

Courbe d'interpolation

cpierquet – at – outlook . fr
v 1.0 - Février 2022

1 Introduction

1.1 Outils disponibles

Les **splines cubiques** sont utiles pour « tracer » des portions de courbes, régulières entre deux points donnés, avec gestion des tangentes de sortie et d'entrée.

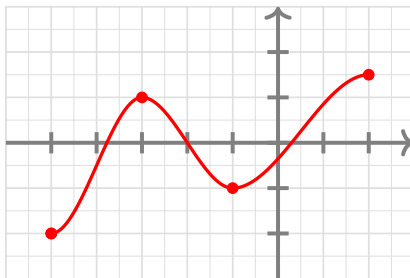
On peut les déterminer, par résolution de systèmes, donc grâce à un outil externe.

TikZ permet, grâce à l'outil **..controls** (lié aux courbes de Bézier) d'obtenir un résultat très proche de l'interpolation cubique, et ce avec un *paramètre* qui vaut 3.

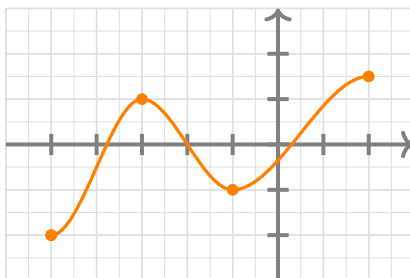
Il existe également l'option **in=... ,out=...** pour gérer les angles de sortie et d'entrée de l'option chemin **to**.

1.2 Comparaison des outils

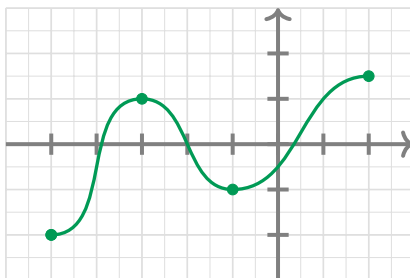
```
\draw[red,domain=-5:-3] plot(\x,{-3/4*\x*\x*\x+-9*\x*\x+-135/4*\x+-79/2});  
\draw[red,domain=-3:-1] plot(\x,{1/2*\x*\x*\x+3*\x*\x+9/2*\x+1});  
\draw[red,domain=-1:2] plot(\x,{-0.185185*\x*\x*\x+0.27777*\x*\x+1.11111*\x+-0.351851});
```



```
\draw[orange,line width=1.25pt] (-5,-2) ..controls +(0:0.67) and +(180:0.67).. (-3,1);  
\draw[orange,line width=1.25pt] (-3,1) ..controls +(0:0.67) and +(180:0.67).. (-1,-1);  
\draw[orange,line width=1.25pt] (-1,-1) ..controls +(0:1) and +(180:1).. (2,1.5);
```



```
\draw[ForestGreen,line width=1.25pt] (-5,-2) to[out=0,in=180] (-3,1);  
\draw[ForestGreen,line width=1.25pt] (-3,1) to[out=0,in=180] (-1,-1);  
\draw[ForestGreen,line width=1.25pt] (-1,-1) to[out=0,in=180] (2,1.5);
```



2 L'outil « splinetikz »

2.1 Explications et définitions

On va utiliser les notions suivantes pour paramétrer le tracé « automatique » par `...controls` :

- il faut rentrer les **points de contrôle**;
- il faut préciser les **pentés des tangentes** (pour le moment on travaille avec les mêmes à gauche et à droite...);
- on peut paramétrer les **coefficients** pour « affiner » les portions.

Pour déclarer les paramètres :

- liste des points de contrôle par : `liste=x1/y1/d1$x2/y2/d2$...`
 - il faut au-moins deux points;
 - avec les points $(x_i; y_i)$ et $f'(x_i)=d_i$.
- coefficients de contrôle par `coeffs=...` :
 - `coeffs=x` pour mettre tous les coefficients à x ;
 - `coeffs=C1$C2$...` pour spécifier les coefficients par portion (donc il faut avoir autant de `$` que pour les points!);
 - `coeffs=C1G/C1D$...` pour spécifier les coefficients par portion et par partie gauche/droite;
 - on peut mixer avec `coeffs=C1$C2G/C2D$...`.

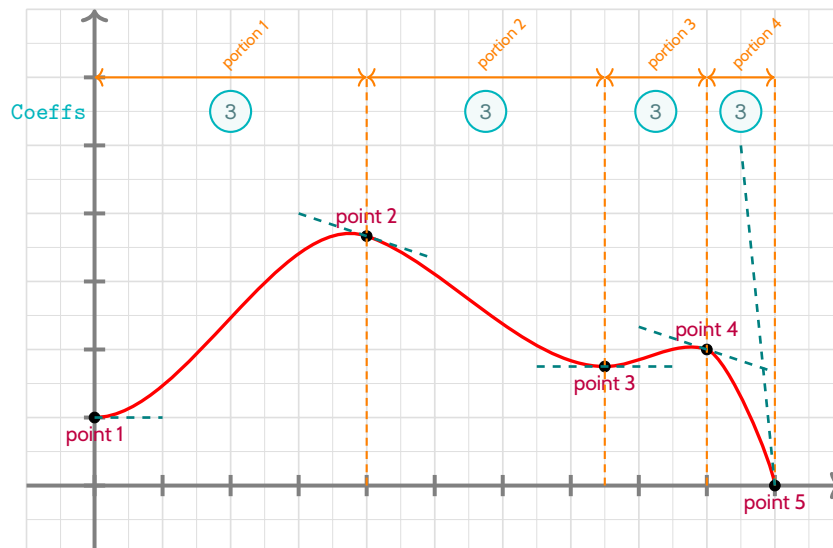
2.2 Clés et options

La commande `\spline tikz` se présente sous la forme :

```
\begin{tikzpicture}
...
\spline tikz[liste=...,coeffs=...,affpoints=...,couleur=...,epaisseur=...,taillepoints=...,couleurpoints=...,style=...]
...
\end{tikzpicture}
```

Certains paramètres peuvent être gérés directement dans la commande `\spline tikz` :

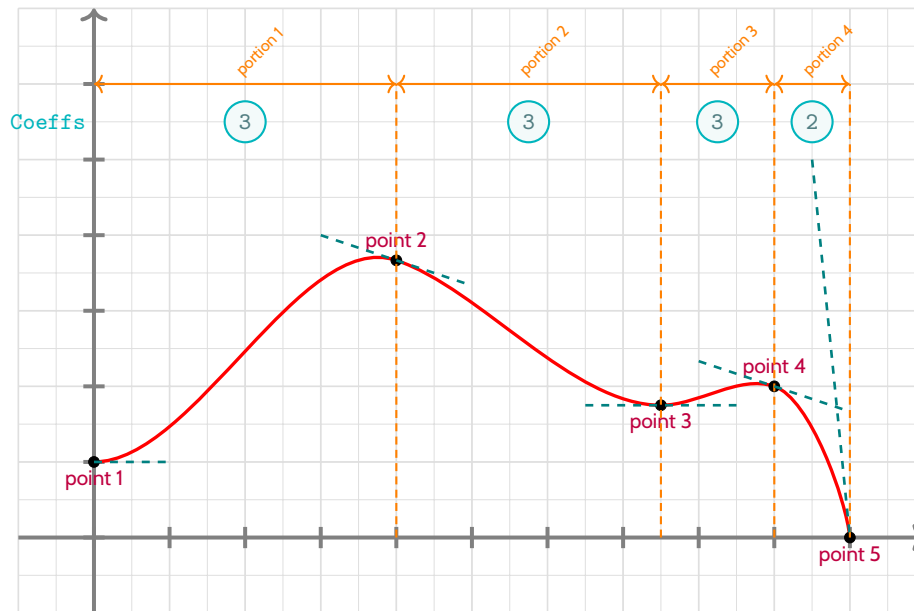
- la couleur de la courbe est **rouge**, gérée par la clé `<couleur=...>`;
- l'épaisseur de la courbe est de **1.25pt**, gérée par la clé `<epaisseur=...>`;
- du style supplémentaire pour la courbe peut être rajouté, grâce à la clé `<style=...>`;
- les coefficients de *compensation* sont par défaut à 3, gérés par la clé `<coeffs=...>`
- les points de contrôle ne sont pas affichés par défaut, mais clé booléenne `<affpoints=true>` permet de les afficher;
- la taille des points de contrôle est gérée par la clé `<taillepoints=...>`.



```
\spline tikz[%
liste=0/1/0$4/3.667/-0.333$7.5/1.75/0$9/2/-0.333$10/0/-10,%
coeffs=3,%
affpoints=true,%
couleur=red]
```

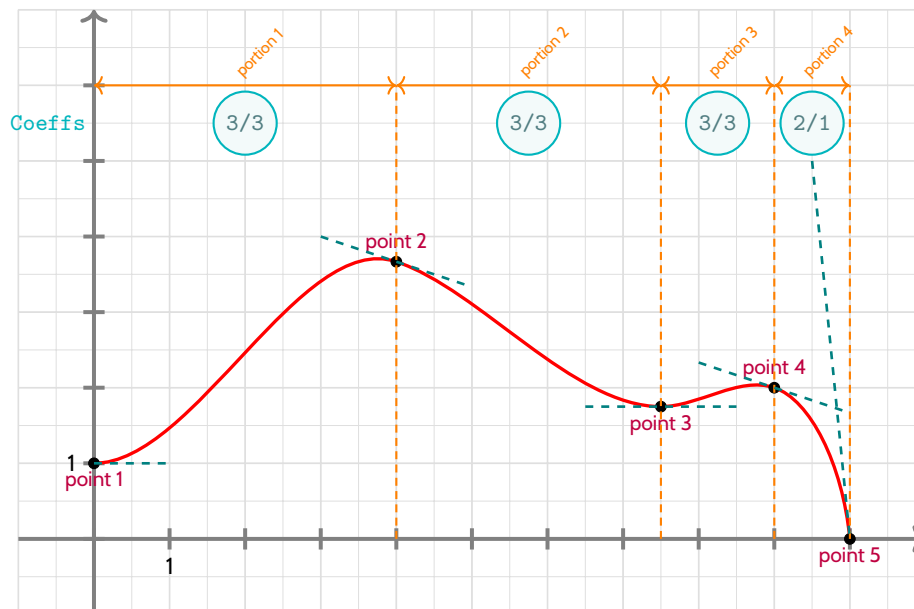
3 Influence(s) des coefficients de *compensation*

3.1 Avec une légère modification pour la dernière portion



```
\splinetikz[%
  liste=0/1/0$4/3.667/-0.333$7.5/1.75/0$9/2/-0.333$10/0/-10,%
  coeffs=3$3$3$2,%
  affpoints=true]
```

3.2 Avec une gestion plus fine de la dernière partie



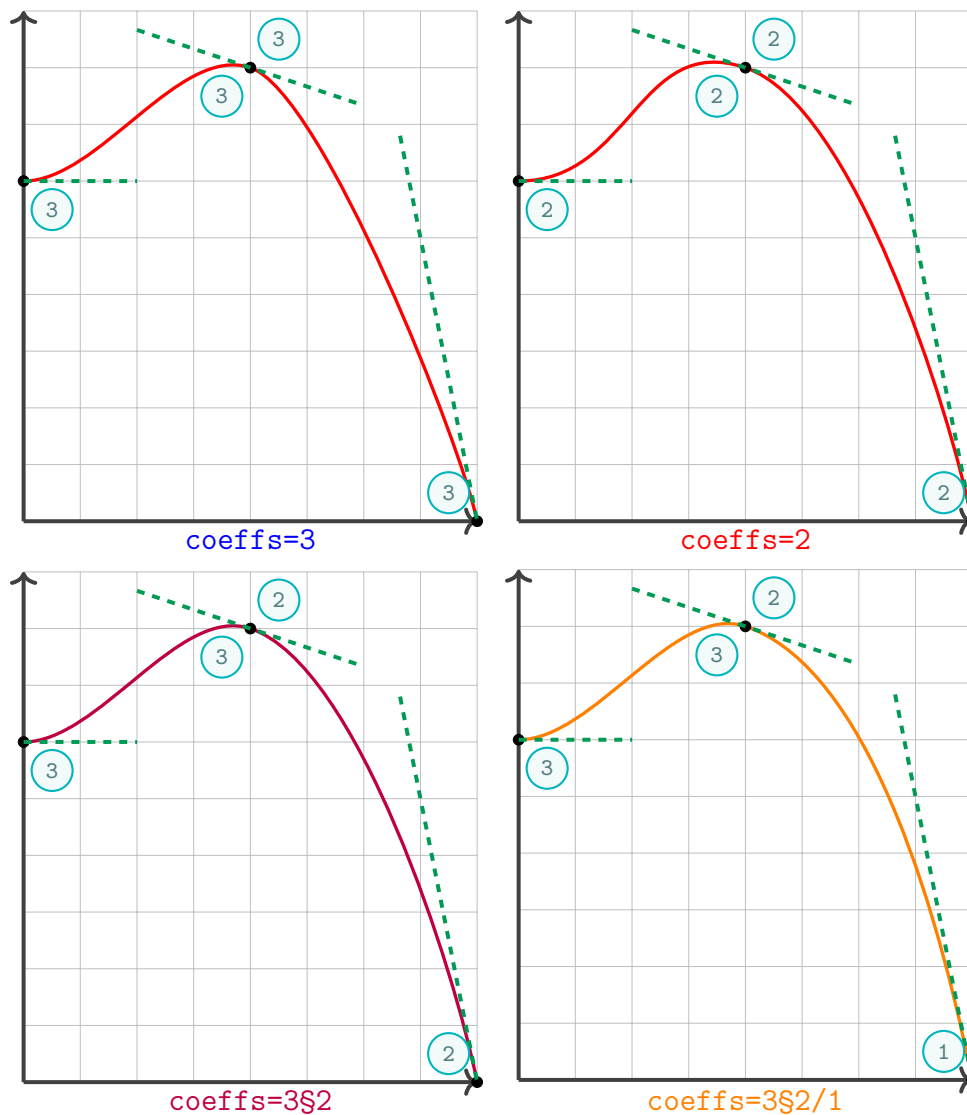
```
\def\LISTE{0/1/0$4/3.667/-0.333$7.5/1.75/0$9/2/-0.333$10/0/-10}
\splinetikz[liste=\LISTE,coeffs=3$3$3$3,affpoints=true]
\tangentetikz[liste=\LISTE,xl=0,xr=1,couleur=ForestGreen,style=dashed]
\tangentetikz[liste=\LISTE,xl=-1,xr=1,couleur=ForestGreen,style=dashed,point=2]
\tangentetikz[liste=\LISTE,xl=-1,xr=1,couleur=ForestGreen,style=dashed,point=3]
\tangentetikz[liste=\LISTE,xl=-1,xr=1,couleur=ForestGreen,style=dashed,point=4]
\tangentetikz[liste=\LISTE,xl=-0.5,xr=0,couleur=ForestGreen,style=dashed,point=5]
```

3.3 Compléments visuels sur les coefficients de compensation

Dans la majorité des cas, le coefficient ③ permet d'obtenir une courbe (ou une portion) très satisfaisante!

Dans certains cas, notamment si l'une des pentes est relativement « forte » et/ou si l'intervalle horizontal de la portion est relativement « étroit », il se peut que la portion paraisse un peu trop « abrupte ».

On peut dans ce cas *jouer* sur les coefficients de cette portion pour *arrondir* un peu tout cela!



```
\begin{tikzpicture}
...
%le spline
\splinetikz[liste=0/1.5/0§1/2/-0.333§2/0/-5,affpoints=true,coeffs=...,couleur=...]
%les tangentes
\draw[line width=1.5pt,ForestGreen,dashed] (0,1.5)--(0.5,1.5) ;
\draw[line width=1.5pt,ForestGreen,dashed,domain=0.5:1.5] plot (\x,{-1/3*(\x-1)+2}) ;
\draw[line width=1.5pt,ForestGreen,dashed,domain=1.66:2] plot (\x,{-5*(\x-2)+0}) ;
...
\end{tikzpicture}
```

4 L'outil « tangentetikz »

4.1 Définitions

En parallèle de l'outil `\splinetikz`, il existe l'outil `\tangentetikz` qui va permettre de tracer des tangentes à l'aide de la liste de points précédemment définie pour l'outil `\splinetikz`.

NB : il peut fonctionner indépendamment de l'outil `\splinetikz` puisque la liste des points de travail est gérée de manière autonome!

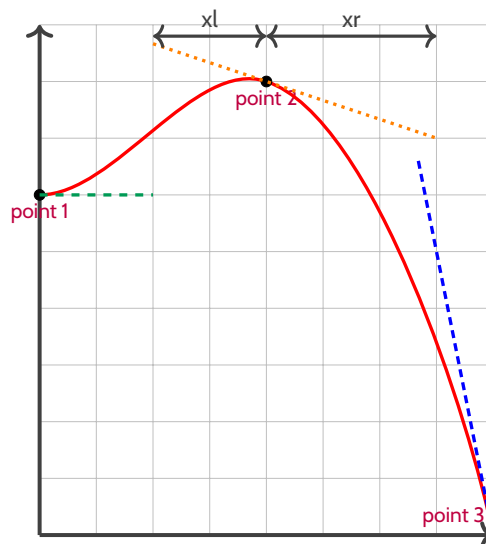
La commande `\tangentetikz` se présente sous la forme :

```
\begin{tikzpicture}
...
\tangentetikz[liste=...,couleur=...,epaisseur=...,xl=...,xr=...,style=...,point=...]
...
\end{tikzpicture}
```

Cela permet de tracer la tangente :

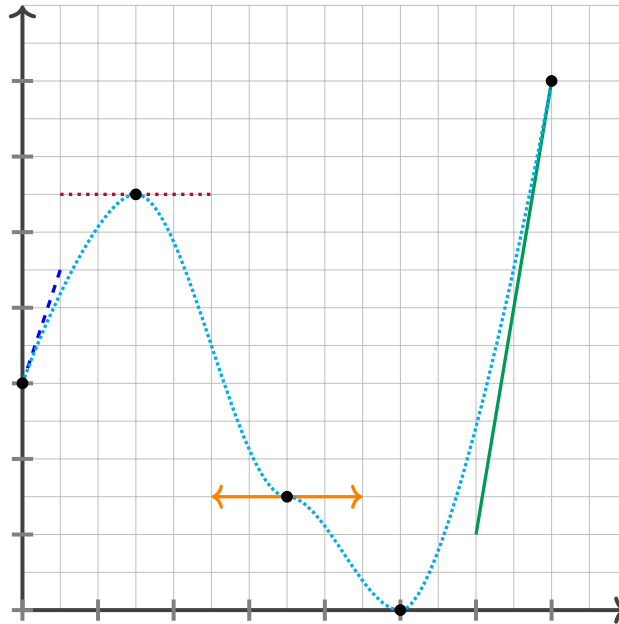
- au point numéro `numéro <point>` de la liste `<liste>`, de coordonnées x_i/y_i avec la pente d_i ;
- avec une épaisseur de `<epaisseur>`, une couleur `<couleur>` et un style additionnel `<style>`;
- en la traçant à partir de `<xl>` avant x_i et jusqu'à `<xr>` après x_i .

4.2 Exemple



```
\begin{tikzpicture}
...
% spline
\splinetikz[liste=0/1.5/0$1/2/-0.333$2/0/-5,affpoints=true,coeffs=3$2,couleur=red]
% tangente
\tangentetikz[liste=0/1.5/0$1/2/-0.333$2/0/-5,xl=0,xr=0.5,couleur=ForestGreen,style=dashed]
\tangentetikz[liste=0/1.5/0$1/2/-0.333$2/0/-5,xl=0.5,xr=0.75,couleur=orange,style=dotted,point=2]
\tangentetikz[liste=0/1.5/0$1/2/-0.333$2/0/-5,xl=0.33,xr=0,couleur=blue,style=densely dashed,point=3]
...
\end{tikzpicture}
```

5 Exemple avec « personnalisation »



```
\tikzset{%
  xmin/.store in=\xmin,xmin/.default=-5,xmin=-5,
  xmax/.store in=\xmax,xmax/.default=5,xmax=5,
  ymin/.store in=\ymin,ymin/.default=-5,ymin=-5,
  ymax/.store in=\ymax,ymax/.default=5,ymax=5,
  xgrille/.store in=\xgrille,xgrille/.default=1,xgrille=1,
  xgrilles/.store in=\xgrilles,xgrilles/.default=0.5,xgrilles=0.5,
  ygrille/.store in=\ygrille,ygrille/.default=1,ygrille=1,
  ygrilles/.store in=\ygrilles,ygrilles/.default=0.5,ygrilles=0.5,
  xunit/.store in=\xunit,unit/.default=1,xunit=1,
  yunit/.store in=\yunit,unit/.default=1,yunit=1
}

\begin{tikzpicture}[x=0.5cm,y=0.5cm,xmin=0,xmax=16,xgrilles=1,ymin=0,ymax=16,ygrilles=1]
  \draw[xstep=\xgrilles,ystep=\ygrilles,line width=0.3pt,lightgray] (\xmin,\ymin) grid (\xmax,\ymax) ;
  \draw[line width=1.5pt,->,darkgray] (\xmin,0)--(\xmax,0) ;
  \draw[line width=1.5pt,->,darkgray] (0,\ymin)--(0,\ymax) ;
  \foreach \x in {0,2,...,14} {\draw[gray,line width=1.5pt] (\x,4pt) -- (\x,-4pt) ;}
  \foreach \y in {0,2,...,14} {\draw[gray,line width=1.5pt] (4pt,\y) -- (-4pt,\y) ;}
  %la liste pour la courbe d'interpolation
  \def\liste{0/6/3$3/11/0$7/3/0$10/0/0$14/14/6}
  %les tangentes "stylisées"
  \tangentetikz[liste=\liste,xl=0,xr=1,couleur=blue,style=dashed]
  \tangentetikz[liste=\liste,xl=2,xr=2,couleur=purple,style=dotted,point=2]
  \tangentetikz[liste=\liste,xl=2,xr=2,couleur=orange,style=<->,point=3]
  \tangentetikz[liste=\liste,xl=2,xr=0,couleur=ForestGreen,point=5]
  %la courbe en elle-même
  \splineetikz[liste=\liste,affpoints=true,coeffs=3,couleur=cyan,style=densely dotted]
\end{tikzpicture}
```

6 Codes du package splinetikz.sty

```
\NeedsTeXFormat{LaTeX2e}
\ProvidesPackage{splinetikz}[2022/02/10 - v1.0 - Splines cubiques, en TikZ]

%-----Packages utiles
\RequirePackage[dvipsnames,table]{xcolor}
\RequirePackage{tikz}
\RequirePackage{pgf,pgffor,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.18}
\RequirePackage{ifthen}
\RequirePackage{xkeyval}
\RequirePackage{xfp}
\RequirePackage{xstring}
\RequirePackage{simplekv}
\RequirePackage{listofitems}
\RequirePackage{xintexpr}
\usetikzlibrary{decorations.pathreplacing}
\usetikzlibrary{decorations.markings}
\usetikzlibrary{arrows.meta}
```

```
%-----commande utile pour extraire des infos d'une liste
\newcommand\extractcoeff[2]{% #1=liste & #2=numero
  \setsepchar{S}%
  \readlist\lcoeffs{#1}
  \ifnum \lcoeffslen=1
    \def\COEFFA{#1}
    \def\COEFFB{#1}
  \else
    \itemtomacro\lcoeffs[#2]\COEFF
    \IfSubStr{\COEFF}{/}%
      {\StrCut{\COEFF}{/}{\COEFFA}{\COEFFB}}%
      {\def\COEFFA{\COEFF}\def\COEFFB{\COEFF}}
  \fi
}
```

```
%-----tangente(s) en TikZ, avec point/dérivée ou liste points/dérivées
\defKV[tgte]{%
  liste=\def\TGTListe{#1},%
  width=\def\TGTEpaisseur{#1},%
  couleur=\def\TGTCouleur{#1},%
  xl=\def\TGTXL{#1},%
  xr=\def\TGTXR{#1},%
  style=\def\TGStyle{#1},%
  point=\def\TGNumpt{#1}
}

\setKVdefault[tgte]{
  liste=,%
  width=1.25pt,%
  couleur=red,%
  xl=0.5,xr=0.5,%
  style=,%
  point=1
}

\newcommand\tangentetikz[1][]{%
  \useKVdefault[tgte]%
  \setKV[tgte]{#1}% on paramètre les nouvelles clés et on les simplifie
  \setsepchar[.]{S./}%
  \readlist\TGTListe\points\TGTListe
  \itemtomacro\TGTListe\points[\TGNumpt,1]\xa
  \itemtomacro\TGTListe\points[\TGNumpt,2]\ya
  \itemtomacro\TGTListe\points[\TGNumpt,3]\fprimea
  \def\TGTEDEB{\fpeval{\xa-\TGTXL}}\def\TGTFIN{\fpeval{\xa+\TGTXR}}%
  \draw[line width=\TGTEpaisseur,\TGTCouleur,domain=\TGTEDEB:\TGTFIN,\TGStyle] plot (\x,{\fprimea*(\x-\xa)+\ya}) ;%
}
```

```

%-----splines en tikz avec ..controls
\defKV[spline]{%
  liste=\def\SPLliste{#1},%
  width=\def\SPLepaisseur{#1},%
  couleur=\def\SPLcouleur{#1},%
  coeffs=\def\SPLcoeffs{#1},%
  couleurpoints=\def\SPLcouleurpoints{#1},%
  taillepoints=\def\SPLtaillepoints{#1},%
  style=\def\SPLstyle{#1}
}

\setKVdefault[spline]{%
  liste=%
  width=1.25pt,%
  couleur=red,%
  coeffs=3,%
  couleurpoints=black,%
  taillepoints=2pt,%
  affpoints=false,%
  style=
}

\newcommand\splinetikz[1][]{%
  \useKVdefault[spline]
  \setKV[spline]{#1}% on paramètre les nouvelles clés et on les simplifie
  %on lit la liste des points/nbderivés et on stocke dans \listepoints
  \setsepchar[.]{$.}
  \readlist\SPLlistepoints\SPLliste
  \def\SPLnbsplines{\interval{\SPLlistepointslen-1}}
  %si uniquement deux points, pas de boucle...
  \ifnum \SPLlistepointslen=2
    %extraction des coeffs de compensation
    \extractcoeff{\SPLcoeffs}{1}
    %extraction des coordonnées
    \itemtomacro\SPLlistepoints[1,1]\xa
    \itemtomacro\SPLlistepoints[1,2]\ya
    \itemtomacro\SPLlistepoints[1,3]\fprimea
    \itemtomacro\SPLlistepoints[2,1]\xb
    \itemtomacro\SPLlistepoints[2,2]\yb
    \itemtomacro\SPLlistepoints[2,3]\fprimeb
    \draw[line width=\SPLepaisseur,\SPLcouleur,\SPLstyle] (\xa,\ya) ..controls +({atan \fprimea}:{(\xb-\xa)/\COEFFA}) and
    \curvearrowright +({-180 + atan \fprimeb}:{(\xb-\xa)/\COEFFB}).. (\xb,\yb) ;%
    %sinon on construit bout par bout !
  \else
    \foreach \i in {1,2,...,\SPLnbsplines}{
      %extraction des coeffs de compensation
      \extractcoeff{\SPLcoeffs}{\i}
      \def\j{\interval{\i+1}}
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\i,1]\xa
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\i,2]\ya
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\i,3]\fprimea
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\j,1]\xb
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\j,2]\yb
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\j,3]\fprimeb
      \draw[line width=\SPLepaisseur,\SPLcouleur,\SPLstyle] (\xa,\ya) ..controls +({atan \fprimea}:{(\xb-\xa)/\COEFFA}) and
      \curvearrowright +({-180 + atan \fprimeb}:{(\xb-\xa)/\COEFFB}).. (\xb,\yb) ;%
    }
  \fi
  \ifboolKV[spline]{affpoints}%on affiche les points de contrôle
  {%
    \foreach \i in {1,2,...,\SPLlistepointslen}{%
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\i,1]\xa
      \itemtomacro\SPLlistepoints[\i,2]\ya
      \filldraw[\SPLcouleurpoints] (\xa,\ya) circle[radius=\SPLtaillepoints] ;%
    }
  }
}

```