

# L'allée de Von Karman pour un obstacle oscillant

## Cours de physique numérique

Corentin Cadiou

Antoine Petit

### Table des matières

<b>1</b>	<b>L'allée de Von Karman</b>	<b>1</b>
1.1	À propos des dimensions du problème . . . . .	2
1.2	La force de traînée . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Le schéma</b>	<b>2</b>
2.1	Le calcul des champs de vitesses . . . . .	2
2.2	Les conditions aux limites . . . . .	4
2.2.1	Au bord . . . . .	4
2.2.2	Sur l'obstacle . . . . .	4
2.3	La visualisation des tourbillons . . . . .	4
2.4	<i>Back and forth error compensation and correction methods (BFEC)</i> . . . .	4
2.5	La pénalisation . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Le code</b>	<b>6</b>
3.1	La condition CFL . . . . .	6
3.2	Le calcul du Drag . . . . .	6
3.3	L'obstacle oscillant . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>6</b>
4.1	L'allée de Von Karman . . . . .	6
4.2	La force de traînée . . . . .	6
4.3	La nage du têtard . . . . .	6

## 1 L'allée de Von Karman

Le régime de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle diffère en fonction du nombre de Reynolds associé au fluide et à l'obstacle : à faible Reynolds, l'écoulement est laminaire, à fort nombre de Reynolds l'écoulement est turbulent. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à un régime intermédiaire, celui de l'allée Von Karman. Dans ce régime, deux tourbillons se forment derrière l'obstacle, une perturbation détache l'un des deux, ce qui crée une dépression derrière l'obstacle donnant une vitesse verticale au second. Le second tourbillon est à son tour entraîné par le fluide par advection et ainsi de suite.

Le phénomène est périodique et on peut montrer par analyse dimensionnelle que la fréquence d'émission des tourbillons est fonction du nombre de Reynolds :  $f = \frac{U_0}{D} g(Re)$ . Dans le cadre d'un cylindre  $\frac{fD}{U_0} = 0,198 \left(1 - \frac{19,7}{Re}\right)$  [3]

## 1.1 À propos des dimensions du problème

Notre schéma numérique représente l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla}(\phi) + \frac{1}{Re} \vec{\Delta} \vec{u} \quad (1)$$

Où  $\vec{u}$  est la vitesse renormalisée par  $U_0$  la vitesse du fluide à l'infini, les longueurs sont adimensionnées par  $L$  la largeur de l'obstacle,  $t$  est renormalisé par  $T_0 = \frac{L}{U_0}$ ,  $\phi$  est la pression divisée par  $\rho U_0^2$  ( $\rho$  est la masse volumique du fluide) et  $Re$  est le nombre de Reynolds :  $Re = \frac{\rho L U_0}{\eta}$  ( $\eta$  est la viscosité cinématique).

Les distances et le temps sont bien renormalisés par la donnée de la taille de la grille pour les distances et la condition CFL pour le temps.

## 1.2 La force de traînée

Des études sur le déplacement des insectes ont montré que si l'obstacle oscille, la force de traînée peut s'inverser et pousser l'objet, nous avons calculer la force de trainée.

On calcule la force de traînée par intégration du tenseur des contraintes sur un contour carré autour de l'obstacle (soulignons que la force est ici linéique dû au caractère bidimensionnel du modèle) :

$$\vec{F}_t = \int_{\mathcal{C}} [\sigma] \cdot \vec{dl} \text{ où } \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

Si on adimensionne (2) comme l'équation de Navier-Stokes (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \rho U_0^2 \left( -\phi\delta_{ij} + \frac{\eta}{LU_0} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour la force de traînée :

$$\vec{F}_t = F_0 \int_{\mathcal{C}} \left[ -\phi\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right] \cdot \vec{dl}_j \text{ où } F_0 = \rho U_0^2 L \quad (3)$$

## 2 Le schéma

### 2.1 Le calcul des champs de vitesses

Le champ de vitesse est calculé en plusieurs étapes. Tout d'abord on effectue une advection pure au moyen du schéma (4) d'ordre 2 en espace. On note  $(u, v)$  le champ de vitesse et  $(u^*, v^*)$  le champ résultant de la première étape.

$$u_{i,j}^{*n} = u_{i,j}^n - dt(u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy}) \quad (4)$$

On tient ensuite compte de l'obstacle, pour cela, on impose la nullité de la vitesse à l'intérieur de l'obstacle à la fin de l'advection.

Cependant nous n'avons pas tenu compte ici du champ de pression et de la diffusion. On ajoute donc ensuite la contribution de la diffusion à la vitesse au moyen du schéma (5) et on note  $(u^{**}, v^{**})$  le champ résultant de l'étape de diffusion.

$$u_{ij}^{**n} = u_{ij}^{*n} + \frac{dt}{Re} \left( \frac{u_{i+1,j}^{*n} + u_{i-1,j}^{*n}}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^{*n} + u_{i,j-1}^{*n}}{dy^2} - \frac{u_{i,j}^{*n}}{2(dx^2 + dy^2)} \right) \quad (5)$$

On annule comme précédemment la vitesse dans l'obstacle.

Cependant, lors de ces calculs, on a perdu l'incompressibilité du fluide, afin de garantir l'incompressibilité du fluide, on a recours à une projection de la vitesse. En effet à cette étape,  $\vec{u}^{**}$  vérifie seulement l'équation partielle

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{Re} \vec{\Delta} \vec{u}$$

, c'est-à-dire sans le gradient de la pression, en conséquence,  $\vec{u}$  n'est pas de divergence nulle :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{**} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} & + \vec{\nabla} \cdot ([\text{Schéma d'advection}] + [\text{Schéma de diffusion}]) \\ &= 0 & + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \phi \\ &= \Delta \phi \end{aligned}$$

L'idée est donc de calculer la pression via l'inversion de ce laplacien, puis de retrancher le gradient de la pression à  $u^{**n}$  pour obtenir  $u^{n+1}$ . On commence donc par calculer la pression via l'inversion du système linéaire induit par le schéma choisi pour le laplacien :

$$\phi = L^{-1}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{**})$$

Où  $L$  est la matrice du schéma du laplacien.

Ensuite on calcule  $(u^{n+1}, v^{n+1})$  par projection (6).

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^{**n+1} - \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2dx} \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^{**n+1} - \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2dy} \end{aligned} \quad (6)$$

La vitesse dans l'obstacle n'est pas parfaitement nulle, mais ceci est nécessaire car si l'on faisait comme précédemment, on perdrait l'incompressibilité du fluide. Il y a donc une vitesse résiduelle sur le bord de l'obstacle, en conséquence le schéma est d'ordre 1 en espace et en temps.

Nous reviendrons plus tard sur les améliorations et les modifications que nous avons apporté à ce schéma initial.

### 2.1.1 La condition CFL

Afin que  $u_m \Delta x \Delta t < \max(\Delta x, \Delta y)$ , on contrôle le pas de temps avec cette condition afin de ne pas perdre en précision lors des itérations.

## 2.2 Les conditions aux limites

### 2.2.1 Au bord

Afin de pouvoir calculer les dérivées sur toute la zone de simulation, on rajoute autour de la zone "physique" un contour de points dits fantômes, on fixe en ces points la valeur afin de garantir des conditions aux limites :

- À gauche :  $(u, v) = (U_0, 0)$  afin de simuler l'écoulement.
- Sur En haut et en bas et à droite, on recopie les valeurs, ce n'est pas très gênant car les points sont très vite advectés en dehors de la simulation

### 2.2.2 Sur l'obstacle

Comme vu précédemment, l'obstacle est modélisé par une zone de vitesse nulle, c'est pour cela qu'à chaque calcul de la vitesse, on annule la vitesse dans l'obstacle afin de maintenir la condition. Nous avons modifié cette condition dans la suite pour permettre à l'obstacle de bouger.

## 2.3 La visualisation des tourbillons

La technique choisie pour observer les vortex est celle de l'advection par le champ de vitesse d'un traceur : Pour cela nous avons essayé deux solutions différentes : une première consistait à insérer un colorant à une concentration 1 en divers points à la gauche de l'obstacle, puis à le laisser transporter par le champ de vitesse. La seconde consistait à colorer l'ensemble de la simulation à part l'obstacle qui absorbait le colorant (on annule la valeur de la concentration de colorant sur l'obstacle), dans ce cas-ci les tourbillons sont visualisés par le déficit local de colorant.

Cependant ces techniques manquaient de précision du fait de la diffusion numérique due au schéma d'advection, rapidement on ne distinguait plus les zones très colorées, c'est pourquoi nous avons utilisé un autre schéma pour l'advection du colorant basé sur la méthode dite *BFECC*.

## 2.4 *Back and forth error compensation and correction methods (BFECC)*

Cette méthode décrite par Kim [2] et Dupont [1] consiste à appliquer successivement trois fois le schéma d'advection en aller retour pour compenser le terme linéaire de dispersion numérique.

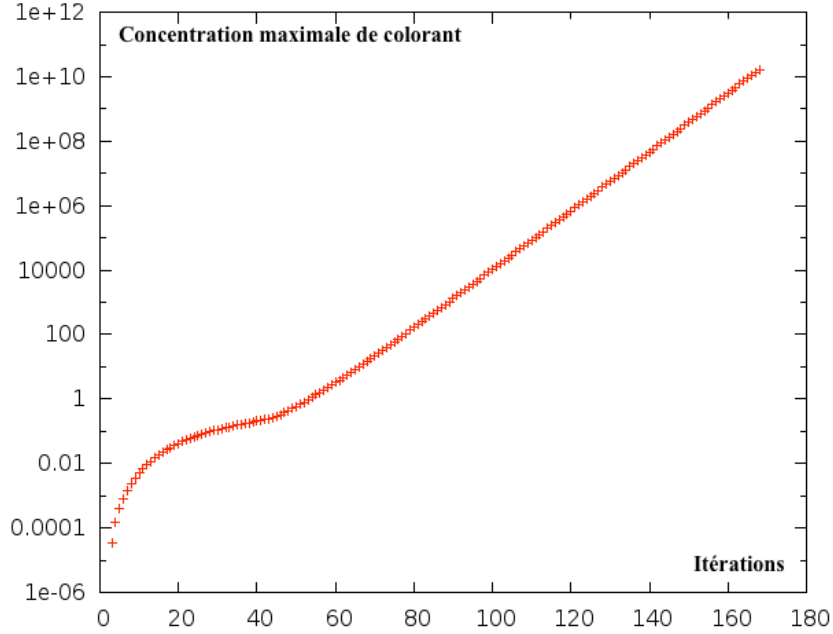


FIGURE 1 – Maximum de la concentration du colorant en fonction du nombre d'itérations

Si on nomme  $A(\vec{v}, X)$  l'opérateur d'advection par  $\vec{v}$  du champ  $X$ , le schéma de la *BFEC* est le suivant :

$$\begin{aligned} X_1 &= A(\vec{v}, X^n) \\ X_2 &= A(-\vec{v}, X_1) \\ X^{n+1} &= A(\vec{v}, X^n - \alpha(X^n - X_2)) \end{aligned}$$

La méthode est du deuxième ordre si  $\alpha = \frac{1}{2}$  car l'erreur induite par l'advection d'ordre 1 est compensée par le terme ajouté dans la troisième advection.

Cette méthode est très efficace comme on peut le constater sur les figures ??, on remarque que l'on gagne en précision sur la définition des tourbillons, cependant cette méthode a plusieurs défauts. Pour commencer nous avons eu des problèmes d'instabilité lors de sa mise en place car les conditions aux limites du colorant entraînait une croissance exponentielle de la concentration à la frontière du domaine 1.

Un autre désavantage de la *BFEC* dans sa version d'ordre 2 est l'apparition d'un comportement dispersif. Le schéma présente alors plus d'inconvénients que d'avantages : en effet les tourbillons se désagrègent plutôt que d'être advectés. La solution que nous avons choisie est d'utiliser  $\alpha < 0,5$ , par exemple  $\alpha = 0,25$ . En effet avec un coefficient plus faible on réduit l'erreur tout en maintenant un schéma diffusif qui évite la dispersion.

## 2.5 La pénalisation

Les mouvements de l'obstacle sont saccadés. En effet même si le mouvement est sinusoïdal, l'obstacle peut seulement bouger de case en case. Par conséquent on observait sur le tracé de

la traînée des discontinuités au changement de case. Pour éviter ces discontinuités, nous avons appliqué une méthode de pénalisation sur l'obstacle, en effet la discontinuité induite par le mouvement de l'obstacle est celle répercutée par la mise à zéro de la vitesse dans l'obstacle. L'idée est de rendre "perméable" la frontière de l'obstacle en atténuant progressivement la vitesse dans celui-ci. Le schéma utilisé est comparable à une forme d'effet de peau (7).

$$\forall x \in \mathcal{Obs}, \quad u^{n+1}(x) = u_{obs}^n(x) + (u^n(x) - u_{obs}^n(x))e^{-\alpha dt} \quad (7)$$

La vitesse décroît donc exponentiellement dans l'obstacle avec une constante de temps  $\tau = \alpha^{-1}$ . Le cas  $u(x \in \mathcal{Obs}) = u_{obs}$  correspond au cas limite  $\alpha = +\infty$ .

## 3 Le code

### 3.1 Les options

Elles permettent de donner les caractéristiques de la simulation que l'on souhaite effectuer :

Nom	Description
-hash	Utilise une table de hashage

-hash, -H Experimental : use a hash method for speed improvements (default : false) – hash-size [MAX\_HASH\_SIZE] Control the size of the stack for the hash (default : 30) – -BFEC, -bU set the B false) – -tracer TRACERS, -t TRACERS Use TRACER tracers (default : 10) – -Re RE Reynold's number 1e4) – -nx NX Grid size in the x direction (default : 150) – -ny NY Grid size in the y direction (default : 80) – -ox OX Obstacle left test position in the x direction – -behind Tracers behind the obstacle (default : false) – -parallel Use parallel processing for plotting (default : false) – -max\_parallel Use parallel processing false) – -nprocess N PROCESS Number of coprocessors to use (default : 4) – -out OUT Name of the file of the -tracer -size COLWIDTH Size of the tracers (default : 1) – -assymetry ASSYM, -a ASSYM Assymetry None) – -speed SPEED, -s SPEED Speed at the left (default : 1) – -sinus FA, -S FA Use as sinus at frequency F = 5, A = 10) – -rect WIDTH HEIGHT The obstacle is a rectangle of size WIDTH \* HEIGHT (default : 40\*40). – -circle [RADIUS] The obstacle is a circle of radius RADIUS (default : 40) (overrides -rect option) – -refresh REFRESH, -r REFRESH Refresh rate (default : 50) – -verbose, -v Enable verb false) – -movie, -m The output is now a sequence of pictures – -alpha ALPHA Absorption coefficient in the -niter NITER Number of iterations (def : 10.000) MacBook – de – Antoine – Petit – 2 : VonKarman antoine

### 3.2 Le calcul du Drag

Comme expliqué dans la section précédente, on calcule la traînée en intégrant le tenseur des contraintes sur un contour autour de l'objet, pour cela on calcule la Jacobienne aux points du contour choisi, puis on calcule  $\sigma$  et on somme l'intégrale numériquement. On trace ensuite cette valeur en fonction du temps

### 3.3 L'obstacle oscillant

Afin d'inverser la traînée, nous avons dû calculer une fonction permettant de déplacer l'obstacle. Une première permettait de faire bouger l'obstacle verticalement, de manière si-

nusoïdale. Il suffisait de varier la position  $oy$  du rectangle. Nous avons ensuite créé une fonction permettant de le faire tourner autour d'un pivot.

## 3.4 Optimisations du code

### 3.4.1 Le calcul parallèle

### 3.4.2 L'interface graphique

## 4 Analyse des résultats

### 4.1 L'allée de Von Karman

On observe bien l'instabilité, tant pour un obstacle rectangulaire que pour un obstacle circulaire. Bien que l'apparition de l'allée soit plus longue dans le cas circulaire car l'obstacle est mieux profilé. Il faut prendre garde à prendre un espace d'étude suffisamment grand pour éviter que l'allée ne sorte par un des côtés car ensuite elle y reste bloquée.

### 4.2 La force de trainée

Grâce à la méthode de pénalisation, on obtient une courbe régulière pour la traînée. Dans le cas d'un obstacle

### 4.3 La nage du têtard

## Références

- [1] Todd F. Dupont and Yingjie Liu. Back and forth error compensation and correction methods for removing errors induced by uneven gradients of the level set function. *J. Comput. Phys.*, 190(1) :311–324, September 2003.
- [2] ByungMoon Kim, Yingjie Liu, Ignacio Llamas, and Jarek Rossignac. Advections with significantly reduced dissipation and diffusion. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(1) :135–144, January 2007.
- [3] Wikipedia. Kármán vortex street. [http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n\\_vortex\\_street](http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street), December 2013.