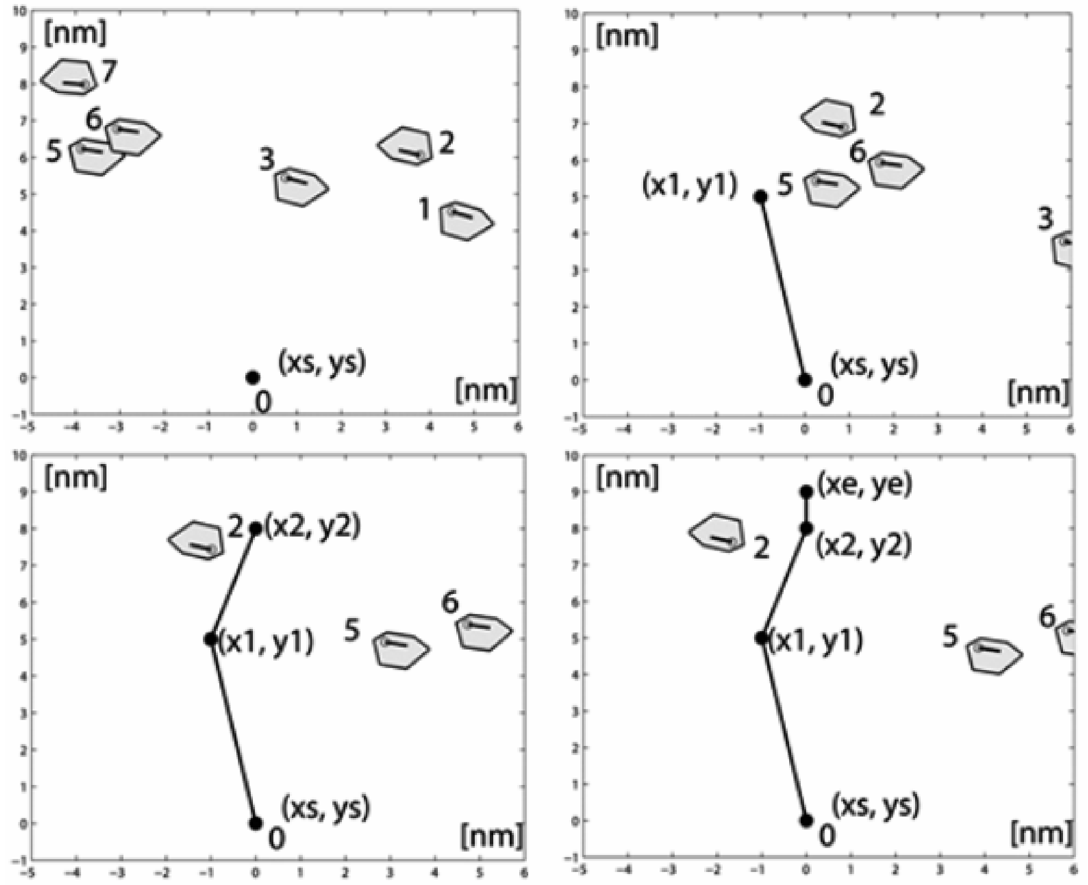
Algorytm mrówkowy - przykłady

Cezary Piernikowski

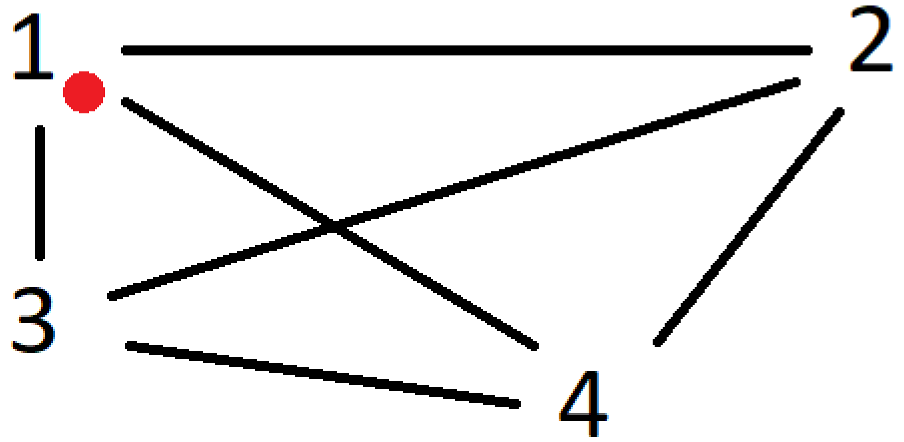
UMG 2024

Sytuacja spotkania z siedmioma statkami w Cieśninie Kattega



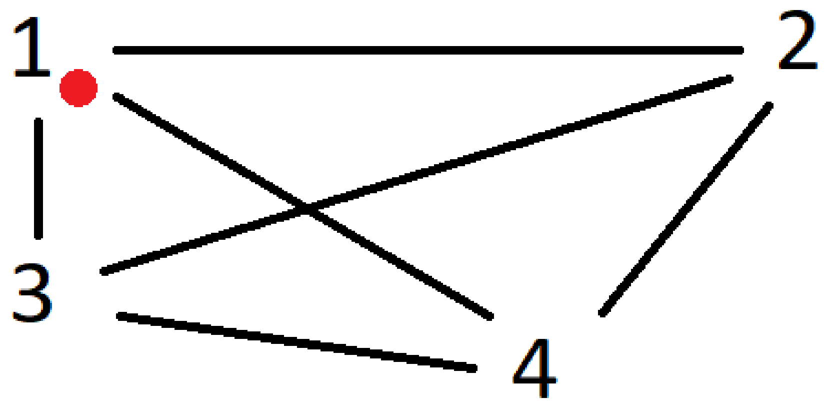
Problem komiwojażera

Jesteśmy podróżującym handlowcem, musimy odwiedzić cztery miasta oznaczone 1, 2, 3, 4; zaczynamy w mieście 1, nasza wędrówka musi się zakończyć w mieście startowym. Naszym zadaniem jest znalezienie jak najkrótszej drogi która spełni te wymagania. Między każdym miastem są ścieżki o różnych długościach, miasta są przedstawione jako wierzchołki grafu, a ścieżki jako jego krawędzie.



Stałe i ograniczenia

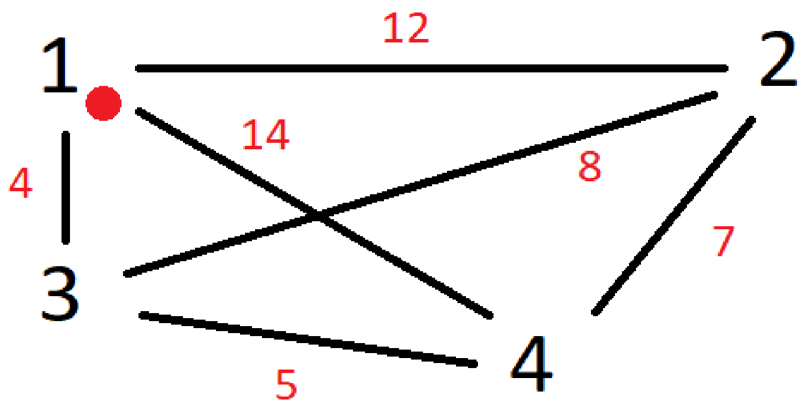
- Zaczynamy i kończymy podróż w mieście 1
- Maksymalnie 3 iteracje algorytmu
- Uwzględniamy ulatnianie feromonów z krawędzi (współczynnik ulatniania ρ = 0,2)
- Mamy do dyspozycji jedną mrówkę
- Warunek stopu – wykonanie trzech iteracji
- Współczynniki specyfikujące impakt dla wyboru ścieżki - kierując się feromonami: α = 1 i kierując się kosztem: β = 1



Stałe i ograniczenia

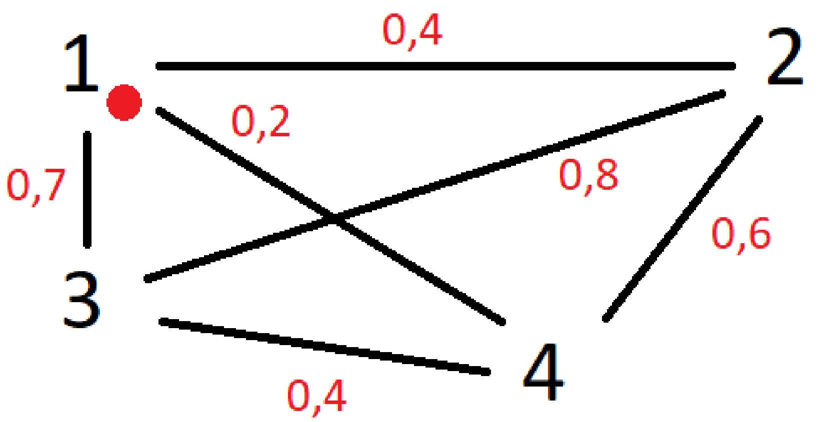
Macierz kosztu L

	M1	M2	M3	M4
M1	0	12	4	14
M2	12	0	8	7
M3	4	8	0	5
M4	14	7	5	0



Macierz feromonów τ

	M1	M2	M3	M4
M1	0	0,4	0,7	0,2
M2	0,4	0	0,8	0,6
M3	0,7	0,8	0	0,4
M4	0,2	0,6	0,4	0

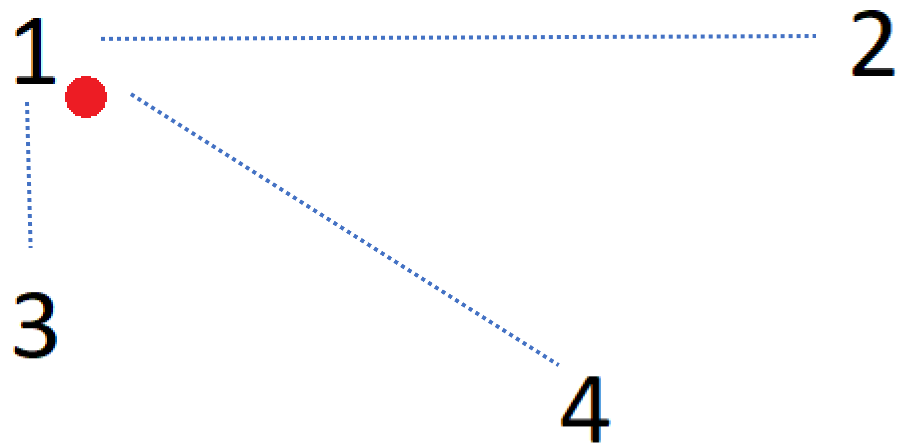


Pierwsza podróż

Na początku musimy obliczyć prawdopodobieństwo udania się mrówki do każdego poszczególnego miasta możliwego do odwiedzenia.

$$P_{ij} = \frac{\tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}}{\sum\limits_{k,l\in\Omega} \tau_{kl}^{\alpha}\eta_{kl}^{\beta}}$$

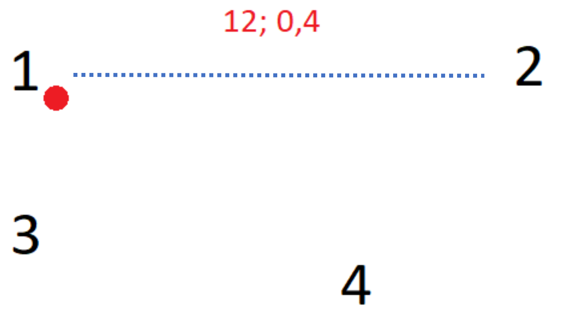
gdzie $\eta_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}$



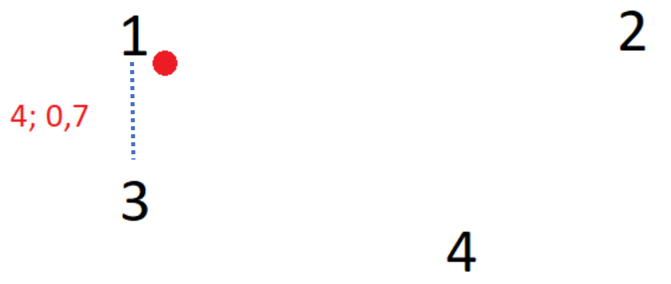
i oraz j określają krawędź grafu dla której obliczamy prawdopodobieństwo, k określa miasto w którym obecnie się znajdujemy Ω to zbiór wszystkich możliwych miast do odwiedzenia

Prawdopodobieństwa wyborów

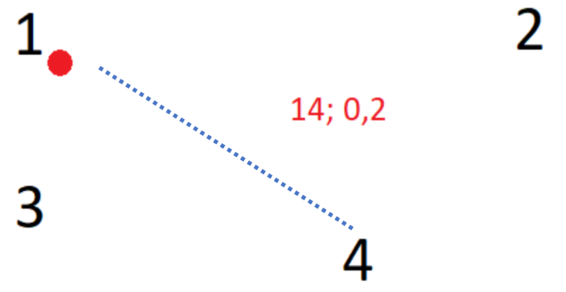
$$P_{12} = \frac{\tau_{12}^{\alpha}\eta_{12}^{\beta}}{\sum\limits_{i=1, j\in\Omega} \tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}} = \frac{0.4 \cdot \frac{1}{12}}{0.4 \cdot \frac{1}{12} + 0.7 \cdot \frac{1}{4} + 0.2 \cdot \frac{1}{14}} = 0.1497 \approx 15\%$$



$$P_{13} = \frac{\tau_{13}^{\alpha}\eta_{13}^{\beta}}{\sum\limits_{i=1, j\in\Omega} \tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}} = \frac{0.7 \cdot \frac{1}{4}}{0.4 \cdot \frac{1}{12} + 0.7 \cdot \frac{1}{4} + 0.2 \cdot \frac{1}{14}} = 0.7861 \approx 79\%$$



$$P_{14} = \frac{\tau_{14}^{\alpha}\eta_{14}^{\beta}}{\sum\limits_{i=1, j\in\Omega} \tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}} = \frac{0.2 \cdot \frac{1}{14}}{0.4 \cdot \frac{1}{12} + 0.7 \cdot \frac{1}{4} + 0.2 \cdot \frac{1}{14}} = 0.0642 \approx 6\%$$



Wybór ścieżki

Najpierw należy ułożyć prawdopodobieństwa malejąco i zastosować dla każdego z nich sumę ich samych i elementów kolejnych.

$$S(P_{13}) = P_{13} + P_{12} + P_{14} = 0.79 + 0.15 + 0.06 = 1$$

$$S(P_{12}) = P_{12} + P_{14} = 0.15 + 0.06 = 0.21$$

$$S(P_{14}) = P_{14} = 0.06$$

P12	P13	P14
0,15	0,79	0,06
P13	P12	P14
0,79	0,15	0,06

Wybór ścieżki

Losujemy liczbę losową R z zakresu <0; 1>.

Wylosowano 0,63.

If $0{,}21 < R \le 1$ to udaj się do miasta 3.

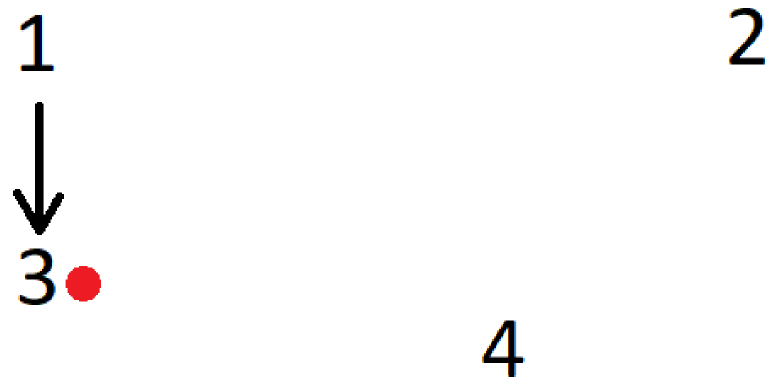
Else if $0{,}06 < R \le 0{,}21$ to udaj się do miasta 2.

Else if $0 < R \le 0{,}06$ to udaj się do miasta 4.

Warunek pierwszy ($0{,}21 < 0{,}63 \le 1$) został spełniony, udajemy się więc do miasta 3.

Gdybyśmy dysponowali większą ilością mrówek, powtórzylibyśmy losowanie dla każdej z nich, co skutkowałoby różnymi wyborami ścieżek przez poszczególne mrówki.

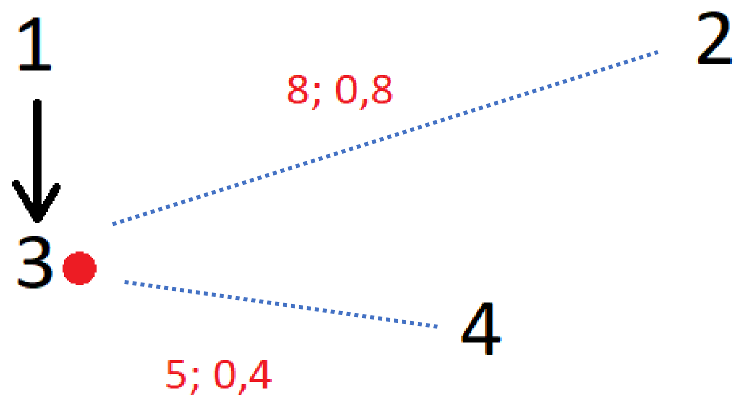
S(P13)	S(P12)	S(P14)
1	0,21	0,06



Prawdopodobieństwa kolejnych wyborów

$$P_{32} = \frac{\tau_{32}^{\alpha}\eta_{32}^{\beta}}{\sum\limits_{i=3, j\in\Omega} \tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}} = \frac{0.8 \cdot \frac{1}{8}}{0.8 \cdot \frac{1}{8} + 0.4 \cdot \frac{1}{5}} = 0.5556 \approx 56\%$$

$$P_{34} = \frac{\tau_{34}^{\alpha}\eta_{34}^{\beta}}{\sum\limits_{i=3, j\in\Omega} \tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}} = \frac{0.4 \cdot \frac{1}{5}}{0.8 \cdot \frac{1}{8} + 0.4 \cdot \frac{1}{5}} = 0.4444 \approx 44\%$$



Wybór drugiej ścieżki

$$S(P_{32}) = P_{32} + P_{34} = 0.56 + 0.44 = 1$$

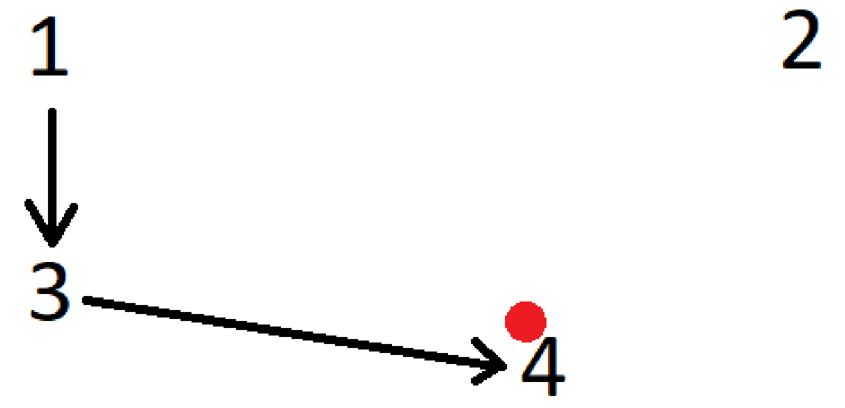
$$S(P_{34}) = P_{34} = 0.44$$

P32	P34
0,56	0,44

Wylosowano liczbę losową R równą 0,23

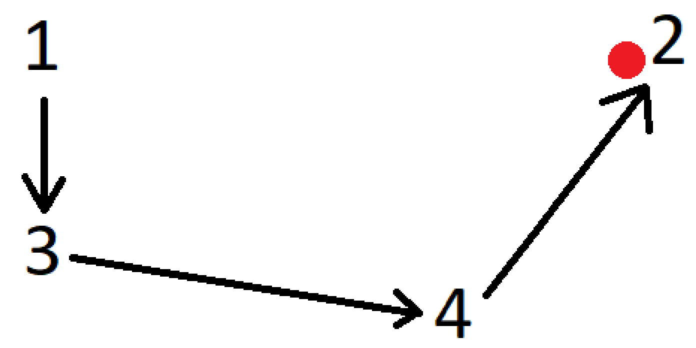
If 0,44 < R <= 1 to udaj się do miasta 2.
Else if 0 < R <= 0,44 to udaj się do miasta 4.

Warunek drugi (0 < 0,23 <= 0,44) został spełniony, udajemy się więc do miasta 4.

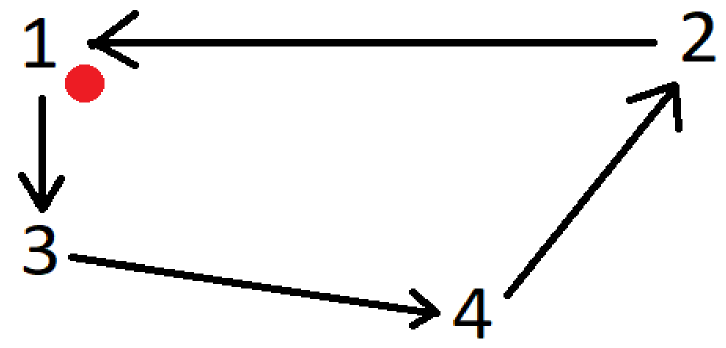


Wybór trzeciej i czwartej ścieżki

Po dostaniu się do miasta 4 możemy zaobserwować, że kolejne miasto które musimy odwiedzić to miasto 2, ponieważ jest ono jedyną możliwością - nie możemy odwiedzić miasta 3, ponieważ już w nim byliśmy, a miasto 1 (początkowe) można odwiedzić po raz drugi dopiero przy końcu wędrówki.



Następnie mamy również tylko jedną możliwość - udanie się do miasta 1 i zakończenie wędrówki.

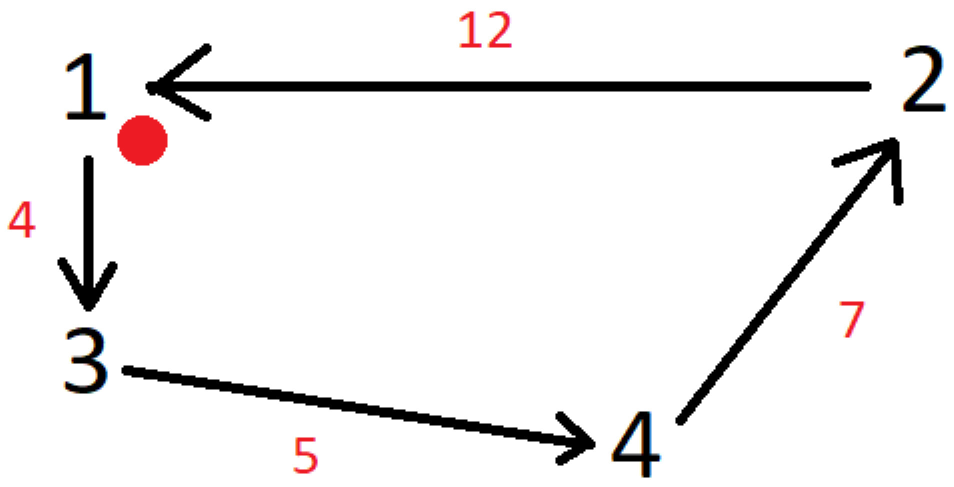


Wynik iteracji - długość drogi

Aby uzyskać długość drogi musimy zsumować długości każdej z przebytych krawędzi.

Nasza droga to 1 -> 3 -> 4 -> 2 -> 1

$$s_1 = \sum_{i,j} L_{ij} = L_{13} + L_{34} + L_{42} + L_{21} = 4 + 5 + 7 + 12 = 28$$



Sprzężenia zwrotne

Sprzężenie zwrotne ujemne – ulatnianie feromonów z krawędzi grafu

$$\tau(t+1) = \tau(t) \cdot (1-\rho)$$

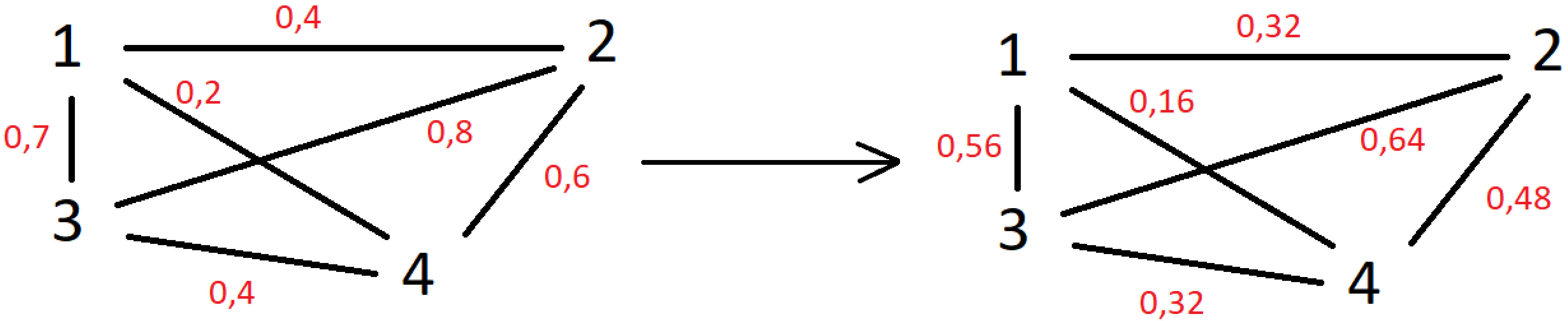
$$\tau(t+1) = \tau(t) \cdot 0.8$$

	M1	M2	M3	M4
M1	0	0,4	0,7	0,2
M2	0,4	0	0,8	0,6
M3	0,7	0,8	0	0,4
M4	0,2	0,6	0,4	0

$$\cdot 0.8 =$$

	M1	M2	M3	M4
M1	0	0,32	0,56	0,16
M2	0,32	0	0,64	0,48
M3	0,56	0,64	0	0,32
M4	0,16	0,48	0,32	0

Sprzężenia zwrotne



Sprzężenia zwrotne

Sprzężenie zwrotne dodatnie - zwiększenie stężenia feromonów na odwiedzonych przez mrówkę/i krawędziach.

$$\tau_{ij}(t+1) = \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k}(t) \qquad \text{gdzie} \qquad \Delta\tau_{ij}^{k} = \frac{1}{L_k}$$

	M1	M2	M3	M4
M1	0	0,32	0,56	0,16
M2	0,32	0	0,64	0,48
M3	0,56	0,64	0	0,32
M4	0,16	0,48	0,32	0

$\longrightarrow$

	M1	M2	M3	M4
M1	0	0,403333	0,595714	0,16
M2	0,355714	0		0,515714
M3	0,595714	0,64	0	0,355714
M4	0,16	0,515714	0,355714	0

Kolejne iteracje i zakończenie działania

Zakończyliśmy pierwszą iterację, czekają nas jeszcze dwie (warunek stopu – 3 iteracje). Musimy więc powtórzyć wszystkie kroki jakie wykonaliśmy wcześniej jeszcze 2 razy, zapamiętując każdą otrzymaną drogę i jej długość. Na samym końcu wybieramy drogę najkrótszą - czyli najbliższą optymalnemu rozwiązaniu, bo używając tego algorytmu nie mamy gwarancji otrzymania ścieżki optymalnej, możemy jednak się do niej zbliżyć bardziej lub mniej - zależy to od ilości mrówek i liczby iteracji, czym więcej, tym lepiej dla jakości rozwiązania.

Dziękuję za uwagę!

Źródła

- Metody optymalizacji (2022) - Józef Lisowski
- How the Ant Colony Optimization algorithm works (2018) - Ali Mirjalili (https://youtu.be/783ZtAF4j5g?si=5uKz3rJShSI8YbEQ)
- Ant Colony Optimization - Part 5: Example - Traveling Saleman Problem (TSP) (2022) - Dr Hak-Keung Lam (https://youtu.be/jNd7QJQH-kk?si=e9ExEKro_3j-9LtF)