MP* - Théorème de convergence dominée

On se propose ici de donner une preuve du théorème de convergence dominée en restant dans le cadre du programme: les fonctions continues par morceaux.
On peut en donner des preuves passant par des séries ignorant totalement le point de vue mesure, à base d'inégalité de Beppo-Levi. Je préfère ici adopter ledit point de vue, en restant dans le cadre des ouverts bornés, car il me semble plus instructif et préfigure des choses que vous verrez après la prépa. De ce fait, la preuve n'est pas la plus courte qui soit, mais pas trop longue non plus.
Le résultat de la partie 2, utilisée dans la partie 3 n'est pas indispensable, on pourrait faire du découpage, mais a son intérêt.

1 Rudiments de théorie de la mesure

Partout, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

On rappelle la propriété, déjà rencontrée:

Propriété 1: Ouverts de $]a, b[$ Soit O un ouvert non vide inclus dans $]a, b[$. Alors O s'écrit de manière unique comme union disjointe, finie ou dénombrable, d'intervalles ouverts.

Démonstration
Brièvement, une composante connexe de O est facilement un intervalle ouvert. Ces composantes partitionnent O, et sont en nombre au plus dénombrable, car chacune contient un rationnel, lesdits rationnels étant distincts deux à deux, et $\mathbb{Q}$ étant dénombrable.
L'unicité vient du fait que si O s'écrit comme union disjointe d'intervalles ouverts, lesdits intervalles sont facilement les composantes connexes de O.
$\clubsuit$.

Dans la suite, on parlera de décomposition de O pour son écriture en union disjointe d'intervalles ouverts.
Il est à noter que dans le cas d'union finie, on peut trivialement ordonner les intervalles. Ce n'est pas vrai dans le cas dénombrable.

Notation: dans la suite, $\bigsqcup$ désigne une union disjointe.
Par convention, une union indexée par l'ensemble vide est vide.

Définition 1: Mesure d'un ouvert de $]a, b[$
Soit O un ouvert non vide de $]a, b[$, que l'on écrit comme union disjointe, finie ou dénombrable, d'intervalles ouverts.
On définit sa mesure, $\mu(O)$ comme la somme des longueurs des dits intervalles. Cela a un sens du fait de l'unicité de la décomposition.
Il faut noter la convergence dans le cas dénombrable:
Si $O = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$, pour toute partie finie P de $\mathbb{N}$, trivialement, comme $\bigsqcup\limits_{n\in P}]a_n, b_n[\subset]a, b[$, l'union étant disjointe, $\sum\limits_{n\in P} (b_n - a_n) \leq b - a$, (il suffit d'ordonner les intervalles pour le justifier), donc $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, de somme $\leq b - a$.
On a donc $\mu(O) \leq b - a$.

Remarque: $\mu(\emptyset) = 0$.
Remarque 2: la théorie de la mesure de Lebesgue, que nous n'aborderons pas, étend très largement la classe des parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles on définit la mesure.

Propriété 2: Approximation par une union finie
Soit O un ouvert de $]a,b[$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une famille finie d'intervalles ouverts disjoints inclus dans O, $(]a_n,b_n[)_{n\in[\![0,N]\!]}$ telle que $\mu\left(\bigsqcup_{n=0}^{N}]a_n,b_n[\right) \geq \mu(O)-\varepsilon$, $O\setminus \bigsqcup_{n=0}^{N}]a_n,b_n[$ étant encore ouvert.

Démonstration:
Si la décomposition de O est finie, rien à faire.
Sinon, on écrit $O = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n,b_n[$. $\mu(O) = \sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - a_n)$, donc on peut se donner N tel que $\sum_{n=0}^{N}(b_n - a_n) \geq \mu(O) - \varepsilon$, et $(]a_n,b_n[)_{n\in[\![0,N]\!]}$ convient.

Propriété 3: Respect de l'ordre
Soient O_1, O_2 deux ouverts non vides de $]a,b[$ tels que $O_2 \subset O_1$. Alors $\mu(O_2) \leq \mu(O_1)$.

Démonstration:
On écrit $O_1 = \bigsqcup_{n\in P}]a_n,b_n[$, P finie ou dénombrable.
O_2 s'écrit $O_2 = \bigsqcup_{n\in P} \bigsqcup_{m\in P_n}]a_{n,m},b_{n,m}[$, P_n finie (éventuellement vide) ou dénombrable, $\bigsqcup_{m\in P_n}]a_{n,m},b_{n,m}[$ étant l'écriture de l'ouvert $O_2\cap]a_n,b_n[$.
Les termes suivants étant positifs (en l'occurrence, les familles sont sommables), toute sommation par paquets est licite.
$\mu(O_2) = \sum_{n,m}(b_{n,m} - a_{n,m}) = \sum_{n\in P}\sum_{m\in P_n}(b_{n,m} - a_{n,m})$.
Mais $\bigsqcup_{m\in P_n}]a_{n,m},b_{n,m}[$ étant l'écriture de l'ouvert $O_2\cap]a_n,b_n[$, inclus dans $]a_n,b_n[$, $\sum_{m\in P_n}(b_{n,m} - a_{n,m}) = \mu(O_2) \leq b_n - a_n$ (on a remarqué dans la définition de μ cette inégalité), donc $\mu(O_2) \leq \sum_{n}(b_n - a_n) = \mu(O_1)$.
♣.

Propriété 4: Union disjointe
Soient $(O_n)_{n\in P}$ avec P finie ou dénombrable, famille d'ouverts disjoints deux à deux de $]a,b[$.
Alors $\mu\left(\bigsqcup_{n} O_n\right) = \sum_{n\in P}\mu(O_n)$.

Démonstration:
On écrit $O_n = \bigsqcup_{k\in P_n}]a_{n,k},b_{n,k}[$.
La décomposition de $\bigsqcup_{n} O_n$ est $\bigsqcup_{n\in P}\bigsqcup_{k\in P_n}]a_{n,k},b_{n,k}[$.
Donc $\mu\left(\bigsqcup_{n} O_n\right) = \sum_{n\in P}\sum_{k\in P_n}(b_{n,k} - a_{n,k}) = \sum_{n\in P}\mu(O_n)$. (Termes positifs. Toute sommation par paquets est licite.)
♣

Propriété 5:
Soit $(O_n)_n$ une suite décroissante d'ouverts de $]a,b[$ telle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(O_n) \geq \delta$.
Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$.
Remarque: on peut dire bien plus, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ n'est pas nécessairement ouvert, et n'ayant pas étendu la notion de mesure, on se contentera de cela.
Remarque 2: en général, une intersection d'ouverts décroissants non vides peut être vide:

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0,1/(n+1)[=\emptyset$.

Démonstration:
C'est la propriété la plus délicate dans ce chapitre.
On utilise implicitement à diverses reprises les propriétés 3 et 4.
En premier lieu, on se ramène au cas de réunions finies d'intervalles ouverts:
En vertu de la propriété 2, on se donne $A_0 \subset O_0$ union finie d'intervalles ouverts tel que $O_0 \backslash A_0$ soit ouvert, et $\mu(O_0\backslash A_0) \leq \delta/2$.
Alors pour tout $n \geq 1$, $\mu(O_n \cap (O_0\backslash A_0)) \leq \delta/2$, donc $\mu(O_n \cap A_0) \geq (1-1/2)\delta = \delta/2 = \delta_1$
Notons N le nombre d'intervalles de A_0.
Alors il existe un de ces N intervalles, que l'on nomme $]a_0,b_0[$ tel que pour une infinité de n, $\mu(]a_0,b_0[\cap O_n) \geq \delta_1/N$, sans quoi pour n assez grand, on aurait $\mu(O_n \cap A_0) < \delta_1$.
Donc en fait, $\forall n \geq 1,\ \mu(]a_0,b_0[\cap O_n) \geq \delta_1/N = \delta_2$ à cause de la décroissance de (O_n).
$]a_0,b_0[$ est le premier intervalle de notre suite strictement décroissante d'intervalles ouverts.
On réduit légèrement $]a_0,b_0[$ pour garantir une décroissance stricte: on se donne c_0,d_0 tels que $a_0 < c_0 < d_0 < b_0$ et $d_0 - c_0 \geq (b_0-a_0) - \delta_2/2$.
Ainsi $\forall n \geq 1$, $\mu(]c_0,d_0[\cap O_n) \geq \delta_2/2 = \delta_3 > 0$.
C'est là que l'hypothèse de mesure permet de se "décoller" de a_0 et b_0.
Notons $O'_n =]c_0,d_0[\cap O_n$. $(O'_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'ouverts inclus dans $]c_0,d_0[$, tous de mesures $\geq \delta_3$.
Il n'y a plus qu'à itérer le procédé : on trouve $]a_1,b_1[\subset]c_0,d_0[$, inclus dans O_1, et a_1,c_1,d_1,b_1 tels que $a_1 < c_1 < b_1 < d_1$ tels que $\forall n \geq 2$, $\mu(O'_n\cap]c_0,d_0[) \geq cste > 0$. Puis $O''_n = O'_n\cap]c_0,d_0[$
etc...
Ainsi on forme $(]a_n,b_n[)_n$ avec (a_n) strictement croissante, (b_n) strictement décroissante, et $]a_n,b_n[\subset O_n$.
(a_n) et (b_n) sont adjacentes. $a_n \to x$, $b_n \to y$, avec $x \leq y$.
Comme les suites sont strictement monotones, $\forall n,\ x \in]a_n,b_n[\subset O_n$, donc $x \in \bigcap_n O_n$.

♣.

Propriété 6: un résultat de point récurrent
Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts inclus dans $]0,1[$ et $\delta > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(O_n) \geq \delta$.
Alors il existe $x \in]0,1[$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in O_n\}$ est infini.

Démonstration:
Notons $\Omega_n = \bigcup_{p\geq n} O_p$. Ω_n est ouvert comme union d'ouverts.
Ω_n contient O_n, donc $\mu(\Omega_n) \geq \mu(O_n) \geq \delta$. $(\Omega_n)_n$ est décroissante.
Si $x \in]0,1[$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in O_n\}$ est infini revient à $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Il s'agit donc de montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \neq \emptyset$.
C'est vrai par la propriété 5.
♣

Remarques:
La mesure de Lebesgue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup +\infty$, s'étend aux boréliens.
L'ensemble des boréliens est la plus petite famille de parties de $\mathbb{R}$ contenant les ouverts, stable par passage au complémentaire, et union et intersections finies ou dénombrables.
Pour un borélien B, on pose $\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert contenant } B\}$.
Pour B ouvert, cette définition coïncide avec la précédente par la propriété 3.
Établir toutes les propriétés de la mesure est assez long et technique.
La conclusion de la propriété 5 serait $\mu(\cap O_n) \geq \delta$.
On a $\mu(\mathbb{Q}) = 0$:

$\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc s'écrit $\mathbb{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Alors, si $\varepsilon > 0$, $\mathbb{Q}$ est inclus dans l'ouvert $\bigcup_n]r_n - \varepsilon/2^{n+1}, r_n + \varepsilon/2^{n+1}[$, de mesure $\leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon$.

2 Approximation L^1 des fonctions continues par morceaux

Le cadre $\mathcal{C}_m$ entraîne quelques quelques difficultés techniques par rapport au cadre des fonctions continues.
La propriété d'approximation suivante permettra de se ramener au cas continu dans la preuve:

Propriété 7: Approximation supérieure et inférieure L^1 d'une fonction $\mathcal{C}_m$
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ à valeurs positives.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{C}(I)$, intégrable sur I, telle que $f \leq g$, et $\int_I g \leq \varepsilon + \int_I f$, et il existe $h \in \mathcal{C}(I)$, intégrable sur I, telle que $0 \leq h \leq f$, et $\int_I h \geq -\varepsilon + \int_I f$

Démonstration
En premier lieu, rappelons que la formule $max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ permet de voir que si h, q sont des fonctions continues réelles, $\max(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est continue, et par applications successives, cela marche avec un nombre fini de fonctions continues.
Soit $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision adaptée à f.
On modifie un peu f autour des x_i:

Pour un i donné: si $i \neq 0$ et $i \neq n$:
Prenons $0 < \delta_i < \dfrac{1}{2} \min(x_{i+1} - x_i, x_i - x_{i-1})$.
Définissons trois fonctions k_i, q_i, w_i sur $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$ de la sorte (**faire un dessin**):
k_i coïncide avec f sur $[x_i - \delta_i, x_i - \delta_i/2]$ et $[x_i + \delta_i/2, x_i + \delta_i]$.
k_i est affine sur $[x_i - \delta_i/2, x_i]$ et $[x_i, x_i + \delta_i/2]$, et $k_i(x_i) = f(x_i)$.
q_i coïncide avec f sur $[x_i - \delta_i, x_i - \delta_i/2]$.
q_i est affine sur $[x_i - \delta_i/2, x_i]$ avec $q_i(x_i) = \lim\limits_{x_i+} f$.
q_i coïncide avec f sur $]x_i, x_i + \delta_i]$.
w_i coïncide avec f sur $[x_i - \delta_i, x_i[$ et $q_i(x_i) = \lim\limits_{x_i-} f$.
w_i est affine sur $[x_i, x_i + \delta_i/4]$ avec $q_i(x_i + \delta/2) = f(x_i + \delta/2)$.
w_i coïncide avec f sur $[x_i + \delta_i/2, x_i + \delta_i]$.
Ces trois fonctions sont continues et coïncident avec f hors de $]x_i - \delta_i, x_i + \delta_i[$.
Soit $f_i = \max(k_i, q_i, w_i)$.
f_i est continue sur $[x - \delta_i, x + \delta_i]$ et coïncide avec f hors de $]x_i - \delta_i/2, x_i + \delta_i/2[$.
De plus, $f_i \geq f$ car q_i coïncide avec f sur $]x_i, x_i + \delta_i]$, w_i coïncide avec f sur $[x_i - \delta_i, x_i[$, et $k_i(x_i) = f(x_i)$.
facilement, $|f_i| \leq \sup\limits_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f|$, donc $\displaystyle\int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} f_i - f \leq \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} |f_i| + |f| \leq 4\delta_i \sup_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f| \xrightarrow[\delta_i \to 0]{} 0$.
On se fixe alors δ_i de sorte que $\displaystyle\int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} f_i \leq \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} f + \frac{\varepsilon}{n+1}$.

Les intervalles $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$ sont disjoints deux à deux.

Si $i = 0$ ou n, on ne considère que deux fonctions de la même manière (laissé au lecteur).

On définit g comme coïncidant avec f_i sur $[x - \delta_i, x + \delta_i]$ pour tout i ($[a, a + \delta_0]$, $[b - \delta_{n+1}, b]$ si $i = 0$ ou n), et avec f ailleurs.
g est continue, $f \leq g$, et $\int_I g \leq \int_I f + (n+1)\varepsilon/(n+1) = \varepsilon + \int_I f$.

Pour l'approximation inférieure, on procède de même en remplaçant max par min dans la définition des f_i.
♣

3 Théorème de convergence dominée

Pour simplifier la présentation, on scinde la propriété suivante en divers cas "croissants". L'essentiel de la difficulté est dans le premier cas:

Propriété 8: Convergence dominée

1. Premier cas: $I = [a, b]$ est un segment. Soit (f_n) une suite de fonctions continues positives sur I, convergeant simplement vers 0, et telle qu'il existe $h \in L^1(I)$ vérifiant $\forall n,\ f_n \leq h$. Alors $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Deuxième cas: le même que le premier, avec continues par morceaux au lieu de continues.
3. Troisième cas: même énoncé que le deuxième cas avec I un intervalle quelconque.
4. Cas général:
Soit (f_n) une suite de fonctions complexes continues par morceaux sur I, convergeant simplement vers f continue par morceaux sur I, telle qu'il existe $h \in L^1(I)$ vérifiant $\forall n,\ |f_n| \leq h$.
Alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$

Démonstration

1. Disons $I = [0, 1]$, pour éviter des divisions par $b - a$, ça ne change rien.
h est $\mathcal{C}_m$ sur un segment, donc bornée. Notons $M = ||h||_\infty$. $\forall n,\ 0 \leq f_n \leq M$.
Par l'absurde, supposons que $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)$ ne converge pas vers 0.
On peut alors se donner $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe une infinité de n tels que $\displaystyle\int_I f_n \geq \varepsilon$.
Quitte à remplacer (f_n) par une sous-suite, disons $\forall n,\ \displaystyle\int_I f_n \geq \varepsilon$.
Notons $O_n = \{x \in]0, 1[\ |\ f_n(x) > \varepsilon/2\}$. $O_n = f_{n|]0,1[}^{-1}(]\varepsilon/2, +\infty[)$, donc, comme f_n est continue, est un ouvert de $]0, 1[$, donc un ouvert tout court puisque $]0, 1[$ est ouvert.
$O_n \neq \emptyset$, car sinon, $\forall x \in]0, 1[,\ f_n \leq \varepsilon/2$, donc $\displaystyle\int_I f_n \leq \varepsilon/2$ ce qui contredit $\displaystyle\int_I f_n \geq \varepsilon$.
A n fixé: écrivons $O_n = \displaystyle\bigcup_{k\in P}]a_k, b_k[$, P finie ou dénombrable.
Disons $P = \mathbb{N}$, le cas P fini étant encore plus simple.
On a $\displaystyle\int_I f_n \leq \mu(O_n)M + (1 - \mu(O_n))\varepsilon/2$ (*).
En effet, si $k \in \mathbb{N}$: f_n est $\leq M$ sur $J_k := \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k}]a_i, b_i[$, et $\leq \varepsilon/2$ ailleurs, donc avec un découpage fini (Chasles) de $\displaystyle\int_I f$, on a immédiatement $\displaystyle\int_I f \leq \mu(J_k)M + (1 - \mu(J_k))\varepsilon/2$. $\mu(J_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu(O_n)$, donc $k \to +\infty$ donne (*).

La relation (*) est contradictoire si $\mu(O_n)$ est trop proche de 0 car $\displaystyle\int_I f_n \geq \varepsilon$.
Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\forall n,\ \mu(O_n) \geq \delta$. On se fixe un tel δ.
La propriété 6 donne alors l'existence de $x \in]0, 1[$ appartenant à une infinité de O_n, ie tel que pour une infinité de n, $f_n(x) > \varepsilon/2$.
Ceci contredit $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On va utiliser la propriété 7, et le premier cas.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Pour tout n, on se donne $g_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $0 \leq g_n \leq f_n$, et $\displaystyle\int_I g_n \geq -\varepsilon + \int_I f_n$ soit encore $\displaystyle\int_I f_n \leq \int_I g_n + \varepsilon$.
   (f_n) converge simplement vers 0, donc (g_n) aussi, et est dominée par h, donc par le premier cas, $\displaystyle\int_I g_n \to 0$.
   Il en résulte que pour n assez grand, $0 \leq \displaystyle\int_I f_n \leq 2\varepsilon$.
   Ainsi $\displaystyle\int_I f_n \to 0$.

3. Disons $I = [a,b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, les autres cas étant similaires.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Si $c \in I$, $\displaystyle\int_c^b h \xrightarrow[c \to b]{} 0$, comme reste d'intégrale convergente.
   On se fixe donc $c \in I$ telle que $\displaystyle\int_c^b h \leq \varepsilon/2$.
   Alors $0 \leq \displaystyle\int_I f_n \leq \int_{[a,c]} f_n + \int_{[c,b[} h \leq \varepsilon/2 + \int_{[a,c]} f_n$.
   Par le cas précédent (domination par $h_{|[a,c]}$ intégrable), $\displaystyle\int_{[a,c]} f_n \to 0$, donc pour n assez grand, $0 \leq \displaystyle\int_I f_n \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

4. Par limite simple, $|f| \leq h$, donc f est intégrable.
   $\displaystyle\left|\int_I f_n - \int_I f\right| \leq \int_I |f_n - f|$.
   $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2h \in L^1(I)$, $|f_n - f|$ est positive et converge simplement vers 0.
   Le troisième cas s'applique, et donne $\displaystyle\int_I |f_n - f| \to 0$, donc $\displaystyle\left|\int_I f_n - \int_I f\right| \to 0$, ie $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$.