L'allée de Von Karmann pour un obstacle oscillant
Cours de physique numérique

Corentin Cadiou Antoine Petit

Table des matières

1 L'allée de Von Karman

Le régime de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle diffère en fonction du nombre de Reynolds associé au fluide et à l'obstacle : à faible Reynolds, l'écoulement est laminaire, à fort nombre de Reynolds l'écoulement est turbulent. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à un régime intermédiaire, celui de l'allée Von Karman. Dans ce régime, deux tourbillons se forment derr !ère l'obstacle, une perturbation détache l'un des deux, ce qui crée une dépression derrière l'obstacle donnant une vitesse vetricale au second. Le secon tourbillon est à son tour entrainé par le fluide par advection et ainsi de suite.

Le phénomène est périodique et on peut montrer par analyse dimensionnelle que la fréquence d'émission des tourbillons est fonction du nombre de Reynolds : $f = \frac{U_0}{D} g(Re)$. Dans le cadre d'un cylindre $\frac{fD}{U_0} = 0,198\left(1 - \frac{19{,}7}{Re}\right)$ [3]

2 Le schéma

2.1 Le calcul des champs de vitesses

Le champ de vitesse est calculé en plusieurs étapes. Tout d'abord on effectue une advection pure au moyen du schéma (1) d'ordre 2 en espace. On note (u, v) le champ de vitesse

$$u_{i\ j}^{n+1} = u_{i\ j}^n - \frac{\mathrm{d}t}{2\mathrm{d}x}(u_{ij}^n(u_{i+1\ j}^n - u_{i-1\ j}^n) + v_{i\ j}^n(u_{i\ j+1}^n - u_{i\ j-1}^n)) \tag{1}$$
$$v_{i\ j}^{n+1} = v_{i\ j}^n - \frac{\mathrm{d}t}{2\mathrm{d}x}(u_{ij}^n(v_{i+1\ j}^n - v_{i-1\ j}^n) + v_{i\ j}^n(v_{i\ j+1}^n - v_{i\ j-1}^n))$$

2.2 Les conditions aux limites

2.2.1 Au bord

2.2.2 Sur l'obstacle

2.3 À propos des dimensions du schéma étudié

Notre schéma numérique représente l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{\nabla}(\phi) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} \tag{2}$$

Où $\overrightarrow{u}$ est la vitesse renormalisée par U_0 la vitesse du fluide à l'infini, les longueurs sont adimensionnées par L la largeur de l'obstacle, t est renormalisé par $T_0 = \frac{L}{U_0}$, ϕ est la pression divisée par $\rho {U_0}^2$ (ρ est la masse volumique du fluide) et Re est le nombre de Reynolds : Re $= \frac{\rho L U_0}{\eta}$ (η est la viscosité cinématique).

Les distances et le temps sont bien renormalisés par la donnée de la taille de la grille pour les distances et la condition CFL pour le temps.

Cependant quelques problèmes demeurent :
- u et v pas vraiment admiensionnés par U_0
- À aucun moment on ne tient compte de la pression réelle ou de la masse volumique

La force de traînée On calcule la force de traînée par intégration du tenseur des contraintes sur un contour carré autour de l'obstacle (soulignons que la force est ici linéique dû au caractère bidimensionnel du modèle) :

$$\overrightarrow{F_t} = \int_{\mathcal{C}} [\sigma] \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \text{ où } \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

Si on adimensionne (3) comme l'équation de Navier-Stokes (2) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \rho U_0^2\left(-\phi\delta_{ij} + \frac{\eta}{LU_0}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i}\right)\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour la force de trainée :

$$\overrightarrow{F_t} = F_0 \int_{\mathcal{C}} \left[-\phi\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i}\right)\right] \cdot \mathrm{d}\hat{l_j} \text{ où } F_0 = \rho U_0^2 L \tag{4}$$

[2] [1]

3 Anlyse des résultats

Références

[1] Todd F. Dupont and Yingjie Liu. Back and forth error compensation and correction methods for removing errors induced by uneven gradients of the level set function. *J. Comput. Phys.*, 190(1) :311–324, September 2003.

[2] ByungMoon Kim, Yingjie Liu, Ignacio Llamas, and Jarek Rossignac. Advections with significantly reduced dissipation and diffusion. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(1) :135–144, January 2007.

[3] Wikipedia. Kármán vortex street. `http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street`, December 2013.