MP* - Théorème de Baire

Le théorème de Baire est un résultat central en mathématiques. Plusieurs résultats importants en dépendent.
Il a été imaginé par Baire dans son étude des limites simples de fonctions continues, et utilisé pour montrer parmi d'autres résultats la propriété suivante: une limite simple de fonctions continues est continue sur une partie dense.
Le théorème de Baire s'énonce dans le cadre métrique des espaces de Banach, hors-programme.
Nous nous limiterons aux evn de dimension finie, et verrons des exemples d'application simples.
Le cadre non métrique alourdit quelque peu la présentation...
Un complément ultérieur traitera des espaces de Banach, et revisitera tout ceci.

1 Topologie relative: rappels et compléments

Les notions topologiques relatives à une partie X d'un evn E sont les mêmes que les notions générales, en "restreignant l'espace" à X, ou en oubliant $E \backslash X$.

Si X est une partie d'un evn E, notons, si $x \in X$ et $r \geq 0$, $B_X(x,r) = \{y \in X \mid ||x-y|| < r\}$, et $\overline{B_X(x,r)} = \{y \in X \mid ||x-y|| \leq r\}$. (la deuxième n'est pas l'adhérence de la première dans E. Juste une notation)

Définition 1: ouverts et fermés relatifs
Soit X une partie d'un evn E.
Soit P une partie de X.
P est un ouvert de X si et seulement si pour tout $x \in P$, il existe $r > 0$ tel que
$(\underline{y \in X}$ *et* $||x-y|| \leq r) \Longrightarrow y \in P$, soit encore $B_X(x,r) \subset P$.
P est un fermé de X si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in P^{\mathbb{N}}$, si (x_n) converge $\underline{\text{vers } x \in X}$, alors $x \in P$.

Facilement, un ouvert d'ouvert est un ouvert tout court, et un fermé d'un fermé est un fermé tout court.
$B_X(x,r)$ est un ouvert de X, et $\overline{B_X(x,r)}$ un fermé de X.

Propriété 1: complémentaire
Avec les mêmes notations, P est un ouvert de X si et seulement si $X \backslash P$ est un fermé de X.

Rappelons la démonstration:
$\Longrightarrow$: Soit P un ouvert de X.
Soit $(x_n) \in (X \backslash P)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$. Il faut montrer que $x \in X \backslash P$.
Par l'absurde, supposons $x \in P$. Il existe $r > 0$ tel que $(y \in X$ *et* $||x-y|| \leq r) \Longrightarrow y \in P$. Fixons nous un tel r.
Pour n assez grand, $||x_n - x|| \leq r$, et $x_n \in X$, donc $x_n \in P$ ce qui est absurde car $x_n \in X \backslash P$.
$\Leftarrow$: Soit P un fermé de X.
Soit $x \in P \backslash X$. Il faut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $(y \in X$ *et* $||x-y|| \leq r) \Longrightarrow y \in P \backslash X$.
Si un tel r n'existe pas, pour tout n, on se donne $x_n \in P$ tel que $||x_n - x|| \leq 1/(n+1)$. Alors $x_n \to x$, et donc $x \in P$ puisque P est un fermé de X, ce qui est contradictoire.
♣

Rappelons également, sans démonstration:

Propriété 2:

1. Une union d'ouverts de X est un ouvert de X.

2. Une intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X.

3. Une intersections de fermés de X est un fermé de X.

4. Une union finie de fermés de X est un fermé de X.

5. Soient E, F deux evn, $X \subset E$, et $f : X \to F$ continue.
   Alors, si P est un fermé (resp. ouvert) de F, $f^{-1}(P)$ est un fermé (resp. ouvert) de X.

Définition 2: Intérieur et adhérence relatif
Soit X une partie d'un evn E.
Soit P une partie de X.
$\underline{x \in X}$ est dans l'adhérence de P relative à X si et seulement si il existe $(x_n) \in P^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x.
$\underline{x \in X}$ est dans l'intérieur de P relatif à X si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $(\underline{y \in X}\ et\ ||x - y|| < r) \Longrightarrow y \in P$, soit encore $B_X(x, r) \subset P$.

Facilement (laissé au lecteur), P est un ouvert (resp. fermé) de X si et seulement si son intérieur (resp. adhérence) relatif est P.

Propriété 3:
Soit X une partie d'un evn E.
Soit P une partie de X.
Alors P est un ouvert de X si et seulement si il existe un ouvert O (de E) tel que $P = O \cap X$, et P est un fermé de X si et seulement si il existe un fermé F (de E) tel que $P = F \cap X$.

Démonstration
Commençons par les fermés.
$\Longrightarrow$: Soit P un fermé de X. Considérons $F = \overline{P}$, l'adhérence de P dans E. F est fermé.
De plus, $P = X \cap F$: $P \subset X \cap F$ car $P \subset X$ et $P \subset F$.
Réciproquement, soit $x \in X \cap F$. Comme $x \in F$, on peut se donner $(x_n) \in P^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.
$x \in X$, et P est un fermé de X, donc $x \in P$, et on a l'inclusion réciproque.
$\Leftarrow$: Soit F un fermé, et $P = X \cap F$.
Soit $(x_n) \in P^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$. Comme F est fermé, $x \in F$, et donc $x \in X \cap F = P$.
Donc P est un fermé de X.
Pour les ouverts:
$\Longrightarrow$: Soit P un ouvert de X. Par le cas précédent, on se donne F fermé tel que $X \backslash P = X \cap F$.
Soit $O = E \backslash F$. O est ouvert et $P = X \cap O$.
$\Leftarrow$: Soit O un ouvert. Soit $F = E \backslash O$. F est fermé, donc $X \cap F$ est un fermé de X, donc $X \backslash F$ est un ouvert de X, et $X \backslash F = X \cap O$.
♣

2 Théorème de Baire

Donnons des formes équivalentes de la notion de densité:

Propriété 4: Densité
Soit X une partie d'un evn E, et $F \subset X$. Sont équivalentes:

1. Pour tout $x \in X$, il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x.

2. Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, $B_X(x, r) \cap F \neq \emptyset$.

3. $F \backslash X$ est d'intérieur vide dans F.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que F est dense dans X.

Démonstration:
$1 \Longrightarrow 2$: On suppose 1 vrai. Soient $x \in X$ et $r > 0$.
on se donne $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Alors pour n assez grand, $||x - x_n|| < r$, donc $x_n \in B_X(x,r) \cap F$, et donc $B_X(x,r) \cap F \neq \emptyset$.
$2 \Longrightarrow 3$. On suppose 2 vrai.
Soit $x \in X \backslash F$. Pour tout $r > 0$, $B_X(x,r) \not\subset X \backslash F$ puisque $B_X(x,r) \cap F \neq \emptyset$, donc l'intérieur relatif de $X \backslash F$ est vide.
$3 \Longrightarrow 1$. On suppose 3 vrai.
Soit $x \in X \backslash F$. Si $n \in \mathbb{N}$, $B_X(x, 1/(n+1)) \not\subset X \backslash F$, puisque $X \backslash F$ est d'intérieur vide dans X, donc on peut se donner $x_n \in B_X(x, 1/(n+1)) \cap F$, et alors $x_n \to x$.
Si $x \in F$, une suite constante convient.
♣

Propriété 5: Fermés emboîtés en dimension finie
Soit (F_n) une suite de fermés non vides d'un evn E de dimension finie, décroissante. $(F_{n+1} \subset F_n)$ telle que F_0 soit borné.
Alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration:
Étant en dimension finie, F_0, fermé borné non vide est compact.
Pour tout n, on se donne $x_n \in F_n$. Étant dans F_0 compact, on peut extraire $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $x \in E$.
Pour tout N, $\forall n \geq N$, $\phi(n) \geq N$, donc $x_{\phi(n)} \in F_N$, et donc $x \in F_N$ car F_N est fermé.
Ainsi $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
♣.

Propriété 6: Théorème de Baire
Soit E un evn de dimension finie. Soit F un fermé de E (on peut avoir $F = E$).

1. Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de F telle que pour tout n, O_n est dense dans F. Alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans F.

2. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermés de F telle que pour tout n, F_n est d'intérieur vide dans F. Alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans F.

Remarque: une intersection de denses n'est pas dense en général.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Démonstration
Pour comprendre, il est conseillé de faire des dessins avec des boules dans le plan.

1. Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de F telle que pour tout n, O_n est dense dans F.
   Soit $O = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$.
   Soient $x \in F$ et $r > 0$. Il s'agit de montrer que $O \cap B_F(x,r) \neq \emptyset$.
   Comme O_0 est dense dans F, on se donne $x_0 \in B_F(x,r) \cap O_0$.
   O_0 étant ouvert dans F, on se donne également $r_0 > 0$ tel que $B_F(x_0, r_0) \subset O_0$.
   Quitte à réduire r_0, on peut supposer $\overline{B_F(x_0, r_0)} \subset B_F(x,r)$, ce que l'on fait.
   Ensuite, O_1 étant dense dans F, $O_1 \cap B_F(x_0, r_0) \neq \emptyset$, et on se donne $x_1 \in O_1 \cap B_F(x_0, r_0)$.
   O_1 étant ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $B_F(x_1, r_1) \subset O_1$, et quitte à réduire r_1, on aura $\overline{B_F(x_1, r_1)} \subset B_F(x_0, r_0)$, ce que l'on suppose.

Et on continue ainsi, d'où la formation d'une suite décroissante ($B_n := \overline{B_F(x_n, r_n)}$) de fermés de F, donc de fermés tout court, telle que pour tout n, $B_n \subset O_n$.
Par la propriété 5, $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$. Soit $y \in \bigcap_n B_n$. Alors $y \in O$, et $y \in B_0$ donc $y \in B_F(x, r)$ car $B_0 \subset B_F(x, r)$.
Ainsi $O \cap B_F(x, r) \neq \emptyset$.

Remarque: dans le cadre des espaces de Banach, on réduit suffisamment les r_n afin que $r_n \to 0$, et que la suite (x_n) vérifie le critère de Cauchy.

2. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermés de F telle que pour tout n, F_n est d'intérieur vide dans F.
Pour tout n, soit $O_n = F \backslash F_n$. O_n est un ouvert de F, dense dans F par la propriété 4.
En vertu du premier cas, $\bigcap_n O_n$ est dense dans F, donc $\bigcup_n F_n = F \backslash \bigcap_n O_n$ est d'intérieur vide dans F par la propriété 4.

3 Deux exemples d'utilisation

Le théorème de Baire donne notamment des résultats d'"uniformisation locale", notion à appréhender avec les exemples.

Propriété 7: Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $\forall x > 0,\ f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Remarque: c'est faux avec $f(x + n)$ au lieu de $f(nx)$.

Démonstration:
Ici, l'espace est $\mathbb{R}$. Prenons $F = [1, +\infty[$ pour le fermé.
Soit $\varepsilon > 0$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons $F_n = \{x \in F \mid \forall p \geq n,\ |f(px)| \leq \varepsilon\}$.
$F_n = f_{|F}^{-1}([1, +\infty[)$, donc F_n est un fermé de F.
Du fait de l'hypothèse, tout $x \geq 1$ appartient à un F_n, donc $\bigcup_n F_n = F$.
F n'est pas d'intérieur vide dans lui même, donc en vertu du théorème de Baire, il existe N tel que F_N ne soit pas d'intérieur vide dans F.
On se fixe un tel N.
Soit x dans l'intérieur relatif de F_N. On peut donc se donner $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\cap F = B_F(x, r) \subset F_N$. $]x - r, x + r[\cap F$ est un intervalle non réduit à un point de F, et quitte à le réduire un peu, on obtient $[a, b] \subset F_N$ avec $a < b$.
Ainsi, $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \geq N$, $|f(nx)| \leq \varepsilon$, ie $|f_{|[na, nb]}| \leq \varepsilon$.
C'est là qu'on parle d'uniformisation locale, N ne dépendant pas de $x \in [a, b]$.

Pour n assez grand, $nb > (n + 1)a$, donc les intervalles se chevauchent, et on obtient donc un voisinage de $+\infty$, $[c, +\infty[$, sur lequel $|f| \leq \varepsilon$, d'où le résultat.
♣

Propriété 8: Théorème de Corominas
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N};\ f^{(n)}(x) = 0$.
Alors f est polynomiale.

Démonstration:
Il existe une démonstration, pas celle d'origine, n'utilisant pas le théorème de Baire.
L'application de Baire est très naturelle:
L'espace est $\mathbb{R}$.
Soient $a < b$, et $F = [a, b]$.

Notons $F_n = \{x \in F \mid f^{(n)}(x) = 0\}$. C'est un fermé de F.
Par hypothèse, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = F$, donc il existe n tel que F_n ne soit pas d'intérieur vide dans F, et on obtient $]c,d[\subset [a,b]$ sur lequel $f^{(n)}$ est nulle, donc $f_{|]c,d[}$ est polynomiale, donc $f_{|[c,d]}$ aussi par continuité.
Ensuite il reste pas mal de travail, non trivial. Considération d'intervalles maximaux, de recollements, etc... pour aboutir au résultat. Le lecteur intéressé pourra chercher!
Notons juste un argument indispensable: si f est polynomiale sur $[a,b]$ et $[b,d]$, les polynômes sont les mêmes, car ils ont les mêmes dérivées en b, et on applique la formule de Taylor pour les polynômes.