Министерство Образования Российской Федерации

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра РК6 «Системы автоматизированного проектирования»

Отчет по домашнему заданию

по курсу "Аналитические модели и имитационное моделирование на системном уровне"

Студент:
Голубицкий С. Р.
Преподаватель:
Берчун Ю. В.

Москва 2019

Задание 1

<u>Исходные данные:</u>

Tc	**Ts**	**Tw**
28	231	529

Tc - среднее время между звонками клиентов
Ts - среднее время обслуживания
Tw - среднее время между звонками клиентов

Задание 1.1

<u>Условие:</u> Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Если все операторы заняты, звонок теряется. Рассчитать минимальное число операторов, при котором доля отказов не превышает 25%, 10%, 5%, 1%. Построить график вероятности отказа от числа операторов. Построить график, иллюстрирующий коэффициент загрузки операторов в зависимости от их числа.

<u>Решение:</u>

Вероятность того, что ни один из операторов не будет занят, рассчитывается по формуле 1:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i}} \tag{1}$$

, где
P_0 - вероятность того, что ни один из операторов не будет занят,
N - количесво операторов,
λ - интенсивность поступления заявок,
μ - интенсивность обработки заявок.

Для расчета вероятности отказа воспользуемся формулой:

$$P_{den} = \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} P_0 \tag{2}$$

, где P_den - вероятность отказа системы.

Для расчета среднего количества занятых операторов используем формулу:

$$\overline{N} = \sum_{i=0}^{N} iP_i \tag{3}$$

, где
$\overline{N}$ - среднее количесво занятых операторов в системе
P_i - вероятность отказа i-го оператора.

Коэффицент загрузки операторов считается по форумуле $k = \frac{\overline{N}}{N}$, где N - текущее число операторов.

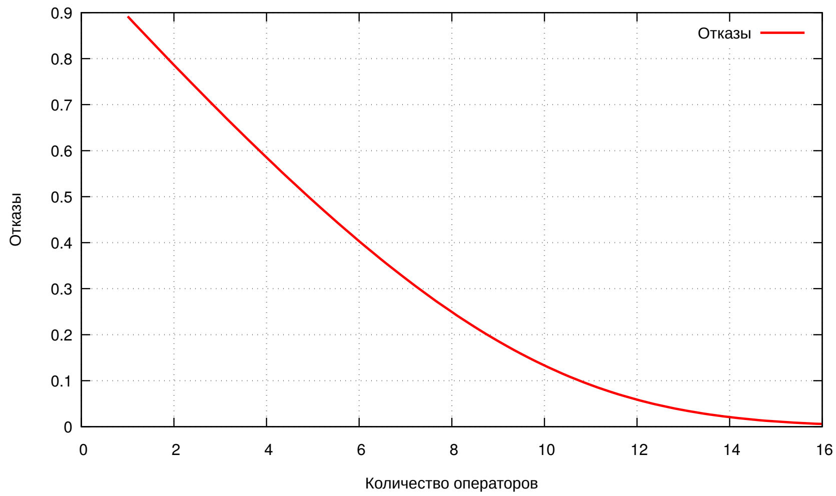

Рис. 1: Зависимость отказов системы от количества операторов.

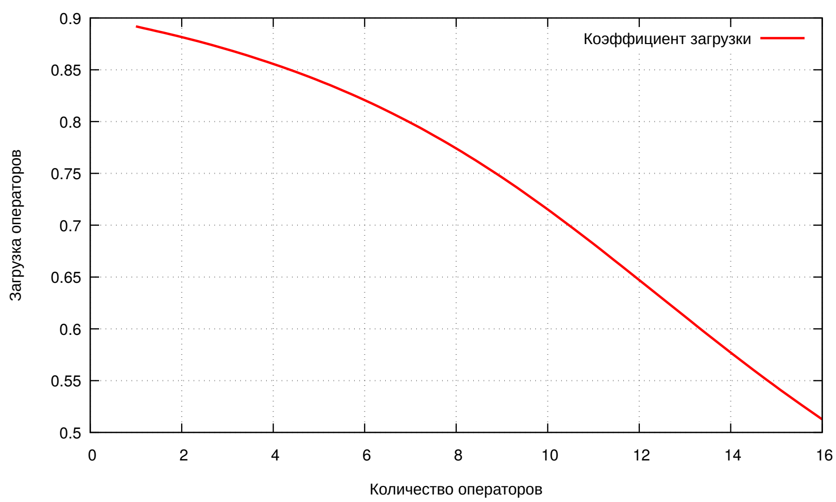

Рис. 2: Зависимость отказов системы от количества операторов.

Задание 1.2

Условие: Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Если все операторы заняты, звонок теряется. Построить график изменения доли отказов при замене каналов обслуживания местами в очереди (начиная с числа операторов, соответствующего 1% отказов в системе без очереди). Построить график, иллюстрирующий коэффициент загрузки операторов. Построить график математического ожидания длины очереди. Построить график, иллюстрирующий коэффициент занятости мест в очереди. Построить график математического ожидания времени пребывания клиентов в очереди.

Решение: Из задачи 1.1 известно, что при количестве операторов N = 16 вероятность отказа системы составляет 0.6 %. Для расчета вероятности, при которой операторы не будут заняты. Тогда вероятность того, что операторы не заняты вычисляется по формуле:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \frac{\lambda^N}{N!\mu^N} \sum_{k=1}^{M} (\frac{\lambda}{N\mu})^k} \tag{4}$$

, где M - количество мест в очереди.

Для расчета вероятности отказа системы можно воспользоваться формулой:

$$P_{den} = \frac{\lambda^N}{N!\mu^N} (\frac{\lambda}{N\mu})^M P_0 \tag{5}$$

Расчет среднего количества занятых операторов ведется по формуле:

$$\overline{N} = \sum_{i=0}^{N} iP_i + \sum_{k=1}^{M} NP_k \tag{6}$$

Матожидание длины очереди ведется по формуле:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{M} kP_k \tag{7}$$

, где $\overline{Q}$ - матожидание длины очереди. Коэффицент занятости мест в очереди вычисляется по формуле: $k = \frac{\overline{Q}}{Q}$, где k - коэффициент занятости мест в очереди.

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле: $\Delta\bar{t} = \frac{\overline{Q}}{\lambda}$.

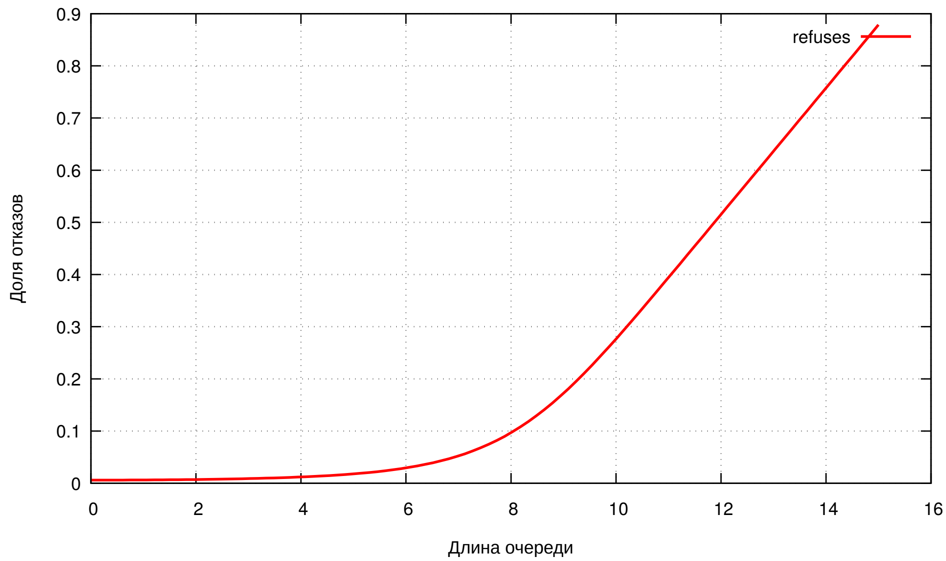

Рис. 3: Зависимость вероятности отказа системы от мест в очереди

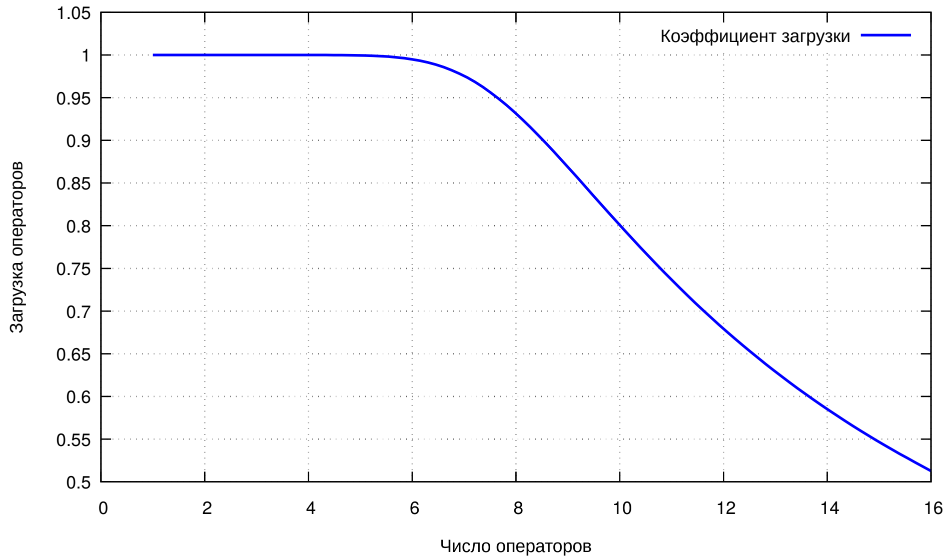

Рис. 4: Зависимость коэффициента загрузки операторов от их общего количества

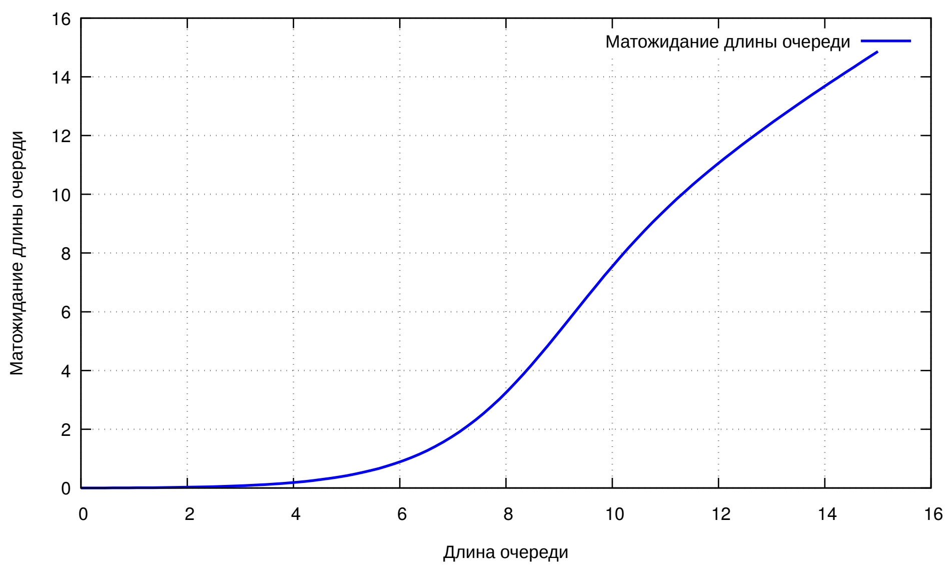

Рис. 5: Зависимость математического ожидания длины очереди от мест в очереди

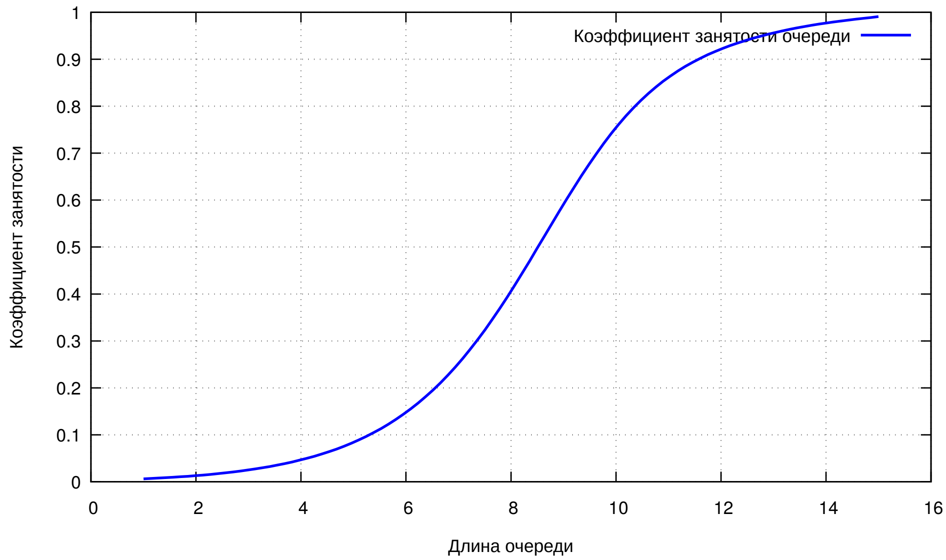

Рис. 6: Зависимость коэффициента занятости мест в очереди от длины очереди

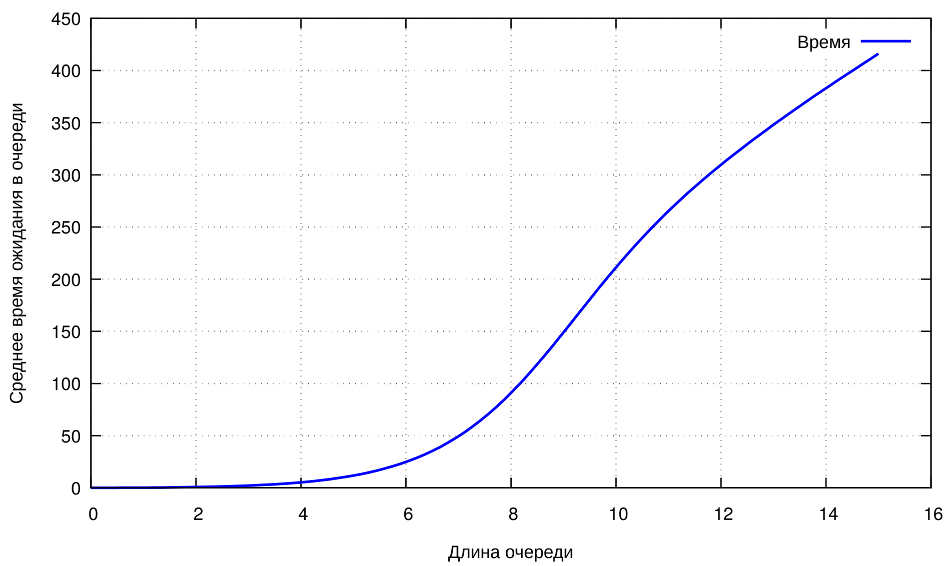

Рис. 7: Зависимость математического ожидания времени ожидания в очереди от мест в очереди

Задание 1.3

Условие: Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Если все операторы заняты, звонок теряется. Рассмотреть систему без ограничений на длину очереди. Построить график математического ожидания длины очереди в зависимости от числа операторов (вплоть до числа каналов, соответствующего 1% отказов в системе без очереди). Построить график, иллюстрирующий коэффициент загрузки операторов. Построить график математического ожидания времени пребывания клиентов в очереди.

Решение:

Для расчета вероятности, при которой операторы не будут заняты, можно воспользоваться формулой 11:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + \frac{\lambda^N}{N! \cdot \mu^N} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{N \cdot \mu}\right)^k} \tag{8}$$

Практический интерес будут представлять такие варианты системы, при которых сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{N \cdot \mu}\right)^k$ будет сходящейся. Для того, чтобы данная сумма сходилась необходимо, чтобы член $\frac{\lambda}{N \cdot \mu}$ был меньше единицы. Исходя из начальных условий практический смысл представляет рассмотрение систем, где $N \geq 9$. При таких условиях выражение 8 можно преобразовать к следующему виду:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + \frac{\lambda^N}{N! \cdot \mu^N} \cdot \frac{\lambda}{N \cdot \mu - \lambda}} \tag{9}$$

Для расчета математического ожидания длины очереди можно воспольземся формулой:

$$\overline{Q} = \frac{\lambda^N}{N! \cdot \mu^N} \cdot P_0 \cdot \frac{a}{(1-a)^2} \tag{10}$$

где $a = \frac{\lambda}{N \cdot \mu}$.

Для расчета среднего количества занятых операторов можно воспользоваться формулой:

$$\overline{N} = P_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda^i}{(i-1)! \cdot \mu^i} + \frac{\lambda^N}{(N-1)! \cdot \mu^N} \cdot \frac{\lambda}{N \cdot \mu - \lambda} \right) \qquad (11)$$

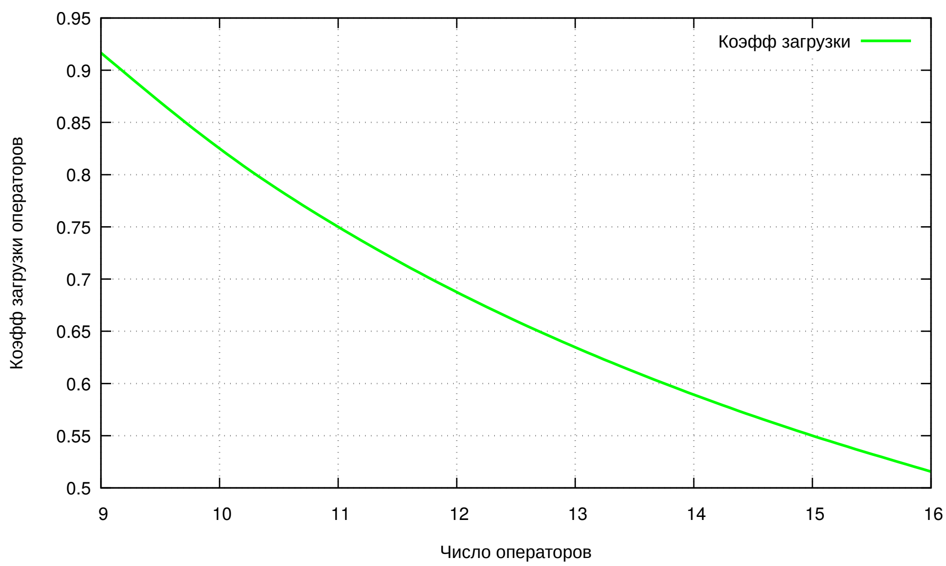

Рис. 8: Зависимость коэффициента загрузки операторов от их общего количества

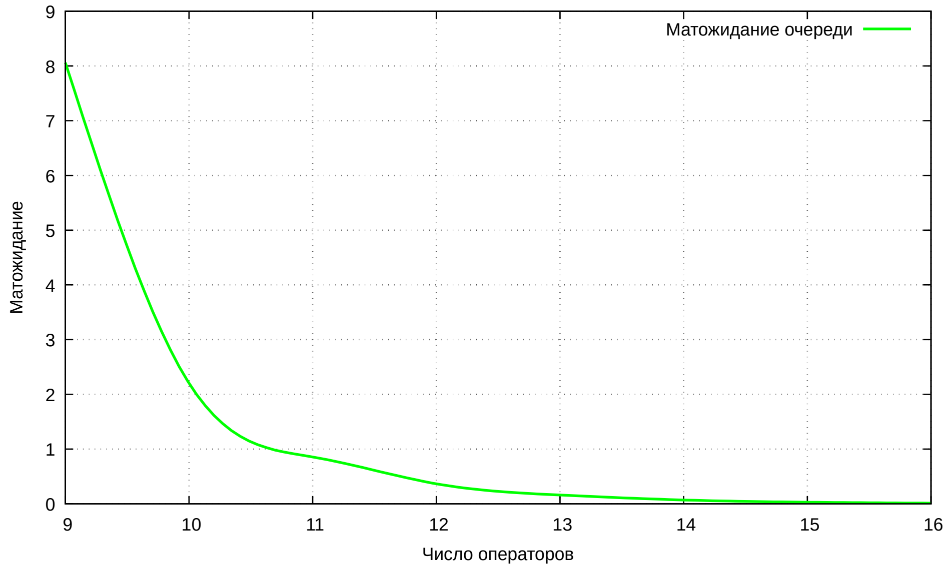

Рис. 9: Зависимость математического ожидания длины очереди от количества операторов

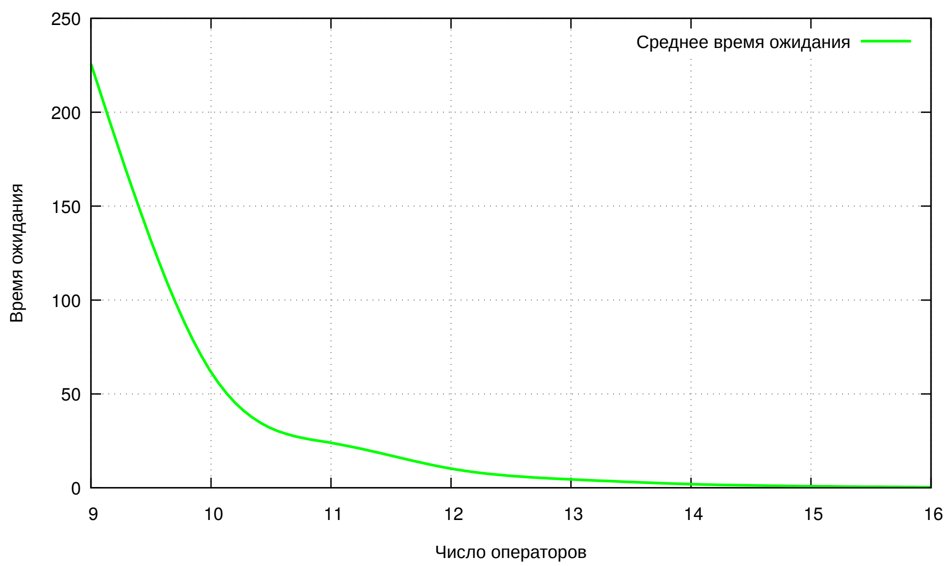

Рис. 10: Зависимость математического ожидания времени ожидания в очереди от количества операторов

Задание 1.4

<u>Условие:</u> Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Если все операторы заняты, звонок теряется. Рассмотреть систему без ограничений на длину очереди, учитывающей фактор ухода клиентов из очереди (среднее приемлемое время ожидания – Tw секунд). Построить график средней длины очереди в зависимости от числа операторов (вплоть до числа каналов, соответствующего 1% отказов в системе без очереди). Построить график, иллюстрирующий коэффициент загрузки операторов. Построить график математического ожидания времени пребывания клиентов в очереди.

<u>Решение:</u>

Для расчета вероятности, при которой операторы не будут заняты, можно воспользоваться формулой 15:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + \frac{\lambda^N}{N! \cdot \mu^N} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^{k} (N \cdot \mu + j \cdot \upsilon)}} \tag{12}$$

где $\upsilon-$ интенсивность выхода из очереди.

Для расчета математического ожидания длины очереди можно воспользуемся формулой:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^k}{\prod_{j=1}^{k} (N \cdot \mu + j \cdot \upsilon)} \cdot \frac{\lambda^N}{N! \cdot \mu^N} \cdot P_0 \tag{13}$$

Для расчета среднего количества занятых операторов можно воспользуемся формулой:

$$\overline{N} = P_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda^i}{(i-1)! \cdot \mu^i} + \frac{\lambda^N}{(N-1)! \cdot \mu^N} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^{k} (N \cdot \mu + j \cdot \upsilon)} \right) \tag{14}$$

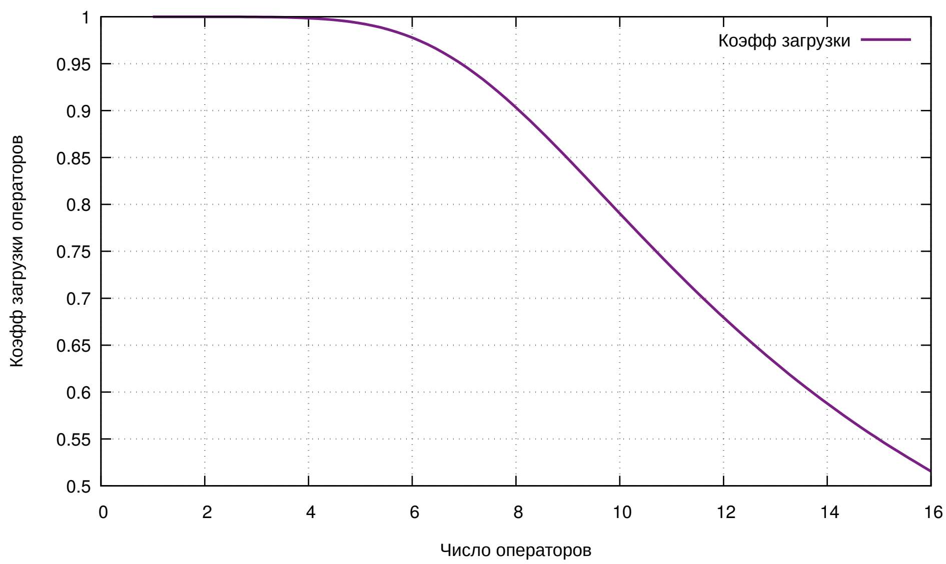

Рис. 11: Зависимость коэффициента загрузки операторов от их общего количества

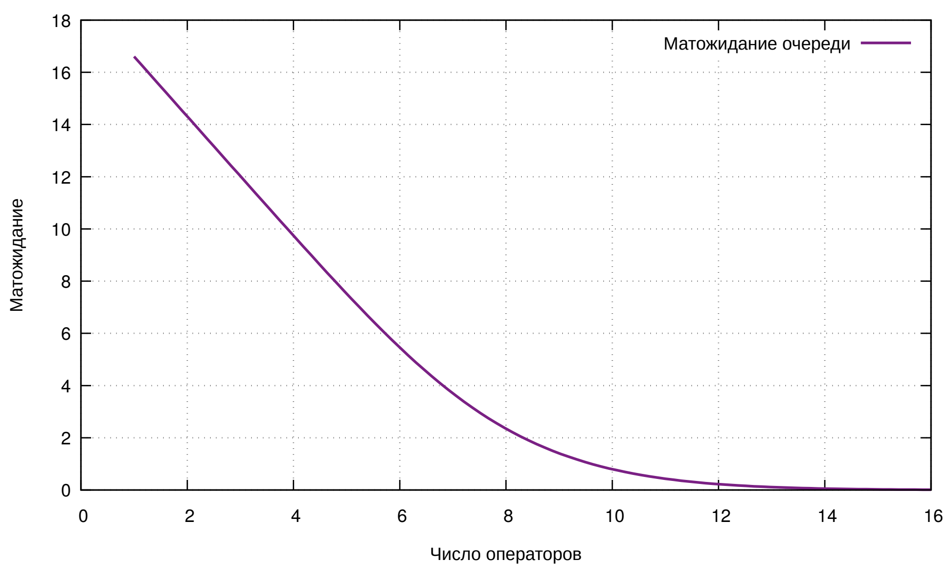

Рис. 12: Зависимость математического ожидания длины очереди от количества операторов

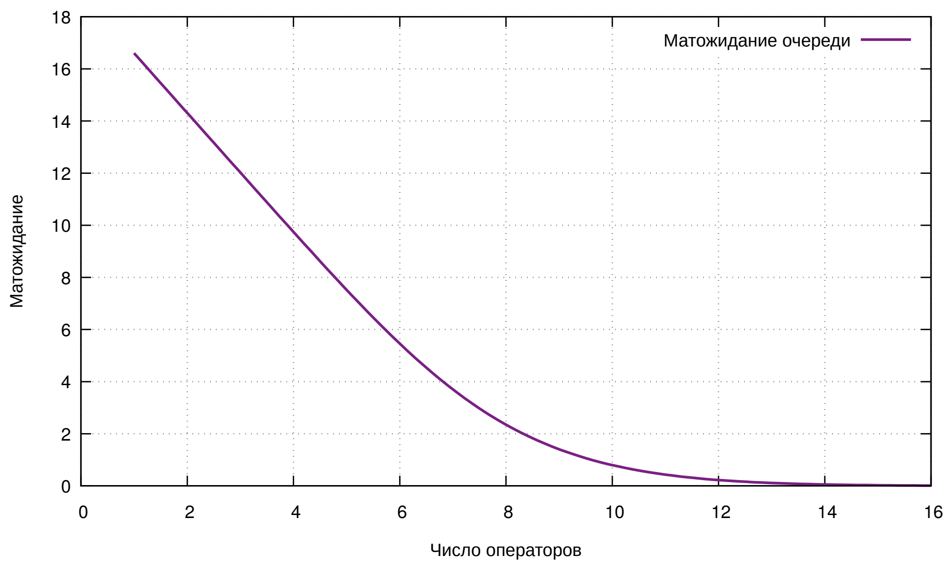

Рис. 13: Зависимость математического ожидания времени ожидания в очереди от количества операторов

Задание 2

Исходные данные:

Tc	**Ts**	**n**
330	11	40

Tc - среднее время между наладками
Ts - среднее время наладки
n - число станков

Задача 2.1

Условие: имеется участок с N станками. Среднее время между наладками составляет Tc минут, среднее время наладки – Ts минут. Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Построить график зависимости числа простаивающих станков от числа наладчиков. Построить график зависимости числа станков, ожидающих обслуживания, от числа наладчиков. Построить график зависимости среднего числа занятых наладчиков от их числа. Построить график зависимости коэффициента занятости наладчиков от их числа.

Решение:

Для расчета вероятности, при которой все станки будут налажены, можно воспользоваться формулой:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M} \frac{\prod_{j=1}^{i}(N-j+1)\cdot\lambda^i}{i!\cdot\mu^i} + \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\prod_{j=1}^{k}(N-j+1)}{M!\cdot M^{k-M}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \tag{15}$$

где P_0– вероятность, при которой все станки будут налажены;
M– количество наладчиков;
N– количество станков;
λ– интенсивность поломки станков;
μ– интенсивность наладки станков.

Для расчета числа ожидающих наладки станков можно воспользоваться формулой 19:

$$\overline{N}_{.} = P_0 \cdot \sum_{k=M+1,\ i=1}^{N,N-M} \frac{i \cdot \prod_{j=1}^{k} (N-j+1)}{M! \cdot M^{k-M}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \tag{16}$$

где $\overline{N}_{.}$– среднее количество ожидающих наладки станков.

Для расчета числа простаивающих станков можно воспользоваться формулой 20:

$$\overline{N}_{.} = P_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{i \cdot \prod_{j=1}^{i} (N-j+1) \cdot \lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + P_0 \cdot \sum_{k=M+1}^{N} \frac{k \cdot \prod_{j=1}^{k} (N-j+1)}{M! \cdot M^{k-M}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \tag{17}$$

где $\overline{N}_{.}$– среднее количество простаивающих станков.

Для расчета среднего числа занятых наладчиков можно воспользоваться формулой 21:

$$\overline{M}_{.} = P_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{i \cdot \prod_{j=1}^{i} (N-j+1) \cdot \lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + P_0 \cdot M \cdot \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\prod_{j=1}^{k} (N-j+1)}{M! \cdot M^{k-M}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \tag{18}$$

где $\overline{M}_{.}$– среднее количество занятых наладчиков.

Для расчета коэффициента занятости наладчиков от их числа можно воспользоваться формулой 22:

$$k_M = \frac{\overline{M}_{.}}{M} \tag{19}$$

k_M– коэффициент занятости наладчиков.

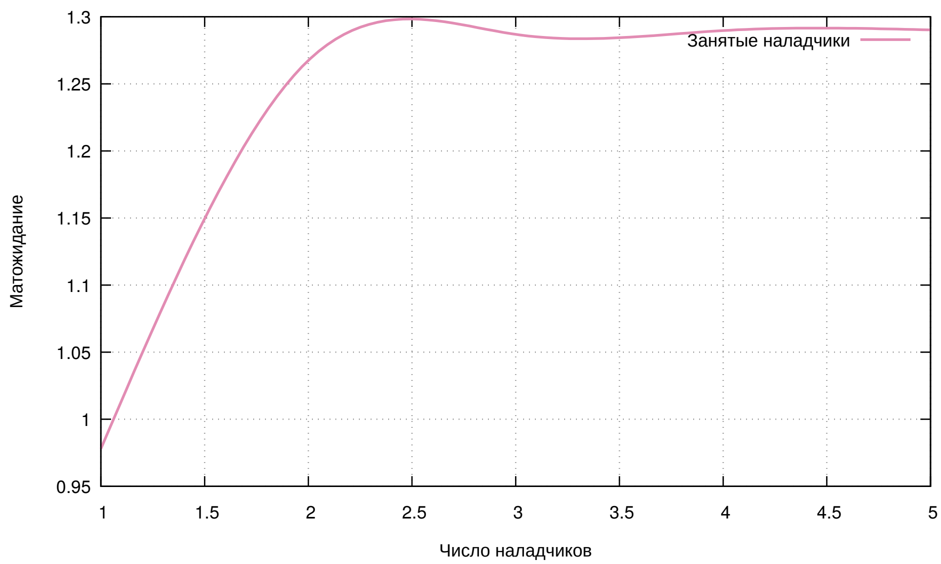

Рис. 14: Зависимость математического ожидания ожидающих наладки станков от количества наладчиков

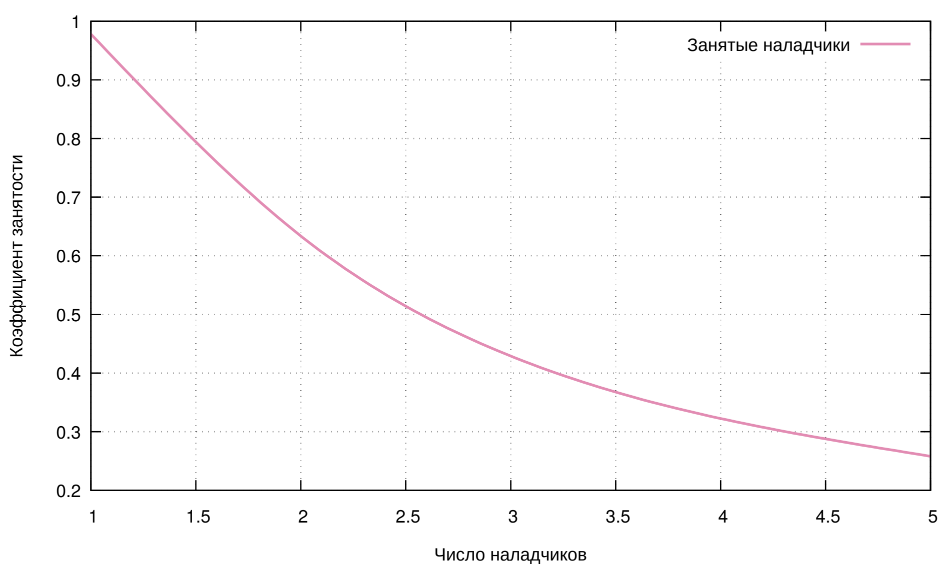

Рис. 15: Зависимость математического ожидания простаивающих станков от количества наладчиков

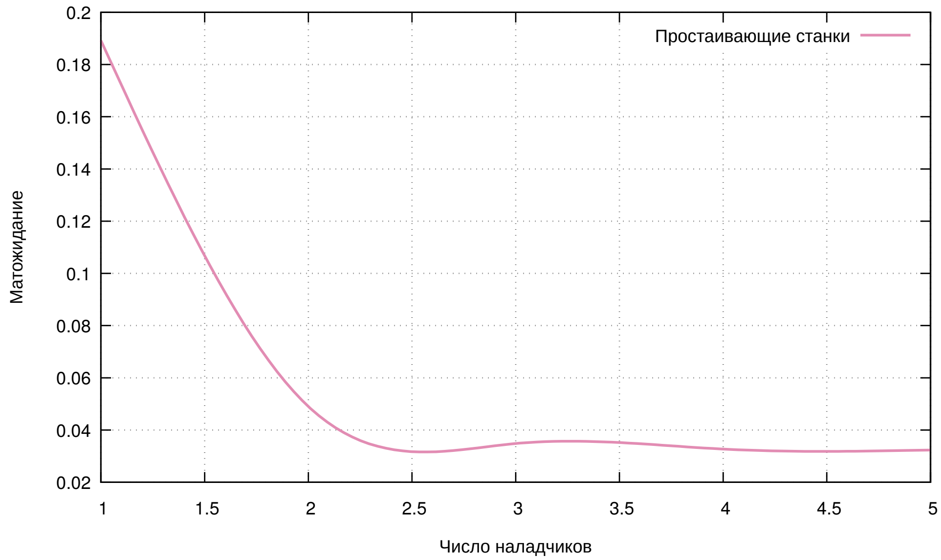

Рис. 16: Зависимость математического ожидания простаивающих станков от количества наладчиков

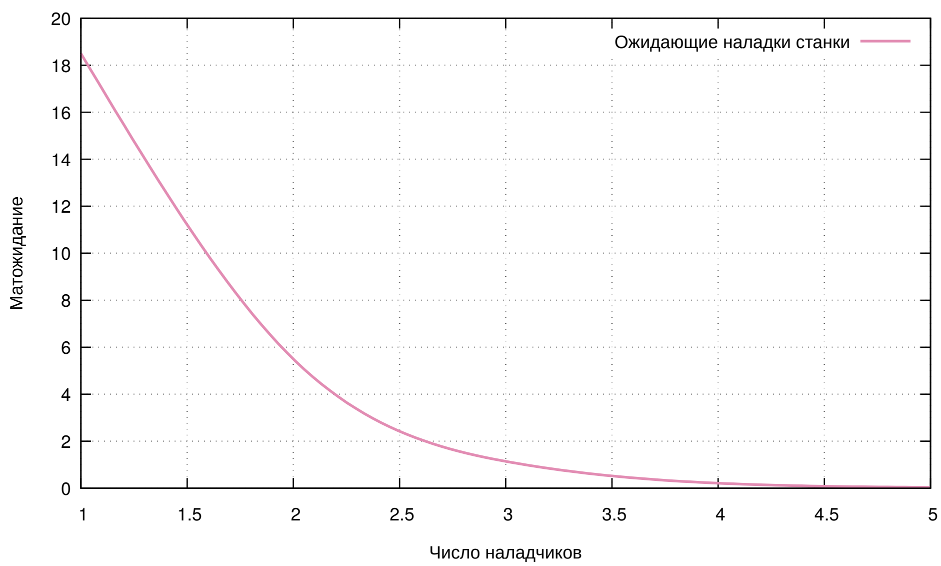

Рис. 17: Зависимость коэффициента занятости наладчиков от их числа