MP* - Suites totales

Dans toute la suite, E est un espace préhilbertien réel, de produit scalaire $< \, , \, >$, et de norme associée $|| \, ||$.

Définition 1: Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite totale si et seulement si $vect(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E.

Notons qu'un élément de $vect(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est combinaison linéaire (finie) de f_n, donc en notant $V_n = vect(\{f_0, ..., f_n\})$, $vect(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, union croissante.

Exemple: Soient $a < b$, et $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.
On munit E du produit scalaire $< f, g >= \int_a^b fg$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction polynomiales réelles sur $[a,b]$ telle que $\forall n,\ deg(f_n) = n$.
Alors (f_n) est totale:
Du fait de la propriété des degrés échelonnés, $V := vect(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est l'espace des fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $g \in E$. Par le théorème de Weierstrass, il existe $(g_k) \in V^{\mathbb{N}}$ telle que $||g_k - g||_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais alors $||g_k - g||^2 = \int_a^b (g_k - g)^2 \le (b-a)||g_k - g||_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g_k \to g$ dans E.

Notons que dans cet exemple, si on orthonormalise $(f_n)_n$ par le procédé de Schmidt, on obtient une nouvelle suite (h_n) vérifiant les mêmes conditions de degré, et qui est donc orthonormée totale.

Tout ce qui est à connaître est dans la propriété suivante:

Propriété 1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée totale de E, et $g \in E$. On a:

1. En notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} < g, f_k > f_k$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans E, ie $||S_n - g|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Pour tout n, $||g||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} < g, f_n >^2$ (égalité de Parseval)

Démonstration:
Notons $V_n = vect(\{f_0, ..., f_n\})$. $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est donc dense dans E.
Notons p_n la projection orthogonale sur V_n, et $d_n = d(g, V_n) = \inf_{h\in V_n} ||h - g||$.
Comme $(f_0, ..., f_n)$ est une BON de V_n, on sait que $p_n(g) = \sum_{k=0}^{n} < g, f_k > f_k$.
On sait également que $d_n = ||g - p_n(g)||$.
Montrons que $d_n \to 0$.
Comme (V_n) est croissante, (d_n) est décroissante, minorée par 0, donc converge vers $a \ge 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme V est dense dans E, il existe $h \in V$ tel que $||h - g|| \le \varepsilon$.
Avec un tel h, il existe n tel que $h \in V_n$, et alors $d_n \le \varepsilon$. Comme (d_n) décroît, il en résulte $a \le \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $a = 0$.

Maintenant, $||S_n - g|| = ||p_n(g) - g|| = d_n \to 0$, ce qui donne le point 1.
Notons $W_n = \sum_{k=0}^{n} < g, f_k >^2$.
Par Pythagore, $W_n = ||p_n(g)||^2$.

Par continuité de la norme et le point 1, $||p_n(g)|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||g||$, donc $W_n \to ||g||^2$, ce qui donne le point 2. ♣

Problème

$C_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi n x)$ et $S_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{2}\sin(2\pi n x)$.
E est l'espace des fonctions continues 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si $f, g \in E$, $< f, g >= \int_0^1 fg$.

1. Vérifier que $< , >$ est un produit scalaire sur E. On notera $|| \ ||$ la norme associée.
2. On note $F = (C_0, C_1, S_1, C_2, S_2, ...)$. Montrer que F est ON.

1 Théorème de Fejér

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kx}$ (noyau de Dirichlet), et $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ (noyau de Fejér).

3. Montrer que $F_n \in vect(\{C_0, C_1, S_1, ..., C_n, S_n\})$.
4. Calculer $D_n(x)$ et $F_n(x)$.
5. Montrer que:
   (a) F_n est à valeurs réelles positives.
   (b) $\int_0^1 F_n = 1$
   (c) Si $1/2 > \delta > 0$, $||F_n||_{\infty,[\delta,1/2]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $||F_n||_{\infty,[-1/2,-\delta]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $f \in E$. Si $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)F_n(t)dt$ $(= \int_0^1 f(x-t)F_n(t)dt)$ le produit de convolution entre f et F_n.

6. Montrer que $g_n(x) = \int_0^1 f(t)F_n(t-x)dt$, et que $g_n \in vect(\{C_0, C_1, S_1, ..., C_n, S_n\})$.
7. Soit $1/2 > \delta > 0$. Montrer que :
   $|g_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-1/2}^{1/2} F_n(t)(f(x-t) - f(x))dt\right|$ et :
   $|g_n(x) - f(x)| \leq 2||f||_\infty(||F_n||_{\infty,[\delta,1/2]} + ||F_n||_{\infty,[-1/2,-\delta]}) + \sup_{t\in[-\delta,\delta]} |f(x-t) - f(x)|$
8. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et que $||g_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   La convergence uniforme de (g_n) vers f constitue le théorème de Fejér.
   Il en résulte, comme $g_n \in vect(F)$, que $vect(F)$ est dense dans E pour $|| \ ||_\infty$. Les éléments de $vect(F)$ sont appelés polynômes trigonométriques, et cette densité constitue le théorème de Weierstrass trigonométrique.

9. En déduire que F est une suite totale de E.

2 Un développement en série de Fourier

Soit $f \in E$ telle que $\forall x \in [0,1/2],\ f(x) = x$, et $\forall x \in [1/2,1],\ f(x) = 1-x$. (faire un dessin).

10. Vérifier que $< f, S_n >= 0$, $< f, C_0 >= 1/4$, $< f, C_{2n+1} >= \dfrac{-\sqrt{2}}{\pi^2(2n+1)^2}$, et, si $n \geq 1$, $< f, C_{2n} >= 0$.

11. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

12. On note $g(x) = 1/4 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(2\pi(2n+1)x)$.
    Justifier que g est définie, 1-périodique, et continue sur $\mathbb{R}$.

13. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $< g, S_n >=< f, S_n >$ et $< g, C_n >=< f, C_n >$.

14. Montrer que $f = g$.

15. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.