

L'allée de Von Karman pour un obstacle oscillant

Cours de physique numérique

Corentin Cadiou

Antoine Petit

Table des matières

1	L'allée de Von Karman	1
2	Le schéma	1
2.1	Le calcul des champs de vitesses	1
2.2	Les conditions aux limites	3
2.2.1	Au bord	3
2.2.2	Sur l'obstacle	3
2.3	La visualisation des tourbillons	3
2.4	<i>Back and forth error compensation and correction methods (BFEC)</i>	3
2.5	À propos des dimensions du schéma étudié	4
3	Analyse des résultats	4

1 L'allée de Von Karman

Le régime de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle diffère en fonction du nombre de Reynolds associé au fluide et à l'obstacle : à faible Reynolds, l'écoulement est laminaire, à fort nombre de Reynolds l'écoulement est turbulent. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à un régime intermédiaire, celui de l'allée Von Karman. Dans ce régime, deux tourbillons se forment derrière l'obstacle, une perturbation détache l'un des deux, ce qui crée une dépression derrière l'obstacle donnant une vitesse verticale au second. Le second tourbillon est à son tour entraîné par le fluide par advection et ainsi de suite.

Le phénomène est périodique et on peut montrer par analyse dimensionnelle que la fréquence d'émission des tourbillons est fonction du nombre de Reynolds : $f = \frac{U_0}{D} g(Re)$. Dans le cadre d'un cylindre $\frac{fD}{U_0} = 0,198 \left(1 - \frac{19,7}{Re}\right)$ [3]

2 Le schéma

2.1 Le calcul des champs de vitesses

Le champ de vitesse est calculé en plusieurs étapes. Tout d'abord on effectue une advection pure au moyen du schéma (1) d'ordre 2 en espace. On note (u, v) le champ de vitesse et (u^*, v^*)

le champ résultant de la première étape.

$$u_{i,j}^{*n} = u_{i,j}^n - \frac{dt}{2dx} (u_{ij}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) + v_{i,j}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)) \quad (1)$$

On tient ensuite compte de l'obstacle, pour cela, on impose la nullité de la vitesse à l'intérieur de l'obstacle à la fin de l'advection.

Cependant nous n'avons pas tenu compte ici du champ de pression et de la diffusion. On ajoute donc ensuite la contribution de la diffusion à la vitesse au moyen du schéma (2) et on note (u^{**}, v^{**}) le champ résultant de l'étape de diffusion.

$$u_{ij}^{**n} = u_{ij}^{*n} + \frac{dt}{Re} \left(\frac{u_{i+1,j}^{*n} + u_{i-1,j}^{*n}}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^{*n} + u_{i,j-1}^{*n}}{dy^2} - \frac{u_{i,j}^{*n}}{2(dx^2 + dy^2)} \right) \quad (2)$$

On annule comme précédemment la vitesse dans l'obstacle.

Cependant, lors de ces calculs, on a perdu l'incompressibilité du fluide, afin de garantir l'incompressibilité du fluide, on a recours à une projection de la vitesse. En effet à cette étape, \vec{u}^{**} vérifie seulement l'équation partielle

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{Re} \vec{\Delta} \vec{u}$$

, c'est-à-dire sans le gradient de la pression, en conséquence, \vec{u} n'est pas de divergence nulle :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{**} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot ([\text{Schéma d'advection}] + [\text{Schéma de diffusion}]) \\ &= 0 + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \phi \\ &= \Delta \phi \end{aligned}$$

L'idée est donc de calculer la pression via l'inversion de ce laplacien, puis de retrancher le gradient de la pression à u^{**n} pour obtenir u^{n+1} . On commence donc par calculer la pression via l'inversion du système linéaire induit par le schéma choisi pour le laplacien :

$$\phi = L^{-1}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{**})$$

Où L est la matrice du schéma du laplacien.

Ensuite on calcule (u^{n+1}, v^{n+1}) par projection (3).

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^{**n+1} - \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2dx} \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^{**n+1} - \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2dy} \end{aligned} \quad (3)$$

La vitesse dans l'obstacle n'est pas parfaitement nulle, mais ceci est nécessaire car si l'on faisait comme précédemment, on perdrait l'incompressibilité du fluide. Il y a donc une vitesse résiduelle sur le bord de l'obstacle, en conséquence le schéma est d'ordre 1 en espace et en temps.

Nous reviendrons plus tard sur les améliorations et les modifications que nous avons apporté à ce schéma initial.

2.2 Les conditions aux limites

2.2.1 Au bord

Afin de pouvoir calculer les dérivées sur toute la zone de simulation, on rajoute autour de la zone "physique" un contour de points dits fantômes, on fixe en ces points la valeur afin de garantir des conditions aux limites :

- À gauche : $(u, v) = (U_0, 0)$ afin de simuler l'écoulement.
- Sur En haut et en bas et à droite, on recopie les valeurs, ce n'est pas très gênant car les points sont très vite advectés en dehors de la simulation

2.2.2 Sur l'obstacle

Comme vu précédemment, l'obstacle est modélisé par une zone de vitesse nulle, c'est pour cela qu'à chaque calcul de la vitesse, on annule la vitesse dans l'obstacle afin de maintenir la condition. Nous avons modifié cette condition dans la suite pour permettre à l'obstacle de bouger.

2.3 La visualisation des tourbillons

La technique choisie pour observer les vortex est celle de l'advection par le champ de vitesse d'un traceur : Pour cela nous avons essayé deux solutions différentes : une première consistait à insérer un colorant à une concentration 1 en divers points à la gauche de l'obstacle, puis à le laisser transporter par le champ de vitesse. La seconde consistait à colorer l'ensemble de la simulation à part l'obstacle qui absorbait le colorant (on annule la valeur de la concentration de colorant sur l'obstacle), dans ce cas-ci les tourbillons sont visualisés par le déficit local de colorant.

Cependant ces technique manquait de précision du fait de la diffusion numérique due au schéma d'advection, rapidement on ne distinguait plus les zones très colorées, c'est pourquoi nous avons utilisé un autre schéma pour l'advection du colorant basé sur la méthode dite *BFECC*.

2.4 *Back and forth error compensation and correction methods (BFECC)*

Cette méthode décrite par Kim [2] et Dupont [1] consiste à appliquer successivement trois fois le schéma d'advection en aller retour pour compenser le terme linéaire de dispersion numérique.

Si on nomme $A(\vec{v}, X)$ l'opérateur d'advection par \vec{v} du champ X , le schéma de la *BFECC* est le suivant :

$$\begin{aligned}X_1 &= A(\vec{v}, X^n) \\X_2 &= A(-\vec{v}, X_1) \\X^{n+1} &= A(\vec{v}, X^n - \frac{1}{2}(X^n - X_2))\end{aligned}$$

2.5 À propos des dimensions du schéma étudié

Notre schéma numérique représente l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}(\phi) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u} \quad (4)$$

Où \vec{u} est la vitesse renormalisée par U_0 la vitesse du fluide à l'infini, les longueurs sont adimensionnées par L la largeur de l'obstacle, t est renormalisé par $T_0 = \frac{L}{U_0}$, ϕ est la pression divisée par ρU_0^2 (ρ est la masse volumique du fluide) et Re est le nombre de Reynolds : $\text{Re} = \frac{\rho L U_0}{\eta}$ (η est la viscosité cinématique).

Les distances et le temps sont bien renormalisés par la donnée de la taille de la grille pour les distances et la condition CFL pour le temps.

La force de traînée On calcule la force de traînée par intégration du tenseur des contraintes sur un contour carré autour de l'obstacle (soulignons que la force est ici linéique dû au caractère bidimensionnel du modèle) :

$$\vec{F}_t = \int_C [\sigma] \cdot \vec{dl} \text{ où } \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

Si on adimensionne (5) comme l'équation de Navier-Stokes (4) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \rho U_0^2 \left(-\phi\delta_{ij} + \frac{\eta}{LU_0} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour la force de traînée :

$$\vec{F}_t = F_0 \int_C \left[-\phi\delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right] \cdot d\hat{l}_j \text{ où } F_0 = \rho U_0^2 L \quad (6)$$

3 Analyse des résultats

Références

- [1] Todd F. Dupont and Yingjie Liu. Back and forth error compensation and correction methods for removing errors induced by uneven gradients of the level set function. *J. Comput. Phys.*, 190(1) :311–324, September 2003.
- [2] ByungMoon Kim, Yingjie Liu, Ignacio Llamas, and Jarek Rossignac. Advections with significantly reduced dissipation and diffusion. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(1) :135–144, January 2007.
- [3] Wikipedia. Kármán vortex street. http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street, December 2013.