MP* - Théorème d'inversion locale

Les énoncés ci-après sont valables dans le cadre des espaces de Banach, hors-programme. Nous nous limiterons à la dimension finie.
Partout, E, F sont des $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies, dont des normes sont notées $|| \ ||$.

Propriété 1: Théorème du point fixe de Picard
Soit K un fermé de E, $C \in [0, 1[$ et $f : K \to K$ C-lipschitzienne.
Alors, $\exists! x \in K; f(x) = x$.

Démonstration:

1. Existence:
   Soit $x_0 \in K$. On pose par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Par récurrence triviale, $\forall n,\ ||x_{n+1} - x_n|| \leq C^n ||x_1 - x_0||$, donc $\sum_n (x_{n+1} - x_n)$ converge absolument, donc converge, et donc (x_n) converge vers $x \in K$ car K est fermé.
   f est continue car lipschitzienne, donc $x_{n+1} = f(x_n)$ donne à la limite $x = f(x)$.
2. Unicité:
   Soient x, y deux point fixes. $||x-y|| = ||f(x)-f(y)|| \leq C||x-y||$. Comme $C < 1$, il en résulte $||x - y|| = 0$ ie $x = y$.

♣.

Au passage, donnons deux autres propriétés de point fixe usuelles, qui ne servirons pas dans la suite:

Propriété 2:

1. Soit K un compact d'un evn, et $f : K \to K$ telle que $x \neq y \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$. Alors f a un point fixe.
2. Soit K un compact convexe et $f : K \to K$ 1-lipschitzienne. Alors f a un point fixe.

Démonstration:

1. f est continue car 1-lipschitzienne, donc $g : x \mapsto ||f(x) - x||$ aussi.
   Par compacité, $\min(g)$ existe. Soit a tel que $g(a) = \min(g)$.
   Si $f(a) \neq a$, $||f(f(a)) - f(a)|| < ||a - f(a)||$, donc $g(f(a)) < g(a)$ ce qui est absurde.
2. Soit $a \in K$. En considérant $g : x \in K - a \mapsto f(x + a) - a$, on est ramené au cas où $0 \in K$.
   Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = (1 - 1/n)f$. $f_n : K \to K$ par convexité de K.
   f_n est $(1 - 1/n)$-lipschitzienne, donc par le théorème de Picard possède un point fixe x_n.
   $(1 - 1/n)f(x_n) = x_n$ (*). On considère une extraction de (x_n) convergeant vers $x \in K$. La relation (*) donne alors à la limite $f(x) = x$ (f est continue car 1-lipschitzienne).

♣

Propriété 3: Théorème d'inversion locale
On suppose $\dim(E) = \dim(F)$. W est un ouvert de E, et $f \in \mathcal{C}^1(W, F)$.
Soit $x_0 \in W$. On suppose que $df_{x_0} \in GL(E, F)$.
Alors il existe U voisinage ouvert de x_0, et V voisinage ouvert de $f(x_0)$ tels que f réalise une bijection de U dans V, et que sa réciproque locale $h : V \to U$ soit $\mathcal{C}^1$.
De plus $d_{f(x_0)}(h) = (d_{x_0} f)^{-1}$, et si f est $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, h aussi.

Démonstration
On note $||| \ |||$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à la norme $|| \ ||$ de E.

1. Réduction du problème:
   Soit $q = d_{x_0}f$. q et q^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$, bijectives, de différentielles constantes égales à elles-mêmes.
   Donc f a la propriété voulue si et seulement si $q^{-1} \circ f$ l'a.
   On remplace f par $q^{-1} \circ f$, ce qui ramène au cas $E = F$, et $d_{x_0}f = id$.
   Ensuite, en remplaçant f par $x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0)$, on est ramené au cas $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$.

2. Bijectivité locale:
   Soit $g : x \mapsto x - f(x)$. $g(0) = 0$, $dg_0 = 0$, et dg est continue car f est $\mathcal{C}^1$, donc on peut se donner $r > 0$ tel que $||x|| \le r \Longrightarrow |||dg_x||| \le \frac{1}{2}$. g est donc $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\overline{B(0,r)}$ par IAF et convexité de $\overline{B(0,r)}$.
   Soit $y \in \overline{B(0, r/2)}$. Soit $g_y : x \mapsto y + x - f(x)$.
   $d(g_y) = dg$, donc g_y est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\overline{B(0,r)}$.
   Si $x \in \overline{B(0,r)}$, $||g_y(x)|| \le ||y|| + ||g(x)|| \le r/2 + (1/2)||g(x) - g(0)|| \le r/2 + r/2 = r$.
   Ainsi, $\overline{B(0,r)}$ (fermé, et en fait compact) est stable par g_y.
   De plus, si $x_1, x_2 \in \overline{B(0,r)}$, $||g_y(x_1) - g_y(x_2)|| = ||g(x_1) - g(x_2)|| \le \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$.
   On peut donc appliquer le théorème de Picard: il existe un unique $x \in \overline{B(0,r)}$ tel que $g_y(x) = x$, ie $f(x) = y$.
   Ainsi, pour tout $y \in \overline{B(0,r/2)}$, $\exists! x \in \overline{B(0,r)}$; $f(x) = y$.
   Notons $K = f^{-1}(\overline{B(0,r/2)}) \cap \overline{B(0,r)}$. K est fermé, et contient 0 car $f(0) = 0$.

   $f : K \to \overline{B(0,r/2)}$ est donc bijective. Notons $h : \overline{B(0,r/2)} \to K$ sa réciproque.

3. Continuité de h:
   Si $y_1, y_2 \in \overline{B(0,r/2)}$, et $x_1 = h(y_1)$, $x_2 = h(y_2)$:
   $||x_1 - x_2|| = ||x_1 - f(x_1) + f(x_1) - x_2 + f(x_2) - f(x_2)|| = ||g(x_1) - g(x_2) + f(x_2) - f(x_1)|| \le ||f(x_2) - f(x_1)|| + ||g(x_1) - g(x_2)|| = ||y_1 - y_2|| + ||g(x_1) - g(x_2)||$.
   Comme g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\overline{B(0,r)}$, on a $||x_1 - x_2|| \le ||y_1 - y_2|| + \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$, donc $||x_1 - x_2|| \le 2||y_1 - y_2||$.
   Ainsi, h est 2-lipschitzienne, donc continue.

4. Définition des ouverts:
   On pose $V = B(0, r/2)$, et $U = h(V)$. V est ouvert, U et V contiennent 0, et $f : U \to V$ est bijective, d'inverse $h : V \to U$.
   $U = f^{-1}(V) \cap B(0, r/2)$, intersection d'ouverts est ouvert.

   On restreint désormais h à V.

5. Caractère $\mathcal{C}^p$ de h:
   Notons d'abord que si $x \in U$, $df_x \in GL(E)$:
   On a $dg_x = id - df_x$, et $|||dg_x||| \le 1/2$.
   Ainsi, si $v \in Ker(df_x)$, $||dg_x(v)|| \le \frac{1}{2}||v||$ donne $||v|| \le \frac{1}{2}||v||$, donc $v = 0$. Étant en dimension finie, df_x est inversible.

   Si $y, y_1 \in V$, $x = h(y)$, $x_1 = h(y_1)$ (on a donc $f(x) = y$, $f(x_1) = y_1$):
   $||h(y) - (h(y_1) + (df_{x_1})^{-1}(y - y_1))|| = ||x - x_1 - (df_{x_1})^{-1}(f(x) - f(x_1))||$

$= ||x - x_1 - (df_{x_1})^{-1}(df_{x_1}(x - x_1) + o(x - x_1))|| = ||(df_{x_1})^{-1}(o(x - x_1))||$.
$(df_{x_1})^{-1}$ est C-lipschitzienne avec $C = |||(df_{x_1})^{-1}|||$.
Ainsi, $||(df_{x_1})^{-1}(o(x - x_1))|| \leq C \times o(||x - x_1||) = o(||x - x_1||)$.
Mais h est 2-lipschitzienne, donc $o(||x - x_1||) \underset{y \to y_1}{=} o(||y - y_1||)$.
Ainsi, $h(y) - (h(y_1) + (df_{x_1})^{-1}(y - y_1)) \underset{y \to y_1}{=} o(||y - y_1||)$, ce qui donne que h est différentiable en y_1, avec $dh_{y_1} = (df_{x_1})^{-1} = (df_{h(y_1)})^{-1}$ (*).
Comme h, $x \mapsto df_x$, et $\phi \in GL(E) \mapsto \phi^{-1}$ sont continues, $y \mapsto dh_y$ est continue, et h est $\mathcal{C}^1$.
Si f est $\mathcal{C}^p$, (*) donne par récurrence h $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \leq n$, sachant que $\phi \in GL(E) \mapsto \phi^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

♣

Propriété 4: Conséquence: surjectivité locale
On reprend les mêmes hypothèses.
Alors $\forall r > 0$ assez petit de sorte que $B(x_0, r) \subset W$, $f(B(x_0, r))$ est un voisinage ouvert de $f(x_0)$, et f réalise une bijection de $B(x_0, r)$ dans $f(B(x_0, r))$.

Démonstration:
On se donne U, V, g comme dans la propriété précédente. Pour r assez petit, $B(x_0, r) \subset U$, donc $f(B(x_0, r)) \subset V$, et f réalise une bijection de $B(x_0, r)$ dans $f(B(x_0, r))$. $f(B(x_0, r)) = h^{-1}(B(x_0, r))$ est un ouvert de V, ouvert, donc un ouvert.
♣

Propriété 5: Théorème d'inversion globale
$\dim(E) = \dim(F)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soient U un ouvert de E, et $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$.
On suppose f injective, et $\forall x \in U$, $d_x f \in GL(E, F)$.
Alors $f(U)$ est ouvert, et f réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans $f(U)$.

Démonstration:
f réalise une bijection de U dans $f(U)$.
Par la propriété 4, $f(U)$ est ouvert, et par la propriété 3, f^{-1} est localement $\mathcal{C}^k$, donc $\mathcal{C}^k$.
♣.