
Sans précision supplémentaire, les tirages se font avec équiprobabilité.
Les univers sont souvent omis. Lorsqu'on se donne $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires indépendantes etc... , par exemple, il est implicite qu'elles sont portées par un même univers probabilisé non précisé.
Concernant les familles de variables aléatoires, on abrège "mutuellement indépendantes" en "indépendantes".
E ou $\mathbb{E}$ désigne l'espérance, P ou $\mathbb{P}$ la probabilité.
$\overline{A}$, ou A^c est le complémentaire de A.

1 Exercices (niveau Sup)

Exercice 1
Une urne contient b boules blanches et n boules noires.
On effectue des tirages sans remise.
Soit E_k : "la première boule blanche apparaît au k-ième tirage".
Montrer que, si $k \leq n+1$, $P(E_k) = \dfrac{\dbinom{n+b-k}{b-1}}{\dbinom{n+b}{b}}$.

Exercice 2
Une urne contient b boules blanches et n boules noires.
$c \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
A chaque étape, on tire une boule, et on en remet $c+1$ de la même couleur dans l'urne.
Soit A_k : "le k-ième tirage donne une boule blanche".
Justifier que $P(A_k) = P(A_k|A_1)P(A_1) + P(A_k|A_1^c)P(A_1^c)$.
Montrer que $\forall k$, $P(A_k) = \dfrac{b}{b+n}$.

Exercice 3
On dispose de $m+1$ urnes $U_0, ..., U_m$.
$\forall k$, U_k contient k boules blanches et $m-k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard, et on y effectue n tirages avec remise.
Si $n < m$, calculer la probabilité $p_{n,m}$ que le $n+1$-ième tirage donne une boule blanche sachant que les n précédents ont donnés n boules blanches.
Le résultat fera apparaître $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^n$ et S_{n+1}.
On pourra introduire les événements B_k : "l'urne choisie est U_k", et A_p : "les p premiers tirages ont donnés des boules blanches", et calculer $P(A_p|B_k)$.

A n fixé, déterminer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} p_{n,m}$

Exercice 4
On dispose de n urnes et de m boules, que l'on répartit aléatoirement dans les urnes.
L'univers peut être modélisé par $\mathcal{F}(\{1,...,m\},\{1,...,n\})$ muni de l'équiprobabilité.

1. Si $k \leq m$, montrer que la probabilité, notée $p_{m,n,k}$, qu'une urne donnée soit de cardinal k est $\dbinom{m}{k}\dfrac{1}{n^k}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{m-k}$.
   Si $c > 0$, $n \to +\infty$, et m est fonction de n avec $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cn$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{m,n,k}$, à k fixé.

2. $m \leq n$. Quelle est la probabilité, notée $q_{m,n}$, que toute urne contienne au plus une boule (ie propabilité d'injectivité)?
   Si $c > 0$, $n \to +\infty$, et m est fonction de n avec $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c\sqrt{n}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_{m,n}$.

3. Si $m \geq n$, quelle est la probabilité que toute urne contienne au moins une boule (ie probabilité de surjectivité)?
   On pourra utiliser A_i : "i n'a pas d'antécédent", $P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$ et la formule du crible.

Exercice 5
Trois portes sont fermées. Derrière l'une se trouve une voiture, et derrière les deux autres un porte-clés.
Le candidat se place devant une porte. Le présentateur, qui connaît l'emplacement de la voiture, ouvre une des deux autres portes derrière laquelle se trouve un porte-clé. Laquelle des deux autres portes doit ouvrir le candidat pour maximiser sa chance de trouver la voiture?
En disant que le candidat ouvre la porte 1, et en notant V_i : "la voiture est derrière la porte i" et O_i : "le présentateur ouvre la porte i", on calculera $P(O_2|V_i)$, $P(O_2)$ puis $P(V_3|O_2)$ par exemple.

Exercice 6
Indicatrice d'Euler

$\Omega = \{1, ..., n\}$ est muni de l'équiprobabilité.
Si $k \in \{1, ..., n\}$, soit $A_k = \{a \in \Omega \mid k \ divise \ a\}$.

1. Si $k|n$, que vaut $P(A_k)$?
   Si $k_1, ..., k_q$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, montrer que $A_{k_1}, ..., A_{k_q}$ sont mutuellement indépendants.

   On note P_n l'ensemble des nombres premiers divisant n, et
   $\varphi(n) = \text{card}(\{k \in \{1, ..., n\} \mid k \wedge n = 1\})$.

2. Montrer que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{p \in P_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Exercice 7
$c \in \mathbb{N}^*$. Le joueur dispose initialement d'une fortune $k \in \{0, ..., c\}$.
Il joue à pile ou face, la pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$.
Quand il gagne (pile), sa fortune augmente d'un, quand il perd, elle diminue d'un.
La partie s'arrête quand sa fortune atteint 0 (ruine) ou c.
Calculer la probabilité $p_{k,c}$ de ruine du joueur. (trouver une relation de récurrence)

Exercice 8
$m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$.

1. Une urne contient n boules numérotées $1, ..., n$.
   On tire sans remise m boules, $m \leq n$.
   Chercher la loi du plus petit numéro, ie, en notant X la variable aléatoire donnant le plus petit numéro du tirage, calculer $P(X > k)$ si $k \in \{0, ..., n\}$.

2. Idem pour un tirage avec remise de m boules.

Exercice 9
Soit p_n la probabilité d'obtenir au moins n fois 6 en lançant $6n$ fois un dé non pipé.

1. On lance $6n$ fois un dé non pipé. Soit X_n la variable aléatoire "nombre de 6".
   Quelle est la loi de X_n?

2. Si $i \in \{0, ..., n\}$, montrer que $P(X_n = i) \leq P(X_n = n)$.

3. Soit Y de loi $B(6, 1/6)$ indépendante de X_n.
Justifier que $X_{n+1} \sim X_n + Y$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(Y \geq k+1)$.

4. Vérifier que $p_{n+1} = P(X_n \geq n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(Y \geq k+1) P(X_n = n-k)$ puis montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

5. Soit (A_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, intégrables et de variance finie, $M = E(A_1)$, $\sigma = \sigma_{A_1}$.
Soit $B_n = \dfrac{A_1 + ... + A_n - nM}{\sigma\sqrt{n}}$.
Donner l'écart type et la moyenne de B_n.

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(B_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt$

(**Théorème centrale-limite**. On a $\sqrt{2\pi} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) dx$).

6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 10

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \neq B$.
On considère $X_1, ..., X_n$, variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.
On veut montrer que $P(AX = BX) \leq \dfrac{1}{2}$. (rq : sert dans un algorithme probabiliste de vérification de produit matriciel).
On se fixe i tel que les lignes i de A et B soient différentes. On note A' et B' les lignes ($\in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$) i de A et B.
Soit $L = (l_1, ..., l_n) = A' - B'$. Disons que $l_1 \neq 0$.

1. Montrer que $P(LX = 0) = \dfrac{1}{2}\Big(P(l_2X_2 + ... + l_nX_n = 0) + P(l_2X_2 + ... + l_nX_n = -l_1)\Big)$.

2. Conclure.

Exercice 11

$m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\Omega = \mathcal{F}(\{1, ..., m\}, \{1, ..., n\})$ de l'équiprobabilité.
Si $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est le nombre de points de $\{1, ..., n\}$ sans antécédents par ω.
Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
On pourra les variables aléatoires $X_i(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si i n'a pas d'antecedent par } \omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Déterminer $E(Y)$ où $Y(\omega) = card(Im(\omega))$.

Exercice 12
Soit $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, définie sur un univers Ω.
Si $\omega \in \Omega$, $M(\omega) = (X_{i,j}(\omega))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $E(\det(M)) = \det((E(X_{i,j})_{i,j})$.
2. On suppose les $X_{i,j}$ centrées et $\forall i,j,\ E(X_{i,j}^2) = 1$.
   Calculer $E((\det(M))^2)$.

Exercice 13
Soient $X_1, ..., X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ de même loi : $P(X_i = 1) = P(X_i = 2) = ... = P(X_i = n) = \dfrac{1}{n}$.
Soit $T = \min\{j \in \{2, ..., n+1\} \mid X_j \in \{X_1, ..., X_{j-1}\}\}$ (nombre d'essais nécessaires pour obtenir un résultat déjà obtenu lors d'un tirage avec remise dans un ensemble de cardinal n)

1. Justifier que T est bien définie.
   Calculer $P(T \geq k)$ si $k \in \{1, ..., n+1\}$, puis établir $E(T) = \dfrac{n!}{n^n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\dfrac{n^i}{i!}$.
2. Vérifier que $E(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}dx$.
3. Faire le changement de variable $x = \sqrt{n}t$, puis déterminer un équivalent de $E(T)$ lorsque $n \to +\infty$ (CVD).

Exercice 14
On se donne deux urnes A et B contenant en tout $b \geq 2$ boules.
Lors de chaque étape, une boule est choisie avec équiprobabilité, et changée d'urne.
Soit X_i la variable aléatoire "nombre de boules dans l'urne A au temps i".

1. Déterminer $P(X_{k+1} = i+1 | X_k = i)$ et $P(X_{k+1} = i-1 | X_k = i)$.
2. Soit $Y_k = X_{k+1} - X_k$.
   Etablir que $E(Y_k) = 1 - \dfrac{2}{b}E(X_k)$, puis calculer $E(X_k)$.
3. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} E(X_k)$?

Exercice 15
Exemples d'utilisation de la méthode d'Erdös.
Cette méthode consiste, pour montrer l'existence d'un objet, à introduire un espace probabilisé adéquat, et à montrer que dans celui-ci la probabilité d'existence est non nulle.

Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel.

1. On veut montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tels que $\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| \leq \sqrt{n}$.
   Soient $V_1, ..., V_n$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes ($P(V_i = -1) = P(V_i = 1) = \frac{1}{2}$), et $X = ||\sum_i V_i x_i||^2$.
   Calculer $E(X)$ et conclure.

2. Soient $p_1, ..., p_n \in [0,1]$ et $y = \sum_i p_i x_i$.
   On veut montrer qu'il existe I une partie de $\{1, ..., n\}$ telle que $||y - \sum_{i \in I} x_i|| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$.
   (a) Si $(x_1, ..., x_n)$ est libre, où est géométriquement y, et où est $\sum_{i \in I} x_i$ lorsque I est une partie de $\{1, ..., n\}$? (introduire le parallélépipède engendré par les x_i)
   (b) Montrer le résultat en considérant $V_1, ..., V_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $Bernoulli(p_i)$, et $\left\|y - \sum_{i=1}^{n} V_i x_i\right\|^2$.

Exercice 16

$\Omega = S_n$ est muni de l'équiprobabilité.
Si $k \in \{1, ..., n\}$ et $\omega \in S_n$, soit $X_k(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega(k) = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
Soit $X = X_1 + ... + X_n$ (variable aléatoire "nombre de points fixes")
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 17

1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ croissantes, où I est une partie de $\mathbb{R}$.
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I, et Y une variable aléatoire indépendante de même loi.
   En considérant $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))$, montrer que $Cov(f(X), g(X)) \geq 0$.

2. Si $a_1 \leq ... \leq a_n$ et $b_1 \leq ... \leq b_n$ sont des réels, montrer que
   $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

Exercice 18

$m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.
$m + n$ électeurs $e_1, ..., e_{m+n}$ votent successivement pour deux candidats, notés A et B.
On cherche la probabilité notée $q_{m,n}$, que le candidat A ait toujours été strictement en tête, sachant qu'au final A recueille n voix (et donc B recueille m voix).
Rq : on a donc $q_{n,n} = 0$.

Plus formellement, notons $Z_{m,n} = \{(a_1, ..., a_{m+n}) \in \{-1,1\}^{n+m} \mid \sum_{i=1}^{m+n} a_i = n - m\}$, et

$Y_{m,n} = \{(a_1, ..., a_{m+n}) \in Z_{m,n} \mid \forall k \in [\![1, ..., m+n]\!],\ \sum_{i=1}^{k} a_i > 0\}$.

$q_{m,n} = \dfrac{\text{card}(Y_{m,n})}{\text{card}(Z_{m,n})}$.

1. $\text{card}(Z_{m,n}) =?$

2. Notons $Y^+_{m,n} = \{(a_1, ..., a_{m+n}) \in Y_{m,n} \mid a_{m+n} = 1\}$ et $Y^-_{m,n} = \{(a_1, ..., a_{m+n}) \in Y_{m,n} \mid a_{m+n} = -1\}$
Si $n > m$, montrer que $\text{card}(Y^+_{m,n}) = \text{card}(Y_{m,n-1})$ et $\text{card}(Y^-_{m,n}) = \text{card}(Y_{m-1,n})$.
En déduire que $q_{m,n} = \dfrac{n}{n+m} q_{m,n-1} + \dfrac{m}{n+m} q_{m-1,n}$.

3. Montrer que $q_{m,n} = \dfrac{n-m}{n+m}$. (récurrence sur $m+n$)

Exercice 19
On dispose de deux dés "pipés". On se demande si la somme S des numéros des deux dés peut vérifier $\forall k \in [\![2, 12]\!]$, $P(S = k) = \dfrac{1}{11}$?
En d'autres termes, on se donne X, Y variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$ (non nécessairement de même loi), et on pose $S = X + Y$.
On suppose $\forall k \in [\![2, 12]\!]$, $P(S = k) = \dfrac{1}{11}$.
On note $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$ la fonction caractéristique de X.

1. Donner $G_S(t)$, et une relation entre $G_X(t)$, $G_Y(t)$, et $G_S(t)$.

2. Etablir une contradiction.

2 Problèmes

2.1 Preuve probabiliste du théorème de Weierstrass

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
Si $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, ..., n\}$, on pose :
$r_{n,k}(x) = \dbinom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$, et $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Si $\delta > 0$, $w_\delta(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0, 1],\ |x - y| \le \delta\}$.

1. Pourquoi a-t-on $w_\delta(f) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$?

2. Soit $x \in [0, 1]$. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $bernoulli(x)$.
Soit $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Quelle est la loi de S_n?
Exprimer $E(f(S_n/n))$ avec f_n.

3. (a) Soient $\delta > 0$, $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme précédemment, soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $bernoulli(x)$ et $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Soit $A_{n,\delta} = \left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \ge \delta\right\}$.
Montrer que $|E(f(S_n/n)) - f(x)| \le w_\delta(f) + 2P(A_{n,\delta})\|f\|_\infty \le w_\delta(f) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$.
(b) En déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

2.2 Formule de Wald et application

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et N des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé, mutuellements indépendantes.
Les X_n ont toutes même loi.
On pose, si $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = X_1(\omega) + ... + X_{N(\omega)}(\omega)$, avec la convention $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Soit $t \in [0,1]$. Montrer que :
   $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} P(N=p)P(X_1+...+X_p=k)t^k$
   $= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i_0,\ldots,i_p\in\mathbb{N}\\ i_0+\ldots+i_p=k}} P(N=p)P(X_1=i_0)t^{i_0}...P(X_p=i_p)t^{i_p}$
   $= \sum_{p=0}^{+\infty} P(N=p)G_{X_0}(t)^p = G_N(G_{X_1}(t))$.
3. On suppose que N et X_1 sont d'espérances finie. Montrer que S est d'espérance finie et $E(S) = E(X_1)E(N)$.
4. Une application:
   Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'oeufs, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité qu'un oeuf éclose et donne un nouvel insecte est $\alpha \in]0,1[$.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'insectes issus de la ponte.
   Déterminer la loi de X, et son espérance.

2.3 Approximation L^1 par une constante

X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles d'espérance finie.
Si $x \in \mathbb{R}$, soit $V(x) = E(|X - x|)$.

1. Montrer que V est 1-lipschitzienne, et admet un minimum.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que :
   $V(x+\varepsilon) - V(x) = \varepsilon\Big(-P(X \geq x+\varepsilon) + P(X \leq x) + P(x < X < x+\varepsilon)\Big) + 2E\Big((x - X)1_{x<X<x+\varepsilon}\Big)$.
3. En déduire que V est dérivable à droite en x, et donner $V'_d(x)$.
4. Calculer similairement $V'_g(x)$.

   Soit $E = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \geq x) \geq 1/2 \textit{ et } P(X > x) \leq 1/2\}$.

5. Montrer que E est non vide.
6. Montrer que E est un intervalle, puis que E est un segment.
7. Montrer que V est constante sur E, égale à $\min\limits_{\mathbb{R}} V$.

2.4 E(|X+Y|)

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, ayant une espérance.

1. On veut montrer que $E(|X+Y|) \geq E(|X|)$.
   (a) Traiter le cas particulier dans lequel X est à valeurs dans $\{-1,1\}$. (tout calculer à partir de $p = P(X=1)$ et $q = 1-p$)
   On revient au cas général.
   On note $a = \sum_{x \geq 0} xP(X=x)$, $b = \sum_{x<0} |x|P(X=x)$, $p = P(X \geq 0)$, $q = 1-p$.
   (b) Exprimer $\sum_{x,y \geq 0} |x+y|P(X=x)P(Y=y)$ en fonction de a, b, p, q.
   (c) Montrer que $\sum_{x \geq 0, y<0} |x+y|P(X=x)P(Y=y) \geq aq - bp$.
   (d) Montrer que $E(|X+Y|) \geq 2(ap + bq + |aq - bp|)$.
   (e) Montrer que $E(|X+Y|) \geq E(|X|)$.

2. On veut montrer que $E(|X+Y| \geq E(|X-Y|)$.
   On suppose dans les deux questions suivantes X, Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   On note $X^+ = max(X,0)$, $X^- = max(-X,0)$. idem pour Y.
   (a) Vérifier que:
   $|X+Y| - |X-Y| = 2\Big(min(X^+,Y^+) + min(X^-,Y^-) - min(X^-,Y^+) - min(X^+,Y^-)\Big)$.
   (b) Montrer que $E(|X+Y|) - E(|X-Y|) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(P(X^+ > n) - P(X^- > n))^2 \geq 0$.
   (c) On revient au cas général. [ ] désigne la partie entière.
   Montrer le résultat en utilisant $X_n = \frac{1}{n}[nX]$ et $Y_n = \frac{1}{n}[nY]$

2.5 Graphe aléatoire

On définit un graphe aléatoire : soit S un ensemble fini de n points (les sommets) et pour toute paire x, y d'éléments de S ($x \neq y$), on note $T_{x,y}$ une variable de Bernoulli de paramètre p ; les arêtes du graphe sont les paires x, y ($x \neq y$) telles que $T_{x,y} = 1$. Les variables $T_{x,y}$ sont supposées indépendantes.

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes de G ?

2. Soit $x \in S$ un sommet. On considère la variable aléatoire $deg(x)$ égale au nombre d'arêtes issues du sommet x. Déterminer la loi de $deg(x)$.

3. Un sommet x est dit isolé si $deg(x) = 0$.
   On note Z la variable aléatoire comptant les sommets isolés de G. Montrer que $E(Z) = n(1-p)^{n-1}$.
   On pourra introduire, si $x \in S$, la variable aléatoire $T_x = \begin{cases} 1 \ si\ x\ est\ isole \\ 0 \ sinon \end{cases}$.

   On suppose dorénavant que $p = c\frac{\ln(n)}{n}$, avec c réel > 0.

4. Si $c > 1$, déterminer les limites de $E(Z)$ et $P(Z=0)$ lorsque $n \to +\infty$.

5. Montrer que $P(Z=0) \leq \dfrac{V(Z)}{E(Z)^2}$.

6. Calculer $V(Z)$.

7. Ici $c<1$. Limite de $P(Z=0)$ lorsque $n \to +\infty$?

2.6 Bornes asymptotiques d'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$, et déplacement moyen

2.6.1 Propriété de Borel-Cantelli

Soit (E_n) une suite d'évènements d'un espace probabilisé. Ω est l'univers.
On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)$ converge.
On note $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(E_k)$, et $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} E_k$.

1. Montrer que $P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. Notons $Q = \{\omega \in \Omega \mid \exists N_\omega \in \mathbb{N} \ ; \ \forall k \geq N_\omega, \ \omega \notin E_k\}$ et
$V = \{\omega \in \Omega \mid \text{il existe une infinité de } n \text{ tels que } \omega \in E_n\}$.
Quel est le lien entre Q et V, entre V et les B_n?
Montrer que $P(Q) = 1$ et $P(V) = 0$.

2.6.2 Bornes asymptotiques d'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

On se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un univers Ω, toutes de même loi : $P(X_n=-1)=1/2$, $P(X_n=1)=1/2$.
On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$

3. Donner $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

4. Montrer que $E(\exp(tS_n)) = (\text{ch}(t))^n$

5. $\lambda > 0$. Montrer que $\forall t > 0$,
$P(S_n \geq \lambda) = P(\exp(tS_n) \geq \exp(\lambda t)) \leq (\text{ch}(t))^n e^{-\lambda t} \leq \exp\left(n\dfrac{t^2}{2} - \lambda t\right)$.
En déduire que $P(S_n \geq \lambda) \leq \exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2n}\right)$.

6. $\lambda > 0$. Montrer que $P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2n}\right)$.

7. Montrer que $P(\{\omega \mid \exists N_\omega \in \mathbb{N} \ ; \ \forall k \geq N_\omega, \ |S_n(\omega)| \leq 2\sqrt{n\ln(n)}\}) = 1$.

2.6.3 Déplacement moyen

On note $p_n = P(S_n = 0)$.

8. Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1$, donner une relation entre $P(S_{n+1}=k)$, $P(S_n=k-1)$, $P(S_n=k+1)$.

9. Montrer que $E(|S_{n+1}|) = p_n + E(|S_n|)$.

10. Calcul et équivalent de p_{2n} et p_{2n+1}.

11. Équivalent de $E(|S_n|)$ quand $n \to +\infty$.

2.7 Marches aléatoires

Les deux parties sont indépendantes.

2.7.1 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$, retour à l'origine

$p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
Au temps 0, une personne est à la position 0. $\forall n \in \mathbb{N}$, au temps n, si la personne est en position $x \in \mathbb{Z}$, elle va à gauche en position $x-1$ avec une probabilité q, et à droite en position $x+1$ avec une probabilité p.
Formellement, on se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un univers Ω, toutes de même loi : $P(X_n = -1) = q$, $P(X_n = 1) = p$.
La position de la personne au temps $n \in \mathbb{N}^*$ est donnée par la variable aléatoire $S_n = X_1 + ... + X_n$. On pose $S_0 = 0$ (position au temps 0)
On définit les évènements : $\forall n \in \mathbb{N}$, $O_n = \{S_n = 0\}$ ("la personne est à l'origine au temps n"), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{S_1 \neq 0, ..., S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\}$ ("le premier retour à l'origine se fait au temps n").
On note $h_n = P(O_n)$ (On a donc $h_0 = 1$) et $y_n = P(A_n)$. On convient que $y_0 = 0$.

1. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

2. Montrer que, si $\varepsilon > 0$,
$P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - (p-q)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1-(p-q)^2}{n\varepsilon^2}$.

3. Si n est impair, que vaut h_n?

4. Si, au temps $2n$, la personne est en position $2k$ avec $|k| \leq n$, combien de fois est-elle allée à droite?

5. Si $|k| \leq n$, montrer que $P(S_{2n} = 2k) = \begin{pmatrix} 2n \\ n+k \end{pmatrix} p^{n+k}q^{n-k}$.

6. En utilisant la formule de Stirling, si $p = q = \dfrac{1}{2}$, donner un équivalent de h_{2n} quand $n \to +\infty$.

7. $n \in \mathbb{N}^*$. $P(O_n|\overline{A_1 \cup ... \cup A_n}) = ?$. Justifier que $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k P(O_n|A_k)$.

8. Montrer que, si $k \in \{1, ..., n\}$, $P(O_n|A_k) = h_{n-k}$.

   On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n t^n$ et $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n t^n$.

9. Justifier que f est définie et continue sur $]-1,1[$, et g définie et continue sur $[-1,1]$.

10. Montrer que $\forall t \in]-1,1[$, $f(t) = 1 + f(t)g(t)$.

11. Justifier que $\forall t \in]-1,1[$, $f(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} (pq)^n t^{2n}$.

    Montrer que $\forall t \in]-1,1[$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqt^2}}$.

12. Calculer $g(t)$ si $t \in]-1,1[$, et justifier que la formule reste vavable sur $[-1,1]$.

13. On note $w = P(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0)$ (probabilité de retour à l'origine)
Exprimer w avec g, et vérifier que $w = 1 - |p-q|$.
Dans quel cas a-t-on $w = 1$?

2.7.2 Marche aléatoire dans $\{0, ..., N\}$ à frontières absorbantes

$N \geq 2$. $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
Une personne part d'une position $k \in \{1, ..., N-1\}$ (temps 0). Au temps n, si sa position x est dans $\{1, ..., N-1\}$, elle va en position $x-1$ avec la probabilité q, en position $x+1$ avec la probabilité p. Si elle est à la position 0 ou N, elle y reste.
On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{pmatrix}$, où $x_i(n)$ est la probabilité d'être à la position i au temps n. X_0 est donc le $k+1$-ième vecteur de la base canonique.

14. Donner $P \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall n$, $X_{n+1} = PX_n$.
P est ainsi fixée pour la suite.

15. Justifier que P admet 1 comme valeur propre d'ordre ≥ 2.

16. On suppose ici $N = 3$, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}$
Calculer le polynôme caractéristique de P, et montrer que P est diagonalisable.
Donner une base de $E_1(P)$.
On se donne (v_1, v_2, v_3, v_4) une base de vecteurs propres de P avec $Pv_1 = v_1$, $Pv_2 = v_2$.
On écrit $X_0 = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i$.
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} X_n$ en fonction des x_i et v_i. Quels sont les coefficients toujours nuls de $\lim_{n \to +\infty} X_n$?

On revient au cas général.
On admettra que P est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$. $Sp(P)$ désigne le spectre complexe de P.

17. Rappeler pourquoi $Sp(P) = Sp({}^tP)$.

18. Soit $\lambda \in Sp(P)$, et $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un vecteur propre associé pour ${}^tP$: ${}^tPV = \lambda V$.
En considérant i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{0 \leq j \leq N} |v_j|$, montrer que $|\lambda| \leq 1$.

19. Soit $\lambda \in Sp(P)$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, et $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un vecteur propre associé pour ${}^tP$: ${}^tPV = \lambda V$.
Montrer que $v_0 = v_N = 0$.
On considère alors $i_0 \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max_{0 \leq j \leq N} |v_j|$.
Si $2 \leq i_0 \leq N-2$, montrer que $|v_{i_0 - 1}| = |v_{i_0+1}| = |v_{i_0}|$.
Etablir une contradiction.

20. Montrer que $(P^n)_n$ converge.

21. Sans justification, dire de quelle forme est $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$.

2.8 Problème de file d'attente

On étudie une file d'attente. Le temps est discrétisé. A chaque étape un client de la file d'attente, s'il y en a au moins un, est reçu au guichet.
Si $n \in \mathbb{N}$, X_n est la variable aléatoire donnant le nombre de personnes dans la file d'attente au temps n, et est donc à valeur dans $\mathbb{N}$.
On se donne une suite (A_n) de variables aléatoires indépendantes modélisant l'arrivée de personnes dans la file.
Tous les A_n ont même loi. On notera $A = A_0$.
A est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ supposée vérifier $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(A = k) > 0$ et $E(A) < \infty$.

On a pour tout n, $X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} \text{ si } X_n = 0 \\ X_n - 1 + A_{n+1} \text{ sinon} \end{cases}$.

1. **Fonction caractéristique**
   Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction caractéristique par $\forall t \in \mathbb{R}$,
   $\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)e^{ikt}$.
   (a) Montrer que Φ_X est définie, continue, et 2π périodique.
   Que vaut $\Phi_X(0)$?
   (b) Si $E(X) < \infty$, montrer que Φ_X est $\mathcal{C}^1$. Que vaut alors $\Phi'_X(0)$?
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Phi_X(t)e^{-ikt}dt$ si $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Soit (X_n) une suite de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que (Φ_{X_n}) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En notant $p_k = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$, montrer que $\displaystyle\sum_k p_k$ converge et que
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \leq 1$.
   (e) Si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace et indépendantes, quelle relation y-a-t-il entre Φ_X, Φ_Y, et Φ_{X+Y}?
   (f) Soient $a, b > 0$ avec $b < a$. Déterminer la loi de X si $\Phi_X(t) = \dfrac{a-b}{a-be^{it}}$.

2. **Etude d'une suite récurrente**
   Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Soit $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{C}$.
   $(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = ax_n + b_n$.
   (a) Calculer la limite finie éventuelle, γ, de (x_n).
   (b) Soit $\varepsilon > 0$.
   Montrer que $|x_{n+1} - \gamma| \leq a|x_n - \gamma| + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
   (c) Si $\varepsilon > 0$, calculer la suite (q_n) telle que $q_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n$, $q_{n+1} = aq_n + \varepsilon$.
   Quelle est la limite de q_n?

(d) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$. ("en ε")

3. **Etude de** (X_n)

(a) Justifier que X_n est indépendant de A_{n+1}.

On note pour la suite $\Phi_n = \Phi_{X_n}$ et $g = \Phi_A$.

(b) Montrer que $\Phi_{n+1}(t) = g(t)(e^{-it}\Phi_n(t) + (1-e^{-it})P(X_n = 0))$.
On suggère d'écrire $e^{itX_{n+1}} = e^{it(X_n-1+A_{n+1})} + 1_{\{X_n=0\}} \times ...$

On suppose $0 < E(A) < 1$. On admet qu'alors $P(X_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \in [0,1]$.

(c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $|g(t)| < 1$.

(d) Montrer que (Φ_n) converge simplement, vers une fonction f que l'on calculera. (on distinguera $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $t \in 2\pi\mathbb{Z}$)

(e) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(f) A quelle CNS f est-elle continue?

2.9 Familles ε-orthonormées

Partout, $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique et de la norme associée.
Si $\varepsilon \in [0,1]$, une famille $(x_1, ..., x_p)$ de $\mathbb{R}^n$ sera dite ε-orthonormée (on abrégera en $\varepsilon - ON$) si et seulement si $\forall i$, $||x_i|| = 1$, et $\forall i \neq j$, $| < x_i, x_j > | \leq \varepsilon$.

Une variable de Rademacher est une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(X = -1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Dans $\mathbb{R}^n$, un vecteur de Rademacher est une variable aléatoire $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ dans laquelle $X_1, ..., X_n$ sont des variables de Rademacher indépendantes.

Ainsi, p vecteurs de Rademacher de $\mathbb{R}^n$ indépendants s'écrivent $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,n} \end{pmatrix}$, ..., $X_p = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} X_{p,1} \\ \vdots \\ X_{p,n} \end{pmatrix}$ avec $(X_{i,j})$ famille de variables de Rademacher indépendantes.

$[x]$ désigne la partie entière de x.

Les deux parties du problème sont indépendantes. Seule la première utilise des probabilités.

2.9.1 $\mathbb{R}^n$ contient une famille $\varepsilon - ON$ de cardinal $\left[e^{\frac{\varepsilon^2 n}{4}}\right]$

1. Montrer que le produit de deux variables de Rademacher indépendantes est une variable de Rademacher.

2. Soient X, Y deux vecteurs de Rademacher indépendants de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(t < X, Y >) = \left(\operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.

3. Quelle est la norme d'un vecteur de Rademacher?

4. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$ (DSE)
   Soient X, Y deux vecteurs de Rademacher indépendants de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ E(\exp(t < X, Y >) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2n}\right)$.

5. Soient X, Y deux vecteurs de Rademacher indépendants de $\mathbb{R}^n$ et $Z =< X, Y >$. Soient $r, t > 0$.
   Montrer que $P(Z \geq r) = P(\exp(tZ) \geq \exp(tr)) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2n} - rt\right)$.
   En déduire que $P(Z \geq r) \leq \exp\left(-\dfrac{nr^2}{2}\right)$

6. Soient X, Y deux vecteurs de Rademacher indépendants de $\mathbb{R}^n$, $Z =< X, Y >$, et $r > 0$.
   Montrer que $P(|Z| \geq r) \leq 2\exp\left(-\dfrac{r^2 n}{2}\right)$

7. Soient $X_1, ..., X_p$ des vecteurs de Rademacher indépendants de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer que
   $P(\exists(i, j), i < j,\ tq\ | < X_i, X_j > | \geq \varepsilon) \leq 2\dbinom{p}{2}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2 n}{2}\right) < p^2\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

8. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, et $p = \left[\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)\right]$.
   Montrer qu'il existe une famille $(e_1, ..., e_p)$ $\varepsilon - ON$ de $\mathbb{R}^n$.

2.9.2 Une famille de $\mathbb{R}^n$ $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} - ON$ est de cardinal $\leq 2n - 1$

Matrices de Gram Si $e_1, ..., e_p \in \mathbb{R}^n$, on pose $G(e_1, ..., e_p) = (< e_i, e_j >)_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

9. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $A = G(e_1, ..., e_p)$
   Soient $x = x_1e_1 + ... + x_pe_p$, $y = y_1e_1 + ... + y_pe_p$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.
   Montrer que $< x, y >=< X, AY >$ (calculer les deux termes avec des $\sum\sum$)
   En déduire, en utilisant $Ker(A)$, que A est inversible.

10. Soit $e_1, ..., e_p \in \mathbb{R}^n$, $r = rang(e_1, ..., e_p)$, et $A = G(e_1, ..., e_p)$.
    Quitte à permuter, disons que $(e_1, ..., e_r)$ est libre, et $\forall i > r$, $e_i \in vect(e_1, ..., e_r)$. Ceci ne fait que permuter les lignes et colonnes de A, et donc ne change pas le rang de A.
    Montrer que $rg(A) = r$.

11. Si $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leq r \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$.

12. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $r = rg(A)$, montrer que $(tr(A))^2 \leq r\ tr(A^2)$.

13. Soit $\varepsilon \in [0,1]$. Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,\ a_{i,i} = 1$, et $\forall i \neq j,\ |a_{i,j}| \leq \varepsilon$.
Montrer que $rg(A) \geq \dfrac{n}{1+(n-1)\varepsilon^2}$.

14. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} - ON$ de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $p \leq 2n-1$.

2.10 Apparition de motifs, temps d'apparition

On dispose d'un ensemble fini E de symboles. a et b sont deux éléments distincts de E. A chaque étape, on tire aléatoirement un symbole.
La variable aléatoire X_n, $n \in \mathbb{N}$, donne le symbole tiré à l'étape n. Les X_n sont indépendantes et toutes de même loi.
On a $P(X_n = a) = \alpha$ et $P(X_n = b) = \beta$ avec $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta \leq 1$.
Si $k \geq 3$, on pose $Y_k = (X_{k-3}, X_{k-2}, X_{k-1}, X_k)$, variable aléatoire à valeurs dans E^4.
On note $T = \inf\{k \in \mathbb{N},\ k \geq 3 \mid Y_k = (b,a,b,a)\} \in [\![3, +\infty[\![\cup \{+\infty\}$. (on pose $T = +\infty$ quand $\forall k,\ Y_k \neq (b,a,b,a)$)

1. T est presque sûrement fini.

   On note A_k l'événement $Y_k = (b,a,b,a)$.

   (a) $P(A_k) =?$. Justifier que $(A_{4k})_{k\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants.
   On pose $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{4k}}$. On notera que $(B_n)_n$ est décroissante.

   (b) Déterminer $P(B_n)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

   (c) Montrer que $(T = +\infty) \subset \displaystyle\bigcap_{n\geq 3} B_n$ et en déduire $P(T = +\infty) = 0$.

   De ce fait, on peut supposer pour la suite, ce qui ne change rien, que T est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Relation de récurrence

   (a) Justifier que $(T = k)$, $(T \leq k)$, $(T > k)$ sont indépendants de tout événement $Y_p = A$ avec $A \in E^4$ et $p \geq k+4$.

   On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$
   Soit E_i l'événement $(Y_n = (b,a,b,a)) \cap (T = n-i)$.

   (b) Montrer que
   $(T = n) = ((Y_n = (b,a,b,a)) \cap (T > n-4)) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.

   (c) Justifier que $P(E_1) = P(E_3) = 0$.
   Montrer que $P(E_2) = \alpha\beta P(T = n-2)$.

   (d) En déduire $P(T = n) = \alpha^2\beta^2 P(T > n-4) - \alpha\beta P(T = n-2)$ (*).

3. Espérance

   On rappelle que, comme T est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$ En sommant $(*)$ pour $n \geq 4$, montrer que $E(T) = \dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2} - 1$

4. Fonction génératrice. On note, si $|t| < 1$, $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)t^n$.

   (a) Si $|t| < 1$, montrer que la famille $(P(T = k)t^n)_{n\in\mathbb{N},\ k\geq n+1}$ est sommable, puis que:
   $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n)\frac{t^n - 1}{t-1} = \frac{1 - G(t)}{1-t}$.

   (b) Montrer que $G(t) = \frac{(\alpha\beta)^2(1 - t + t^4)}{(1-t)(1 + (\alpha\beta)t^2) + (\alpha\beta)^2t^4}$. (multiplier (*) par t^n et sommer pour $n \geq 3$)

   (c) Justifier que T admet un moment d'ordre 2. Comment calculer $V(T)$?

2.11 Loi forte des grands nombres dans le cas L^4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi, d'espérance finie. Soit $m = E(X_i)$.
On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.
La loi forte des grands nombres stipule que $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$ presque sûrement ie

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{S_n(\omega)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m\right\}\right) = 1$$

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas $m = 0$.

   On suppose désormais $m = 0$.
   On va démontrer ce théorème, ici, en rajoutant une hypothèse simplificatrice :
   On suppose de plus que $C = E(X_0^4) < \infty$.

2. Justifier que $X_i^2 \leq 1 + X_i^4$, en en déduire que $E(X_i^2) < \infty$.
   Montrer de même que $E(|X_i^3|) < \infty$.

3. Montrer que $E(S_n^4) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^4 + 6\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i^2X_j^2\right)$.

4. Justifier que $(E(X_i^2))^2 \leq E(X_i^4)$, et montrer que $E(S_n^4) \leq 3Cn^2$.

5. Montrer que $\sum_n P\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{n^{1/8}}\right)$ converge.

6. Conclure en utilisant la propriété de Borel-Cantelli (cf problème 2.4)

2.12 Exemples de cas du théorème du zéro-un de Kolmogorov

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\mathbb{R}$ définies sur un espace probabilisé dont l'univers est Ω.

On admettra une extension du lemme des coalitions à des familles infinies: Si un évènement A dépend uniquement des $(X_i)_{i\in I}$, et B dépend des $(X_j)_{j\in J}$, avec $I \cap J = \emptyset$, I, J pouvant être infinis, alors A et B sont indépendants.

On rappelle le critère de Cauchy, vu en exercice: $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq N$, $|x_n - x_p| \leq \varepsilon$.

Soient $A = \{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ converge }\}$ et $B = \{\omega \in \Omega \mid \sum_n X_n(\omega) \text{ converge }\}$.

1. Résultats préliminaires

   (a) Soit C un évènement, et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements telle que pour tout k, C_k est indépendant de C.
   En notant que $\forall n$, $P\left(C \cap \bigcap_{k=0}^{n} C_k\right) = P(C)P\left(\bigcap_{k=0}^{n} C_k\right)$ (pourquoi?), montrer que $\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k$ et C sont indépendants.

   (b) Soit C un évènement, et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements telle que pour tout k, C_k est indépendant de C.
   Montrer que $\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k$ et C sont indépendants.

2. Vérifier que $A = \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{p\geq N} \{|X_n - X_p| \leq 1/q\}$ et en déduire que A est un évènement.
   On rappelle que $\{|X_n - X_p| \leq 1/q\}$ est une notation abrégée pour $\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X_p(\omega)| \leq 1/q\}$

3. On note $A_k = \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\geq k} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{p\geq N} \{|X_n - X_p| \leq 1/q\}$. justifier que $A_k = A$. (ce qui formalise que A ne dépend que de $(X_i)_{i\geq k}$)

   Pour alléger les choses, on écrit dans la suite les évènements sous forme quantifiée. Tout peut être réécrit avec des opérations ensemblistes comme précédemment.

   Si $k \leq k_2$ et $q > 0$, soit $V_{k,q,k_2} = \{\omega \in \Omega \mid ; \forall n, p \in [\![k, k_2]\!], |X_n(\omega) - X_p(\omega)| \leq 1/q\}$.

4. Justifier que V_{k,q,k_2} est indépendant de A, puis que
   $W_{k,q} := \{\omega \in \Omega \mid \forall n, p \geq k, |X_n(\omega) - X_p(\omega)| \leq 1/q\}$ est indépendant de A.

5. Montrer que A est indépendant de A.

6. En déduire $P(A) \in \{0, 1\}$.

7. De même, établir que B est un évènement, et $P(B) \in \{0, 1\}$.

   C'est un fait général concernant les "évènements queue", ie les évènements ne dépendant pas d'un nombre fini de X_n, appelé loi du zéro-un de Kolmogorov.

2.13 PGCD de deux entiers

2.13.1 Première approche

Notation: si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} ...$ se lit somme sur les diviseurs positifs d de n.

1_A est la fonction caractéristique de A: $1_A(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ sinon \end{cases}$. $\overline{A}$ est le complémentaire de A.

1. Fonction de Möbius.
On définit la fonction de Möbius, sur $\mathbb{N}^*$ par:
$\mu(1) = 1$.
Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et n s'écrit $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, $p_1, ..., p_k$ étant des nombres premiers distincts deux à deux, et $\alpha_i \geq 1$, alors $\mu(n) = 0$ si il existe i tel que $\alpha_i \geq 2$, et sinon (ie $n = p_1...p_k$), $\mu(n) = (-1)^k$.

   (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \\ 0 \ si \ n \geq 2 \end{cases}$. On introduira la décomposition de n.

   (b) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$.
   On dira pourquoi ce qui suit est licite.
   Vérifier que $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}\right) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}^*} \frac{\mu(k)}{n^2k^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d)\right) = 1.$
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = ?$
   Remarque: la fonction de Möbius sert beaucoup en arithmétique via la formule d'inversion suivante (ne servira pas par la suite. le lecteur pourra l'établir):
   Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, soit $g : n \in \mathbb{N}^* \mapsto f(1) + f(2) + ... + f(n)$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)g(d)$.

2. Formule du crible.
On se donne un espace probabilisé.

   (a) Si A, B sont des évènements, vérifier: $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$, $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$, $P(A) = \mathbb{E}(1_A)$.

   (b) Soient $A_1, ..., A_k$ des évènements.
   Montrer que $\displaystyle 1 - P(A_1 \cup .. \cup A_k) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k}(1 - 1_{A_i})\right)$, et en déduire la formule du crible:
   $$P(A_1 \cup .. \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+1}\sum_{1\leq n_1<n_2<...<n_i\leq k} P(A_{n_1} \cap ... \cap A_{n_i})\right).$$
   Remarque: Si E est un ensemble fini muni de l'équiprobabilité, en écrivant $P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(E)$, on obtient la version "cardinaux":
   $$\text{card}(A_1 \cup .. \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+1}\sum_{1\leq n_1<n_2<...<n_i\leq k} \text{card}(A_{n_1} \cap ... \cap A_{n_i})\right)$$

3. Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux.
Dans la suite, si $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y_n désignent deux variables aléatoires définie sur un même univers probabilisé, indépendantes, suivant toutes deux la loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$, et $V_n = X_n \wedge Y_n$.

   (a) n est fixé. Soient $p_1 < ... < p_k$ les nombres premiers $\leq n$.
   Montrer successivement les égalités suivantes:

      i. $\displaystyle 1 - P(V_n = 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k}(X_n \in p_i\mathbb{N}^*) \cap (Y_n \in p_i\mathbb{N}^*)\right)$

      ii. $\displaystyle 1 - P(V_n = 1) = \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+1}\sum_{1\leq s_1<...<s_i\leq k} P((X_n \in p_{s_1}...p_{s_i}\mathbb{N}^*) \cap (Y_n \in p_{s_1}...p_{s_i}\mathbb{N}^*))\right)$

iii. $1-P(V_n=1)=\sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+1}\sum_{1\leq s_1<...<s_i\leq k}\left(\frac{E(n/(p_{s_1}...p_{s_i})}{n}\right)^2\right)$ ($E(.)$ est la partie entière)

iv. $P(V_n=1)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{E(n/k)}{n}\right)^2$

(b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\left(\frac{E(n/k)}{n}\right)^2-\frac{1}{k^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (on se contentera de $|\mu(k)|\leq 1$) et en déduire $P(V_n=1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{6}{\pi^2}$.

Remarque: la "probabilité que deux entiers soient premiers entre eux" n'a pas de sens, car on ne peut mettre de loi uniforme sur $\mathbb{N}^*$.

Mais si on se fixe une borne n de tirage grande, $P(V_n=1)\simeq\frac{6}{\pi^2}\simeq 0,61$

2.13.2 Seconde approche

1. Soient deux variables aléatoires , X, Y, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que $\forall a\in\mathbb{N}^*$, $P(X\in a\mathbb{N}^*)=P(Y\in a\mathbb{N}^*)$.
   On veut montrer que $X\sim Y$.
   Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.

   (a) $a\in\mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$P(X=a)=P(X\in a\mathbb{N}^*)-P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(X\in ap_i\mathbb{N}^*)\right)=P(X\in a\mathbb{N}^*)-\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X\in ap_i\mathbb{N}^*)\right).$$

   (b) En utilisant la formule du crible, montrer que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X\in ap_i\mathbb{N}^*)\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(Y\in ap_i\mathbb{N}^*)\right)$ et conclure.

2. Loi zêta.
   Si $x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.
   On se fixe $x>1$. On définit la loi L par: $X\sim L$ si et seulement si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X=n)=\frac{1}{n^x\zeta(x)}$.

   (a) Vérifier que L est bien une loi de probabilité (appelée loi zêta de paramètre x).

   (b) Si $a\in\mathbb{N}^*$, montrer que $P(X\in a\mathbb{N}^*)=\frac{1}{a^x}$.

3. Les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé.
   On note X_n, Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,2,...,n\}$. On note W_n la variable aléatoire $W_n=X_n\wedge Y_n$.

   (a) $a\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $P(W_n\in a\mathbb{N}^*)=\left(\frac{E(n/a)}{n}\right)^2\leq\frac{1}{a^2}$, $E(.)$ désignant la partie entière.

   (b) $\lim_{n\to+\infty}P(W_n\in a\mathbb{N}^*)=?$

   (c) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(P(W_n=k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. on note l_k sa limite.
   Indication: on utilisera 1.a et la formule du crible. Un problème de double limite et de convergence normale doit apparaître.

(d) Soit $\varepsilon > 0$.
On considère N tel que $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$.
Montrer que $1 - \varepsilon \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} l_n \leq 1$, et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 1$.
Ainsi, (l_n) définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(e) Soit W variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(W = k) = l_k$.
Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n \in a\mathbb{N}^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(W \in a\mathbb{N}^*)$.

(f) Quelle est la loi de W? $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(W_n = a) =?$

2.14 Inégalité de Le Cam

1. $p \in [0, 1]$. Soient X, Y deux variables aléatoires sur un univers Ω telles que $X \sim Bernoulli(p)$ et $Y \sim Poisson(p)$.

   (a) Soient X', Y' deux variables aléatoires sur un univers Ω' à valeurs dans $\mathbb{N}$ et A une partie de $\mathbb{N}$.
   Montrer que $|P(X' \in A) - P(Y' \in A)| \leq P(X' \neq Y')$.

   (b) Justifier qu'il existe un univers et une variable aléatoire Z sur cet univers à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tels que
   $P(Z = (0, 0)) = 1 - p$, $P(Z = (1, 0)) = e^{-p} - 1 + p$
   $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = (0, k)) = 0$, $P(Z = (1, k)) = e^{-p}\dfrac{p^k}{k!}$.

   On note $Z = (X', Y')$.
   Montrer que $X' \sim Bernoulli(p)$ et $Y' \sim Poisson(p)$

   (c) Pour de telles variables, vérifier que $P(X' \neq Y') = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$.

   (d) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que $|P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq p^2$.

2. Soient X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $d = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X = k) - P(Y = k)|$ et $\Delta = 2\sup\{|P(X \in A) - P(Y \in A)|\ ,\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
   Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on note $\overline{A} = \mathbb{N}\backslash A$.

   (a) On pose $B^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid P(X = k) \geq P(Y = k)\}$ et $B^- = \overline{B^+}$.
   Montrer que $d = P(X \in B^+) - P(Y \in B^+) + P(Y \in B^-) - P(X \in B^-) \leq \Delta$

   (b) Si A est une partie de $\mathbb{N}$, montrer que :
   $2|P(X \in A) - P(Y \in A)| = |P(X \in A) - P(Y \in A)| + |P(X \in \overline{A}) - P(Y \in \overline{A})| \leq d$.

   (c) En conclure que $d = \Delta$.

3. Soient $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, $X_1, ..., X_n$ indépendantes, $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes avec $\forall i$, $X_i \sim Bernoulli(p_i)$ et $Y_i \sim Poisson(p_i)$.
   Soient $X = X_1 + ... + X_n$ et $\lambda = p_1 + ... + p_n$, et $Y = Y_1 + ... + Y_n$.

   (a) Quelle est la loi de Y?

(b) Justifier que $P(X \neq Y) \leq \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq Y_k)$

(c) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X = k) - P(Y = k)| \leq 2 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$ (inégalité de Le Cam)

2.15 Loi Zeta (X 2020)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles. On rappelle que si $s \in]1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa somme. On dit qu'une variable aléatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi zêta de paramètre $s > 1$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \zeta(s)^{-1} \dfrac{1}{n^s}$
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation de n en p. On note également $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $\chi_4(2n) = 0$ et $\chi_4(2n-1) = (-1)^{n-1}$. On pourra utiliser sans justification que, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\chi_4(mn) = \chi_4(m)\chi_4(n)$.

Soit $s > 1$ un nombre réel et soit X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi zeta de paramètre s. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\{n \mid X\}$ l'évènement "n divise X" et $\{n \nmid X\}$ l'évènement complémentaire.

1a. Calculer $\mathbb{P}(n \mid X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1b. Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels. Montrer que les évènements

$$\{p_1^{\alpha_1} \mid X\}, \{p_2^{\alpha_2} \mid X\}, \ldots, \{p_k^{\alpha_k} \mid X\}, \ldots$$

sont mutuellement indépendants.

2a. Soit $r \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - p_i^{-s}\right)$$

2b. En déduire que

$$\zeta(s)^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - p_k^{-s}\right)$$

3a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\nu_{p_k}(X) + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\left(1 - p_k^{-s}\right)$.

3b. Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}^*, k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a

$$\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r\right) =$$
$$\sum_{\ell=0}^{r} (-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r = \ell}} \mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X) \geq n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geq n_2 + \varepsilon_2, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geq n_r + \varepsilon_r\right)$$

3c. En déduire que les variables aléatoires $\nu_{p_1}(X), \dots, \nu_{p_k}(X), \dots$ sont mutuellement indépendantes.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note, pour $i \in \{0,1,2,3\}$, $r_i(n) = \operatorname{card}\{d \in \mathbb{N} : d \equiv i\,[4] \ et\ d \mid n\}$
On pose $g(n) = r_1(n) - r_3(n)$.

4a. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a $g(mn) = g(m)g(n)$.

4b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout nombre premier p, on a

$$g\left(p^n\right) = \begin{cases} 1 & si\ p = 2, \\ n+1 & si\ p \equiv 1\,[4], \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) & si\ p = 3\,[4]. \end{cases}$$

5. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathbb{N}^* \to [0, +\infty[$ telle que $h(X)$ est d'espérance finie et telle que $|f_n(m)| \leqslant h(m)$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathbb{E}(f(X))$ est d'espérance finie et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f_n(X)\right) = \mathbb{E}(f(X))$$

6a. On note $r(n)$ le nombre de diviseurs $d \geqslant 1$ de n. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r(n)n^{-s}$ converge et que sa somme vaut $\zeta(s)^2$.

6b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g(n)n^{-s}$ converge.

7a. Montrer que la suite de fonctions $\displaystyle\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ converge simplement vers la fonction identité.

7b. Montrer que $\displaystyle\mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)$.

8a. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 1\,[4]$, on a

$$\mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

8b. Calculer $\mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right)$ si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3\,[4]$.

8c. En déduire

$$\mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \chi_4\left(p_k\right) p_k^{-s}}$$

9a. Montrer que, si p est un nombre premier,

$$\mathbb{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1 - p^{-s}}{1 - \chi_4(p)p^{-s}}$$

9b. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\chi_4(X)\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4\left(p_k\right) p_k^{-s}}$$

9c. En déduire que la série
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$
est convergente et que sa somme vaut $\mathbb{E}(g(X))$.

2.16 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

Soit d un entier supérieur ou égal à 1. Soit $\mathbb{Z}^d$ l'ensemble des $d-$uplets d'entiers relatifs. On note, pour tout i, e_i l'élément $(0,..,1,..,0)$ de $\mathbb{Z}^d$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle en $i$ème place.

On considère une suites de variables aléatoires indépendantes $(Z_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ prenant les $2d$ valeurs $\pm e_i$ avec équiprobabilité. Enfin on pose $X_n = Z_1 + ... + Z_n$. Ainsi X_n modélise la position après n sauts d'un point mobile se situant initialement à l'origine, et se déplaçant de façon équiprobable d'un point à l'un de ses voisins directs.
Ω est l'univers.

$< .,. >$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$, et $||.||$ la norme associée.

Remarques préalables :

• $\mathbb{Z}^d$ étant dénombrable, on pourra appliquer les résultats sur les familles sommables aux sommes qu'il indexe.

• Si x désigne un vecteur variable $x = (x_1, ..., x_n)$ et f une fonction sur $[0, 2\pi]^d$, on notera $\displaystyle\int_{[0,2\pi]^d} f(x)dx$ pour l'intégrale multiple $\displaystyle\int \left(\left(\int ... \int f(x_1, .., x_d)dx_1)dx_2 \right).... \right) dx_d$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur l'existence de ces intégrales.

• On admettra que les théorèmes classiques du cours (continuité des séries de fonctions, $\displaystyle\sum \int ||$....., convergence dominée......) sont valables pour les familles sommables et les intégrales multiples.

• On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,2\pi]^d} \frac{1}{||x||^a} dx$ est convergente si et seulement si $a < d$ (intégrale de Riemann en zéro. Se montre par changement polaire, sphérique,..., comme vous avez l'habitude en physique)

Définition : on dira qu'une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est sommable si $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)| < +\infty$.

2.16.1 Transformée de Fourier et convolution

1. *Transformée de Fourier.*

   Soit f une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est sommable. Pour $t = (t_1, t_2, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d$ on pose $\widehat{f}(t) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)e^{i<t,x>}$.

Montrer que cette formule définit une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

2. Pour f et g sommables, on pose $f * g(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f(y)g(x-y)$.

   Montrer que $f * g$ est définie, sommable, et que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

3. Démontrer la *formule d'inversion de Fourier*, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \widehat{f}(t) e^{-i<t,x>} dt$$

4. Soit μ la fonction telle que $\forall i,\ \mu(\pm e_i) = \dfrac{1}{2d}$ et qui vaut zéro en les autres points de $\mathbb{Z}^d$. μ prenant un nombre fini de valeurs non nulles, elle est évidemment sommable.

   (a) Montrer que $\widehat{\mu}(t) = \dfrac{1}{d} \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \cos(t_k)$

   (b) En déduire que l'on a $1 - \widehat{\mu}(t) \sim \dfrac{||t||^2}{2d}$ quand t tend vers 0 dans $\mathbb{R}^d$.

   (c) Montrer que $\mu(x) = P(X_1 = x)$.

   (d) Dans la suite, on notera $\mu^{*2} = \mu*\mu$ et plus généralement pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu^{*n} = \mu*(\mu*(\cdots*\mu)\dots)$ où μ apparaît n fois. Montrer que $\mu^{*n}(x) = P(X_n = x)$.

   (e) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^d,\ (\widehat{\mu})^n(t) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} P(X_n = x) e^{i<t,x>}$.

2.16.2 Étude de la récurrence de 0

5. Pour $|\lambda| < 1$, et $x \in \mathbb{Z}^d$, on pose $u_\lambda(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n P(X_n = x)$.

   (a) Expliquer pourquoi ceci est bien défini.

   (b)

      i. Supposons dans cette question que la série $\displaystyle\sum_n P(X_n = x)$ converge. Montrer que $u_\lambda(x)$ tend vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = x)$ quand λ tend vers 1.

      ii. Supposons maintenant que la série $\displaystyle\sum_n P(X_n = x)$ diverge.

      Soit $A > 0$. Justifier qu'il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_A} P(X_k = x) \geq 2A$. Justifier que pour $\lambda \in [0, 1[$, $u_\lambda(x) \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{N_A} \lambda^k P(X_k = x)$.

      En déduire qu'il existe un voisinage V à gauche de 1 tel que si $\lambda \in V$, $u_\lambda(x) \geq A$.

      Conclure que $\displaystyle\lim_{\lambda\to 1} u_\lambda(x) = +\infty$.

On notera $u_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = x)$ avec par convention $u_1(x) = +\infty$ si cette série diverge. On a montré que $\lim_{\lambda \to 1} u_\lambda(x) = u_1(x)$ (dans le cas où $u_1(x)$ est fini ou non).

(c) Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Si $\omega \in \Omega$, on note $N_x(\omega) = \mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = x\}) \in \mathbb{N} \cup \infty$.
On écrit donc $N_x = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(X_n = x)}$.
On admet le résultat suivant : *si Y_n est une suite positive croissante ($\forall \omega$, $(Y_n(\omega))_n$ est croissante) de variables aléatoires convergeant simplement vers Y ($\forall \omega$, $Y_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} Y(\omega)$) , alors $E(Y_n)$ tend vers $E(Y)$. Vous pouvez démontrer ce résultat...*
Démontrer que $E(N_x) = \sum_0^\infty P(X_n = x)$ (l'espérance étant finie ou non).

6. Soit λ réel tel que $|\lambda| < 1$.
   (a) Montrer que u_λ est sommable sur $\mathbb{Z}^d$.
   (b) Montrer que $\widehat{u_\lambda}(t) = \dfrac{1}{1 - \lambda \widehat{\mu}(t)}$.

7.
   (a) Supposons dans cette question que $d > 2$.
      i. Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - \widehat{\mu}(t)}$ sur $[0, 2\pi]^d$.
      ii. Montrer que que $\lim_{\lambda \to 1^-} \int_{[0,2\pi]^d} \dfrac{1}{1 - \lambda \widehat{\mu}(t)} dt$ est finie.
      iii. En déduire que $u_1(0)$ est fini.
      L'origine est-elle un point récurrent pour la marche aléatoire , ie a-t-on $P(\{\omega \in \Omega \mid N_0(\omega) = \infty\}) = 1$?
   (b) Si $d \leq 2$, justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = 0) = +\infty$.
   Dans ce cas, on peut montrer que 0 est un état récurrent.

2.17 Matrices stochastiques

On rappelle que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si $\forall i, j$, $a_{i,j} \geq 0$, et $\forall i$, $\sum_{n=1}^{p} a_{i,n} = 1$.

2.17.1 Convergence en moyenne

Soit $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Notons $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k$. On veut montrer que (A_n) converge vers une matrice stochastique.

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un compact de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Soit W une valeur d'adhérence de (A_n).

2. Montrer que $WP = PW = W$ puis que $\forall n$, $WA_n = A_nW = W$.
   Soit T une autre valeur d'adhérence.

3. Montrer que $TW = WT = W$.

4. Conclure

2.17.2 Convergence sous l'hypothèse de primitivité

Soit $P = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ stochastique. On suppose que $\alpha = \min_{i,j} a_{i,j}$ est > 0.

Notons $P^n = (a_{i,j}^{(n)})$.
On note $m_j^{(n)} = \min_{i \in [\![1,p]\!]} a_{i,j}^{(n)}$ et $M_j^{(n)} = \sup_{i \in [\![1,p]\!]} a_{i,j}^{(n)}$.

1. Montrer que $\forall j, n$, $M_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n)}$.
   La suite $\left(M_j^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et on montre de même que $\left(m_j^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Montrer que $\forall j, n$,
$$m_j^{(n+1)} \geq m_j^{(n)} + \alpha(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \quad \text{et} \quad M_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n)} - \alpha(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}).$$

3. Montrer que $(M_j^{(n)})_n$ et $(m_j^{(n)})_n$ sont adjacentes.

4. En déduire que $(P^n)_n$ converge.

5. Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur d'état : $\forall i$, $x_i \geq 0$, et $x_1 + ... + x_p = 1$.
   Montrer que $({}^tP^nV)_n$ converge vers un vecteur indépendant de V.

6. Montrer que $\dim(Ker({}^tP - I_p)) = \dim(Ker(P - I_p)) = 1$.