périodique. La matrice J se réduit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$$J = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

donc
$$A(t) = P \begin{pmatrix} 1 + i \cos t & 0 \\ 0 & 1 - i \cos t \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comme à l'usage¹ on pose $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}X$. Le système (16) équivaut alors à

$$\begin{cases} u' = (1 + i \cos t)u \\ v' = (1 - i \cos t)v \end{cases}$$

Les solutions de ce dernier système sont données par

$$\begin{cases} u = \lambda e^{t+i \sin t} \\ v = \mu e^{t-i \sin t} \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$X = PY$ donc les solutions du système (16) sont données par

$$\begin{cases} x = u + v = e^t (\lambda e^{i \sin t} + \mu e^{-i \sin t}) \\ y = -i(u - v) = -i e^t (\lambda e^{i \sin t} - \mu e^{-i \sin t}) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

1. matrice de passage P indépendante de la variable t

Les fonctions $X_1 : t \mapsto e^{t+i \sin t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto e^{t-i \sin t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solutions de (16). Le système (Y_1, Y_2) en est un autre lorsqu'on pose

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \frac{1}{2}(X_1(t) + X_2(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin t) \\ \sin(\sin t) \end{pmatrix} \\ Y_2(t) &= \frac{1}{2i}(X_1(t) - X_2(t)) = e^t \begin{pmatrix} \sin(\sin t) \\ -\cos(\sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur la base du système fondamental (Y_1, Y_2) on forme M en posant

$$M(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix}$$

L'écriture normale de M est donc $M(t) = Q(t) e^{tB}$ avec

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = I_2$$

► **N.B.** Rigoureusement, B est une matrice quelconque qui vérifie $e^{2\pi B} = M(0)^{-1} M(2\pi) = e^{2\pi} I_2$ donc il suffit de prendre $B = I_2$. $Q(t)$ en découle ensuite.

► **N.B.** On constate qu'aucune solution non nulle de (16) n'est périodique. Examinons ce qu'en dit l'étude menée par ce sujet.

D'un côté la seule VAP de $e^{2\pi B}$ est $e^{2\pi}$ et elle n'est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité pour aucun entier $m \in \mathbb{N}^*$.

De l'autre, la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (un VEP de toutes les matrices $A(t)$) est stable par toutes les matrices $A(t)$. Donc le résultat de la question 20 n'est pas applicable pour savoir si (16) admet une solution T' -périodique avec $T'/(2\pi) \in \mathbb{Q}$.

En outre pour tout $u, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} A(u)M(t) - A(t)M(t) &= e^{it}(\cos u - \cos t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix} \\ &= e^{it}(\cos u - \cos t) \begin{pmatrix} -\sin(\sin t) & \cos(\sin t) \\ \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une solution $X : t \mapsto M(t)V$ avec $V \in \mathbb{C}^2$, si elle est T' -périodique avec $T'/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$ va vérifier

$$\forall u, t \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) - A(t)X(t) = 0$$

soit

$$\forall u, t \in \mathbb{R} \quad (A(u)M(t) - A(t)M(t))V = 0$$

Seul le vecteur $V = 0_{\mathbb{C}^2}$ permet d'avoir cette propriété.

Ce qui confirme l'absence (apparente) de solutions périodiques non nulles de (16)