Sujet de concours

X-ENS

Session 2024

Mathématiques B

Rédigé par Sadik Boujaida

MP

ÉNONCÉ

Maths B, MP, 2024

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note également $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.
Si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $v_1, \dots, v_k$ sont des éléments de E, on note $\mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_k$.
Si $k \geqslant 1$ est un entier et si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans E.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Si U est un ouvert de E et $f : U \to E$ une fonction différentiable, pour tout $x \in U$ on note $df(x)$ la différentielle de f en x. On rappelle que $df(x)$ est alors un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E. Si g est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E, on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à-dire

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| \mid v \in E, \|v\| \leqslant 1\}.$$

Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel positif, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r et $\overline{B(a, r)}$ la boule fermée de centre a et rayon r.
On note Id_E l'application identité de E dans E.
Si p et q désignent deux entiers naturels non nuls, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $p = q$, on note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ pour $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On identifie également le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ avec le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des vecteurs colonnes $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.
Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\exp(A) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'exponentielle de la matrice A.

Première partie :

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0. \tag{1}$$

1. **1a.** Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à (1) telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Justifier que vect (y_1, y_2) est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1b. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

2. Montrer que si $y \in \mathscr{V}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de (1), alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

3. Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

a. L'équation (1) possède une solution $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t).$$

b. Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - \left(y_1(T) + y_2'(T)\right)x + 1 = 0.$$

c. L'équation différentielle (1) possède une solution $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t}u(t),$$

où $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction T-périodique.

4. Soient μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - \left(y_1(T) + y_2'(T)\right)x + 1 = 0.$$

4a. Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de (1), il existe deux fonctions T-périodiques w_1 et w_2, ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t}w_1(t) + \beta e^{-\lambda t}w_2(t).$$

4b. Supposons que $\mu_1 = \mu_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation (1) admet une solution périodique dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie :

Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a. Soit $f : U \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que $df(a) = \mathrm{Id}_E$.

5. **5a.** Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans E. On suppose qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leqslant C$. Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V, on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C\|x_2 - x_1\|$.

5b. Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ et

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a,r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions de cette deuxième partie.

5c. Montrer que pour tout $x \in B(a,r)$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

6. Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \frac{r}{4}$.

6a. Montrer que l'application

$$g \ : \begin{array}{ccc} \overline{B(a,r)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|y_0 - f(x)\|^2 \end{array}$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a,r)$.

6b. Montrer que $f(x_0) = y_0$.

7. On note $W = \left\{ y \in E \,\middle|\, \|y - f(a)\| < \frac{r}{4} \right\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$.

7a. Justifier que V et W sont des ouverts de E.

7b. Montrer que

$$f_{|V} \ : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W.

Troisième partie :

Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ de la forme $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme. On note

$$(\mathbb{C}[A])^* = \left\{ B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B^{-1} \in \mathbb{C}[A] \right\}.$$

8. **8a.** Justifier que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

8b. Montrer que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

9. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$

10. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$Z_a : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t + iat(1-t). \end{array}$$

10a. Montrer que l'application

$$\begin{array}{c}]0\,;1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ (t,a) \longmapsto Z_a(t) \end{array}$$

est injective.

10b. Soient M_1 et M_2 deux éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = Z_n(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*.$$

10c. En déduire que $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11. **11a.** Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant o et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant la matrice identité I_n tels que la fonction exponentielle induit une bijection continue de $U \subset \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V.

11b. En déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

12. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

13. On veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$. On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ et on fixe $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

13a. Montrer qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\{0,1\}$ telle que $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$.

13b. Conclure.

14. Conclure que $\exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Quatrième partie :

Soient $T > 0$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Soit

$$A : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto A(t) \end{array}$$

une application continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2}$$

où X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

15. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et une solution $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ non nulle de (2) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t).$$

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des solutions dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2). Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathcal{S}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$. On dispose ainsi d'une application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$.

16. **16a.** Montrer que pour tout nombre réel t, $M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$.

16b. Montrer que la matrice $(M(t))^{-1}M(t+T)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

16c. En déduire qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)\exp(TB).$$

16d. En déduire qu'il existe une application $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue sur $\mathbb{R}$ et T. périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = Q(t)\exp(tB).$$

(On appelle cette identité la forme normale de la matrice M). On admet qu'il existe deux matrices D et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B = D + N \text{ et } DN = ND.$$

Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

17. **17a.** Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_n(t) \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de la matrice $M(t)P$. Montrer que $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de l'espace $\mathcal{S}$.

17b. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\frac{1}{i\}}Q(t)N^iP$. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t)\right)$$

et vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

17c. En déduire que si les parties réelles des λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont strictement négatives et si Y est une solution quelconque de (2), alors

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0.$$

18. **18a.** Montrer que si B a une valeur propre de la forme $\lambda = i\frac{2k\pi}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors (2) a une solution mT-périodique non nulle.

18b. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que (2) possède une solution mT-périodique non nulle. Montrer que $\exp(TB)$ possède une valeur propre qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

19. Dans cette question, on suppose que (2) possède une solution T^v-périodique X avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$A(u)X(t) = A(t)X(t).$$

On pourra utiliser sans demonstration le fait que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

20. On suppose dans cette question qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$, différent de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, V est stable par $A(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et sur B pour que (2) ait au moins une solution périodique non nulle.

21. Soit le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \tag{3}$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$. Montrer que (3) possède une unique solution T-périodique.

22. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}$$

et déterminer sa forme normale (voir la question 16d).

CORRIGÉ

1a. L'équation (1) est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2. Elle est normalisée et la fonction q est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, implique alors l'existence et l'unicité de deux solutions y_1 et y_2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Par ailleurs (1) est homogène donc son ensemble des solutions S sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Le wronksien W des solutions y_1 et y_2 défini par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

vérifie $W(0) = 1 \neq 0$ donc (y_1, y_2) est une base de S.

$$\boxed{\text{Les fonctions } y_1 \text{ et } y_2 \text{ définies par les conditions (4) forment une base de l'ensemble des solutions } S \text{ de (1) sur } \mathbb{R}.}$$

1b. L'équation du wronksien de (1) s'écrit ici

$$w' = 0$$

Le wronksien W de y_1 et y_2 est donc une fonction constante. Puisque $W(0) = 1$ alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1}$$

(. rappel) L'équation du wronksien d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène et normalisable sur un intervalle I :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

s'écrit

$$a(t)w' + b(t)w = 0$$

2. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de (1) et posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(t+T)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y''(t+T) + q(t+T)y(t+T)$$

Grâce à la T-périodicité de la fonction q, on a donc

$$z''(t) + q(t)z(t) = 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } z : t \longmapsto y(t+T) \text{ est donc une solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation (1)}}$$

Ensuite, puisque (y_1, y_2) est une base de S, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. En dérivant cette expression et appliquant z et z' à 0 on obtient

$$\begin{cases} z(0) = \lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) = \lambda_1 \\ z'(0) = \lambda_1 y_1'(0) + \lambda_2 y_2'(0) = \lambda_2 \end{cases}$$

soit $\lambda_1 = y(T)$ et $\lambda_2 = y'(T)$. Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)} \tag{5}$$

N.B. Noter l'intérêt du choix des solutions y_1 et y_2 : toute solution f de (1) s'écrit de manière simple sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = f(0)y_1(t) + f'(0)y_2(t)$$

3. Introduisons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & S & \longrightarrow & S \\ & y & \longmapsto & z : t \mapsto y(t+T) \end{array}$$

Selon la question précédente, Φ est bien à valeurs dans S et elle vérifie

$$\forall y \in S \quad \Phi(y) = y(T)y_1 + y'(T)y_2$$

Sa matrice dans la base (y_1, y_2) de S est en outre :

$$R = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$$

et de ce fait son polynôme caractéristique est

$$\chi_\Phi = X^2 - \operatorname{tr}(R)X + \det(R) = X^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)X + 1$$

- **$(a) \Leftrightarrow (b)$)** La propriété (a) équivaut à dire que μ est une *valeur propre (VAP)* de Φ. La propriété (b), que μ est une racine de χ_Φ. Les deux propriétés sont donc équivalentes.
- **$(a) \Leftrightarrow (c)$)** Considérons une solution non nulle y quelconque de (1) et posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, y(t)$. La fonction u est de classe $\mathscr{C}^2$ comme produit de fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} u(t+T) = u(T) &\iff \mathrm{e}^{-\lambda(t+T)}\, y(t+T) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, y(t) \\ &\iff y(t+T) = \mathrm{e}^{\lambda T}\, y(t) \\ &\iff y(t+T) = \mu y(t) \end{aligned}$$

  u est donc T-périodique si seulement si y vérifie la propriété (a).

$$\boxed{(a) \iff (b) \iff (c)}$$

4a. Supposons que $\mu_1 \neq \mu_2$. Le polynôme caractéristique χ_Φ est donc scindé à racines simples et de ce fait Φ est diagonalisable. En outre $\mu_1\mu_2 = \det \Phi = 1$ donc si on pose $\mu_1 = \mathrm{e}^{\lambda T}$ alors $\mu_2 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$. Considérons ensuite une base (v_1, v_2) de S formée de *vecteur propre (VEP)* respectivement associés à μ_1 et à μ_2. Selon la question précédente, il existe des fonctions T-périodiques et de classe $\mathscr{C}^2$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$v_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, w_1(t) \qquad v_2(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, w_2(t)$$

(v_1, v_2) étant une base de S on a donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour toute solution } y \text{ de } (1)\text{, il existe des complexes } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que} \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha\, \mathrm{e}^{\lambda t}\, w_1(t) + \beta\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, w_2(t)\end{array}}$$

4b. Supposons que $\mu_1 = \mu_2$ alors $\mu_1^2 = \det \Phi = 1$ et donc $\mu_1 = \pm 1$. Soit y un VEP de Φ associé à μ_1. Selon la question précédente il existe une fonction u T-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = \mu_1 y(t)$$

- **Si $\mu_1 = 1$:** alors y est T-périodique
- **Si $\mu_1 = -1$:** alors $y(t+2T) = y(t)$ et donc y est $2T$-périodique.

Dans tous les cas on a donc

$$\boxed{\text{Si } \mu_1 = \mu_2 \text{ alors (1) admet au moins une solution non nulle périodique.}}$$

5a. Soient x_1, x_2 deux éléments de V. L'ouvert V étant convexe la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & h\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \end{array}$$

est bien définie et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. En outre on a par règle de différentiation d'une composée :

$$\forall t \in [0\,;1] \quad \varphi'(t) = \mathrm{d}h\big((1-t)x_1 + tx_2\big)(x_2 - x_1)$$

et donc $$\forall t \in [0\,;1] \quad \|\varphi'(t)\| \leqslant \big|\!\big|\!\big| \mathrm{d}h\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \big|\!\big|\!\big| \|x_2 - x_1\| \leqslant C\|x_2 - x_1\|$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction vectorielle φ entre 0 et 1 donne ensuite

$$\boxed{\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C\|x_2 - x_1\|}$$

5b. Soir un réel $\rho > 0$ tel que $B(a,\rho) \subset U$. Considérons la fonctions h définie sur le convexe $B(a,\rho)$ par

$$h(x) = f(x) - x$$

h est de classe C^1 sur $B(a,\rho)$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 et on a

$$\mathrm{d}h(a) = 0 \qquad \text{(car } \mathrm{d}f(a) = \mathrm{id}_E\text{)}$$

L'application $x \longmapsto \mathrm{d}h(x)$ est continue donc il existe un $r \in \left]0\,;\rho\right[$ tel que

$$\forall x \in B(a,r) \quad |||\,\mathrm{d}h(x)||| \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après la question précédente on a donc

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_2\|$$

Soit
$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_2\|$$

Et comme $\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \geqslant \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\|$ on en déduit que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

Quitte à remplacer r par une rayon legérement plus petit on a démontré que

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a,r)} \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_2\|}$$

➡ N.B. Cette propriété implique en particulier que f induit une injection sur $\overline{B(a,r)}$. Remarque qui sera utilisée plus en avant dans le sujet.

5c. Soit $x \in B(a,r)$. Par différentiabilité de f en x il existe $\delta > 0$ tel que pour tout vecteur $h \in E$ vérifiant $\|h\| \leqslant \delta$ on ait $x + h \in U$ et

$$\|f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(h)\| \leqslant \frac{1}{4}\|h\|$$

et donc
$$\|\,\mathrm{d}f(x)(h)\| \geqslant \|f(x+h) - f(x)\| - \frac{1}{4}\|h\|$$

Puisque x est dans la boule ouverte $B(a,r)$, en posant $\rho = \frac{1}{2}\big(r - \|x - a\|\big)$ on a $B(x,\rho) \subset B(a,r)$. Si h est un vecteur de E tel que $\|h\| \leqslant \rho$ alors $x + h \in B(a,r)$ et donc d'après la question précédente,

$$\|f(x+h) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|h\|$$

Quitte à remplacer δ par $\min(\delta,\rho)$, on peut ainsi écrire

$$\forall h \in E \quad \|h\| \leqslant \delta \Longrightarrow \|\,\mathrm{d}f(x)(h)\| \geqslant \frac{1}{4}\|h\|$$

Si maintenant h est un vecteur non nul quelconque de E alors, ceci implique que

$$\left\|\mathrm{d}f(x)\left(\frac{\delta}{\|h\|}h\right)\right\| \geqslant \frac{1}{4}\left\|\frac{\delta}{\|h\|}h\right\|$$

et par linéarité de l'application $\mathrm{d}f(x)$

$$\|\,\mathrm{d}f(x)(h)\| \geqslant \frac{1}{4}\|h\|$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}\,\mathrm{d}f(x) = \{0_E\}$ et ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in B(a,r),\ \mathrm{d}f(x) \text{ est un endomorphisme injectif de } E.}$$

N.B. On peut y parvenir plus rapidement en constatant que l'application

$$x \in U \longmapsto \det\big(\mathrm{d}f(x)\big)$$

est continue et qu'elle ne s'annule pas en a. Il existe donc une boule $B(a,r)$ voisinage de a sur laquelle elle ne s'annule pas.

6a. En tant qu'application de classe $\mathscr{C}^1$, f est continue. Par composition d'applications continues, g est donc continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de $x_0 \in \overline{B(a,r)}$ tel que

$$\|y_0 - f(x_0)\|^2 = \min_{x\in\overline{B(a,r)}} \|y_0 - f(x)\|^2$$

Supposons maintenant que x_0 est sur la sphère $S(a,r)$. On aura alors

$$\begin{aligned}\|f(x_0)-y_0\| &\geqslant \|f(x_0)-f(a)\| - \|f(a)-y_0\|\\ &\geqslant \frac{1}{2}\|x_0-a\| - \|f(a)-y_0\|\\ &\geqslant \frac{r}{2}-\frac{r}{4}=\frac{r}{4}\\ &\geqslant \|f(a)-y_0\|\end{aligned}$$

ou encore $g(x_0) \geqslant g(a)$ et donc $g(x_0)=g(a)$.
On en déduit que soit x_0 est dans $B(a,r)$ soit il est sur la sphère $S(a,r)$ mais dans ce cas g atteint aussi son minimum en a qui est dans $B(a,r)$. Dans tous les cas :

$$\boxed{g \text{ atteint son minimum sur le compact } \overline{B(a,r)} \text{ en un point } x_0 \text{ de la boule ouverte } B(a,r).}$$

6b. Nous allons traiter le cas où la norme $\|.\|$ dérive d'un produit scalaire $\langle . \,; . \rangle$ de E.

N.B. L'énoncé fait le choix de définir la fonction g par $g(x) = \|y_0 - f(x)\|^{\boxed{2}}$. Le carré dans cette expression trouve toute sa pertinence dans le fait que si $\|.\|$ est euclidienne alors l'application $x \longmapsto \|x\|^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ce n'est pas le cas d'une norme quelconque de E.

Posons alors pour tout $x \in E$

$$\rho(x) = \|x\|^2$$

ρ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur E avec pour tout $x \in E$:

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\rho(x)(h) = 2\langle x\,;\,h\rangle$$

N.B. ce qui revient à dire que $\nabla\rho(x) = 2x$.

g est la composée de ρ avec l'application de classe $\mathscr{C}^1$, $x \longmapsto f(x)-y_0$, elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ par composition d'application de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in U$

$$\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}\rho(f(x)-y_0)\circ \mathrm{d}f(x)$$

Soit

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}g(x)(h) = 2\langle f(x)-y_0\,;\,\mathrm{d}f(x)(h)\rangle$$

g admet un minimum local au point x_0 de l'ouvert $B(a,r)$ donc sa différentielle est nulle en x_0. Ce qui donne

$$\forall h \in E \quad \langle f(x_0)-y_0\,;\,\mathrm{d}f(x_0)(h)\rangle = 0$$

Mais puisque $\mathrm{d}f(x_0)$ est un automorphisme de E, cela implique que le vecteur $f(x_0)-y_0$ est orthogonal à E et en particulier à lui même. Il est donc nul.

$$\boxed{\forall y_0 \in \overline{B(f(a),r/4)} \quad \exists x_0 \in B(a,r) \quad ; \quad f(x_0)=y_0}$$

N.B. Nous nous contenterons de cette justification ($\|.\|$ est une norme euclidienne) sachant que le résultat final de cette partie et qui en est le but sera lui valable pour toute norme de E.

7a. W est la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon $r/4$, c'est donc un ouvert de E. Ensuite $f^{-1}(W)$ est un ouvert relatif de U comme image réciproque d'un ouvert de E par une application continue. Comme U est lui-même un ouvert de E alors $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E. Finalement $V = f^{-1}(W)\cap B(a,r)$ est un ouvert de E puisque c'est l'intersection de deux ouverts de E.

$$\boxed{W \text{ et } V \text{ sont des ouverts de } E.}$$

7b. Soit $x \in V$. On a $x \in f^{-1}(W)$ donc $f(x) \in W$. Ainsi l'application $f_{|V}$ est bien définie de W dans V. Si maintenant y est un élément de W alors $y \in B(a, r/4)$ et donc il existe, selon la question 6 (sol. 6), $x \in B(a, r)$ tel que $f(x) = y$. Puisque $f(x) \in W$, on a en fait $x \in V$. Ce qui montre que $f_{|V}$ est une application surjective.
Selon la propriété (**??**) on a

$$\forall x_1, x_2 \in B(a, r) \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

Ce qui montre que f induit une injection sur $B(a, r)$. Comme $V \subset B(a, r)$ alors $f_{|V}$ est injective.
À ce stade on a justifié que $f_{|V}$ est une bijection de V sur W. Notons g sa bijection réciproque. La propriété (**??**) s'écrit alors (en posant $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$)

$$\forall y_1, y_2 \in W \quad \|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant 2\|y_1 - y_2\|$$

Montrant que g est lipschitzienne et de ce fait qu'elle est continue. Concluons :

> Il existe un ouvert V voisinage de a et un ouvert W voisinage de $f(a)$ tels que f induise une bijection de V sur W et telle que sa bijection réciproque soit continue.

➡ N.B. Tel qu'il est exprimé ici, ce résultat ne dépend plus de la norme utilisée dans E puisque toutes les normes de E sont équivalentes et de ce fait, elles définissent exactement les mêmes ouverts dans E.

➡ N.B. Ce résultat correspond partiellement à un théorème fondamental du calcul différentiel (hors programme pour les CPGE) connu sous le nom de théorème d'inversion local et qui s'énonce de la façon suivante :

> Soit une application de classe $\mathscr{C}^1$ $f : U \longrightarrow E$ et soit $a \in U$. Si $\mathrm{d}f(a)$ est un endomorphisme inversible de E alors il existe des ouverts V et W de E, voisinages respectifs de a et de $f(a)$ tel que f induise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. C'est à dire une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W dont l'application réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur W.

Noter que l'hypothèse trop spécifique $\mathrm{d}f(a) = \mathrm{id}_E$ n'est pas essentielle dans le sujet. On peut s'y ramener en remplaçant f par $(\mathrm{d}f(a))^{-1} \circ f$ lorsque $\mathrm{d}f(a)$ est supposée seulement inversible.

8a. $(\mathbb{C}[A])^*$ est tout simplement le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[A]$. Il est contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donc il en est un sous groupe. Son caractère abélien découle en outre du fait que $\mathbb{C}[A]$ est un anneau commutatif.

8b. De par sa définition, on a $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Réciproquement, considérons un élément $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons D le PGCD de P avec π_A, le polynôme minimal de A, et considérons $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\pi_A = DQ$. Le polynôme QP est alors divisible par π_A est donc $Q(A)M = (QP)(A) = 0$. La matrice M étant inversible cela implique que $Q(A) = 0$ et donc que π_A divise Q signifiant que $Q = \pi_A$ ou encore que $D = 1$. Ainsi P est premier avec π_A.
Soit alors, selon le théorème de Bezout, $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UP + V\pi_A = 1$. En appliquant à A on obtient $U(A)M = I_n$. Donc $M^{-1} = U(A)$ et par suite $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$. Alors $M \in (\mathbb{C}[A])^*$.

$$\boxed{(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

➡ N.B. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos on peut aussi justifier que du moment que $M = P(A)$ est inversible alors $P \wedge \pi_A = 1$ de la façon suivante : comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, les VAP de $P(A)$ sont les complexes de la forme $P(\lambda)$ où λ est une VAP quelconque de A. Puisque $P(A)$ est inversible, aucun des scalaires $P(\lambda)$ n'est nul. Les VAPS de A sont les racines de π_A donc P et π_A n'ont aucune racine en commun. Ils sont donc premiers entre eux.

9. En tant que sous-espace vectoriel (de dimension finie) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[A]$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit maintenant $B \in \mathbb{C}[A]$. la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{k!}B^k$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$ car celui-ci est une sous algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Cette suite converge vers e^B. Puisque $\mathbb{C}[A]$ est un fermé alors $\mathrm{e}^B \in \mathbb{C}[A]$. L'inverse e^{-B} de e^B est aussi dans $\mathbb{C}[A]$ pour les mêmes raisons puisque $-B \in \mathbb{C}[A]$.

$$\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*}$$

10a. Notons σ l'application en question et considérons des éléments (t, a) et (s, b) de $]0\,;1[\, \times \mathbb{R}$ tels que $\sigma(t, a) = \sigma(s, b)$. Alors :

$$t + iat(1 - t) = s + ibs(1 - s)$$

L'identification des parties réelles dans cette égalité donne $t = s$, celle des parties imaginaires donne ensuite $a = b$ (car $t(1 - t) \neq 0$). D'où l'injectivité de σ.

10b. Apparemment $M(t) \in \mathbb{C}[A]$ pour tout $t \in [0\,;\,1]$ quelque soit le choix du réel a. Considérons le polynôme

$$P = \det(XM_1 + (1-X)M_2)$$

P est non nul car $P(0) = \det M_2 \neq 0$ donc il admet un nombre fini de racines qu'on va noter $z_1, z_2, \dots, z_r$. Posons ensuite

$$Z = \left\{a \in \mathbb{R} \mid \exists k \in [\![1\,;\,r]\!]\ ,\ \exists t \in\,]0\,;\,1[\ ;\ Z_a(t) = z_k\right\}$$

Par injectivité de l'application σ introduite dans la question précédente, l'ensemble des couples $(t,a) \in\,]0\,;\,1[\, \times \mathbb{R}$ tels que

$$Z_a(t) \in \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$$

est fini. L'ensemble Z est donc fini. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus Z$. Alors, pour tout $t \in\,]0\,;\,1[$, $Z_a(t)$ n'est pas une racine de P. En posant pour tout $t \in [0\,;\,1]$

$$M(t) = Z_a(t)M_1 + \big(1 - Z_a(t)\big)M_2$$

on a donc
$$\forall t \in\,]0\,;\,1[\quad \det\big(M(t)\big) \neq 0$$

Cette observation s'étend aussi à $t \in \{0,1\}$ puisque $M(0) = M_2$ et $M(1) = M_1$. Pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $M(t)$ est donc un élément de $\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, soit

$$\boxed{\forall t \in [0\,;\,1] \quad M(t) \in (\mathbb{C}[A])^*}$$

10c. M_1 et M_2 étant des points quelconques de $(\mathbb{C}[A])^*$, l'application M ainsi définie est continue et elle est à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$. C'est un chemin continu qui permet de joindre M_2 à M_1 dans $(\mathbb{C}[A])^*$. Alors :

$$\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \text{ est connexe par arcs}}$$

11a. Considérons pour toute la suite de cette partie le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}[A]$ et l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & e^M \end{array}$$

f est bien à valeur dans E d'après la question 9 (sol. 9). Rappelons en outre que E est aussi un anneau commutatif.

N.B. Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Dans notre cas, $\dim_{\mathbb{C}} E = \deg \pi_A$ donc E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2 \deg \pi_A$.

Fixons $M \in E$ et soit $H \in E$ quelconque. Puisque $MH = HM$ alors

$$\mathrm{e}^{M+H} - \mathrm{e}^{M} = \mathrm{e}^{M}\big(\mathrm{e}^{H} - I_n\big) = \mathrm{e}^{M} H + \mathrm{e}^{M} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \tag{6}$$

Par ailleurs, en utilisant une norme d'algèbre $\|.\|$ de E, par convergence absolue de la série exponentielle on a

$$\left\|\mathrm{e}^{M} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k\right\| \leqslant \left\|e^{M}\right\| \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!}\right) = \left\|\mathrm{e}^{M}\right\| \left(\mathrm{e}^{\|H\|} - 1 - \|H\|\right)$$

Sachant qu'au voisinage de 0 on a $\mathrm{e}^{t} - 1 - t = o(t)$ alors

$$\mathrm{e}^{M} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = \mathrm{o}(\|H\|)$$

En constant que l'application $H \longmapsto \mathrm{e}^{M} H$ est linéaire, la relation (6) signifie alors que f différentiable en M et que

$$\forall H \in E \quad \mathrm{d}f(M)(H) = \mathrm{e}^{M} H \tag{7}$$

N.B. Prendre conscience que ce calcul n'a été possible que parce qu'on s'est placé dans E qui est commutatif. La différentiabilité de exp en tant qu'application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est beaucoup moins aisée.

Ensuite pour tout $H \in E$, l'application $M \longmapsto \mathrm{D}_H f(M) = \mathrm{e}^M H$ est continue pa continuité de l'application exponentielle donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E. Par ailleurs, la relation (7) implique en particulier que

$$\mathrm{d}f(0) = \mathrm{id}_E$$

Finalement, selon la question 7b (sol. 7b),

$\boxed{\text{Il existe un ouvert } U \text{ de } E \text{ voisinage de la matrice nulle et un ouvert } V \text{ voisinage de } I_n = \mathrm{e}^0 \text{ telle que } f \text{ induise une bijection de classe } \mathscr{C}^1 \text{ de } U \text{ sur } V \text{ et dont la réciproque est continue.}}$

11b. Soit $M_0 \in E$. Puisque la matrice e^{M_0} est inversible et que E est stable par multiplication matricielle, l'application $u : H \in E \longmapsto \mathrm{e}^{M_0} H$ est un automorphisme de E. L'espace E étant de dimension finie, u et u^{-1} sont continues. L'ensemble $\mathrm{e}^{M_0} V$ est donc un ouvert de E comme image réciproque par u^{-1} de l'ouvert V de E. Puisque $I_n \in V$ alors $\mathrm{e}^{M_0} \in \mathrm{e}^{M_0} V$ et donc $\mathrm{e}^{M_0} V$ est un voisinage de e^{M_0}. Alors

$$\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}[A]}$$

12. Rappelons que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $M \in \mathbb{C}[A]$, e^M est inversible et $\mathrm{e}^M \in \mathbb{C}[A]$ donc on a bien $\exp\big(\mathbb{C}[A]\big) \subset (\mathbb{C}[A])^*$. Soit maintenant $(\mathrm{e}^{M_k})_k$ une suite convergente d'éléments de $\exp(\mathbb{C}[A])$ et notons L sa limite. Rappelons que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\det(\mathrm{e}^M) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} M}$$

Considérons l'application

$$v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & |\det M| \end{array}$$

v est continue par composition des applications continues det et $|\cdot|$. Donc la suite $(v(\mathrm{e}^{M_k}))_k$ converge vers $v(L)$. Soit

$$|\det L| = \lim\big|\det(\mathrm{e}^{M_k})\big| = \lim\big|\mathrm{e}^{\operatorname{tr} M_k}\big| = \lim(\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)})$$

La suite $(\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)})_k$ est ainsi convergente. Par continuité de l'application ln, la suite $(\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k))_k$ est convergente. Si on note α sa limite alors $\lim(\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M_k)}) = \mathrm{e}^\alpha$ et ainsi

$$|\det L| = \mathrm{e}^\alpha \neq 0$$

La matrice L est ainsi inversible. La suite $(L^{-1}\,\mathrm{e}^{M_k})_k$ converge vers la matrice I_n. Puisque V est un voisinage de I_n alors il existe un entier $k_0 > 0$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0 \quad L^{-1}\,\mathrm{e}^{M_k} \in V$$

Puisque $V = f(U)$, il existe $N \in U$ tel que $L^{-1}\,\mathrm{e}^{M_{k_0}} = \mathrm{e}^N$. Par suite

$$L = \mathrm{e}^{M_{k_0}}\,\mathrm{e}^{-N} = \mathrm{e}^{M_{k_0} - N} \qquad (NM_{k_0} = M_{k_0}N)$$

Comme $M_{k_0} - N \in E$ alors $L \in \exp(E)$. Finalement :

$$\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un fermé de } (\mathbb{C}[A])^*.}$$

13a. Notons $f : (\mathbb{C}[A])^* \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application caractéristique de $W = (\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$ dans $(\mathbb{C}[A])^*$. Elle est définie par

$$\forall M \in (\mathbb{C}[A])^* \quad f(M) = \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{si } M \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

De par leurs choix, on a $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$. Soit maintenant un ouvert I de $\mathbb{R}$. On a les situations suivantes

- **Si $0 \in I$ et $1 \notin I$:** alors $f^{-1}(I) = \exp(\mathbb{C}[A])$. Or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenu dans $(\mathbb{C}[A])^*$, il en est donc un ouvert relatif.
- **Si $1 \in I$ et $0 \notin I$:** alors $f^{-1}(I) = (\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$. Or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$ donc $(\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$.

- **Si $1 \in I$ et $0 \in I$:** alors $f^{-1}(I) = (\mathbb{C}[A])^*$;
- **Si $1 \notin I$ et $0 \notin I$:** alors $f^{-1}(I) = \emptyset$.

Dans tous les cas $f^{-1}(I)$ est donc un ouvert relatif de $(\mathbb{C}[A])^*$, prouvant ainsi que

$$\boxed{f \text{ est continue avec } f(M_1) = 0 \text{ et } f(M_2) = 1}$$

13b. À cause de l'hypothèse $\exp(\mathbb{C}[A]) \subsetneq (\mathbb{C}[A])^*$ on a pu construire une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f\big((\mathbb{C}[A])^*\big) = \{0, 1\}$$

Mais puisque $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs et f est continue alors $f\big((\mathbb{C}[A])^*\big)$ devrait être une partie de connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas car les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles. On a donc prouvé par l'absurde que

$$\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*}$$

14. On sait que $\exp(\mathscr{M}_n(C)) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit inversement $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A étant inversible 0 n'en est pas une vap. Par suite 0 n'est pas une racine de son polynôme minimale. On peut donc écrire par division euclidienne $\pi_A = a + XQ$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. En appliquant à A on voit que

$$-\frac{1}{a}Q(A)A = I_n$$

prouvant que $A^{-1} \in \mathbb{C}[A]$. Alors $A \in (\mathbb{C}[A])^*$. Selon la question précédente on a donc $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Autrement dit, il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$A = \mathrm{e}^{L(A)}$$

Ce qui montre que $A \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$. Ainsi

$$\boxed{\exp(\mathscr{M}_n(C)) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

- N.B. Puisque exp est continue, cela prouve par exemple que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Cette connexité peut être directement prouvée par une démarche similaire à celle suivie dans la question 10b (sol. 10b).

- N.B. L'application exp induit ainsi une surjection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
  Cette surjectivité n'est plus valide si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ car pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on a
  $$\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A} > 0$$
  On peut prouver que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors
  $$A \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \Longleftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ A = B^2$$

15. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (2) et considérons l'endomorphisme

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ Y & \longmapsto & t \mapsto Y(t+T) \end{array}$$

Φ est linéaire et elle est bien à valeurs dans $\mathscr{S}$ puisque pour toute solution Y de (2), la fonction $t \longmapsto Y(t+T)$ est une solution de (2). En outre Φ est bijectif de bijection réciproque l'application

$$\Phi^{-1} : Y \longmapsto (t \mapsto Y(t-T))$$

Ainsi toutes les valeurs propres de Φ sont non nulles. Soient donc μ une vap de Φ et Y un vep qui lui est associé. Alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t+t) = \mu Y(t)}$$

16a. La famille $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (2), donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ la famille $(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ce qui signifie que les vecteurs colonnes de la matrice $M(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Elle est donc inversible. Par ailleurs on a

$$\forall k \in [\![1 \, ; n]\!] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad Y_k'(t) = A(t)Y_k(t)$$

Ce qui ne représente que l'identification colonne par colonne dans l'égalité

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t) = A(t)M(t)}$$

16b. Considérons l'application U définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad U(t) = M(t)^{-1}M(t+T)$$

Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$M(t)^{-1} = \frac{1}{\det M(t)}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M(t)) = \frac{1}{\det M(t)}\big((-1)^{i+j}\Delta_{j,i}(t)\big)$$

où $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(t)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i,j) de $M(t)$. Les fonctions $t \mapsto \det M(t)$ et $t \mapsto \Delta_{i,j}(t)$ sont des sommes de produits des applications composantes de l'application M. Elles sont donc de classe $\mathscr{C}^1$. L'application $t \longmapsto M(t)^{-1}$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ car ses composantes sont de classe $\mathscr{C}^1$. En dérivant ensuite la relation

$$M(t)^{-1}M(t) = I_n$$

on déduit que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}M(t)^{-1}}{\mathrm{d}t} = -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}$$

U est ainsi une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans une algèbre normée et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U'(t) &= -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}M'(t+T) \\ &= -M(t)^{-1}A(t)M(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}A(t)M(t+T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc U est partout constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La matrice } M(t)^{-1}M(t+T) \text{ ne dépend pas de } t \in \mathbb{R}.} \tag{8}$$

Autre méthode : D'après la question précédente M est une solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$R' = A(t)R \tag{9}$$

dont la fonction inconnue R est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. La fonction A étant T-périodique on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t+T) = A(t)M(t+T)$$

Ce qui signifie que l'application $N : t \longmapsto M(t+T)$ est aussi une solution de l'équation (9). Soit maintenant un élément quelconque U_0 de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il est immédiat que la fonction $t \longmapsto M(t)U$ est une solution de (9). En posant $U_0 = M(0)^{-1}M(T)$ on voit que celle-ci prend la même valeur en 0 que la solution N. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles sont donc égales.

Ainsi
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)U_0$$

D'où le résultat voulu.

N.B. Voir la note page 15 pour plus de propriétés de l'équation (9).

16c. Posons $U_0 = M(0)^{-1}M(T)$. D'après la question précédente on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)U_0$$

La matrice U_0 est inversible comme produit de matrices inversibles donc par surjectivité de l'application exp il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U_0 = \mathrm{e}^{TB}$. On a alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)\,\mathrm{e}^{TB}}$$

16d. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Q(t) = M(t)\,\mathrm{e}^{-tB}$$

$Q(t)$ est inversible cas c'est le produit de deux matrices inversibles. Les applications M et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-tB}$ sont continues (cette dernière est même de classe $\mathscr{C}^\infty$, résultat de cours) donc Q est continues comme produit d'applications continues à valeurs dans une algèbre normée. Soit ensuite $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= M(t+T)\,\mathrm{e}^{-(t+T)B} \\ &= M(t)\,\mathrm{e}^{TB}\,\mathrm{e}^{-(t+T)B} \\ &= M(t)\,\mathrm{e}^{-tB} \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

Ce qui montre que Q est T-périodique.

Il existe une application $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ continue et T-périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{tB} \tag{10}$$

N.B. Q est même de classe $\mathscr{C}^1$ de par sa définition.

17a. Notons $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les vecteurs colonnes de la matrice P. On a alors pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Z_k(t) = M(t)V_k$$

N.B. Les vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont des VEP de la matrice D puisque P est une matrice de diagonalisation de D

Si V est un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M(t)V) = M'(t)V = A(t)M(t)V$$

Ce qui signifie que la fonction $t \longmapsto M(t)V$ est une solution du système différentiel $X' = A(t)X$. Les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ sont donc des éléments de $\mathscr{S}$. Ensuite, puisque $M(t)$ et P sont inversibles alors $M(t)P$ est inversible et donc $(Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_n(t))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est un système fondamental de solutions du système $X' = A(t)X$.

$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de $\mathscr{S}$.

N.B. Comme expliqué ci-dessus, pour tout $V \in \mathbb{C}^n$, la fonction $t \longmapsto M(t)V$ est une solution de (2). Réciproquement si Y est une solution de (2), en posant $V = M(0)^{-1}Y(0)$, la fonction $Z : t \longmapsto M(t)V$ est une solution de (2) et elle vérifie $Z(0) = Y(0)$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $Z = Y$. On a ainsi prouvé l'existence d'un vecteur tel $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y(t) = M(t)V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour résumer

Les solutions du système différentiel $X' = A(t)X$ sont les fonctions

$$t \longmapsto M(t)V \tag{11}$$

où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$.

Nous allons utiliser l'écriture (11) dans la suite. Noter que ce résultat généralise l'expression des solutions d'un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants $Y' = CY$, puisque celles-ci sont les fonctions

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{tC}\,V \qquad V \in \mathbb{C}^n$$

les vecteurs colonnes de $M(t) = \mathrm{e}^{tC}$ permettant effectivement ici de former un système fondamental de solutions de $Y' = CY$.
Voir les notes suivantes pour un complément d'information sur ces matrices « $M(t)$ ».

N.B. Sans supposer que la fonction A est periodique, considérons maintenant l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$R' = A(t)R \tag{12}$$

dont l'inconnue R est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Cette équation sera dite équation résolvante du système différentiel $X' = A(t)X$.
Si R en est une solution et si on note $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ les vecteurs colonnes de $R(t)$ alors les fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des solutions de (2). Leur wronksien est la fonction $t \longmapsto \det(R(t))$. On en déduit que $R(t)$ est soit inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit elle ne l'est pour aucun.
Ainsi il suffit que $R(0)$ soit inversible, par exemple $R(0) = I_n$, pour que $R(t)$ soit inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons maintenant une solution R_0 qui vérifie cette condition. Alors pour tout $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la fonction $t \longmapsto R_0(t)U$ est une solution de (12). Inversement,

si R est une solution quelconque de (12) alors elle prend la même valeur en 0 que la solution $t \longmapsto R_0(t)U$ avec $U = R_0(0)^{-1}R(0)$ et donc $R(t) = R_0(t)U$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation résolvante (12) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto R_0(t)U$$

où U est un élément quelconque de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. R_0 étant une solution donnée telle que $R_0(0)$ soit inversible.

Ceci indique en particulier que pour toute solution R, $R(t)$ conserve le même rang en tout $t \in \mathbb{R}$, celui de U.

N.B. Autre propriété remarquable : si R_1 et R_2 sont des solutions de (12) telles que $R_1(t)$ et $R_2(t)$ soient partout inversibles et si $s \in \mathbb{R}$ alors les fonctions $t \longmapsto R_1(t)R_1(s)^{-1}$ et $t \longmapsto R_2(t)R_2(s)^{-1}$ sont des solutions de (12) et elle prennent la même valeur en s, à savoir I_n. Elles sont donc partout égales. Signifiant que

$$\forall t, s \in \mathbb{R} \quad R_2(t)^{-1}R_1(t) = R_2(s)^{-1}R_1(s) \tag{13}$$

ou encore que la fonction $t \longmapsto R_2(t)^{-1}R_1(t)$ est constante sur $\mathbb{R}$. Cette propriété généralise le résultat (8) de la question 16b (sol. 16b).

17b. Comme $B = D + N$, $DN = ND$ et N est nilpotente alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$e^{tB} = e^{tN} e^{tD} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} N^j e^{tD}$$

Soit maintenant $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Par définition du vecteur V_k on a $DV_k = \lambda_k V_k$ et donc $e^{tD} V_k = e^{\lambda_k t} V_k$. Alors

$$Z_k(t) = Q(t) e^{tB} V_k = e^{\lambda_k t}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} Q(t)N^j V_k\Big)$$

En posant pour tout $j \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $R_{j,k}(t) = (1/j!)Q(t)N^j V_k$ on voit que :

les fonctions $R_{0,k}, R_{1,k}, \cdots, R_{n-1,k}$ sont continues T-périodiques et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} t^j R_{j,k}(t)\Big) \tag{14}$$

17c. On suppose que les parties réelles des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont strictement négatives. Sachant que toute solution Y de (2) est une combinaison linéaire des fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ il suffit de justifier que

$$\forall k \in [\![1\,;\,l]\!] \quad \lim_{t \to +\infty} Z_k(t) = 0$$

Soit donc $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Les fonctions $R_{j,k}$, $j \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ sont continues périodiques sur $\mathbb{R}$ donc elles sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons K un majorant commun de tous les réels $\|R_{j,k}(t)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'expression de $Z_k(t)$ donnée en (14) aboutit alors à

$$\forall t \in [1\,;+\infty[\quad \|Z_k(t)\| \leqslant K\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} \sum_{j=0}^{n-1} t^j \leqslant nKt^n e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}$$

Puisque $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ alors $t^n e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $Z_k(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{C}^n}$.

Si $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ alors pour toute solutions Y du système différentiel (2) on a

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0_{\mathbb{C}^n}$$

18a. On suppose que B admet une VAP de la forme $\lambda = i2k\pi/(mT)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit V un VEP qui lui est associé. La fonction $Y : t \longmapsto M(t)V$ est une solution de (2) et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = Q(t) e^{tB} V = Q(t) e^{\lambda t} V = Q(t) e^{i\frac{2k\pi}{mT}t} V$$

Les application Q et $t \longmapsto e^{i\frac{2k\pi}{mT}t}$ sont respectivement T-périodique et mT-périodique donc

Y est une solution de (2) qui est mT-périodique

18b. On suppose que (2) admet une solution non nulle mT-périodique. Selon (11), il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y(t) = M(t)V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors, en utilisant l'écriture (10)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}\,V$$

Puisque Y et Q sont mT-périodique on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$Q(t)\,\mathrm{e}^{(t+mT)B}\,V = Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}\,V$$

et donc

$$\mathrm{e}^{mTB}\,V = V$$

signalant que 1 est une VAP de la matrice e^{mTB}. Puisque les valeurs propres de e^{mTB} sont les nombres de la formes λ^m où λ décrit le spectre complexe de e^{TB}, on en déduit que :

> Si (2) admet une solution mT-périodique alors la matrice e^{TB} admet au moins une VAP qui est une racine m^{eme} de l'unité.

N.B. Pour résumer les questions 18a (sol. 18a) et 18b (sol. 18b)

> Sachant que l'application A est T-périodique, si $m \in \mathbb{N}^*$, alors le système différentiel $X' = A(t)X$ admet une solution mT-périodique non nulle si et seulement si la matrice $\mathrm{e}^{TB} = M(0)^{-1}M(T)$ admet au moins une VAP μ qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

N.B. Soit maintenant un scalaire $\mu \in \mathbb{C}$ et un vecteur $V \in \mathbb{C}^*$ tous les deux non nuls et considérons la solution $X : t \longmapsto M(t)V$ du système différentiel $X' = A(t)X$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} M(0)^{-1}M(T)V = \mu V &\iff M(T)V = \mu M(0)V \\ &\iff X(T) = \mu X(0) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad X(t+T) = \mu X(t) \end{aligned}$$

La dernière équivalence découle du fait que les fonctions $t \longmapsto X(t+T)$ et $t \longmapsto \mu X(t)$ sont des solutions du système $Y' = M(t)V$ et sont donc égales si et seulement si elles prennent la même valeur en 0. Les VAP de $M(0)^{-1}M(T)$ sont donc exactement les VAP de l'opérateur Φ de $\mathcal{S}$ introduit dans la question 15 (sol. 15). De plus pour toute VAP μ de $M(0)^{-1}M(T)$, V est un VEP qui lui est associé si et seulement si la fonction $X : t \longmapsto M(t)V$ est un VEP de Φ associé à μ. Sachant que cela signifie que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t+T) = \mu X(t)$$

on voit immediatement que si μ est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité alors X est mT-périodique.
Cette causalité entre éléments propres de Φ et ceux de la matrice $M(0)^{-1}M(T)$ s'explique très bien matriciellement. En effet si $X : t \longmapsto M(t)V$ est un élément de $\mathcal{S}$ alors V est le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{S}$. Il est donné par $V = M(0)^{-1}X(0)$. Celui de $\Phi(X)$ est donc donné par

$$\begin{aligned} V' &= M(0)^{-1}\Phi(X)(0) = M(0)^{-1}X(T) \\ &= M(0)^{-1}M(T)V \end{aligned}$$

donc $M(0)^{-1}M(T)$ est tout simplement la matrice de Φ dans la base $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{S}$.

19. On suppose que (2) admet une solution X qui est T'-périodique avec ${}^{T'}\!/_{T} \notin \mathbb{Q}$. On a alors la relation

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}\ A(t+kT')X(t) = A(t)X(t)$$

découlant de l'égalité $X'(t+kT') = X'(t)$. Et puisque A est T-périodique on a même

$$\forall k, h \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(t+kT'+hT)X(t) = A(t)X(t)$$

ou encore, en posant $G = T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z}$

$$\forall g \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(g+t)X(t) = A(t)X(t)$$

G est une sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque $T \in G$ et $T' \in G$, il existerait $u, u' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $T = au$ et $T' = au'$. Ce qui impliquerait que ${}^{T'}\!/_{T} \in \mathbb{Q}$, entrant en contradiction avec l'hypothèse faite sur T'. G n'est donc pas un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ et donc il est dense dans $\mathbb{R}$. Pour un réel t fixé, l'application $s \longmapsto A(s+t)X(t) - A(t)X(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est partout nulle sur la partie dense G. Elle est donc partout nulle sur $\mathbb{R}$. On conclut en posant $u = t + s$ que

> Si X est une solution T'-périodique de $X' = A(t)X$ avec $T' \notin T\mathbb{Q}$ alors
> $$\forall t, u \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(t)X(t)$$

20. On suppose qu'il n'existe aucun *sous-espace vectoriel (SEV)* non trivial V de $\mathbb{C}^n$ qui soit stable par tous les $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ et que (2) admet au moins une solution non nulle X qui est T'-périodique.
Supposons que ${}^{T'}/_{T} \notin \mathbb{Q}$.
Il découle de la question précédente que

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(v)X(t) \tag{15}$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$V_k = \bigcap_{u,v \in \mathbb{R}} \operatorname{Ker}\left(A(u)^k - A(v)^k\right)$$

et ensuite
$$V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} V_k$$

de telle sorte que pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ on ait

$$x \in V \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k x = A(v)^k x$$

Revenons à la relation (15) et dérivons là par rapport à t :

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)A(t)X(t) = A(v)A(t)X(t)$$

et en recourant encore à (15)

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^2 X(t) = A(v)^2 X(t)$$

Par récurrence sur k on démontre selon la même idée que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t, u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k X(t) = A(v)^k X(t)$$

V contient donc tous les vecteurs $X(t)$. Puisque la fonction X est non nulle alors le SEV V est non nul. Il est inclus strictement dans E car sinon on aura $V_1 = \mathbb{C}^n$. Ce qui signifierait que l'application A est constante contredisant ainsi l'hypothèse de départ de la question.
Soient maintenant $x \in V$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad A(u)^k A(t)x = A(u)^{k+1}x = A(v)^{k+1}x = A^k(v)A(t)x$$

et donc $A(t)x \in V$. Le SEV non trivial V est donc stable par tous les $A(t)$, amenant une contradiction.
Ainsi ${}^{T'}/_{T} \in Q$. il existe alors des entiers $m, m' \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $m'T' = mT$. La solution X est $m'T'$-périodique et donc mT-périodique. D'après la question 18b (sol. 18b), la matrice e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.
Réciproquement supposons que e^{TB} admet une telle VAP et notons la $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. Les VAP de e^{TB} sont les complexes de la forme $e^{T\lambda}$ où λ est une VAP de B. Il existe donc une VAP λ de B telle que $e^{T\lambda} = \mu$ et par suite

$$\exists h \in \mathbb{Z} \;\; ; \;\; T\lambda - \frac{2ik\pi}{m} = 2ih\pi$$

ou encore
$$\lambda = \frac{2i(k+mh)\pi}{mT}$$

Selon la question 18a (sol. 18a), (2) admet bien une solution mT-périodique non nulle. Concluons :

> S'il n'existe aucun SEV non trivial de $\mathbb{C}^n$ qui soit stable par toutes les matrices $A(t)$ alors (2) admet au moins une solution T'-périodique non nulle si et seulement s'il existe $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité et $T' = {}^{(mT)}/_{m'}$ (et donc $T' \in T\mathbb{Q}$).

N.B. Résumons l'étude effectuée jusqu'a maintenant.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, des solutions mT-périodiques non nulles de $X' = A(t)X$ existent si et seulement si e^{TB} admet au moins une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.
- Si le système $X' = A(t)X$ admet une solution non nulle X qui est T'-périodique telle que $T' \notin T\mathbb{Q}$, alors X vérifie

$$\forall u, v, t \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(v)X(t)$$

Ce qui permet de construire des SEV non triviaux de $\mathbb{C}^n$ qui sont stables par toutes les matrices $A(t)$.

- En conséquence si $\mathbb{C}^n$ ne contient aucun SEV non trivial qui est stable par toutes les matrices $A(t)$, toute solution périodique non nulle de $X' = A(t)X$ ne peut être que rT-périodique avec $r \in \mathbb{Q}$. Plus précisement si $r = m'/m$ avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$ alors $X' = A(t)X$ admet une solution rT périodique si et seulement si e^{TB} admet une VAP qui est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité.

21. On a vu que les solutions de l'équation homogène de (3) sont les fonctions de la forme $X : t \longmapsto M(t)V$ où V est le vecteur colonne des coordonnés de X dans un système fondamental de solutions de celle-ci. La méthode de la variation des constantes revient donc ici à poser $X(t) = M(t)V(t)$ en supposant que V est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} X'(t) = A(t)X(t) + b(t) &\iff M(t)V'(t) = b(t) \\ &\iff V'(t) = M(t)^{-1}b(t) \end{aligned}$$

Les primitives de la fonction $t \longmapsto M(t)^{-1}b(t)$ peuvent être écrite sous la forme

$$t \longmapsto V_0 + \int_0^t M(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$$

où V_0 est un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$. Les solutions de (3) sont donc les fonctions

$$X : t \longmapsto M(t)V_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$$

avec V_0 quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

➨ (. Rappel) Soit une fonction CPM $f : [a, b] \longrightarrow E$. Pour tout application linéaire u définie sur E on a

$$u\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_a^b u(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Pour un réel t fixé, l'application $V \longmapsto M(t)V$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, ce qui explique l'égalité

$$M(t)\Big(\int_0^t M(s)b(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$$

Soit $V_0 \in \mathbb{C}^n$ et considérons la fonction X ci-dessus. Selon la question 16d (sol. 16d), $M(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}$ où Q est une fonction continue T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}\,V_0 + \int_0^t Q(t)\,\mathrm{e}^{(t-s)B}\,Q(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on aura

$$\begin{aligned} X(t+T) - X(t) = Q(t)e^{tB}(\mathrm{e}^{TB} - I_n)V_0 + \\ Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}\Big(\mathrm{e}^{TB}\int_0^{t+T}\mathrm{e}^{-sB}\,Q(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{e}^{-sB}\,Q(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s\Big) \end{aligned}$$

Sachant que Q et b sont T-périodiques, avec la translation de la variable $s = u + T$ on a

$$\mathrm{e}^{TB}\int_0^{t+T}\mathrm{e}^{-sB}\,Q(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-T}^t e^{-uB}Q(u)^{-1}b(u)\,\mathrm{d}u$$

$Q(t)\,\mathrm{e}^{tB}$ étant inversible on a ainsi

$$X(t+T) = X(t) \iff (e^{TB} - I_n)V_0 + \int_{-T}^0 \mathrm{e}^{-sB}\,Q(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

Puisque 1 n'est pas une VAP de e^{TB} alors $\mathrm{e}^{TB} - I_n$ est une matrice inversible. X est donc T-périodique si et seulement si

$$V_0 = -(e^{TB} - I_n)^{-1}\int_{-T}^0 \mathrm{e}^{-sB}\,Q(s)b(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

D'où l'existence et l'unicité d'une solution T périodique de (3). Résumons :

> Si les applications A et b sont continues et T-périodiques et si la matrice e^{TB} ne possède pas 1 comme VAP alors le système différentiel
>
> $$X' = A(t)X + b(t)$$
>
> admet une unique solution T-périodique.

➡ N.B. Maintenant qu'on connaît l'importance des VAP de la matrice $e^{TB} = M(0)^{-1}M(T)$, dans quelle mesure le choix initial de l'application M va influer sur ces VAP ?
En fait quelque soit le choix de la base de $\mathcal{S}$ qui permet de former l'application M on a vu que la matrice $M(0)^{-1}M(T)$ représente dans cette base la matrice de l'endomorphisme Φ de $\mathcal{S}$. Toutes les matrices $M(0)^{-1}M(T)$ sont donc semblables et de ce fait ont les mêmes VAP.

22. En posant $X = (x, y)$ le système différentiel s'écrit matriciellement

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{16}$$

où
$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} = I + \cos(t)J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction A est ici 2π-périodique. La matrice J se réduit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$$J = P\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

donc
$$A(t) = P\begin{pmatrix} 1 + i\cos t & 0 \\ 0 & 1 - i\cos t \end{pmatrix}P^{-1}$$

Comme à l'usage [1] on pose $Y = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = P^{-1}X$. Le système (16) équivaut alors à

$$\begin{cases} u' = (1 + i\cos t)u \\ v' = (1 - i\cos t)v \end{cases}$$

Les solutions de ce dernier système sont données par

$$\begin{cases} u = \lambda\, e^{t + i\sin t} \\ v = \mu\, e^{t - i\sin t} \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$X = PY$ donc les solutions du système (16) sont données par

$$\boxed{\begin{cases} x = u + v = e^t\left(\lambda\, e^{i\sin t} + \mu\, e^{-i\sin t}\right) \\ y = -i(u - v) = -i\, e^t\left(\lambda\, e^{i\sin t} - \mu\, e^{-i\sin t}\right) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}}$$

Les fonctions $X_1 : t \longmapsto e^{t+i\sin t}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$ et $X_2 : t \longmapsto e^{t-i\sin t}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ forment un système fondamental de solutions de (16) . Le système (Y_1, Y_2) en est un autre lorsqu'on pose

$$Y_1(t) = \frac{1}{2}(X_1(t) + X_2(t)) = e^t\begin{pmatrix} \cos(\sin t) \\ \sin(\sin t) \end{pmatrix}$$
$$Y_2(t) = \frac{1}{2i}(X_1(t) - X_2(t)) = e^t\begin{pmatrix} \sin(\sin t) \\ -\cos(\sin t) \end{pmatrix}$$

Sur la base du système fondamental (Y_1, Y_2) on forme M en posant

$$M(t) = e^t\begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix}$$

L'écriture normale de M est donc $M(t) = Q(t)\, e^{tB}$ avec

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = I_2$$

➡ N.B. Rigoureusement, B est une matrice quelconque qui vérifie $e^{2\pi B} = M(0)^{-1}M(2\pi) = e^{2\pi} I_2$ donc il suffit de prendre $B = I_2$. $Q(t)$ en découle ensuite.

➡ N.B. On constate qu'aucune solution non nulle de (16) n'est périodique. Examinons ce qu'en dit l'étude menée par ce sujet.
D'un côté la seule VAP de $e^{2\pi B}$ est $e^{2\pi}$ et elle n'est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité pour aucun entier $m \in \mathbb{N}^*$.
De l'autre, la droite engendrée par le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ (un VEP de toutes les matrices $A(t)$) est stable par toutes les matrices $A(t)$. Donc le résultat de la question 20 n'est pas applicable pour savoir si (16) admet une solution T'-périodique avec $T'/(2\pi) \in \mathbb{Q}$.

1. matrice de passage P indépendante de la variable t

En outre pour tout $u, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} A(u)M(t) - A(t)M(t) &= \mathrm{e}^{it}(\cos u - \cos t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & -\cos(\sin t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{it}(\cos u - \cos t)\begin{pmatrix} -\sin(\sin t) & \cos(\sin t) \\ \cos(\sin t) & \sin(\sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une solution $X : t \longmapsto M(t)V$ avec $V \in \mathbb{C}^2$, si elle est T'-périodique avec $T'/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$ va vérifier

$$\forall u, t \in \mathbb{R} \quad A(u)X(t) = A(t)X(t) = 0$$

soit
$$\forall u, t \in \mathbb{R} \quad \big(A(u)M(t) - A(t)M(t)\big)V = 0$$

Seul le vecteur $V = 0_{\mathbb{C}^2}$ permet d'avoir cette propriété.
Ce qui confirme l'absence (apparente) de solutions périodiques non nulles de (16)