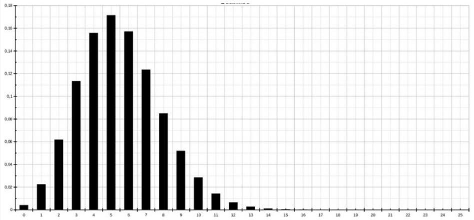
Proceso **Poisson** $\left(t, k, \lambda\right)$

t: Longitud del continuo ; k: Cantidad de eventos ; λ: Tasa de eventos

➢ V.A. Poisson

Probabilidad de obtener una cantidad de eventos en una longitud de continuo dada a una tasa de eventos conocida.



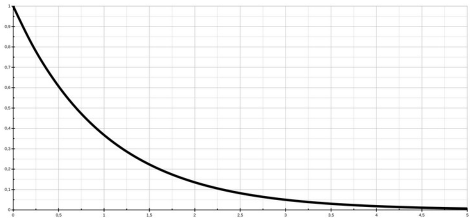
$$P\left(K=k \Big/ t;\lambda\right)=e^{-\lambda\cdot t}\cdot\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}$$

$k\in\{0,1,2,\ldots\}$

$\mu_K=\lambda\cdot t$; $\sigma_K=\sqrt{\lambda\cdot t}$

➢ V.A. Exponencial negativa

Densidad de probabilidad de necesitar una longitud de continuo hasta el primer evento a una tasa de eventos.



$$f^T\left(t \Big/ \lambda;k=1\right)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

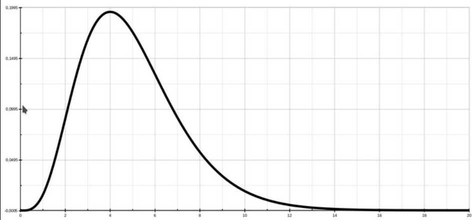
$t\in(0;+\infty)$

$$F^T\left(t \Big/ \lambda;k=1\right)=1-e^{-\lambda\cdot t}\ ;\ t>0$$

$\mu_T=\frac{1}{\lambda}$; $\sigma_T=\frac{1}{\lambda}$

➢ V.A. Gamma

Densidad de probabilidad de necesitar una longitud de continuo hasta el k-ésimo evento a una tasa de eventos dada.



$$f^T\left(t \Big/ k;\lambda\right)=\frac{(\lambda\cdot t)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

$t\in(0;+\infty)$

$\mu_T=\frac{k}{\lambda}$; $\sigma_T=\frac{\sqrt{k}}{\lambda}$

- Poisson como condicional: Si se sabe que en un processo Poisson ocurrieron k eventos en un intervalo de longitud t, entonces las V.A.s: $T_1;T_2;\ldots;T_k$: posición en el continuo en que apareció en evento i tienen cada una distribución $T_i\sim U[0;t]$.
- La suma de V.A.s independientes tipo Poisson resulta una V.A. tipo Poisson.
- Si $\mu>30$ la V.A. Poisson puede aproximarse por la V.A. Normal salvando la discontinuidad.

- Definición alternativa: Densidad de probabilidad de la longitud de continuo entre dos eventos sucesivos en un proceso Poisson.
- La suma de k V.A.s I.I.D.s tipo Exponencial Negativa resulta una V.A. tipo Gamma.
- La V.A. $T_{min}=min(T_1;T_2;\ldots;T_k)$ de V.A.s independientes tipo ExpNeg de parámetros $\{\lambda_1;\lambda_2;\ldots;\lambda_k\}$ resulta en una V.A. tipo ExpNeg de parámetro $\lambda_{min}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$.
- El cambio de V.A. $U=\alpha\cdot T$ sobre una V.A. T ExpNeg de parámetro λ resulta en una V.A. tipo ExpNeg de parámetro $\lambda_U=\lambda/\alpha$.

- Definición alternativa: Densidad de probabilidad de la longitud de continuo existente entre $(k+1)$ eventos sucesivos en un proceso Poisson.
- Para valores de $k>30$, la V.A. Gamma puede aproximarse por la V.A. Normal.
- En algunas bibliografías se usan las nomenclaturas $\alpha=k$ y $\beta=1/\lambda$ o $\theta=1/\lambda$.
- Con mucha menos frecuencia suele usarse la nomenclatura $\beta=\lambda$ (como en la app Probability Distributions).

➢ V. A. Poisson

En algunos casos la longitud de continuo puede suponerse la unidad $(t=1)$ como cuando se enuncia “cantidad de eventos en una semana de trabajo” y solo se utiliza como parámetro λ :

$$P^K\left(K=k \Big/ t=1;\lambda\right)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$k\in\{0,1,2,\ldots\}$

$\mu_K=\lambda$; $\sigma_K=\sqrt{\lambda}$

Para otros casos no se da una longitud de continuo y todo se modeliza en función de la media μ :

$$P^K\left(K=k \Big/ \mu\right)=\frac{\mu^k\cdot e^{-\mu}}{k!}$$

$k\in\{0,1,2,\ldots\}$

$\mu_K=\mu$; $\sigma_K=\sqrt{\mu}$

Cuando se utiliza la nomenclatura $\beta=1/\lambda$ la función de probabilidad :

$$P^K\left(K=k \Big/ t;\beta\right)=\frac{(t/\beta)^k}{k!}\cdot e^{-t/\beta}$$

$k\in\{0,1,2,\ldots\}$

$\mu_K=t/\beta$; $\sigma_K=\sqrt{t/\beta}$

- El proceso Poisson no tiene memoria, no aprende, no se desgasta, no es influido por la historia pasada ni influye en la historia futura.
- El proceso Poisson no tiene un final definido, aunque la V.A. Poisson observe solamente una longitud de continuo definida.
- Un proceso Poisson puede ser adelgazado (filtrado; coloreado) en un nuevo proceso Poisson.
- Un conjunto de procesos Poisson que ocurren en simultaneo pueden ser superpuestos (composición; competencia) en un único proceso Poisson.

Ing. Sergio QUINTEROS