Actividades Tema 2

1. Prográmese el método de la bisección. Aplíquese para aproximar la solución de las ecuaciones $x = \cos(x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y $x^3 + x - 1 = 0$, $x \in [0, 1]$, ambas con un error menor que 10^{-10}. [2.5 puntos]

2. Un algoritmo satisface la siguiente propiedad. Si éste se ejecuta en paralelo a través de dos procesadores, cada procesador pierde un $0.8\,\%$ de eficiencia con respecto a su funcionamiento original sin ir en paralelo. Si es ejecutado en paralelo a través de tres procesadores, cada procesador pierde un $1.6\,\%$ de eficiencia con respecto al funcionamiento original. Si hay cuatro, un $2.4\,\%$ con respecto al funcionamiento original, y así sucesivamente (tras cada procesador añadido en paralelo, cada uno de ellos pierde un $0.8\,\%$ de eficiencia con respecto a su funcionamiento original sin ir en paralelo con otros). ¿Cuál es el número óptimo de procesadores en paralelo para ejecutar el algoritmo lo más rápidamente posible? [2.5 puntos]

3. Elabora las siguientes funciones en Python:

   a) Dados los coeficientes de un polinomio almacenados en un vector, devuelve otro vector con los coeficientes del polinomio resultante de su derivada. [1 punto]

   b) Generaliza la función anterior para calcular los coeficientes de la derivada de cualquier orden (por tanto, el orden de derivación será una entrada adicional de la función). [1 punto]

4. Un método para aproximar la integral definida de una función es el conocido como la **regla del punto medio** compuesta. La idea que subyace detrás del método es la misma que las sumas de Riemann con subintervalos equiespaciados, con la salvedad de que el valor que se toma en cada intervalo es el valor de la función en el centro de cada subintervalo (en vez del máximo o el mínimo en el mismo).

   Por tanto, para n subintervalos, podemos aproximar

   $$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i + 1/2)\,h\right),$$

   donde $h = \dfrac{b-a}{n}$.

   a) Programa una función que utilice el método anterior para aproximar la integral de una función dada, teniendo como entrada adicional el número de subintervalos con el que se realiza la aproximación, n. Utilízalo para aproximar

   $$\int_0^1 xe^x dx$$

con 30, 60, 120 y 240 intervalos. Obtén los errores cometidos utilizando la solución exacta de la integral y compara la evolución del error cometido en función del tamaño del intervalo. [1.5 puntos]

b) Existen otros métodos similares para aproximar la integral de una función, como la regla del trapecio, la regla de Simpson $1/3$ y la regla de Simpson $3/8$. Busca información sobre ellas y programa la regla del trapecio compuesta y una regla de Simpson compuesta a tu elección. Calcula con cada una de ellas las aproximaciones de la integral del apartado anterior con el mismo número de intervalos y compara los errores cometidos. [1.5 puntos]