MP* - Propriété de Borel-Lebesgue

Partout, E est un EVN de norme $||\cdot||$.

Rappel: Si K est une partie de E, un ouvert (relatif) de K est une partie P de K telle que: $\forall x \in P$, $\exists r > 0$; $(||y-x|| < r$ et $y \in P) \implies y \in P$, soit encore $B_K(x,r) \subset P$ en notant $B_K(x,r) = B(x,r) \cap P$.
Les ouverts de K sont les $K \cap O$ avec O ouvert (de E).

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $[0,1[$ est un ouvert de $[0,2]$.

Le but est d'établir la propriété suivante, et d'en voir deux exemples d'utilisation.

Propriété 1: Borel-Lebesgue
Si K est un compact de E, pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de K telle que $K = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, alors il existe un sous-ensemble fini J de I telle que $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.
En abrégé, si K est compact, de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un recouvrement fini.
Il en résulte la forme sans ouverts relatifs:
Si K est compact alors pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, alors il existe un sous-ensemble fini J de I telle que $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$, en appliquant l'énoncé précédent aux $V_i = U_i \cap K$.

Scindons la démonstration en plusieurs propriétés.

Propriété 2: Précompacité
Soit K un compact de E.
Soit $r > 0$. Alors il existe un sous-ensemble fini J de K telle que $K \subset \bigcup\limits_{x\in J} B(x,r)$ (On a donc $K = \bigcup\limits_{x\in J} B_K(x,r)$)

Démonstration
Soit K un compact de E.
Soit $r > 0$. Par l'absurde, supposons qu'il n'existe pas J fini comme voulu.
On se donne $x_0 \in K$.
Comme $K \not\subset B(x_0,r)$, on se donne $x_1 \in K \backslash B(x_0,r)$.
Puis, comme $K \not\subset B(x_0,r) \cup B(x_1,r)$, on se donne $x_1 \in K \backslash B(x_0,r) \cup B(x_1,r)$.
etc... $x_n \in K \backslash \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} B(x_i,r)$.
Si $p < n$, comme $x_n \in K \backslash \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} B(x_i,r)$, $x_n \notin B(x_p,r)$, donc $||x_n - x_p|| \geq r$.
Ainsi $\forall n \neq p$, $||x_n - x_r|| \geq r$, donc (x_n) ne peut admettre de valeur d'adhérence, ce qui contredit la compacité de K.
♣

Propriété 3: Nombre de Lebesgue
Soit K un compact de E. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de K telle que $K = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B_K(x,r) \subset U_i$.

Démonstration:
Par l'absurde, supposons qu'un tel r n'existe pas.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, comme $r = 1/n$ ne convient pas, on peut se donner $x_n \in K$, tel que $\forall i$, $B_K(x_n, 1/n) \not\subset U_i$.
K étant compact, on extrait $x_{\phi(n)} \to x \in K$.
Comme $x \in K$, on peut se donner i tel que $x \in U_i$.
U_i étant un ouvert de K, on se donne $R > 0$ tel que $B_K(x, R) \subset U_i$.
Alors pour n assez grand, $\dfrac{1}{\phi(n)} < R/2$ et $||x_{\phi(n)} - x|| < R/2$, et donc $B_K(x_{\phi(n)}, 1/\phi(n)) \subset B_K(x_{\phi(n)}, R/2) \subset B_K(x, R) \subset U_i$ ce qui contredit $\forall n$, $\forall i$, $B_K(x_n, 1/n) \not\subset U_i$.
♣

Démonstration de la propriété 1:
On suppose K compact.
Soit $(U_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de K telle que $K = \bigcup_{i \in I} U_i$.
On se donne $r > 0$ venant de la propriété 3. Pour tout $x \in K$, on se donne $i(x) \in I$ tel que $B_K(x, r) \subset U_{i(x)}$.
Par la propriété 2, soit J partie finie de K telle que $K = \bigcup_{x \in J} B_K(x, r)$.
Alors $K = \bigcup_{x \in J} U_{i(x)}$, union finie.

♣.

Un exemple d'utilisation: premier théorème de Dini.

Propriété 4:
Soit K un compact de E.
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, et telle que $\forall x \in K$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Alors la convergence est uniforme.

Démonstration:
Par croissance, $\forall n$, $f_n \leq f$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n = \{y \in K \ ; \ f_n(y) > f(y) - \varepsilon\}$.
$f_n - f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et $V_n = (f_n - f)^{-1}(]-\varepsilon, +\infty[)$, donc V_n est un ouvert de K.
Pour tout $y \in K$, par convergence simple, $f_n(y) > f(y) - \varepsilon$ pour n assez grand, donc $y \in V_n$. Ainsi $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$.
Par propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire un recouvrement fini. Soient $n_1 < ... < n_k$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^{k} V_{n_i}$.
Par croissance de $(f_n(y))_n$ pour tout y, $V_n \subset V_{n+1}$. (V_n) est croissante.
Donc $K = V_{n_k}$.
On a donc $\forall y \in K$, $f_{n_k}(y) > f(y) - \varepsilon$. Mais alors, toujours par croissance, $\forall y \in K$, $\forall n \geq n_k$, $f_n(y) \geq f_{n_k}(y) > f(y) - \varepsilon$.
Comme $f_n(y) \leq f(y)$, on a donc $\forall y \in K$, $\forall n \geq n_k$, $f(y) \geq f_n(y) > f(y) - \varepsilon$, donc $\forall n \geq n_k$, $||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$, ce qui établit la convergence uniforme.

Une autre application: le théorème de Stone-Weierstrass.
C'est un résultat d'approximation uniforme bien plus général que le théorème de Weierstrass polynomial.

Propriété 5: Stone-Weierstrass
K est un compact de E.

Soit A une sous-algèbre de $F := \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ telle que:

1. A contient la fonction constante égale à 1.

2. $\forall x, y \in K$ tels que $x \neq y$, $\exists f \in A$; $f(x) \neq f(y)$.

Alors A est dense dans $(F, || \ ||_\infty)$.

Le point 1 est en fait $\forall x \in K$, $\exists f \in A$; $f(x) \neq 0$, mais j'ai remplacé par une chose plus simple, toujours vraie dans les cas usuels d'application, et qui allège un peu la démonstration.

N'ayant pas encore vu la définition, A sous-algèbre signifie:
A est un sev de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, stable par produit ($\forall f, g \in A$, $fg \in A$).

Démonstration:
$\overline{A}$ est l'adhérence de A pour $|| \ ||_\infty$.

étape 1: max et min
si $f, g \in A$, on note $\max(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et de même pour min.
On a $\max(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, et $\min(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.
On a besoin de voir que $f, g \in A \Longrightarrow \max(f, g) \in \overline{A}$ et $\min(f, g) \in \overline{A}$.
Comme A est une sous-algèbre, contenant 1, si $P \in \mathbb{R}[X]$, et $f \in A$, $P(f) \in A$ (notation abrégée pour $P \circ f$).
Soient $f, g \in A$. Par compacité et continuité, $Im(|f - g|)$ est compact. On peut donc se donner $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $Im(|f + g|) \subset [0, a]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par théorème de Weierstrass, la valeur absolue étant continue sur le segment $[0, a]$, on se donne $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, a]$, $|P(x) - |x|| \leq \varepsilon$.
Soit $h = \dfrac{f + g + P(f - g)}{2}$. $h \in A$.
Alors $||h - \max(f, g)||_\infty = \dfrac{1}{2}|| \ |f - g| - P(f - g)||_\infty \leq \varepsilon/2$.
Ainsi $\max(f, g) \in \overline{A}$. Idem pour $\min(f, g)$.
Par applications successives, on a alors $\forall f_1, ..., f_n \in A$, $\max(f_1, ..., f_n)$ et $\min(f_1, ..., f_n)$ sont dans $\overline{A}$.

étape 2: le résultat
Soit $f \in F$.
Pour tous $x, y \in K$, avec $x \neq y$:
Si $f(x) = f(y)$, notons $g_{x,y} : z \mapsto f(x)$ (constante). $g_{x,y} \in A$ car $1 \in A$, et A sev.
Si $f(x) \neq f(y)$: il existe $h \in A$ telle que $h(x) \neq h(y)$. Notons $g_{x,y} = ah + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $g_{x,y}(x) = f(x)$ et $g_{x,y}(y) = f(y)$. (calcul de a, b trivial). $g_{x,y} \in A$ car A sev.

Soit $\varepsilon > 0$.
A $x \in K$ fixé: Notons pour tout y, $V_y = \{t \in K \mid f(t) + \varepsilon > g_{x,y}(t)\}$.
$V_y = (g_{x,y} - f)^{-1}(] - \varepsilon, +\infty[)$ est un ouvert de K.
Pour tout $y \in K$, $y \in V_y$ puisque $g_{x,y}(y) = f(y)$. Ainsi $\displaystyle\bigcup_{y \in K} V_y = K$.

Par propriété de Borel-Lebesgue, on peut se donner $y_1, ..., y_n \in K$ tels que $K = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

Notons $h_x = \min(g_{x,y_1}, ..., g_{x,y_n})$. $h_x \in \overline{A}$.
Si $t \in K$, t appartient à un V_{y_i}, donc $g_{x,y_i}(t) < f(t) + \varepsilon$, donc $h_x(t) < f(t) + \varepsilon$.
De plus, $g_{x,y_i}(x) = x$, donc $h_x(x) = f(x)$.
On se donne $W_x \in A$ telle que $||W_x - h_x||_\infty \leq \varepsilon$. On a alors $W_x(x) \geq f(x) - \varepsilon$, et $W_x \leq f + 2\varepsilon$.

Maintenant, si $x \in K$, soit $U_x = \{t \in K \mid W_x(t) > f(t) - 2\varepsilon\}$. C'est un ouvert de K.
$x \in U_x$, donc $K = \bigcap_{x \in K} U_x$.

Par propriété de Borel-Lebesgue, on se donne $x_1, ..., x_k$ tels que $\bigcap_{i=1}^{k} U_{x_i} = K$.

Soit $\phi = \max(W_{x_1}, ..., W_{x_k})$.
$\phi \in \bar{A}$.
$\forall i$, $W_{x_i} < f + 2\varepsilon$, donc $\phi < f + 2\varepsilon$.
De plus, $\forall t \in U_{x_i}$, $W_{x_i}(t) > f - 2\varepsilon$, donc $\phi(t) > f(t) - 2\varepsilon$. Ainsi, $\forall t \in K,\ \phi(t) > f - 2\varepsilon$.
Donnons nous $q \in A$ tel que $||q - \phi||_\infty \leq \varepsilon$.
Alors $f - 3\varepsilon \leq q \leq f + 3\varepsilon$, et $||f - q||_\infty \leq 3\varepsilon$.
♣.

Cas complexe:

Propriété 6: Stone-Weierstrass complexe
K est un compact de E.
Soit A une sous-algèbre de $F := \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ telle que:

1. A contient la fonction constante égale à 1.

2. $\forall x, y \in K$ tels que $x \neq y$, $\exists f \in A$; $f(x) \neq f(y)$.

3. $f \in A \Longrightarrow \overline{f} \in A$.

Alors A est dense dans $(F, ||\ ||_\infty)$.

Démonstration:
Notons $B = \{f \in A \mid f$ est à valeurs réelles$\}$.
B est une sous-algèbre de F, qui contient 1.
Si $x \neq y$: Soit $h \in A$ telle que $h(x) \neq h(y)$. Alors $Re(h)(x) \neq Re(h(y))$ ou $Im(h)(y) \neq Im(h)(x)$.
Mais $Re(h) = (h + \overline{h})/2 \in A$, donc $Re(h) \in B$, et $Im(h) = (h - \overline{h})/(2i) \in A$, donc $Im(h) \in B$.
Ainsi la propriété 5 s'applique à B. B est dense dans $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), ||\ ||_\infty)$.
Alors, si $f = Re(f) + i\Im(f) \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, en prenant $g, h \in B$ à moins de ε de $Re(f)$ et $Im(f)$, $g + ih \in A$ est à moins de 2ε de f.
♣.

Un exemple d'application:

Propriété 7:
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ tel que $||P - f||_{\infty, K} \leq \varepsilon$.

Démonstration:
Soit A l'ensemble des fonctions polynomiales à n variables sur K, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
A est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$, stable par conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
$1 \in A$.
Si $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$ sont dans K et distincts: on se donne i tel que $a_i \neq b_i$.
Alors $f : (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i \in A$, et $f(a) \neq f(b)$.
Ainsi le théorème de Stone-Weierstrass s'applique.
♣