HD Dataanalyse

Note 7b: Analyse af to grupper (hypotesetest)

Copenhagen Business School

Emne i dette notesæt

I mange sammenhænge er det relevant at ***sammenligne værdien af en variabel mellem to forskellige grupper***:

- Er der forskel på variablens værdier i de to grupper?
- Hvis der er en forskel, hvad kan vi så sige om forskellen?

Vi har tidligere (i note 7a) set på, hvor præcist vi er i stand til at...

- gætte på ***forskellen*** $\mu_1 - \mu_2$ ***i middelværdien*** af en variabel ***mellem to grupper*** via beregning af et konfidensinterval for $\mu_1 - \mu_2$
- gætte på ***forskellen*** $p_1 - p_2$ ***i andele*** af en variabel ***mellem to grupper*** via beregning af et konfidensinterval for $p_1 - p_2$

Vi skal nu se på, hvordan vi drage specifikke konklusioner om eventuelle ligheder/forskelle mellem to grupper ved at lave hypotesetest om...

- forskellen i middelværdier $\mu_1 - \mu_2$
- forskellen i andele $p_1 - p_2$

Overvejelserne i denne note er af samme type, som vi tidligere har set på i tilfældet med observationer fra én enkelt gruppe (note 6).

INDHOLDSFORTEGNELSE

1 Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$ (praktisk anvendelse)

Formulering af hypoteser • *Beregning af P-værdi* • *Opsummering*

2 Hypotesetest om $p_1 - p_2$ (praktisk anvendelse)

3 OPSUMMERING

Formulering af hypoteser

Hypotesetest om en forskel $\mu_1 - \mu_2$ i middelværdier mellem to grupper foregår i al væsentlighed på samme måde som hypotetest om en middelværdi μ i én gruppe (note 6).

Hver gang man laver et hypotesetest, skal man igennem de sædvanlige fem trin:

- **Trin 1**: *Antagelser*
- **Trin 2**: *Hypoteser*
- **Trin 3**: *Teststørrelse*
- **Trin 4**: *P-værdi*
- **Trin 5**: *Konklusion*

Indholdet af **Trin 1** (Antagelser), **Trin 3** (Teststørrelse) og **Trin 5** (Konklusion) er altid det samme.

Der findes imidlertid forskellige måder at formulere hypoteserne på, og valget af hypotese påvirker også beregningen af P-værdien. Derfor kan der være forskel på indholdet af **Trin 2** (Hypoteser) og **Trin 4** (P-værdi) fra test til test.

Formulering af hypoteser

Beregning af P-værdien bygger – uanset valget af hypotese – på den værdi af teststørrelsen, der beregnes i Trin 3.

P-værdien bruges til at vurdere, om datamaterialet er foreneligt med nulhypotesen. Små P-værdier (mindre end det valgte signifikansniveau α) leder til, at vi forkaster nulhypotesen, mens store værdier (større end α) leder til, at vi ikke forkaster nulhypotesen.

Hvordan P-værdien helt specifikt beregnes afhænger af det konkrete valg af nul- og alternativhypotese.

Inden vi ser nærmere på de forskellige mulige hypoteser og de tilhørende beregninger af P-værdier, så lad os først lige opsummere de tre trin, der altid er de samme.

Formulering af hypoteser

Resultat [Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$: Trin 1, 3]

Trin 1: *Antagelser*

- $X_1, \ldots, X_{n_1}$ *er indbyrdes uafhængige observationer, der er approksimativt normalfordelt* $N(\mu_1, \sigma_1)$
- $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ *er indbyrdes uafhængige observationer, der er approksimativt normalfordelt* $N(\mu_2, \sigma_2)$
- *observationerne* $X_1, \ldots, X_{n_1}$ *og* $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ *er indbyrdes uafhængige*

Trin 3: *Teststørrelse*

Test af nulhypotesen H_0 *udføres ved hjælp af teststørrelsen*

$$Z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

hvor μ_0 *er talværdien specificeret i nulhypotesen* H_0*. Under forudsætning af at nulhypotesen* H_0 *er sand, er teststørrelsen* Z *approksimativt beskrevet ved en* t*-fordeling med* f *frihedsgrader, hvor*

$$f = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Formulering af hypoteser

Resultat [Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$: Trin 5]

Trin 5: *Konklusion*

Hvis P-værdien er...

- *mindre end signifikansniveauet α forkaster vi nulhypotesen H_0*
- *større end signifikansniveauet α forkaster vi ikke nulhypotesen H_0*

Formulering af hypoteser

Som nævnt kan hypoteser (nul- og alternativ) formuleres på flere forskellige måder. Vi skal i dette kursus se på tre forskellige muligheder.

Resultat [Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$: Trin 2]

Når vi laver hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$, vil vi altid anvende én ud af tre nedenstående formuleringer af nulhypotesen H_0 og alternativhypotesen H_a:

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem middelværdierne i de to grupper er lig μ_0")
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem middelværdierne i de to grupper er mindre end μ_0")
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem middelværdierne i de to grupper er større end μ_0")

Kort om notationen i hypoteserne ovenfor, der godt kan virke lidt forvirrende:

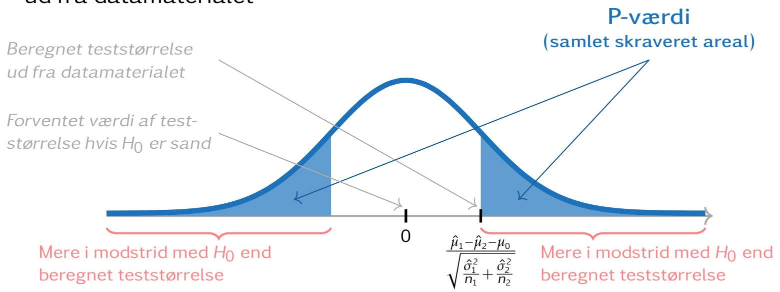
- μ_0 er den forskel mellem middelværdierne i gruppe 1 og gruppe 2, der postuleres i nulhypotesen
- μ_1 er den ukendte middelværdi i gruppe 1
- μ_2 er den ukendte middelværdi i gruppe 2

Beregning af P-værdi

Test af $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ ligger tæt på talværdien μ_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0) \Big/ \sqrt{\hat{\sigma}_1^2/n_1 + \hat{\sigma}_2^2/n_2}$ derfor ligger tæt på 0
- vil store positive eller negative værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i enten positiv eller negativ retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



Beregning af P-værdi

Eksempel: Ølsalg

Vi ser fortsat på prisen for 1 stk. Grøn Tuborg (33 cl glasflaske) i supermarkedskæderne Føtex ("gruppe 1") og Bilka ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0{,}20 \qquad H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0{,}20$$

(dvs. $\mu_0 = 0{,}20$) så svarer det til at undersøge, om den forventede prisforskel mellem Føtex og Bilka kan antages at være 0,20 kr. eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{3{,}438 - 3{,}152 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}230^2}{157} + \frac{0{,}215^2}{157}}} = 3{,}428$$

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 3,428, dvs. som

$$P(Z > 3{,}428) + P(Z < -3{,}428) = 0{,}07\%$$

Summary Statistics

Sample 1 Mean	3,152	$\hat{\mu}_2$
Sample 1 Standard Deviation	0,2147	$\hat{\sigma}_2$
Sample 1 Size	157	n_2
Sample 2 Mean	3,4381	$\hat{\mu}_1$
Sample 2 Standard Deviation	0,2299	$\hat{\sigma}_1$
Sample 2 Size	157	n_1
Pooled Estimate of Standard Deviation	0,3658	
Difference in Sample Means (Mean 2 - Mean 1)	0,2861	

Test Results

Result	Value	
Standard Error of the Difference (Mean 2 - Mean 1)	0,0251	
t-score	3,4277	z
t Critical Value(s)	+/- 1,9676	
Observed Significance (p-value)	0,0007	P-værdi

Reject Null Hypothesis

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 0{,}07\% < 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***hævde***, at den forventede prisforskel på Grøn Tuborg mellem Føtex og Bilka er 0,20 kr. Med andre ord, vi kan konkludere, at prisforskellen ikke er 0,20 kr.

JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Means]

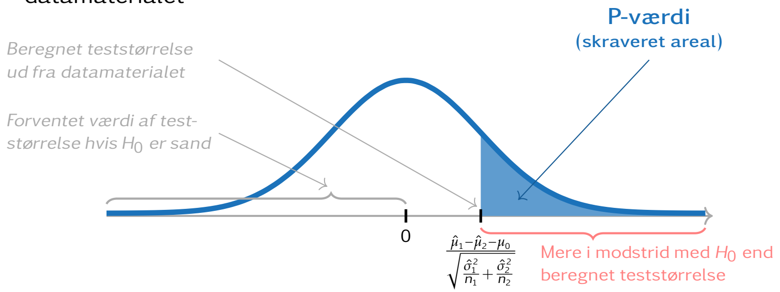
Beregning af P-værdi

Test om $\mu_1 - \mu_2$ (praksis)
Formulering
P-værdi
Opsummering
Test om $p_1 - p_2$ (praksis)
OPSUMMERING

Test af $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ er mindre end talværdien μ_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0) \Big/ \sqrt{\hat{\sigma}_1^2/n_1 + \hat{\sigma}_2^2/n_2}$ derfor er mindre end 0
- vil store positive værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i positiv retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$ (praktisk anvendelse)
Beregning af P-værdi

Eksempel: Ølsalg

Vi ser fortsat på prisen for 1 stk. Grøn Tuborg (33 cl glasflaske) i supermarkedskæderne Føtex ("gruppe 1") og Bilka ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0{,}20 \qquad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0{,}20$$

(dvs. $\mu_0 = 0{,}20$) så svarer det til at undersøge, om den forventede prisforskel mellem Føtex og Bilka kan antages at være mindre end 0,20 kr. eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{3{,}438 - 3{,}152 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}230^2}{157} + \frac{0{,}215^2}{157}}} = 3{,}428$$

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 3,428, dvs. som

$$P(Z > 3{,}428) = 0{,}03\%$$

Summary Statistics

Sample 1 Mean	3,152	$\hat{\mu}_2$
Sample 1 Standard Deviation	0,2147	$\hat{\sigma}_2$
Sample 1 Size	157	n_2
Sample 2 Mean	3,4381	$\hat{\mu}_1$
Sample 2 Standard Deviation	0,2299	$\hat{\sigma}_1$
Sample 2 Size	157	n_1
Pooled Estimate of Standard Deviation	0,3658	
Difference in Sample Means (Mean 2 - Mean 1)	0,2861	

Test Results

Result	Value	
Standard Error of the Difference (Mean 2 - Mean 1)	0,0251	
t-score	3,4277	z
t Critical Value(s)	1,6498	
Observed Significance (p-value)	0,0003	P-værdi

Reject Null Hypothesis

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 0{,}03\% < 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***hævde***, at den forventede prisforskel på Grøn Tuborg mellem Føtex og Bilka er mindre end 0,20 kr. Med andre ord, vi kan konkludere, at prisforskellen er større end 0,20 kr.

JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Means]

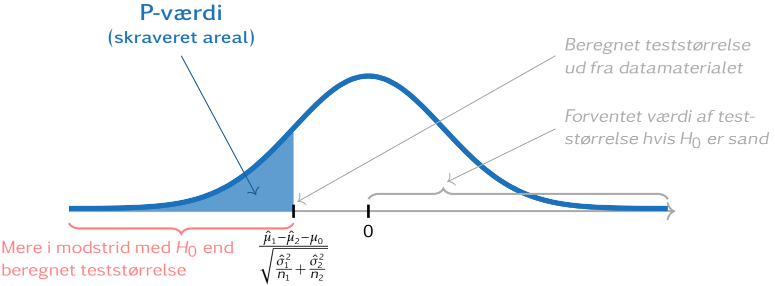
Beregning af P-værdi

Test om $\mu_1 - \mu_2$ (praksis)
Formulering
P-værdi
Opsummering
Test om $p_1 - p_2$ (praksis)
OPSUMMERING

Test af $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{\mu}$ er større end talværdien μ_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0) \Big/ \sqrt{\hat{\sigma}_1^2/n_1 + \hat{\sigma}_2^2/n_2}$ derfor er større end 0
- vil store negative værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i negativ retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



BEREGNING AF P-VÆRDI

Eksempel: Ølsalg

Vi ser fortsat på prisen for 1 stk. Grøn Tuborg (33 cl glasflaske) i supermarkedskæderne Føtex ("gruppe 1") og Bilka ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0{,}20 \qquad H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0{,}20$$

(dvs. $\mu_0 = 0{,}20$) så svarer det til at undersøge, om den forventede prisforskel mellem Føtex og Bilka kan antages at være større end 0,20 kr. eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{3{,}438 - 3{,}152 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}230^2}{157} + \frac{0{,}215^2}{157}}} = 3{,}428$$

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 3,428, dvs. som

$$P(Z < 3{,}428) = 99{,}97\%$$

Summary Statistics

Sample 1 Mean	3,152	$\hat{\mu}_2$
Sample 1 Standard Deviation	0,2147	$\hat{\sigma}_2$
Sample 1 Size	157	n_2
Sample 2 Mean	3,4381	$\hat{\mu}_1$
Sample 2 Standard Deviation	0,2299	$\hat{\sigma}_1$
Sample 2 Size	157	n_1
Pooled Estimate of Standard Deviation	0,3658	
Difference in Sample Means (Mean 2 - Mean 1)	0,2861	

Test Results

Result	Value	
Standard Error of the Difference (Mean 2 - Mean 1)	0,0251	
t-score	3,4277	z
t Critical Value(s)	-1,6498	
Observed Significance (p-value)	0,9997	P-værdi

Fail to Reject Null Hypothesis

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således ***ikke*** nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 99{,}97\% > 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***afvise***, at den forventede prisforskel på Grøn Tuborg mellem Føtex og Bilka er større end 0,20 kr. Med andre ord, vi kan ikke afvise at prisforskellen er større end 0,20 kr.

JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Means]

OPSUMMERING

Beregningen af P-værdi ved hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$ kan vi opsummere i nedenstående oversigt.

Resultat [Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$: Trin 4]

Når vi laver hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$, er teststørrelsen

$$Z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

beskrevet ved en t-fordeling med f frihedsgrader, hvor f er som anført på side 5, under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand.

Ved analyse af...

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ *og* $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ *beregnes P-værdien som* $P(|Z| > |z|)$
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ *og* $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ *beregnes P-værdien som* $P(Z > z)$
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ *og* $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ *beregnes P-værdien som* $P(Z < z)$

hvor z er værdien af teststørrelsen beregnet på baggrund af datamaterialet.

Opsummering

Test om $\mu_1 - \mu_2$ (praksis)
Formulering
P-værdi
Opsummering
Test om $p_1 - p_2$ (praksis)
OPSUMMERING

Bemærk:

- Værdien af teststørrelsen z beregnet på baggrund af datamaterialet er ***den samme*** uanset hvilken nulhypotese, der analyseres
- Fordelingen af teststørrelsen Z er den samme uanset hvilken nulhypotese, der analyseres
- Beregningen af P-værdien hørende til nulhypotesen $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ skrives på lidt forskellige måder (der alle er identiske):

$$P(Z < |z|) + P(Z < -|z|) = P(|Z| > |z|) = 2 \cdot P(Z > |z|)$$

hvor $|z|$ betegner den absolutte værdi af talværdien z

Formulering af hypoteser

Hypotesetest om en forskel $p_1 - p_2$ i andele mellem to grupper foregår i al væsentlighed på samme måde som hypotetest om en andel p i én gruppe (note 6).

Hver gang man laver et hypotesetest, skal man igennem de sædvanlige fem trin:

- Trin 1: *Antagelser*
- Trin 2: *Hypoteser*
- Trin 3: *Teststørrelse*
- Trin 4: *P-værdi*
- Trin 5: *Konklusion*

Indholdet af Trin 1 (Antagelser), Trin 3 (Teststørrelse) og Trin 5 (Konklusion) er altid det samme.

Der findes imidlertid forskellige måder at formulere hypoteserne på, og valget af hypotese påvirker også beregningen af P-værdien. Derfor kan der være forskel på indholdet af Trin 2 (Hypoteser) og Trin 4 (P-værdi) fra test til test.

Formulering af hypoteser

Beregning af P-værdien bygger – uanset valget af hypotese – på den værdi af teststørrelsen, der beregnes i Trin 3.

P-værdien bruges til at vurdere, om datamaterialet er foreneligt med nulhypotesen. Små P-værdier (mindre end det valgte signifikansniveau α) leder til, at vi forkaster nulhypotesen, mens store værdier (større end α) leder til, at vi ikke forkaster nulhypotesen.

Hvordan P-værdien helt specifikt beregnes afhænger af det konkrete valg af nul- og alternativhypotese.

Inden vi ser nærmere på de forskellige mulige hypoteser og de tilhørende beregninger af P-værdier, så lad os først lige opsummere de tre trin, der altid er de samme.

Formulering af hypoteser

Resultat [Hypotesetest om $p_1 - p_2$: Trin 1, 3]

Trin 1: *Antagelser*

- $X_1, \ldots, X_{n_1}$ *er indbyrdes uafhængige observationer med to mulige udfald: 1 og 0*
- $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ *er indbyrdes uafhængige observationer med to mulige udfald: 1 og 0*
- *observationerne* $X_1, \ldots, X_{n_1}$ *og* $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ *er indbyrdes uafhængige*
- $n_1\hat{p}_1 > 5$ *og* $n_1(1-\hat{p}_1) > 5$ *og* $n_2\hat{p}_2 > 5$ *og* $n_2(1-\hat{p}_2) > 5$

Trin 3: *Teststørrelse*

Test af nulhypotesen H_0 *udføres ved hjælp af teststørrelsen*

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

hvor p_0 *er talværdien specificeret i nulhypotesen* H_0. *Under forudsætning af at nulhypotesen* H_0 *er sand, er teststørrelsen* Z *approksimativt beskrevet ved en standardnormalfordeling* $N(0,1)$.

Bemærk: Testmetoden viser sig at give pålidelige resultater, hvis blot datamaterialet har en vis mængde observationer af både 1'er og 0'er i hver af de to grupper. Det er årsagen til, at vi i Trin 1 kræver at $n_1\hat{p}_1 > 5$ og $n_1(1-\hat{p}_1) > 5$ og $n_2\hat{p}_2 > 5$ og $n_2(1-\hat{p}_2) > 5$.

FORMULERING AF HYPOTESER

Resultat [Hypotesetest om $p_1 - p_2$: Trin 5]

TRIN 5: *Konklusion*

Hvis P-værdien er...

- *mindre end signifikansniveauet α forkaster vi nulhypotesen H_0*
- *større end signifikansniveauet α forkaster vi ikke nulhypotesen H_0*

FORMULERING AF HYPOTESER

Som nævnt kan hypoteser (nul- og alternativ) formuleres på flere forskellige måder. Vi skal i dette kursus se på tre forskellige muligheder.

Resultat [Hypotesetest om $p_1 - p_2$: Trin 2]

Når vi laver hypotesetest om $p_1 - p_2$, vil vi altid anvende én ud af tre nedenstående formuleringer af nulhypotesen H_0 og alternativhypotesen H_a:

- $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 \neq p_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem andelene i de to grupper er lig p_0")
- $H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 > p_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem andelene i de to grupper er mindre end p_0")
- $H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 < p_0$
  (Nulhypotese: "Forskellen mellem andelene i de to grupper er større end p_0")

Kort om notationen i hypoteserne ovenfor, der godt kan virke lidt forvirrende:

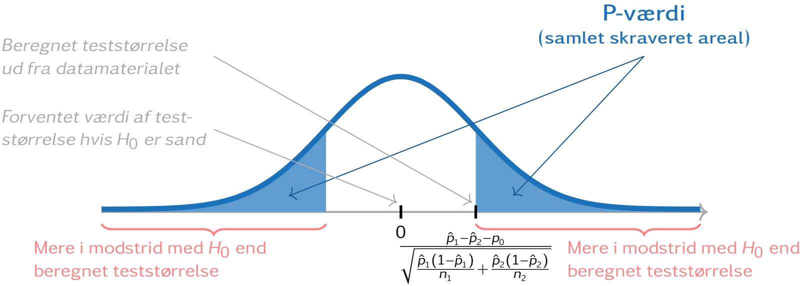
- p_0 er den forskel mellem andelene i gruppe 1 og gruppe 2, der postuleres i nulhypotesen
- p_1 er den ukendte andel i gruppe 1
- p_2 er den ukendte andel i gruppe 2

Beregning af P-værdi

Test af $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ ligger tæt på talværdien p_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0) \Big/ \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}$ derfor ligger tæt på 0
- vil store positive eller negative værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i enten positiv eller negativ retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



Beregning af P-værdi

Eksempel: Skat

Vi ser fortsat på de $n = 975$ indkomne svar på spørgsmålet *"Er topskatten for høj?"* opdelt på henholdsvis mænd ("gruppe 1") og kvinder ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0{,}02 \qquad H_a : p_1 - p_2 \neq 0{,}02$$

(dvs. $p_0 = 0{,}02$) så svarer det til at undersøge om forskellen i andelen af mænd og andelen af kvinder, der mener topskatten er for høj, kan antages at være 2% eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{0,398 - 0,299 - 0,02}{0,0305} = 2{,}60$$

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 2,60, dvs. som

$$P(Z > 2{,}60) + P(Z < -2{,}60) = 0{,}93\%$$

Test Inputs

Hypothesized Difference (p2-p1)	0,02	← p_0
Sample 1 Count (x1)	126	
Sample 1 Size (n1)	422	← n_2
Sample 2 Count (x2)	220	
Sample 2 Size (n2)	553	← n_1
Significance Level (alpha)	0,05	

Test Results

Result	Value	
Sample 1 Proportion	0,2986	← $\hat{p}_2$
Sample 2 Proportion	0,3978	← $\hat{p}_1$
Difference in Proportions (p2-p1)	0,0993	
Standard Error of the Difference (p2-p1)	0,0305	
z-score	2,5995	← z
z Critical Value(s)	+/- 1,96	
Observed Significance (p-value)	0,0093	← P-værdi

Reject Null Hypothesis

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 0{,}93\% < 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***hævde***, at forskellen på andelen af mænd og kvinder, der mener topskatten er for høj, er 2%. Med andre ord, vi kan konkludere, at forskellen ikke er 2%.

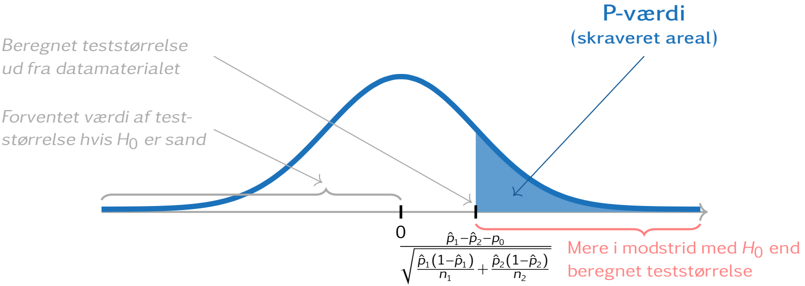
▶ JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Proportions]

BEREGNING AF P-VÆRDI

Test af $H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ er mindre end talværdien p_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0) \Big/ \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}$ derfor er mindre end 0
- vil store positive værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i positiv retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



Beregning af P-værdi

Eksempel: Skat

Vi ser fortsat på de $n = 975$ indkomne svar på spørgsmålet *"Er topskatten for høj?"* opdelt på henholdsvis mænd ("gruppe 1") og kvinder ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0{,}02 \qquad H_a : p_1 - p_2 > 0{,}02$$

(dvs. $p_0 = 0{,}02$) så svarer det til at undersøge om forskellen i andelen af mænd og andelen af kvinder, der mener topskatten er for høj, kan antages at være mindre end 2% eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{0{,}398 - 0{,}299 - 0{,}02}{0{,}0305} = 2{,}60$$

Test Inputs

Hypothesized Difference (p2-p1)	0.02	p_0
Sample 1 Count (x1)	126	
Sample 1 Size (n1)	422	n_2
Sample 2 Count (x2)	220	
Sample 2 Size (n2)	553	n_1
Significance Level (alpha)	0.05	

Test Results

Result	Value	
Sample 1 Proportion	0,2986	$\hat{p}_2$
Sample 2 Proportion	0,3978	$\hat{p}_1$
Difference in Proportions (p2-p1)	0,0993	
Standard Error of the Difference (p2-p1)	0,0305	
z-score	2,5995	z
z Critical Value(s)	1,6449	
Observed Significance (p-value)	0,0047	P-værdi

Reject Null Hypothesis

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 2,60, dvs. som

$$P(Z > 2{,}60) = 0{,}47\%$$

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 0{,}47\% < 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***hævde***, at forskellen på andelen af mænd og kvinder, der mener topskatten er for høj, er mindre end 2%. Med andre ord, vi kan konkludere, at forskellen er større end 2%.

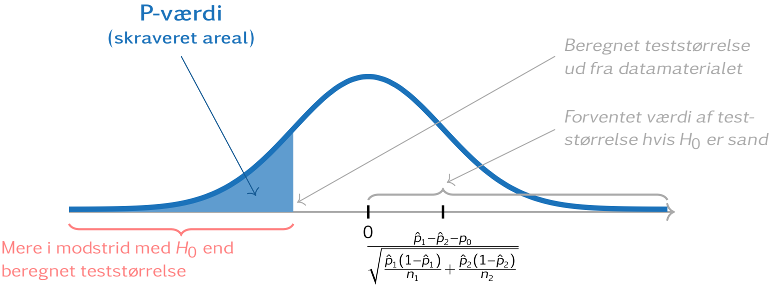
JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Proportions]

Beregning af P-værdi

Test af $H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0$

HVIS nulhypotesen H_0 er sand...

- vil vi regne med, at vores estimat $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ er større end talværdien p_0, og at teststørrelsen $Z = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0) \Big/ \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}$ derfor er større end 0
- vil store negative værdier af teststørrelsen Z være i modstrid med nulhypotesen H_0
- beregner vi P-værdien som sandsynligheden for, at teststørrelsen Z ligger længere væk fra 0 (i negativ retning) end værdien beregnet ud fra datamaterialet



Beregning af P-værdi

Eksempel: Skat

Vi ser fortsat på de $n = 975$ indkomne svar på spørgsmålet *"Er topskatten for høj?"* opdelt på henholdsvis mænd ("gruppe 1") og kvinder ("gruppe 2").

Hvis vi betragter hypoteserne

$$H_0 : p_1 - p_2 \geq 0{,}02 \qquad H_a : p_1 - p_2 < 0{,}02$$

(dvs. $p_0 = 0{,}02$) så svarer det til at undersøge om forskellen i andelen af mænd og andelen af kvinder, der mener topskatten er for høj, kan antages at være større end 2% eller om den ikke kan.

Under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand kan teststørrelsen beregnes til

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{0,398 - 0,299 - 0,02}{0,0305} = 2{,}60$$

Test Inputs

Hypothesized Difference (p2-p1)	0.02	p_0
Sample 1 Count (x1)	126	
Sample 1 Size (n1)	422	n_2
Sample 2 Count (x2)	220	
Sample 2 Size (n2)	553	n_1
Significance Level (alpha)	0.05	

Test Results

Result	Value	
Sample 1 Proportion	0,2986	$\hat{p}_2$
Sample 2 Proportion	0,3978	$\hat{p}_1$
Difference in Proportions (p2-p1)	0,0993	
Standard Error of the Difference (p2-p1)	0,0305	
z-score	2,5995	z
z Critical Value(s)	-1,6449	
Observed Significance (p-value)	0,9953	P-værdi

Fail to Reject Null Hypothesis

Herefter kan P-værdien beregnes som sandsynligheden for at observere noget, der er i dårligere overensstemmelse med H_0 end værdien 2,60, dvs. som

$$P(Z < 2{,}60) = 99{,}53\%$$

Ved et signifikansniveau på $\alpha = 5\%$ ***forkaster*** vi således ***ikke*** nulhypotesen H_0 (fordi P-værdi $= 99{,}53\% > 5\% = \alpha$). Der er således ***ikke*** på baggrund af datamaterialet belæg for at ***afvise***, at forskellen på andelen af mænd og kvinder, der mener at topskatten er for høj, er større end 2%. Med andre ord, vi kan ikke afvise at forskellen er større end 2%.

JMP-video [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Proportions]

Opsummering

Beregningen af P-værdi ved hypotesetest om $p_1 - p_2$ kan vi opsummere i nedenstående oversigt.

Resultat [Hypotesetest om $p_1 - p_2$: Trin 4]

Når vi laver hypotesetest om $p_1 - p_2$, er teststørrelsen

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

approksimativt beskrevet ved en standardnormalfordeling $N(0,1)$ under forudsætning af, at nulhypotesen H_0 er sand.

Ved analyse af...

- $H_0: p_1 - p_2 = p_0$ *og* $H_a: p_1 - p_2 \neq p_0$ *beregnes P-værdien som* $P(|Z| > |z|)$
- $H_0: p_1 - p_2 \leq p_0$ *og* $H_a: p_1 - p_2 > p_0$ *beregnes P-værdien som* $P(Z > z)$
- $H_0: p_1 - p_2 \geq p_0$ *og* $H_a: p_1 - p_2 < p_0$ *beregnes P-værdien som* $P(Z < z)$

hvor z er værdien af teststørrelsen beregnet på baggrund af datamaterialet.

OPSUMMERING

BEMÆRK:

- Værdien af teststørrelsen z beregnet på baggrund af datamaterialet er ***den samme*** uanset hvilken nulhypotese, der analyseres
- Fordelingen af teststørrelsen Z er den samme uanset hvilken nulhypotese, der analyseres
- Beregningen af P-værdien hørende til nulhypotesen $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$ skrives på lidt forskellige måder (der alle er identiske):

$$P(Z < |z|) + P(Z < -|z|) = P(|Z| > |z|) = 2 \cdot P(Z > |z|)$$

hvor $|z|$ betegner den absolutte værdi af talværdien z

1. Hypotesetest om $\mu_1 - \mu_2$ (praktisk anvendelse)
2. Hypotesetest om $p_1 - p_2$ (praktisk anvendelse)
3. OPSUMMERING

OPSUMMERING

Kort opsummering af dette notesæt:

Hypotesetest om forskel i middelværdier $\mu_1 - \mu_2$

TRIN 1: *Antagelser*

- $X_1, \ldots, X_{n_1}$ er indbyrdes uafhængige observationer, der er approksimativt normalfordelt $N(\mu_1, \sigma_1)$
- $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ er indbyrdes uafhængige observationer, der er approksimativt normalfordelt $N(\mu_2, \sigma_2)$
- observationerne $X_1, \ldots, X_{n_1}$ og $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ er indbyrdes uafhængige

TRIN 2: *Hypoteser*

Der findes tre mulige valg af nul- og alternativhypotese:

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ og $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$

TRIN 3: *Teststørrelse*

Teststørrelsen $Z = (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \mu_0)/\sqrt{\hat{\sigma}_1^2/n_1 + \hat{\sigma}_2^2/n_2}$ er approksimativt beskrevet ved en t-fordeling med f frihedsgrader, under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand, og hvor

$$f = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}$$

OPSUMMERING

Hypotesetest om forskel i middelværdier $\mu_1 - \mu_2$ [fortsat]

TRIN 4: *P-værdi*
Ved analyse af...

- $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ og $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ beregnes P-værdien som $P(|Z| > |z|)$
- $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ og $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ beregnes P-værdien som $P(Z > z)$
- $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ og $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ beregnes P-værdien som $P(Z < z)$

hvor z er værdien af teststørrelsen beregnet på baggrund af datamaterialet.

TRIN 5: *Konklusion*
Hvis P-værdien er mindre (større) end signifikansniveauet α forkaster vi (forkaster vi ikke) nulhypotesen H_0.

OPSUMMERING

Hypotesetest om forskel i andele/sandsynligheder $p_1 - p_2$

Trin 1: *Antagelser*

- $X_1, \ldots, X_{n_1}$ er indbyrdes uafhængige observationer med to mulige udfald: 1 og 0
- $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ er indbyrdes uafhængige observationer med to mulige udfald: 1 og 0
- observationerne $X_1, \ldots, X_{n_1}$ og $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ er indbyrdes uafhængige
- $n_1 \hat{p}_1 > 5$ og $n_1(1 - \hat{p}_1) > 5$ og $n_2 \hat{p}_2 > 5$ og $n_2(1 - \hat{p}_2) > 5$

Trin 2: *Hypoteser*

Der findes tre mulige valg af nul- og alternativhypotese:

- $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 \neq p_0$
- $H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 > p_0$
- $H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0$ og $H_a : p_1 - p_2 < p_0$

Trin 3: *Teststørrelse*

Teststørrelsen $Z = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0)/\sqrt{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)/n_2}$ er approksimativt beskrevet ved en standardnormalfordeling $N(0, 1)$, under forudsætning af at nulhypotesen H_0 er sand.

Hypotesetest om forskel i andele/sandsynligheder $p_1 - p_2$ [fortsat]

TRIN 4: *P-værdi*
Ved analyse af...

- $H_0: p_1 - p_2 = p_0$ og $H_a: p_1 - p_2 \neq p_0$ beregnes P-værdien som $P(|Z| > |z|)$
- $H_0: p_1 - p_2 \leq p_0$ og $H_a: p_1 - p_2 > p_0$ beregnes P-værdien som $P(Z > z)$
- $H_0: p_1 - p_2 \geq p_0$ og $H_a: p_1 - p_2 < p_0$ beregnes P-værdien som $P(Z < z)$

hvor z er værdien af teststørrelsen beregnet på baggrund af datamaterialet.

TRIN 5: *Konklusion*
Hvis P-værdien er mindre (større) end signifikansniveauet α forkaster vi (forkaster vi ikke) nulhypotesen H_0.

INDEKS

Nye funktionaliteter i dette notesæt:

- *Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Means:*
  - Test af hypotese om $\mu_1 - \mu_2$ (baseret på data)
  - Test af hypotese om $\mu_1 - \mu_2$ (baseret på input $\mu_0, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, n_1, n_2, \alpha$)
- *Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Proportions:*
  - Test af hypotese om $p_1 - p_2$ (baseret på data)
  - Test af hypotese om $p_1 - p_2$ (baseret på input $p_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, n_1, n_2, \alpha$)

JMP-videoer:

s. 9: ▶ [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Means] (test af H_0 om $\mu_1 - \mu_2$)

s. 23: ▶ [Help -> Sample Data -> Calculators -> Hypothesis Test for Two Proportions] (test af H_0 om $p_1 - p_2$)