1 Mathématiques

1.1 Remarques générales

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'aiment pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé aux candidats d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

Enfin, les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin ; beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus. Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses : des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Nous rappelons que les questions « faciles » ; doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question), ce qui ne facilite en rien la tâche du correcteur. Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.2 Mathématiques 1 - filière MP

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le but du problème était la démonstration, due à Hardy et Ramanujan, d'une formule asymptotique du nombre de décompositions d'un entier naturel en somme d'entiers naturels non nuls. Cela donnait un problème très long, mais qui abordait de nombreux points du programme d'analyse et de probabilités des classes préparatoires.

On aurait pu craindre que la longueur du sujet et la difficulté de certaines questions découragent les candidats, cela n'a pas été le cas, les copies étaient d'une longueur habituelle pour cette épreuve de trois heures.

On pouvait aussi redouter une tendance au grapillage, en raison du nombre de questions et de la présence de quelques points faciles vers la fin. En fait les copies abordaient principalement les quinze premières questions, et pratiquement personne ne dépassait la question vingt et un, probablement en raison des notations nombreuses et complexes introduites au début de la partie F.

1.2.2 Analyse détaillée des questions

La première question portait sur les séries entières. Elle était très classique mais il fallait éviter de parler de logarithme népérien d'un nombre complexe. Par ailleurs, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto ln(1-x)$, $x \in]-1, 1[$ peut être considéré comme un résultat du cours, il n'est pas utile de le redémontrer.

À la question 2, l'emploi des séries entières était périlleux à cause des confusions entre la série en z et la série en t, et un raisonnement rigoureux supposait la détermination précise du rayon de convergence de la série entière en t. Les meilleurs résultats sur cette question ont été obtenus par ceux qui ont utilisé la dérivation d'une série de fonctions.

À la question 3, il s'agissait surtout d'éviter les inégalités et logarithmes de nombres complexes.

La question 4 sortait des sentiers battus, pourtant les performances ont été plutôt bonnes, mettant en évidence des capacités d'adaptation à une situation inhabituelle très intéressantes pour de futurs ingénieurs.

Les questions 5 et 6 étaient relativement difficiles, elles ont été traitées partiellement dans les meilleures copies et souvent pratiquement evitées dans les autres.

On retrouvait une technique classique à la question 7, puisqu'il s'agissait d'inverser une intégrale de Riemann et une somme. La convergence normale a été en général bien justifiée, mais le calcul de l'intégrale a quelquefois manqué de précision.

On passait ensuite aux questions 8 et 9, questions très techniques. Une proportion non négligeable de candidats a pris la décision de les éviter. Pourtant la question 8 était abordable. La disjonction à la fin de la question 9 a laissé perplexe la quasi-totalité des candidats. La question 9 a rencontré (heureusement rarement) les erreurs classiques pour l'intégrabilité de la fonction ϕ_α, mais cette première partie de la question a souvent été traitée correctement.

Le calcul de la dérivée de la question 10 a été plus décevant, quand il était fait, puisque dans de nombreuses copies il était tout simplement évité.

Bien que technique et un peu longue, la question 11 ne présentait pas de difficulté majeure, elle a été souvent abordée mais rarement traitée complètement. Le barème a prévu une évaluation précise des solutions partielles.

On pouvait traiter la question 12 de manière complètement indépendante et les correcteurs ont constaté chez les candidats sérieux une bonne maîtrise du théorème d'inversion dont la mise en œuvre était ici très simple.

À la question 13 on ne connaissait ni Ω, ni A, donc une somme indexée sur l'un ou l'autre de ces ensembles n'avait pas de sens. Les bonnes utilisations du théorème de transfert pour se ramener à une somme indexée par les entiers naturels étaient rares et la question très souvent ignorée.

Les questions 14 et 15 utilisaient le théorème de transfert, puis la série géométrique pour la première, et des résultats très classiques sur la dérivation des séries de fonctions pour la deuxième. Les candidats qui sont arrivés jusque là, souvent parce qu'ils avaient évité pas mal de questions auparavant, les ont en général bien réussies, les pertes de points provenant de justifications insuffisantes (oubli d'évoquer le théorème de transfert par exemple).

Les questions 16, 17 et 18, un peu trop techniques, ont été peu abordées et encore moins réussies, mais la route commençait à être longue pour arriver jusque là.

La question 19 repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous l'avons trouvée dans quelques copies.

Les correcteurs s'attendaient à un phénomène de grapillage sur le début de la question 20, cela n'a pas été le cas, les copies dans lesquelles on ne trouvait rien après la question 10 et le début de la question 20 étaient rares et en général nulles, les bonnes performances n'ont pas été réalisées par des candidats qui ont traité (en général très mal) une question de temps en temps. La fin de la question n'a pas été traitée.

La question 21 a été abordée par une minorité de candidats.

La partie F commençait par une série de notations assez complexes qui ont joué un rôle de barrière infranchissable. On avait prévu des grapilleurs à la question 25. Le phénomène est resté très marginal. Les cinq dernières questions étaient peu cotées et n'ont joué aucun rôle dans la sélection.

1.2.3 Conclusions

En conclusion, ce problème, en dépit de sa longueur, a bien joué son rôle de classement, aussi bien par les connaissances et la maîtrise du programme (on balaye presque complètement les parties d'analyse et de probablités) que par la gestion stratégique du temps et de l'énoncé. Le conseil principal que l'on peut donner aux futurs candidats face à un sujet très long est d'éviter de survoler le problème, et de se concentrer sur des parties précises. On voyait des notes supérieures à la moyenne de l'épreuve avec 10 questions abordées et une note proche de 0 avec 20 questions abordées.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP

1.3.1 Généralités et présentation du sujet

L'opinion générale des correcteurs à l'issue de cette session est une altération sensible de la qualité des copies, tant du point de vue de la présentation et de la rédaction que pour ce qui concerne le contenu mathématique. Concernant le contenu mathématique, cette épreuve a révélé des lacunes importantes en algèbre linéaire chez de nombreux candidats, notamment sur les notions de réduction et théorie spectrale comme l'a illustré entre autres la première partie de la question 18. Certaines connaissances de base ne sont pas du tout maîtrisées, et l'on a vu trop souvent $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ comme condition nécessaire et suffisante à la question 18 alors qu'il s'agit de nombres complexes. Quelques questions calculatoires comme 2-8-18 ont mis en lumière les travers de certains candidats qui empilent les lignes de calculs sans un seul mot d'explication parfois de façon quasiment illisible et sans mettre en évidence les arguments employés. En outre, des petites erreurs dans les changements d'indice ou encore dans les calculs de sommes semblent indiquer beaucoup de précipitation chez certains candidats et tout du moins un sérieux manque de relecture. Les questions 1, 4 et 10, entre autres, nécessitaient pour être correctement traitées de prendre en compte un passage à la limite dans la rédaction par exemple en utilisant la continuité de la norme, la continuité du produit matriciel ou encore la continuité de l'application transposée. Ces limites sont la plupart du temps passées sous silence dans les justifications et de nombreux points sont perdus par les candidats qui se contentent simplement de calculs formels et non rigoureusement justifiés. On a ainsi vu des candidats utiliser la commutativité de deux matrices lorsque ce n'était pas supposé et réciproquement, redémontrer des résultats explicitement admis ($O_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ fermés par exemple), établir à la question 5 la décomposition de Dunford alors que c'est fait bien plus tard dans le problème, mais aussi ne pas remarquer des hypothèses importantes comme le fait que la norme dans la partie 1 vérifie $\|I_n\| = 1$ ce qui est utile à la question 4. Le jury déplore également que certains candidats ne semblent pas lire les rapports des épreuves, par exemple le fait que le groupe orthogonal n'est pas égal à l'ensemble des matrices de déterminant 1, erreur qui a déjà été soulevée l'an passé dans le rapport précédent.

1.3.2 Analyse détaillée par question

Q1 - Il s'agit ici de prouver que si A et B commutent alors A et $\exp(B)$ commutent. Si cette question ne présentait pas de difficultés particulières à première vue, elle a été pourtant mal traitée et rédigée. Elle est particulièrement emblématique des travers de certains candidats et du manque de précision constaté dans les réponses par les correcteurs de cette épreuve. De trop nombreux candidats se contentent d'explications lapidaires et formelles en écrivant simplement :

$$A\exp(B) = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}A\frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}A = \exp(B)A,$$

passant sous silence les passages à la limite qui devaient être impérativement pris en compte dans les justifications. Très souvent, la seule justification au calcul précédent se limite à une phrase du type : *par une récurrence immédiate on a* $AB^k = B^kA$ *donc on a...* Les correcteurs attendaient pourtant des candidats les justifications suivantes :

(i) un argument de récurrence (détaillé ou non) pour expliquer que pour tout entier naturel k on a $AB^k = B^k A$,

(ii) le passage intermédiaire par les sommes partielles affirmant que pour tout $N \geq 0$, $A \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} A$,

(iii) le recours à la continuité des produits matriciels $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$,

(iv) le passage à la limite final.

Le barème de cette question ayant été découpé en fonction des critères précédents, il va de soi que les réponses non détaillées et non rigoureuses ont engendré d'importantes pertes de points.

Q2 - Cette question a souffert également d'un manque de précision et de rigueur important dans les explications. Très peu de candidats ont réussi à justifier proprement que l'application g était de classe $\mathcal{C}^1$, la plupart des réponses se contentant d'invoquer un simple « produit » de fonctions $\mathcal{C}^1$, les « opérations usuelles » ou encore les fameux « théorèmes généraux ». Ce type d'argument ne s'applique pas ici car les fonctions sont à valeurs matricielles et il faut remarquer que g s'écrit comme $B(u, v)$ où B est bilinéaire et u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. De manière similaire, une infime portion des copies comportent un énoncé clair et précis du Théorème de Cauchy qui s'applique dans ce contexte, la plupart des candidats invoquant *l'unicité des solutions au problème de Cauchy* parfois sans vérifier la condition initiale. Bien des candidats ont par la suite éprouvé des difficultés pour passer de l'équation $g = f_A$ à la relation (1) attendue. Il s'agissait de multiplier à droite par e^{tB} et d'utiliser la formule donnant l'inverse d'une exponentielle de matrice. A noter que certains candidats n'hésitent pas à diviser par des matrices ou encore à écrire $e^{tB}e^{-tB} = 1$.

Q3 - Il s'agit ici de démontrer la réciproque à la question précédente. Cette question à donné lieu à un florilège de calculs plus ou moins vrais et plus ou moins rigoureux, parfois sans la moindre explication (notamment au niveau des commutations de matrices) et parfois même avec quelques « arnaques » en fin de preuve. Essentiellement, après deux dérivations, on aboutissait à la relation $(A+B)^2 e^{t(A+B)} = A^2 e^{t(A+B)} + e^{tA} B^2 e^{tB} + 2Ae^{tA} Be^{tB}$, laquelle est valable pour tout réel t. Il suffisait alors d'évaluer en zéro pour aboutir à $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ ce qui permettait de conclure après simplification. Au lieu d'évaluer en zéro tout simplement, beaucoup de candidats ont tenté d'opérer des « simplifications » dans l'équation précédente et ont tourné en rond dans leurs calculs sans succès.

Q4 - L'idée générale d'employer l'inégalité triangulaire ayant été globalement comprise, cette question nécessitait une rédaction précise et complète. Il fallait par exemple utiliser les sommes partielles et justifier proprement le passage à la limite, par un argument de continuité de la norme. Par ailleurs, peu de candidats ont remarqué que l'énoncé donnait $\|A^0\| = 1$ pour démontrer ensuite que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour tout entier naturel k.

Q5 - Cette question relativement classique se traitait bien en trigonalisant la matrice, pour autant que l'on justifie soigneusement la forme de la partie diagonale de l'exponentielle d'une matrice triangulaire. A noter que certains candidats ont supposé que la matrice A était diagonalisable tandis que d'autres ont carrément déclaré que le déterminant était linéaire. Enfin, des candidats ont voulu utiliser la décomposition de Dunford ici et l'ont démontré au préalable. Ils n'ont certainement pas vu que ce point était traité plus tard dans le sujet et les correcteurs de l'épreuve ne peuvent que déplorer un manque de lecture du sujet.

Q6 - Cette question, parmi les plus faciles du sujet, a été dans l'ensemble relativement bien traitée. Certaines copies faibles ont parfois confondu les propriétés usuelles de l'exponentielle réelle avec celles de l'exponentielle de matrice abordées précédemment. Quelques confusions sur la terminologie adéquate ont été relevées avec « propriété de la norme » ou même « Cauchy-Schwarz » en lieu et place de l'inégalité triangulaire.

Q7 - Cette question nécessitait d'effectuer un développement limité à l'ordre deux qui n'a été que très rarement proprement justifié. Parmi les erreurs fréquentes celle d'écrire « 1 » au lieu de l'identité pour terme constant alors que les fonctions sont à valeurs matricielles ou bien celle de faire un développement limité à l'ordre 1 et d'identifier $o(\frac{1}{k})$ avec un $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. De nombreuses copies ont d'emblée majoré la norme de la différence par la somme des normes ce qui évidemment ne peut pas fonctionner.

Q8 - La première partie de la question qui reposait sur une somme télescopique fut relativement bien traitée mais de trop nombreux candidats empilent les lignes de calcul sans la moindre explication et ne font pas ressortir clairement l'argument permettant de conclure (somme télescopique ou changement d'indice). Il est essentiel de bien mettre en valeur les arguments employés ; des lignes de calculs enchaînées sans ligne directrice ni explications claires ne sauraient constituer une rédaction valable. Dans la seconde partie de la question, après avoir prouvé que $\lim_k X_k^k - Y_k^k = 0$, bien de candidats ont déduit que $\lim_k X_k^k = \lim_k Y_k^k$ sans avoir expliqué ou prouvé au préalable que nombre de ces limites existaient. Il fallait alors remarquer que $Y_k^k = \exp(A+B)$ pour tout entier k, par exemple en utilisant les propriétés de l'exponentielle de matrice, $A+B$ commutant avec elle même.

Q9 - Cette question qui nécessitait de déterminer l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire fut dans l'ensemble relativement bien traitée et le lien avec la question (5) compris. Toutefois, de nombreuses copies perdent inutilement des points avec une rédaction très approximative et non rigoureuse avec des équivalences non valables dans les raisonnements. Assez étrangement, l'équivalence $[\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Tr}(tM) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0]$ a posé quelques soucis à certains candidats alors qu'il suffisait pour le sens direct d'évaluer en $t = 1$ par exemple. Dans d'autres copies on a pu voir écrit qu'une matrice de trace nulle possède des termes diagonaux nuls.

Q10 - Cette question nécessitait de déterminer l'algèbre de Lie du groupe orthogonal. Elle est plus difficile que la précédente et a été bien moins résolue. Elle a en particulier révélé des lacunes au niveau de la logique élémentaire avec des égalités d'ensembles déduites d'une seule implication prouvée. En particulier il était ici plus facile de montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_G$ pourvu que l'on remarque que ${}^T e^{tM} = e^{t^T M}$ dont la démonstration rigoureuse nécessitait d'utiliser la linéarité et la continuité de l'application transposée. L'implication réciproque plus délicate pouvait se démontrer par exemple en dérivant la relation $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tM} e^{t^T M} = I_n$ et en évaluant en $t = 0$. Certains candidats ont supposé pour cette implication que M et ${}^T M$ commutaient ou encore ont invoqué l'injectivité de l'exponentielle de matrice sur $M_n(\mathbb{R})$ ce qui n'est pas valable dès que $n \geq 2$.

Q11 - Cette question, pourtant non triviale, a été dans l'ensemble correctement traitée, même dans certaines copies plutôt faibles. Parmi les erreurs fréquentes on notera l'oubli de la vérification de $\mathcal{A}_G \neq \emptyset$ ou pire encore des « preuves » du fait que $I_n \in \mathcal{A}_G$ ce qui dénote une confusion importante entre les notions de groupe multiplicatif et d'espace vectoriel.

Q12 - Cette question nécessitait d'utiliser la formule $e^{PBP^{-1}} = Pe^B P^{-1}$ avec $P = e^{tA}$ ainsi que la stabilité d'un groupe par produit. Certains candidats bien qu'ayant bien compris l'idée générale ont oublié d'introduire un paramètre $x \in \mathbb{R}$ dans le calcul de l'expression $\exp\left(xe^{tA}Be^{-tA}\right)$ qui était pourtant nécessaire pour coller à la définition d'une algèbre de Lie.

Q13 - Cette question plus délicate n'a été traitée que dans les bonnes copies. Il fallait dériver l'application u, puis évaluer la dérivée en $t = 0$. En interprétant la dérivée comme la limite d'un taux d'accroissement dans $\mathcal{A}_G$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de dimension finie et fermé, on aboutissait au résultat. Si le calcul de $u'(t)$ a été souvent correctement fait. L'utilisation de la fermeture de $\mathcal{A}_G$ a été bien plus rarement proprement effectuée. Certains candidats ont utilisé le fait que $\mathcal{A}_G$ était une algèbre, donc stable par produit, ce qui n'est pas le cas comme les exemples des questions 9 et 10 en attestent. Mentionnons enfin qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer les résultats du cours (sauf si explicitement demandé par l'énoncé), en particulier le fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé pouvait être utilisé sans preuve.

Q14 - Cette question plus facile reposait sur le calcul de la dérivée en $t = 0$ de $t \mapsto e^{tM}$ a été le plus souvent correctement traitée même dans des copies particulièrement faibles.

Q15 - Cette question faite le plus souvent dans les bonnes copies pouvait se traiter en revenant à la définition du déterminant comme somme indexée sur les permutations ou encore en utilisant la dérivée des formes multilinéaires, mais la solution la plus simple à mettre en place était peut-être basée sur la trigonalisation de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q16 - Cette question découle directement de la précédente mais nécessitait une bonne connaissance du cours de calcul différentiel et notamment la compréhension du lien entre la notion de différentielle et d'application différentiable avec les dérivées directionnelles.

Q17 - Cette question de synthèse utilisait le résultat de la Q16, les définitions des groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, ainsi que la définition de l'espace tangent à G en l'identité. Il fallait pour la traiter maîtriser correctement la règle de la chaîne pour les composées d'applications différentiables, ce qui n'a été observé que dans les bonnes copies.

Q18 - La première partie de la question consistant à prouver la similitude des matrices n'a été que rarement correctement traitée. Deux approches étaient possibles. La première consistait à utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ainsi que le lemme des noyaux, puis à utiliser la stabilité des sous-espaces caractéristiques et la trigonalisation des endomorphismes induits pour conclure. La seconde consistait à construire « à la main » une base adéquate à partir d'une base adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques. Cette approche fut tentée par de nombreux candidats qui ont buté sur des difficultés calculatoires et n'ont pas réussi ou n'ont pas pensé à démontrer que le système de vecteurs ainsi construit était bien une base. Cette question a également révélé d'importantes difficultés chez des candidats qui confondent les notions de sous-espace caractéristique et de sous-espace propre. Ils omettent de vérifier la stabilité des sous-espaces avant de considérer les endomorphismes induits, mélangeant, voire confondant, les concepts de diagonalisabilité et de trigonalisabilité. Ils considèrent que deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont semblables ou bien encore mélangent les notions de polynômes irréductibles et de polynômes premiers entre eux.

La deuxième partie de la question consiste à calculer les puissances de T et e^T. Si le calcul des puissances a été généralement traité de façon correcte par une récurrence, bien des candidats ont ensuite buté sur les calculs de séries qui étaient nécessaires pour déterminer e^T.

La dernière partie de cette question consiste à prouver que $e^{tA} \to 0$ si et seulement si les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Au lieu de cela, bien des candidats ont écrit que $\alpha < 0, \beta < 0$ alors qu'il s'agit pourtant de nombres complexes ! La relation $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ n'a été aperçue que dans un petit nombre de copies et ne semble pas maîtrisée par un grand nombre de candidats. En outre, il fallait justifier rigoureusement que $e^{tA} \to 0 \Leftrightarrow e^{tT} \to 0$, ce qui pouvait se faire par exemple en utilisant la continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$. Cette étape n'a été aperçue que dans les meilleures copies.
Q19 - Cette question reprenait certains des arguments de la question précédente et a provoqué les mêmes sortes de difficultés que précédemment.

Q20 - Cette question est un cas d'école d'application du lemme des noyaux. Outre les difficultés précédemment citées, on notera une confusion fréquente entre les notions de polynômes premiers entre eux deux à deux et la notion de polynômes globalement premiers entre eux. Par ailleurs, le fait que les polynômes $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ soient effectivement premiers entre eux deux à deux n'a été que rarement justifié. Enfin certains candidats confondent les notions de polynômes et de polynômes d'endomorphisme. Le jury tient à rappeler que citer à la volée des noms de théorèmes ne constitue en rien une démonstration. Invoquer sans davantage de détails le lemme des noyaux et Cayley-Hamilton a induit d'importantes pertes de points.

Q21 - Cette question consistait à établir le théorème de décomposition de Dunford. L'erreur la plus fréquemment observée consiste à trigonaliser la matrice puis à affirmer que la partie diagonale et la partie constituée des éléments au-dessus de la diagonale conviennent. Bien évidemment, en général ces deux matrices ne commutent pas et ne répondent donc pas aux critères de la décomposition de Dunford.

Q22 - Cette question de synthèse nécessitait l'emploi de la décomposition de Dunford et le calcul d'une exponentielle de matrice nilpotente. Il fallait ensuite utiliser que $e^{D+N} = e^D e^N$ et passer à la norme pour aboutir. Délicate à mettre en place, cette question n'a été bien traitée que dans les meilleures copies.

Q23 - Cette question utilise la question précédente pour établir la réciproque à la question 19. L'usage du théorème de croissance comparée a semble-t-il posé quelques problèmes à certains candidats.

Q24 - S'agissant des questions plus délicates de la fin du sujet, de même que pour les deux questions précédentes, le jury a davantage noté les idées plutôt que l'enchaînement précis des arguments. Beaucoup de copies partent du principe que la limite de $\exp(tA)$ lorsque t tend vers l'infini existe, et procèdent alors par « contraposée de la question 19 ». Ceci fait ressortir d'importantes lacunes en analyse pour l'existence de la limite mais aussi en algèbre linéaire pour avoir écrit $BX = 0$ implique $X = 0$ ou $B = 0$.

Q25 - Q26 - La première partie de la question 25 fut assez souvent traitée correctement même si certains candidats démontrent que l'intersection des trois sous-espaces est réduite à $\{0\}$ pour déduire ensuite la somme directe. La seconde partie de la question 25 et la question 26 n'ont été traitées que très rarement par les meilleures copies.