1 CCINP

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AXA$.

Etudier le rang de f lorsque $A = diag(1, ..., 1, 0, ..., 0)$ (r coefficients 1), puis dans le cas général.

Exercice 2 :

1. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}dt$.

Exercice 3 :

Etudier la limite de $x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 4 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(K)$ nilpotente de rang 2.

   Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(K)$ nilpotentes. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $rg(A) = rg(B)$.

Exercice 5 :

Rayon de convergence et calcul dans $]-R, R[$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

Exercice 6 :

$A = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} \\ 1 & \text{e} & \text{f} & \text{g} \\ 0 & 1 & \text{h} & \text{i} \\ 0 & 0 & 1 & \text{j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(K)$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(K)$ si et seulement si elle possède quatre valeurs propres distinctes dans K.

Exercice 7 :

1. Intervalle de définition I de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t + e^{xt}}$.

2. Déterminer $\lim_{+\infty} f$ puis un équivalent simple de f en $+\infty$ (changement de variable).

3. Déterminer $\lim_0 f$.

Exercice 8 :

On dispose de deux dés "pipés". On se demande si la somme S des numéros des deux dés peut vérifier $\forall k \in [\![2, 12]\!]$, $P(S = k) = \frac{1}{11}$?

En d'autres termes, on se donne X, Y variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$ (non nécessairement de même loi), et on pose $S = X + Y$.

On suppose $\forall k \in [\![2, 12]\!]$, $P(S = k) = \frac{1}{11}$.

On note $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$ la fonction caractéristique de X.

1. Donner $G_S(t)$, et une relation entre $G_X(t)$, $G_Y(t)$, et $G_S(t)$.

2. Etablir une contradiction (considérer les racines).

Exercice 9 :

$m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\Omega = \mathcal{F}(\{1, ..., m\}, \{1, ..., n\})$ de l'équiprobabilité.

Si $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est le nombre de points de $\{1, ..., n\}$ sans antécédents par ω.

Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

On pourra utiliser les variables aléatoires $X_i(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si i n'a pas d'antecedent par } \omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Déterminer $E(Y)$ où $Y(\omega) = card(Im(\omega))$.

Exercice 10 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. (u_n) vérifie $u_{n+1} = a \sin(u_n) + b$.

Montrer que $|u_{p+1} - u_p| \leq |a|^p |u_1 - u_0|$. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 11 :

Résoudre, sur un intervalle à préciser, $4xy'' - 2y' + 9x^2 y = 0$ (séries entières)

Exercice 12 :

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$, et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $Im(f) \oplus Ker(f) = E$.

Que peut-on dire si E n'est pas supposé de dimension finie?

Exercice 13 :

1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ croissantes, où I est une partie de $\mathbb{R}$.
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I, et Y une variable aléatoire indépendante de même loi.
   En considérant $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))$, montrer que $Cov(f(X), g(X)) \geq 0$.

2. Si $a_1 \leq ... \leq a_n$ et $b_1 \leq ... \leq b_n$ sont des réels, montrer que
   $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)$.

Exercice 14 : CCP

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = diag(1, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note C la matrice extraite de A obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det(A + B) = \det(A) + \det(C)$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $rg(B) = 1$.
   Montrer que $\det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2)$.

Exercice 15 :

Etude du domaine de définition, de la continuité, du caractère $\mathcal{C}^1$ de
$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1 + n^2 x)^2}$.

Exercice 16 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que f^2 est diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2

1. On suppose $\det(f) \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f, et montrer que f est diagonalisable.

2. On suppose $\det(f) = 0$, et $Ker(f) = Ker(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 17 :

$m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$.

1. Une urne contient n boules numérotées $1, ..., n$.
   On tire sans remise m boules, $m \leq n$.
   Chercher la loi du plus petit numéro, ie, en notant X la variable aléatoire donnant le plus petit numéro du tirage, calculer $P(X > k)$ si $k \in \{0, ..., n\}$.

2. Idem pour un tirage avec remise de m boules. On pourra introduire n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_m$ et considérer $X = \min(X_1, ..., X_m)$.

Exercice 18 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ telle que $f + f' \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Exercice 19 :

Soit $f : x \in]0, 1[\mapsto \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 - x \cos(t)} dt$.

1. Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer $x f'(x) + f(x)$.

2 Centrale/Mines

Exercice 20 :

Soient E un K-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in K$, $\lambda u - id \in GL(E)$

2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u. Montrer que $\det(u + v) = \det(v)$

Exercice 21 :

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = 0$.
Vérifier que $Ker(A)$ est stable par B, puis que A et B ont un vecteur propre commun, puis que A et B sont simultanément trigonalisables

Exercice 22 :

Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in O(n)$, D diagonale, et $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = PD\,{}^tP$ et $B = PC\,{}^tP$.

2. Montrer que $0 \leq tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.

Exercice 23 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A,t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

2. On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24 : Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 25 : Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[0,1]$ sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ. Montrer que Φ induit un automorphisme ϕ de V dont la seule valeur propre est 1. En déduire que $\phi = id_V$.

Exercice 26 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.

1. Soit $A \in U_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelle et imaginaire de A, montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in S_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in U_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS} avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27 : Soient $p \in]0,1[$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On pose $L_1 = max\{k \in \mathbb{N}^*;\ X_1 = X_2 = ... = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.

1. Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

2. Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{l \in \mathbb{N}^*;\ X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = ... = X_{L_1+l}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.
   Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 28 : Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n$.
Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 29 : Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 30 :

1. $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U, V \in O(n)$ et D diagonale telles que $A = UDV$. (utiliser ${}^tAA$)

2. Soient E, F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer qu'il existe $(e_1, ..., e_n)$ une BON de E telle que $(f(e_1), ..., f(e_n))$ soit orthogonale.
   On commencera par le cas $\dim(E) = \dim(F)$ et f bijective, en utilisant la question 1.

Exercice 31 :

E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (i.e. A sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition), commutative ($\forall f,g \in A$, $f \circ g = g \circ f$), et dont tous les éléments sont nilpotents.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall f_1, ..., f_d \in A,\ f_1 \circ ... \circ f_d = 0$.

   Notons $I = vect\left(\bigcup_{f \in A} Im(f)\right)$. Soit S un supplémentaire de I dans E.

2. Soit $f \in A$ telle que $\forall x \in S,\ f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.

3. En considérant $\theta : f \in A \mapsto f_{|S} \in \mathcal{L}(S, I)$, montrer que $\dim(A) \leq \dfrac{n^2}{4}$.

4. Si n est pair, montrer qu'il existe A sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ commutative et dont tous les éléments sont nilpotents de dimension $\dfrac{n^2}{4}$.

Exercice 32 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que tous les coefficients de $A - I_n$ soient pairs, et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.

   (a) Soit $B = \dfrac{1}{2}(A - I_n)$.
   Montrer que toute les valeurs propres complexes de B sont dans le cercle de centre $-1/2$ et de rayon $1/2$.

   (b) Si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, avec Q unitaire, montrer que quotient et reste de la division euclidienne de P par Q, a priori dans $\mathbb{Q}[X]$, sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

   (c) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\chi_B = X^a(X+1)^b P$, P unitaire, et $P(0)P(-1) \neq 0$.
   ($\chi_B = \det(XI_n - B)$)

   (d) Montrer que P est constant et $A^2 = I_n$.

2. p est un entier ≥ 3.
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que tous les coefficients de $A - I_n$ soient divisibles par p, et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.
   Montrer que $A = I_n$.

Exercice 33 :

E est un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $x \in E$ et $r \geq 0$, $B(x, r) = \{y \in E \mid ||x - y|| \leq r\}$.

Soit $x \in E \backslash \{0\}$ et $r \in]0, ||x||[$. On note $K = B(x, r)$.
On suppose que $f(K) \subset K$.
Soit $a \in K$.
Si $n \in N^*$, on pose $y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in K$, et que $f(y_n) - y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer qu'il existe $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

3. Montrer que $1 \in Sp(f)$, et $Sp(f) \subset [-1, 1]$.

4. Montrer avec un exemple en dimension 3 que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice 34 :

$\mathcal{C}_1$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques, $\mathcal{C}_1^2$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques, $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$a, b, c \in \mathcal{C}_1$ vérifient $a > 0$, $c \leq 0$ et $c \neq 0$.

Si $f \in \mathcal{C}^2$, on pose $T(f) = af'' + bf' + cf$.

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2 \mid T(f) = 0\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2$. On suppose que f admet en un $x_0 \in \mathbb{R}$ un maximum local tel que $f(x_0) \geq 0$. Quel est le signe de $T(f)(x_0)$?
2. Justifier que l'image de $\mathcal{C}^2$ par T est $\mathcal{C}$.
3. Soit $g \in \mathcal{C}^2$ telle que $T(g) \geq 0$.
   Montrer que $\forall [x, y] \subset \mathbb{R}$, $\max\limits_{[x,y]} g \leq \max(0, g(x), g(y))$.
   On pourra commencer par le cas $T(g) > 0$ et utiliser la question 2 pour le cas général.
4. Montrer que la restriction de T à $\mathcal{C}_1^2$ est injective.
5. Montrer que l'application $f \mapsto (f(0) - f(1), f'(0) - f'(1))$, de E dans $\mathbb{R}^2$, est un isomorphisme.
6. Montrer que l'application $f \mapsto T(f)$, de $\mathcal{C}_1^2$ dans $\mathcal{C}_1$ est un isomorphisme.

Exercice 35 :

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{(n+1)^2} + 2\frac{a_{n+1}}{n+1}$$
   Calculer a_n, et montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leq \dfrac{C}{n^4}$
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f''(x) = e^{-x} f(x)$ et $f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
   On cherchera f sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x + b_n) e^{-nx}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x} f(x)$ et $f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Exercice 36 :

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles.

1. Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $D\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \displaystyle\int_\alpha^\beta |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| dx$.
2. On suppose que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $\displaystyle\sum_n |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$ converge, et qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq C$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_n |a_n|$ et $\displaystyle\sum_n |b_n|$ convergent.

Exercice 37 :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E.

1. On suppose dans cette question et dans les deux suivantes que $fg - gf = f$.
   Montrer que $ker(f)$ est stable par g.

2. Montrer que $ker(f) \neq \{0\}$.
   On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la trace.
   En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

4. On suppose maintenant que $fg - gf \in Vect(f, g)$.
   Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Exercice 38 :

Soient $R > 0$ et f une fonction DSE sur $D(0, R)$.
Soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que $h : z \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{Im(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{i\theta}} d\theta$ est DSE sur $D(0, r)$.

2. Calculer $h(z)$ en fonction de $f(z)$ et $f(0)$.

3. On suppose que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = r \Longrightarrow Im(f(z)) = 0$. Que dire de f?

Exercice 39 :

$(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On suppose $RC\left(\displaystyle\sum_n a_n x^n\right) > 1$, et on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2 = -i \int_0^{\pi} (f(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta$.

Exercice 40 :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ existe.

2. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2} dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 41 :

Soient $a_n = \text{card}(\{\sigma \in S_n \mid \sigma \circ \sigma = id\})$ et $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$.

1. Montrer que le rayon de $\displaystyle\sum_n b_n x^n$ est ≥ 1.

   On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

2. Montrer que $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.

3. Calculer $f(x)$ si $x \in]-1, 1[$.

4. Déterminer un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 42 :

On considère $K = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, c'est-à-dire

$$K = \left\{z \in \mathbb{C}, \exists (a,b) \in \mathbb{Q}^2, z = a + ib\sqrt{3}\right\}$$

et on note A l'ensemble des complexes de K qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On admet que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \cap A = \mathbb{Z}$.
3. En déduire que, si $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, alors

$$a + ib\sqrt{3} \in A \text{ si et seulement si } \begin{cases} 2a \in \mathbb{Z} \\ \text{ et} \\ a^2 + 3b^2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Montrer que dans ce cas, on a $2b \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que $A = \left\{z \in \mathbb{C}, \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, z = u + \dfrac{v}{2}(1 + i\sqrt{3})\right\}$.

Exercice 43 :

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et H l'hyperplan défini par

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, x_1 + \ldots + x_n = 0\}$$

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'indice n et pour tout permutation σ de $\mathcal{S}_n$, on définit l'endomorphisme f_σ de E par

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Enfin, on note P l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que P est un projecteur ; déterminer son noyau et son image.
2. Vérifier que $P \in \mathrm{Vect}\{f_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$.
3. Soit u un vecteur non nul de H.
   Montrer que $H = \mathrm{Vect}\,\{f_\sigma(u), \sigma \in \mathcal{S}_n\}$.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les f_σ, c'est-à-dire les sous-espaces E de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f_\sigma(E) \subset E$$

5. Soit g un endomorphisme de E. Montrer que g commute avec f_σ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}\{id_{\mathbb{C}^n}, P\}$.

Exercice 44 :

Soit G un groupe fini de cardinal $n \geq 2$ dont la loi de composition interne est notée multiplicativement. On note e l'élément neutre de G, p un nombre premier divisant n et on considère l'ensemble E défini par

$$E = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p, x_1 x_2 \ldots x_p = e\}$$

1. Montrer que E est ensemble contenant n^{p-1} éléments.

2. On note σ le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}$, ie la permutation de $\{1,2,\dots,p\}$ telle que $\sigma(k) = \begin{cases} k+1 & \text{si } 1 \leq k \leq p - \\ 1 & \text{si } k = p \end{cases}$
   Si $X = (x_1, \dots, x_p) \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $\sigma^k.X = (x_{\sigma^k(1)}, \dots, x_{\sigma^k(p)})$.
   Montrer que si $X \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors $\sigma^k.X \in E$.

3. Pour $X \in E$, on note $o(X)$ le sous-ensemble de E défini par
   $$o(X) = \{\sigma^k.X \quad k \in \mathbb{Z}\}$$
   Montrer que si $Y \in o(X)$ alors $o(X) = o(Y)$.
   Montrer qu'il existe X_1, X_2, ..., X_m, des éléments de E, tels que $(o(X_i))_{1 \leq i \leq m}$ constitue une partition de E (ie une famille de parties de E deux à deux disjointes dont la réunion est égale à E).

4. Montrer que si $X \in E$, $o(X)$ contient 1 seul élément ou p éléments et en déduire que G contient un élément d'ordre p.

5. Soit p et q deux nombres premiers distincts et G un groupe de cardinal pq. Montrer que G est cyclique si et seulement si G est commutatif.

Exercice 45 :

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, canoniquement euclidien, et telle que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$, c'est-à-dire telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A\|x\|$$

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$ et en déduire qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que le vecteur gradient de f en u, noté $\text{grad}f(u)$, soit nul.

2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé et $g : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) - (u_0|x)$, où $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
   En utilisant g, montrer que l'application $\text{grad}f \ : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \text{grad}f(u) \end{cases}$ est surjective.

3. On suppose à partir de maintenant que f est, de plus, strictement convexe, c'est-à-dire :
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in]0,1[, x \neq y \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
   Montrer que l'application $\text{grad}f$ est bijective. (utiliser $t \mapsto f(a + t(b-a))$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \|\text{grad}f(x)\| = +\infty$

5. Montrer que $\text{grad}f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ (application bijective continue dont la réciproque est continue). On pourra commencer par montrer que l'image directe de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ par $\text{grad}f$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 46 :

Tous les tirages sont indépendants.
On lance un dé jusqu'à obtenir 6. La variable aléatoire réelle X comptabilise le nombre de lancers effectués. Si $X = n$, on tire n boules dans une urne, avec une probabilité p d'avoir une boule blanche et $1-p$ d'avoir une boule rouge. La variable aléatoire réelle Y comptabilise le nombre de boules blanches obtenues.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Donner la loi du couple (X, Y).

3. En déduire la loi et l'espérance de Y.

Exercice 47 : $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ sont distinct deux à deux. Montrer que $1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 48 : E est un evn de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\forall x \in E$, $||f(x)|| \leq ||x||$.
Montrer que $E = Ker(f - id) \oplus Im(f - id)$.

Exercice 49 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $Com(M)$ la comatrice de M.

1. Déterminer la comatrice de $J_n(r)$.

2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $Com(AB) = Com(A)Com(B)$.

3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $Com(M)$?

4. L'application Com est-elle injective ? Quelle est son image ?

Exercice 50 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $I_n - \mu A$ est inversible.

2. On suppose que $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$.
Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $rg(f(M)) = rg(M)$.

Exercice 51 : Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Que dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique réelle ? Dans le cas où n est impair, peut-on être plus précis ?

2. Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

Exercice 52 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Établir que $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $f(x) \underset{x \to 0+}{\sim} -\ln(x)$.

3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 53 : Soit $c > 0$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, (E) : $x\sin(x) - c\cos(x) = 0$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]n\pi, n\pi + \pi/2[$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution x_n dans chaque I_n et que l'ensemble des x_n coïncide avec l'ensemble des solutions positives de (E).

2. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 54 : Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des réels deux à deux distincts modulo 2π et $m_1, ..., m_p$ des complexes non tous nuls. Le but de l'exercice est de montrer que $m_1 e^{i\theta_1 n} + ... + m_p e^{i\theta_p n}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On suppose par l'absurde que $m_1 e^{i\theta_1 n} + ... + m_p e^{i\theta_p n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1. On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \cdots & e^{i\theta_p n} \\ e^{i\theta_1 (n+1)} & \cdots & e^{i\theta_p (n+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \ldots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrer que $Y_n := M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer que $|\det(M_n)|$ est une constante non nulle.

3. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, trouver une contradiction.

Exercice 55 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de B est 1. Comparer $\det(A+B) \times \det(A-B)$ et $\det(A^2)$.

Exercice 56 : G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_n(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 57 : E est un espace euclidien. $a, b \in E\backslash\{0\}$. $f : x \in E\backslash\{0\} \mapsto \dfrac{< a, x >< b, x >}{||x||^2}$. Déterminer $\inf(f)$ et $\sup(f)$.

3 X/ENS

Exercice 58 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

Exercice 59 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v_1, ..., v_p$ des vecteurs de E et $C = \mathbb{R}^+ v_1 + ... + \mathbb{R}^+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E.

Exercice 60 : Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t) e^t dt$.

Exercice 61 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62 : Soit $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq k+1}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\sum_n |a_n|$ converge et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$. Montrer que f possède au moins $k+1$ zéros dans $[0, \pi]$.

Exercice 63 : Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x}$ la classe de conjugaison de x : $\overline{x} = \{gxg^{-1}\ ;\ g \in G\}$. On dit que x est ambivalent ssi $x^{-1} \in \overline{x}$.

1. Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent, alors tous ses éléments le sont.

2. Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tels que $g^2 = x$.
   Montrer que $\dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{x\in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

Exercice 64 : Soient $\lambda_1, ..., \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
3. Montrer que, pour tout i, λ_i est nul ou racine de l'unité.

Exercice 65 : L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable?

Exercice 66 :
On pose, si $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(n,m) = \sum_{k=1}^{n} m^{k \wedge n}$.

1. Réexprimer $f(n,m)$ en utilisant l'indicatrice d'Euler.
2. $n_1 \wedge n_2 = 1$. Montrer que si n_1 divise tous les $f(n_1, m)$, $m \in \mathbb{N}^*$, alors n_1 divise tous les $f(n_1 n_2, m)$, $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que n divise $f(n,m)$.

Exercice 67 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
$f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $\{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{C}[X]\} = E$.

1. On suppose que f est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par f est cyclique et que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini.
2. On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini. Montrer que f est cyclique.

Exercice 68 :
Trouver les $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) \leq \min(f(A), f(B))$.

Exercice 69 : Soit G un groupe.

1. On suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.
2. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il en remplaçant "fini" par "dénombrable"?

Exercice 70 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.
On pose $P = X_n + c_1 X_{n-1} + ... + c_n = (X - z_1)...(X - z_n)$.

On note $S_k = \det \begin{pmatrix} tr(A) & 1 & 0 & ... & 0 \\ tr(A^2) & tr(A) & 2 & 0 & ... \\ \vdots & & & & \\ tr(A^{k-1}) & ... & & tr(A) & k-1 \\ tr(A^k) & ... & & tr(A^2) & tr(A) \end{pmatrix}$

1. Calculer de deux façons $\sum_{k=1}^{n} \frac{P(x)}{x - z_k}$ pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max_{1 \leq \leq n} |z_i|$, dont l'une fera intervenir les $tr(A^k)$.
2. Montrer que $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} S_k$

Exercice 71 : Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, $M_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Soient f et g dans E telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n(f) = M_n(g)$. Montrer que $f = g$.
2. Existe-t-il $f \in E$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n(f) = \exp(-n^2/10)$?
3. Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n(f) = \dfrac{1}{1+10n^2}$?

Exercice 72 : Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k^k}\right)^{1/x}$.

Exercice 73 : Pour $\lambda \in]0,1[$, soit A_λ l'ensemble des k de $\mathbb{N}^*$ tels que le nombre de 9 dans l'écriture décimale de k soit majoré par λn_k, où n_k est le nombre de chiffres de k. Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\in A_\lambda}$.

Exercice 74 : Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodiques telles que $f_1+...+f_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $f_1 + ... + f_n = 0$.

Exercice 75 :

1. Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.
2. Peut-on partitionner $\mathbb{R}^2$ en disques ouverts de rayons strictement positifs ?

Exercice 76 : Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et croissante.
2. On note E l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $f \circ |g|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(2x) \leq Cf(x)$.

Exercice 77 : Soient $s > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $\forall n$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{n}$. Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 78 : Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(2)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en considérant a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\ln(2) = \dfrac{a}{b}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{ppcm(1,2,...,n)}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \dfrac{1}{n!}(X^n(1-X)^n)^{(n)}$.
   Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}dx = \frac{A_n}{b \times ppcm(1,2,...,n)}$.
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On admet que $\pi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
   Montrer que, pour n assez grand, $ppcm(1,2,...,n) \leq 3n$.
4. Conclure.

Exercice 79 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = B$. Montrer que $rg(AB - BA) \leq rg(A + B)$.

Exercice 80 : Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Comparer $tr(ABAB)$ et $tr(A^2B^2)$.

Exercice 81 : Soient $n \geq 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_1, ..., t_{n+1}$ des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que $\forall i \in \{1, ..., n+1\}$, $\det(A + t_iB) = 0$ si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W$, $B(V) \subset W$ et $\dim(W) < \dim(V)$.

Exercice 82 :

1. Soit α un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times [\![1, n]\!]$ tel que $|\alpha - p/q| < \dfrac{1}{nq}$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est pas un carré parfait.
   Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid a^2 - db^2 = K\}$ est infini.

Exercice 83 : Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites à valeurs dans un ensemble E, respectivement a-périodique et b-périodique. On suppose qu'il existe $a + b - a \wedge b$ entiers relatifs n consécutifs tels que $x_n = y_n$. Montrer que $(x_n) = (y_n)$.
On pourra commencer par le cas $a \wedge b = 1$.

Exercice 84 : Soit $n \in N^*$. On considère une famille $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On note A l'événement : la matrice $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible.
Montrer que $P(A) \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.
On pourra dénombrer $GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 85 : Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à $2M$?

Exercice 86 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice aléatoire de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, N une matrice aléatoire de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Montrer que $P(M \in GL_{n+1}(\mathbb{R})) = P(N \in GL_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 87 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall i, j,\ P_{i,j} \geq 0$ et $\forall i,\ P_{i,1} + ... + P_{i,n} = 1$.
Montrer qu'il existe $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ et $vP = v$. Interprétation probabiliste ?

Exercice 88 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$
2. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
   Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(T_n \geq x)dx = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

Exercice 89 : Déterminer les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$f(1) = 1$ et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x)f(y) \leq f(xy)$.

Exercice 90 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Comparer les polynômes minimaux de A dans $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 91 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la loi de X_1 pour que la série $\sum_n P(S_n \in A)$ soit convergente pour toute partie bornée A de $\mathbb{R}$.

Exercice 92 : Si $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, on pose $M(f) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$.
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(M^k)(f)(n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$, M^k étant l'itéré k-ième de l'opérateur M.

Exercice 93 :

1. Soit X une variable aléatoire de moyenne nulle, à valeurs réelles dans un intervalle $[a,b]$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$. Indication : on pourra utiliser la convexié de la fonction $x \mapsto \exp(tx)$.
2. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes, telles que X_i soit à valeurs dans l'intervalle $[a_i, b_i]$. Montrer que pour tout $s > 0$, on a $P\left(\sum_i (X_i - E(X_i)) > s\right) \leq \exp\left(-\frac{2s^2}{\sum_i (b_i - a_i)^2}\right)$.
3. En déduire que la probabilité de tirer au moins $\frac{3}{4}$ de "face" en N lancers de pile ou face est majorée par $exp(-N/8)$. Que donnerait l'inégalité de Tchebychev ?

Exercice 94 : $n \geq 2$.

1. Montrer que le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1, ..., n\}$ est 1.
2. Calculer l'écart-type.

Exercice 95 : On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire T donnant le premier instant k pour lequel: "il existe $i \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $k-i$ soit pair, les lancers aux instants k et i ont donné face, et les lancers à tous les instants strictement compris entre k et i ont donné pile". Montrer que T est d'espérance finie, et calculer son espérance.

Exercice 96 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter?

Exercice 97 : Soit $A(n) = \max\{ordre(s) \mid s \in S_n\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{A(n)}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 98 : Montrer que tout automorphisme de S_4 est intérieur.

Exercice 99 : Soient A l'anneau $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $c \in [0,1]$ et $I_c = \{f \in A; f(c) = 0\}$.

1. Montrer que I_c est un idéal de A et que les seuls idéaux de A contenant I_c sont A et I_c.
2. Montrer que I_c n'est pas de la forme fA pour un f de A.

3. Montrer que I_c n'est pas de la forme $f_1A + ... + f_mA$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et où les f_i sont des éléments de A.

Exercice 100 : On définit un graphe aléatoire : soit S un ensemble fini de n points (les sommets) et pour toute paire x, y d'éléments de S ($x \neq y$), on note $T_{x,y}$ une variable de Bernoulli de paramètre p ; les arêtes du graphe sont les paires x, y ($x \neq y$) telles que $T_{x,y} = 1$. Les variables $T_{x,y}$ sont supposées indépendantes.

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes de G ?
2. Soit $x \in S$ un sommet. On considère la variable aléatoire $deg(x)$ égale au nombre d'arêtes issues du sommet x. Déterminer la loi de $deg(x)$.
3. Un sommet x est dit isolé si $deg(x) = 0$. On note Z la variable aléatoire comptant les sommets isolés de G. Montrer que $E(Z) = n(1-p)^{n-1}$.
4. Montrer que $P(Z = 0) \leq \dfrac{V(Z)}{E(Z)^2}$.

   On suppose dorénavant que $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec c réel > 0.
5. Déterminer le comportement asymptotique de $E(Z)$ lorsque $n \to +\infty$.
6. Déterminer le comportement asymptotique de $P(Z \geq 1)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 101 : Soient $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ telles que $\det(AB^{-1} - I_2) = 0$. Montrer l'équivalence entre
i) A et B possèdent une valeur propre commune
ii) A et B possèdent un vecteur propre commun.

Exercice 102 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis des produits scalaires canoniques, et des normes associées.
Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère le système (S) : $\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$.
Si X est la solution de (S), on pose $f : t \mapsto ||X(t)||^2$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que, pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^n$, la fonction f soit constante.

Exercice 103 : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{1/x}dx$?

Exercice 104 : $p_0 = p_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $p_n = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x_1} ... \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n dx_{n-1}...dx_1$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(\pi/6)^n$.

Exercice 105 : Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 106 : Un parfait de $\mathbb{R}$ est une partie non vide, fermée, sans point isolé.

1. Construire un parfait de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide.
2. Construire un parfait de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide ne contenant pas de rationnel.