I - Définitions et propriétés

Définition:
Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est équipotent à B si et seulement si il existe une bijection de A dans B.

"A est équipotent à B" sera noté par la suite $A \sim B$.

Propriété:
$\sim$ est une relation d'équivalence, ie symétrique, réflexive et transitive.

La démonstration est immédiate (réciproque, et composée de bijections)

Concernant les ensembles finis, la caractérisation est triviale : deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.
La notion est plus compliquée pour les ensembles infinis. Ainsi, une partie stricte d'un ensemble peut être équipotente à l'ensemble lui-même: $2\mathbb{N} = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ est équipotent à $\mathbb{N}$, puisque $\begin{cases} \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \\ k \mapsto 2k \end{cases}$ est une bijection.

Définition:
Un ensemble A est dit dénombrable ssi $A \sim \mathbb{N}$

Remarque: c'est la définition du programme. "Dénombrable" signifie grosso modo que l'on peut numéroter les éléments de A.
On trouve aussi comme définition (plus logique) d'un ensemble dénombrable : "fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$".
Dans notre cas, nous auront donc affaire à la notion d'ensemble "fini ou dénombrable", dont la négation est "infini non dénombrable".

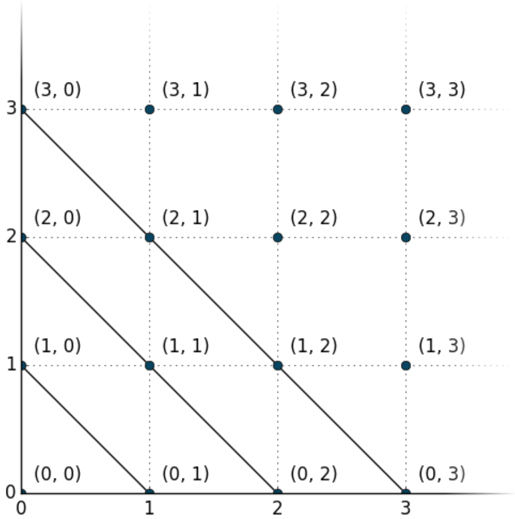
Propriété:
Premiers exemples

1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
3. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Démonstration:

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} n/2 \textit{ si } n \textit{ est pair} \\ -(n+1)/2 \textit{ si } n \textit{ est impair} \end{cases} \end{cases}$ est facilement bijective.
   $(f(0) = 0, f(2) = 1, f(4) = 2, ..., f(1) = -1, f(3) = -2, f(5) = -3, ...)$
2. Pour construire une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, il suffit de choisir un schéma de parcours de $\mathbb{N}^2$ permettant de numéroter les éléments.
   Un tel schéma est donné sur le dessin suivant en suivant les diagonales successives (seules

les trois premières sont tracées) de gauche à droite.



Ici, $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1,0)$, $f(2) = (0,1)$, $f(3) = (2,0)$, $f(4) = (1,1)$, $f(5) = (0,2)$, $f(6) = (3,0), ...$
f est clairement bijective.

3. Rappelons d'abord que tout réel x de $]0,1[$ admet un unique développement décimal propre "$x = 0, x_1x_2x_3...$" les x_i n'étant pas égaux à 9 à partir d'un certain rang. (la signification est $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{10^k}$. les décimaux ont également un développement impropre. Par exemple, $0,1 = 0,09999...$ puisque $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{100} \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{10}$)
Supposons par l'absurde que $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$.
Or $\mathbb{R} \sim]0,1[$ une bijection possible étant $x \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)$, donc $\mathbb{N} \sim]0,1[$.
Soit $f : \mathbb{N} \to]0,1[$ une bijection. Notons $f(n) =$ "$0, a_0(n)a_1(n)a_2(n)...$" le développement propre de $f(n)$.
Soit alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \{1,2,...,8\} \setminus \{a_i(i)\}$, et $b =$ "$0, b_0b_1b_2...$".
Le développement de b est propre puisque $b_i \neq 9$ pour tout i, et $b \in]0,1[$.
b ne peut être dans l'image de f car pour tout i, la $(i+1)$ème décimale b_i de b est différente de celle de $f(i)$, à savoir $a_i(i)$.
Ceci contredit la surjectivité de f, et l'hypothèse est absurde.
Le procédé utilisé ci-dessus s'appelle procédé diagonal de Cantor.

Propriété:

1. Si E, F sont des ensembles tels que E est dénombrable et $E \sim F$, alors F est dénombrable.
2. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.
   Il en résulte facilement que plus généralement toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
3. Si E est un ensemble non vide, E est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.
4. Si E, F sont des ensembles, que F est fini ou dénombrable, et qu'il existe une surjection de F dans E, alors E est fini ou dénombrable.

Démonstration:

1. Si $E \sim F$ et $E \sim \mathbb{N}$, comme $\sim$ est une relation d'équivalence, $F \sim \mathbb{N}$.

2. Soit P une partie de $\mathbb{N}$ infinie. En notant $a_0 = \min P$, $a_1 = \min P \backslash \{a_0\}$, $a_2 = \min P \backslash \{a_0, a_1\}$ ..., $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to P \\ k \mapsto a_k \end{cases}$ est injective, surjective car (a_k) est strictement croissante et à valeurs entières, donc $a_k \to +\infty$, et donc si $b \in P$, il existe k tel que $b = a_k$, et donc finalement f est bijective.
Ainsi P est dénombrable.

3. $\Leftarrow$:
Supposons que $f : \mathbb{N} \to E$ est une surjection, et que E est infini.
Pour tout $e \in E$, soit $g(e)$ un antécédent de e par f. L'application g ainsi définie est une injection de E dans $\mathbb{N}$ (deux éléments distincts de E n'ont pas même antécédents), donc réalise une bijection de E dans $g(E)$.
$g(E)$ est une partie de $\mathbb{N}$, infinie car E est infini et g injective, donc dénombrable ie équipotente à $\mathbb{N}$.
Ainsi $E \sim g(E)$ et $g(E) \sim \mathbb{N}$, donc $E \sim \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$:
Supposons E fini ou dénombrable.
Si E est dénombrable, il existe une bijection, donc surjection de $\mathbb{N}$ dans E.
Si E est fini, notons $E = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ avec $n = \text{card}(E)$. $f : \mathbb{N} \to E$ définie par $f(k) = a_k$ si $k \leq n-1$, et $f(k) = a_{n-1}$ sinon est surjective.

4. Le cas fini est trivial. Supposons F dénombrable, et $f : F \to E$ surjective. Soit $g : \mathbb{N} \to F$ bijective. Alors $f \circ g : \mathbb{N} \to E$ est surjective, et on applique le point précédent.

Propriété:
Union finie ou dénombrable et produit d'ensembles finis ou dénombrables.

1. Soit I un ensemble (d'indexation) fini ou dénombrable, et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies ou dénombrables d'un ensemble E.
Alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ est fini ou dénombrable.

2. Si E et F sont deux ensembles finis ou dénombrables, alors $E \times F$ est fini ou dénombrable, et donc plus généralement par récurrence facile, si $E_1, .., E_n$ sont finis ou dénombrables, $E_1 \times ... \times E_n$ l'est aussi.

Démonstration:

1. I est fini ou dénombrable. On peut se donner $f : \mathbb{N} \to I$ surjective.
Pour tout i, E_i est fini ou dénombrable, donc on peut se donner $g_i : \mathbb{N} \to E_i$ surjective.
Alors $\theta : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i \\ (i, j) \mapsto g_{f(i)}(j) \end{cases}$ est surjective.
Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Donc $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ est fini ou dénombrable.

2. Soient E, F finis ou dénombrables. On peut se donner $f : \mathbb{N} \to E$ et $g : \mathbb{N} \to F$ surjectives.

Alors $\theta : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \to E \times F \\ (i,j) \mapsto (f(i), g(j)) \end{cases}$ est surjective.
Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il en résulte que $E \times F$ est fini ou dénombrable.

Propriété:
Rationnels et irrationnels.

1. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
2. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration:

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ (partie de $\mathbb{N}$ infinie) sont dénombrables.
   Or $\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \\ (a,b) \mapsto \dfrac{a}{b} \end{cases}$ est surjective, donc $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable, donc dénombrable car infini.
2. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. Si $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ était dénombrable, comme $\mathbb{Q}$ l'est, $\mathbb{R}$ le serait aussi ce qui est faux.

II - Un exemple d'utilisation de la notion de dénombrabilité: Nombres transcendants

Définition:
Un réel x est dit algébrique ssi il existe $P \in \mathbb{Q}[X] \backslash \{0\}$ tel que $P(x) = 0$.
Ainsi, par exemple, $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique car $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc x est racine de $Q = (X^2 - 5)^2 - 24 \in \mathbb{Q}[X]$
Un réel est dit transcendant ssi il n'est pas algébrique

Propriété:
L'ensemble des réels algébriques est dénombrables, et l'ensemble des réels transcendants est infini non dénombrable

Démonstration:
Notons A et T les ensembles des réels respectivement algébriques et transcendants.
Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et un produit d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Comme $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1} \mapsto a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{Q}_n[X]$ est surjective (en fait bijective), il en résulte que $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable.
Or $\mathbb{Q}[X] = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$, donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable (union dénombrable d'ensembles dénombrables).
Si $P \in \mathbb{Q}[X]$, notons $Rac(P)$ l'ensemble des racines réelles de P, avec la convention $Rac(0) = \emptyset$. $Rac(P)$ est fini.
On peut écrire $A = \displaystyle\bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]} Rac(P)$. Ainsi A est une union dénombrable d'ensembles finis, donc est fini ou dénombrable. Donc, comme A est infini (contient $\mathbb{Q}$: $r \in \mathbb{Q}$ est racine de $X - r \in \mathbb{Q}[X]$),

A est dénombrable.
Enfin, comme $\mathbb{R} = A \cup T$, et que $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable, T n'est pas fini ou dénombrable, ie est infini non dénombrable.

III - Une remarque préliminaire à l'étude des familles sommables

Nous allons étudier prochainement la notion de famille sommable.
Il s'agit de voir quand on peut donner un sens à $\sum_{i \in I} x_i$, $(x_i)_{i \in I}$ étant une famille de complexes, et I un ensemble d'indexation quelconque, sans notion d'ordre de sommation.

Le cas I fini est trivial.
Si I est infini, nous considérerons que I est dénombrable.

La raison est la suivante : imaginons que I est infini non dénombrable ($\mathbb{R}$ par exemple), et que $\forall i,\ x_i \neq 0$.
Notons, si $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \left\{ i \in I \mid |x_i| \geq \dfrac{1}{n+1} \right\}$.
Alors $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
Comme I est infini non dénombrable et qu'on à affaire à une union dénombrable, il existe donc n tel que E_n est infini non dénombrable.
En particulier, avec un tel n, E_n est infini, donc il existe une infinité de i tels que $|x_i| \geq \dfrac{1}{n+1}$ =constante > 0.
A partir de là, on voit bien que l'on ne pourra pas donner de sens à $\sum_{i \in I} x_i$.