02MAIR - Matemáticas para la IA
Análisis

David Zorío Ventura

Universidad Internacional de Valencia
Máster en Inteligencia Artificial

Definición

Sean A, B conjuntos cualesquiera. Una **función** $f : A \to B$ *es una regla que asigna cada elemento de A a un único elemento de B.*

Bajo esta situación, el conjunto A recibe el nombre de **dominio** *de f y el conjunto B el de* **codominio** *de f.*

Para cada valor $x \in A$, denotamos $f(x)$ como el valor de B que le asigna f a x.

Finalmente, el conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ recibe el nombre de **imagen** *o* **recorrido** *de f y, dado $C \subseteq B$, el conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ se denota por* **imagen inversa** *o* **preimagen** *de C sobre f.*

Ejemplos

1. *Sea A el conjunto formado por las letras del abecedario y $B = \{1, 2, \ldots, 26\}$. Entonces $f : A \to B$ tal que asigna una letra del abecedario a su posición en el mismo es una función. En este caso, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, etc.*
2. *La regla $f : \{1, 2, 3\} \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$ dada por $f(1) = \alpha$, $f(1) = \beta$, $f(2) = \gamma$ y $f(3) = \gamma$* **NO** *es una función, puesto que 1 es un elemento del dominio con más de un valor asignado.*
3. *La regla $f : \{1, 2, 3\} \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$ dada por $f(1) = \alpha$ y $f(2) = \gamma$* **NO** *es una función, puesto que 3 es un elemento del dominio sin asignar.*
4. *La regla $f : \{1, 2\} \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$ dada por $f(1) = \alpha$ y $f(2) = \alpha$ es una función.*

En el caso que nos acontece, vamos a centrarnos en las **funciones reales de variable real**, que son aquellas de la forma $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Típicamente el dominio A será un intervalo o uniones de intervalos. Recordemos asimismo que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, un **intervalo** puede presentar los siguientes aspectos:

- Cerrado:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$
- Abierto:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (a puede ser $-\infty$ y/o b $+\infty$).}$$
- Cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (b puede ser $+\infty$).}$$
- Abierto por la izquierda y cerrado por la derecha:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (a puede ser $-\infty$).}$$

Cuando se especifique sólo la regla y no el dominio de la función, se entenderá que éste es el mayor subconjunto de los números reales posible donde dicha regla tiene sentido.

Ejemplos

1. *Tiene sentido definir la función* $f(x) = x^2$ *sobre todos los números reales, es decir,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. *La función* $f(x) = \sqrt{x}$ *sólo tiene sentido tomarla sobre los números no negativos, luego* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
3. *La función* $f(x) = \log(x)$ *sólo tiene sentido tomarla sobre los números positivos, luego* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
4. *Tiene sentido definir la función* $f(x) = \frac{1}{x}$ *sobre todos los reales salvo el* 0, *luego* $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Ejercicio

Calcúlese el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \log(1 + x^2)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{4 + x}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$.

(d) $f(x) = \sqrt{x + 3}$.

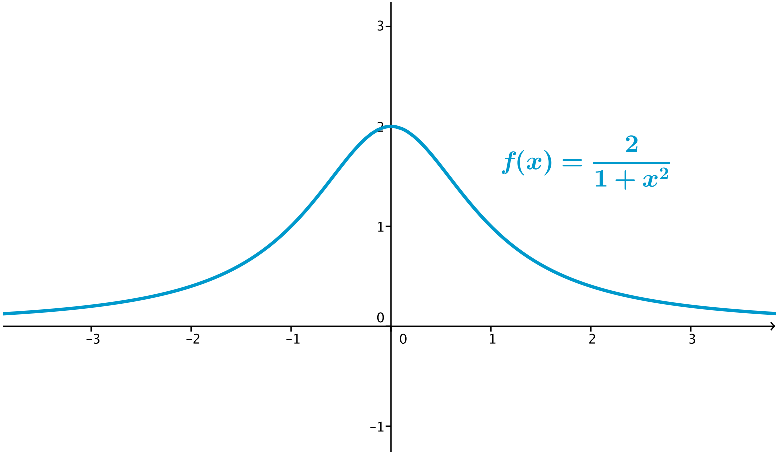
(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

(f) $f(x) = \log(x^2 + x)$.

(g) $f(x) = \sqrt{-(x^2 + x)}$.

(h) $f(x) = \log\big(-(x^2 + x)\big)$.

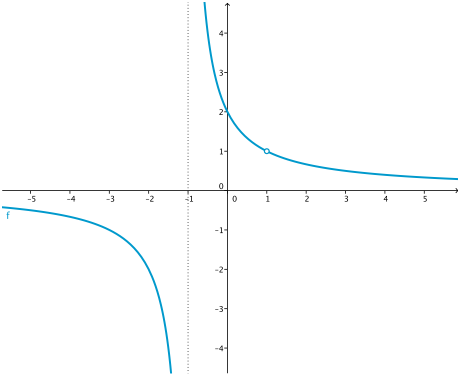
Una función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$ puede representarse gráficamente en dos dimensiones, considerando como coordenada X (abscisas) los diferentes valores del dominio y como coordenada Y (ordenadas) los valores de f asociados: $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$.



Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-1}.$$

¿Qué ocurre en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?



Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$, de forma que $(c-\rho, c+\rho) \subseteq A$ para algún $\rho > 0$. Diremos que existe el **límite** *$L \in \mathbb{R}$ de f cuando x tiende a c, que denotaremos por $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x-c| < \delta_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Intuitivamente, lo que indica la definición anterior es el siguiente enunciado: *dado un margen de error cualquiera, podemos encontrar un intervalo lo suficientemente pequeño centrado en c (asociado al margen de error proporcionado), de forma que la distancia entre $f(x)$ y L está siempre por debajo de ese margen de error dado en el intervalo considerado.*

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = 7$. *Calculemos* $\lim_{x\to 3} f(x)$.
   - *Vamos a comprobar que* $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$.
   - *Sea* $\varepsilon > 0$. *Tenemos que encontrar un* $\delta_\varepsilon > 0$ *de forma que* $|f(x) - 7| < \varepsilon$ *si* $0 < |x - 3| < \delta_\varepsilon$.
   - *Como en este caso la función es constante, nos sirve cualquier* δ_ε; *por ejemplo, tomamos* $\delta_\varepsilon = 1$. *En este caso, como* $f(x) = 7$ $\forall x \in \mathbb{R}$, *en particular* $f(x) = 7$ *para* x *cumpliendo* $0 < |x - 3| < 1$, *y por tanto:*

$$|f(x) - 7| = |7 - 7| = 0 < \varepsilon.$$

   - *Por tanto, esto prueba que* $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$.

Ejemplos

2. *Sea* $f(x) = 2x + 1$. *Calculemos* $\lim_{x \to 1} f(x)$.
   - *Vamos a comprobar que* $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.
   - *Sea* $\varepsilon > 0$. *Tenemos que encontrar* $\delta_\varepsilon > 0$ *de forma que* $|f(x) - 3| < \varepsilon$ *si* $0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon$.
   - *Desglosemos la condición* $|f(x) - 3| < \varepsilon$:

     $$|f(x) - 3| < \varepsilon \leftrightarrow |(2x + 1) - 3| < \varepsilon \leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon \leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   - *Tomemos* $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. *Si repetimos el argumento anterior esta vez en sentido inverso, partiendo de la condición* $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, *obtenemos el resultado deseado.*
   - *Por tanto, se cumple que* $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

Definición

- *Diremos que* $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = L$ *si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < \pm(x - c) < \delta_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$
- *Diremos que* $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ *si*
$$\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : 0 < \pm(x - c) < \delta_M \to \pm f(x) > \pm M.$$
- *Diremos que* $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ *si*
$$\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : 0 < |x - c| < \delta_M \to |f(x)| > M.$$
- *Diremos que* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ *si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0 : \pm x > \pm K_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$
- *Diremos que* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *si*
$$\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \pm x > \pm K_M \to \pm f(x) > \pm M.$$

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = -\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = +\infty.$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+5}{3x-7} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+5/x}{3-7/x} = \dfrac{2}{3}.$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-1}{1-3x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1/x^2}{1/x^2-3} = -\infty.$

Teorema

Se cumple:

$$\exists \lim_{x\to c} f(x) = L \leftrightarrow \exists \lim_{x\to c^-} f(x) = L \wedge \exists \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Propiedades

Si $\exists \lim_{x\to c} f(x) = L_1$ *y* $\exists \lim_{x\to c} g(x) = L_2$, *entonces:*

- $\exists \lim_{x\to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2.$
- $\exists \lim_{x\to c} \left(f(x)g(x)\right) = L_1 L_2.$
- *Si* $L_2 \neq 0$, $\exists \lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}.$
- *Si* $\exists \lim_{x\to L_1} g(x) = L_2$, *entonces* $\exists \lim_{x\to c} g(f(x)) = L_2.$

Definición

Diremos que una función f es **continua en un punto** *c si*

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

En caso de que la continuidad se dé en todos los puntos de su dominio, diremos además que f es **continua**.

Ejemplos

1. *Todas las funciones polinómicas son continuas.*
2. $f(x) = |x|$ *es continua.*
3. $f(x) = \log(x)$ *es continua en todo su dominio.*
4. $f(x) = \sqrt{x}$ *es continua en todo su dominio.*

Ejemplos

5. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0, \\ x - 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1,$$

luego $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$, *por lo que f no es continua en* 0.

Ejemplos

6. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x < 1, \\ 4 & x = 1, \\ 5x - 2 & x > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 + 2) = 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (5x - 2) = 3.$$

Luego $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = 3$. *Sin embargo,* $f(1) = 4 \neq 3$, *por lo que* f *no es continua en* 1.

Ejemplos

7. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x^2-1} & x \notin \{-1, 1\}, \\ 0 & x = -1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Entonces

- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = 1 = f(1)$, *luego f es continua en 1.*
- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = +\infty \neq 0 = f(-1)$, *luego f no es continua en -1.*

Propiedades

Sean f y g funciones continuas en $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $f \pm g$ *es continua en* c.
- fg *es continua en* c.
- *Si* $g(c) \neq 0$, *entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* c.
- $g \circ f$ *es continua en* c.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *continua y* $a, b \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$ *y* $[a, b] \subseteq A$*. Si* $f(a)f(b) < 0$*, entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

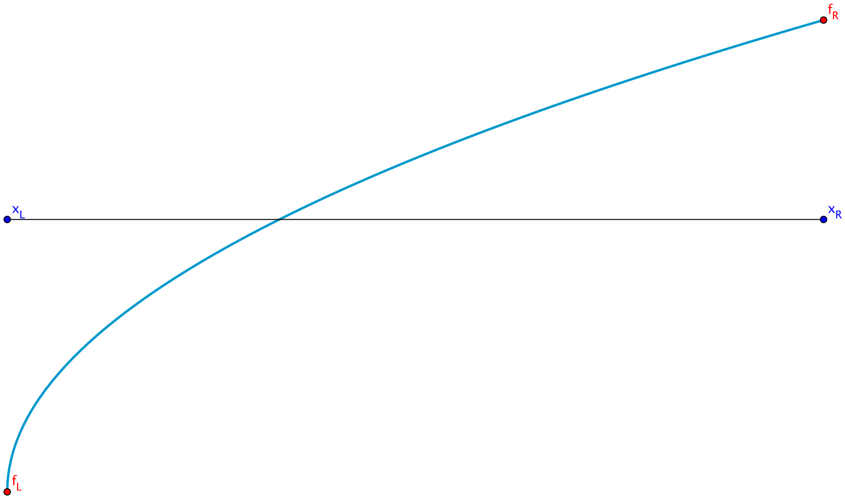
Ejemplo

Probemos que la ecuación $\sin(x) = \cos(x)$ *tiene una solución entre* 0 *y* $\frac{\pi}{2}$*. En efecto, si definimos* $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$*, se tiene por una parte que* $f(0) = -1$ *y, por otra parte,* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$*, luego* $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$*, por lo que* $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tal que* $f(c) = 0$*, es decir:*

$$f(c) = 0 \leftrightarrow \sin(c) - \cos(c) = 0 \leftrightarrow \sin(c) = \cos(c).$$

Una de las aplicaciones del teorema de Bolzano se encuentran en la aplicación del **método de la bisección**, que es un método iterativo que permite aproximar tanto como se desee la solución de la ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ cumpliendo $f(a)f(b) < 0$.

1. Entradas: a, b, f y $\rho > 0$ (tolerancia/error deseado).
2. Comprobación inicial de que $f(a)f(b) < 0$.
3. Definimos $x_{\mathrm{L}} = a$ y $x_{\mathrm{R}} = b$.
4. Calculamos $x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{L}}+x_{\mathrm{R}}}{2}$.
5. Si $|x_{\mathrm{R}} - x_{\mathrm{L}}| < 2\rho$, devolvemos x_{M} como aproximación de la solución y terminamos. En caso contrario, continuamos.
6. Condicional:
   - Si $f(x_{\mathrm{L}})f(x_{\mathrm{M}}) < 0$, entonces redefinimos $x_{\mathrm{R}} = x_{\mathrm{M}}$.
   - En caso contrario, redefinimos $x_{\mathrm{L}} = x_{\mathrm{M}}$.
7. Volvemos al paso 4.


f_R
x_L
x_R
f_L

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Diremos que* f *es* **derivable en un punto** $c \in \operatorname{int}(A)$ *(*$\exists \rho > 0$*:* $(c-\rho, c+\rho) \subseteq A$*) si*

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

En tal caso, llamaremos **derivada de** f **en** c *al valor anterior y lo denotaremos por*

$$f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Además, si f *es derivable en* x, $\forall x \in \operatorname{int}(A)$, *diremos que* f *es* **derivable**.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 + 3x - 1$*. Vamos a probar que* $\exists f'(2) = 7$*. En efecto:*

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)^2 + 3 \cdot (2+h) - 1] - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(4 + 4h + h^2) + (6 + 3h) - 1] - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 7h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} [h + 7] = 7.
\end{aligned}
$$

Por tanto, se obtiene el resultado deseado.

Teorema

Si una función f *es derivable en* c*, entonces* f *es continua en* c*.*

En general, se conocen las expresiones generales de las derivadas de las funciones elementales:

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$\sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - x^2 + x - 7$. *Entonces* $f'(x) = 10x^4 + 12x^2 - 2x + 1$.
2. *Sea* $f(x) = \sqrt{x}$. *Podemos escribir* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. *Por tanto:*
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
3. *Sea* $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$. *Podemos escribir* $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, *luego:*
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$
4. *Sea* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Entonces podemos escribir* $f(x) = x^{-1}$, *por lo que:*
$$f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Propiedades

Sean f, g funciones derivables en x. Entonces:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.
2. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (**regla del producto**).
3. *En particular, si* $a \in \mathbb{R}$, $[af(x)]' = af'(x)$.
4. $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$ (**regla de la cadena**).
5. *En particular, si* $g(x) \neq 0$: $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$
6. *En particular, combinando 2 y 5, si* $g(x) \neq 0$ *entonces* $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

De la regla de la cadena se deducen las siguientes fórmulas generalizadas:

$F(x)$	$F'(x)$
$f(x)^r$	$rf(x)^{r-1}f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))f'(x)$
$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x))f'(x)$
$\tan(f(x))$	$[1+\tan^2(f(x))]f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$a^{f(x)}$	$\ln(a)a^{f(x)}f'(x)$
$\ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$F(x)$	$F'(x)$
$\log_a(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\ln(a)f(x)}$
$\arcsin(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arccos(f(x))$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arctan(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = x\sin(x)$. *Entonces* $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$.
2. *Tomemos* $f(x) = sin(x^2) + x$. *Entonces* $f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x = 2x\cos(x^2) + 1$.
3. *Sea* $f(x) = \frac{\cos(x)}{e^x+1}$. *Entonces*

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)(e^x+1) - \cos(x)e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{[\cos(x)+\sin(x)]e^x + \sin(x)}{(e^x+1)^2}.$$

Ejercicio

Calcúlese $f'(x)$ *para los siguientes casos:*

1. $f(x) = \sin(e^{\cos(x)})$.
2. $f(x) = x\sin(x)\log(x^2)$.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *tales que* $[a, b] \subseteq A$, *con* f *derivable en* (a, b). *Si* $f(a) = f(b)$, *entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f, g *funciones reales de variable real, cumpliendo* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *o* $\pm\infty$. *Si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $\forall x \in (c-\rho, c) \cup (c, c+\rho)$ f *y* g *son derivables, con* $g(x) \neq 0$, *y* $\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces*

$$\exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplos

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$
4. *Calculemos* $\lim_{x\to 0^+} x^x$. *Para ello, definimos* $L = \lim_{x\to 0^+} x^x$. *Utilizando continuidad:*

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

Luego, como $\ln(L) = 0$, $L = e^0 = 1$, *por lo que* $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

Ejemplos

5. *Obtengamos* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. *Para ello, definimos* $L=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *y, aprovechando la continuidad de* f*:*

$$\ln(L)=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Por tanto, $\ln(L)=1$*, luego* $L=e^1=e$.

Definición

Diremos que f es derivable n veces en c si $\exists f^{(n)}(c)$, *donde* $f^{(0)}(c) = f(c)$ *y* $f^{(k)}(c) = (f^{(k-1)})'(c)$, $1 \leq k \leq n$.

Si una función es derivable n veces en todo su dominio, diremos que f es n veces derivable, y llamaremos a $f^{(n)}$ **derivada de orden n de f**.

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = \sin(x)$. *Calculemos* $f''(x)$. $f'(x) = \cos(x) \rightarrow f''(x) = -\sin(x)$.
2. *Sea* $f(x) = x^3 - x + 2$. *Obtengamos* $f'''(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f''(x) = 6x \rightarrow f'''(x) = 6$.

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que f es (estrictamente) creciente en $B \subseteq A$ si $\forall a, b \in B$, $a < b$, $f(a) \leq f(b)$ (resp., $f(a) < f(b)$).

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que f es (estrictamente) creciente en $B \subseteq A$ si $\forall a, b \in B$, $a < b$, $f(a) \geq f(b)$ (resp., $f(a) > f(b)$).

Teorema

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$, con f derivable en B. Entonces:

- *f es (estrictamente) creciente en B si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp., $f'(x) > 0$) $\forall x \in B$.*
- *f es (estrictamente) decreciente en B si y sólo si $f'(x) \leq 0$ (resp., $f'(x) < 0$) $\forall x \in B$.*

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $B \subseteq A$. *Diremos que un punto* $c \in B$ *es un* **máximo absoluto de** f **en** B *si* $f(c) \geq f(x)\ \forall x \in B$.

Definición

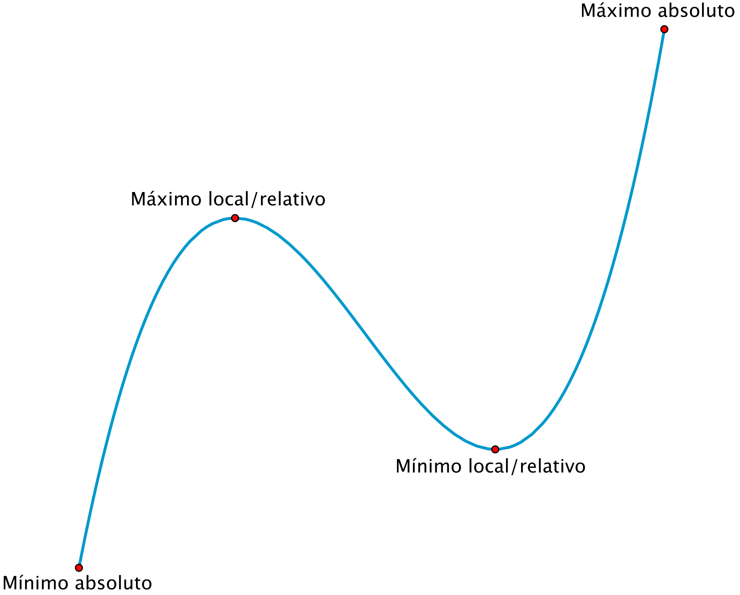
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $B \subseteq A$. *Diremos que un punto* $c \in B$ *es un* **mínimo absoluto de** f **en** B *si* $f(c) \leq f(x)\ \forall x \in B$.

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. *Diremos que un punto* $c \in A$ *es un* **máximo relativo o local de** f *si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $f(c) \geq f(x)\ \forall x \in (c - \rho, c + \rho)$.

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. *Diremos que un punto* $c \in A$ *es un* **mínimo relativo o local de** f *si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $f(c) \leq f(x)\ \forall x \in (c - \rho, c + \rho)$.


Máximo absoluto
Máximo local/relativo
Mínimo local/relativo
Mínimo absoluto

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $c \in A$ *tal que* f *Diremos que* c *es un* **punto crítico** *de* f *si* $\exists f'(c) = 0$.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. *Entonces* $f'(x) = 6x^2 - 6x$. *Imponiendo* $f(x) = 0$, *se obtiene* $x = 0$ *y* $x = 1$, *por lo que* f *tiene dos puntos críticos:* 0 *y* 1.

Teorema

Sea c *un punto crítico de* f. *Entonces:*

- *Si* $f''(c) < 0$, *entonces* c *es un máximo relativo de* f.
- *Si* $f''(c) > 0$, *entonces* c *es un mínimo relativo de* f.
- *Si* $f''(c) = 0$, *diremos que* c *es un* **punto de inflexión** *de* f.

Ejemplos

1. *Vimos anteriormente que los puntos críticos de* $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ *son* $x = 0$ *y* $x = 1$*. Tenemos* $f'(x) = 6x^2 - 6x$ *y* $f''(x) = 12x - 6$*.*
   - *Por una parte, para* $x = 0$ *se tiene* $f''(0) = -6 < 0$*, por lo que* 0 *es un máximo relativo de* f*.*
   - *Por otra parte, para* $x = 1$*, tenemos* $f''(1) = 6 > 0$*, por lo que* 1 *es un mínimo relativo de* f*.*
2. *Sea* $f(x) = x^3$*. En este caso,* $f'(x) = 3x^2$*, por lo que su único punto crítico es* $x = 0$*. Si calculamos* f''*, obtenemos* $f''(x) = 6x$*, con lo cual* $f''(0) = 0$*, por lo que* 0 *es un punto de inflexión y no es extremo local, puesto que* $f(x) < f(0)$ *para* $x < 0$ *y* $f(x) > f(0)$ *para* $x > 0$*.*

Ejemplo

Un comerciante vende un determinado producto por un valor de 50 euros, con una media de 200 clientes mensuales. Por otra parte, sabe que por cada euro que aumente el precio, perderá un promedio de 2 clientes mensuales. ¿Cuánto tiene que aumentar el precio para aspirar a obtener el mayor beneficio posible?

- *Si x es el aumento de precio, la función de ganancia mensual es* $f(x) = (50 + x)(200 - 2x) = -2x^2 + 100x + 10000$.
- *Analizamos f' con el fin de buscar puntos críticos:* $f'(x) = -4x + 100$, *luego el único punto crítico correspondiente a la identidad $f'(x) = 0$ es $x = 25$.*
- *Calculamos $f''(x) = -4$ y obtenemos $f''(25) = -4 < 0$, luego hay un máximo relativo en $x = 25$.*
- *Por tanto, deberá aumentar el precio 25 euros.*

Definición

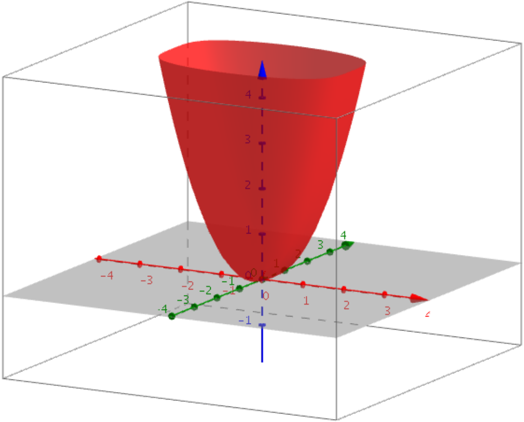
Una función real de **varias variables** *es una función de la forma* $f : A \to \mathbb{R}$, *con* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Ejemplos

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *es una función de dos variables (que en este caso representa el módulo de un vector con coordenadas* (x, y)*).*
2. $f(x, y) = \ln(xy)$ *es una función de dos variables, cuyo máximo dominio de defínción es el conjunto* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$.
3. $f(x, y, z) = x^2 + yz - \sin(\pi(x + z))$ *es un ejemplo de una función de tres variables.*

Al igual que en el caso de las funciones reales de variable real, las funciones de varias variables de la forma $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pueden representarse gráficamente, en forma del siguiente conjunto:

$$\{(x; f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$



Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $(x_1, \ldots, x_n) \in A$. *Diremos que* f *admite derivada parcial en la dirección del eje* i *si*

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

En tal caso, llamamos **derivada parcial** i*-ésima de* f *en* $(x_1, \ldots, x_n)$ *al valor anterior, y la denotamos por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Además, si todas las derivadas parciales existen, llamamos **gradiente** *de* f *en* $(x_1, \ldots, x_n)$ *a la expresión*

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

Ejemplos

1. *Sea* $f(x,y) = 2x + 3y$. *Entonces* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3$, *luego* $\nabla f(x,y) = (2,3)$.
2. *Consideremos* $f(x,y) = x^2 + y^2$. *Entonces* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, *luego* $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$.
3. *Tomemos* $f(x,y,z) = xy + z$. *Entonces* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x$ *y* $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1$, *luego* $\nabla f(x,y,z) = (y,x,1)$.
4. *Sea* $f(x,y,z) = x\ln(x^2+y^2+z^2) + \sin(\pi yz)$. *Entonces*
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2xy}{x^2+y^2+z^2} + \pi z\cos(\pi yz)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2xz}{x^2+y^2+z^2} + \pi y\cos(\pi yz)$.

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite derivada en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n$ en $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

En tal caso, denotaremos por $D_v f(x)$ al límite anterior, que llamaremos **derivada direccional** *de f en x en la dirección de v.*

Obsérvese que en el caso particular de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$, se cumple $D_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Teorema

En las condiciones anteriores, se cumple $D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$.

Al igual que en el caso de funciones de variable real, podemos considerar las derivadas de orden superior. Las derivadas de orden 2 son las de mayor interés, que son de la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ejemplos

1. *Sea* $f(x, y) = xy + \sin(x)$, *luego* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + \cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$. *Por tanto:*
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x)$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Ejemplos

2. *Sea* $f(x,y) = e^{x^2-y^2} + 2x^5y^3$
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-y^2} + 10x^4y^3.$
     - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{x^2-y^2} + 4x^2e^{x^2-y^2} + 40x^3y^3.$
     - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xye^{x^2-y^2} + 30x^4y^2.$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{x^2-y^2} + 6x^5y^2.$
     - $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4xye^{x^2-y^2} + 30x^4y^2.$
     - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^{x^2-y^2} + 4y^2e^{x^2-y^2} + 12x^5y.$

Teorema (Teorema de Schwarz)

Si existen las segundas derivadas de f *y son continuas, entonces* $\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ *se cumple* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Diremos que* $x \in A$ *es un* **punto crítico** *de* f *si* $\nabla f(x) = (0, \dots, 0)$.

Ejemplo

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$. *Calculemos sus puntos críticos. Para ello, lo primero que debemos calcular es su gradiente:*

$$\nabla f(x, y) = (2x - y - 3, 2y - x).$$

Imponiendo la condición $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, *se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{array}\right\}$$

de donde se obtiene como solución $(x, y) = (2, 1)$.

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en $x \in A$. Definimos la matriz hessiana de f en el punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ como la siguiente matriz $n \times n$:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* $(x_0, y_0) \in A$ *cumpliendo que* $\exists \nabla f(x_0, y_0) = 0$ *(es decir,* (x_0, y_0) *es un punto crítico de* f*) y* $\exists H_f(x_0, y_0)$*. Entonces:*

- *Si* $\det\left(H_f(x_0, y_0)\right) > 0$*, tenemos las siguientes posibilidades:*
  - *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$*, entonces* (x_0, y_0) *es un mínimo local de* f*.*
  - *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$*, entonces* (x_0, y_0) *es un máximo local de* f*.*
- *Si* $\det\left(H_f(x_0, y_0)\right) < 0$*, entonces* (x_0, y_0) *es un punto de silla de* f*.*
- *Si* $\det\left(H_f(x_0, y_0)\right) = 0$*, entonces no se puede concluir nada (es decir,* (x_0, y_0) *puede ser tanto un mínimo local, como un máximo local como un punto de silla).*

Ejemplo

La matriz hessiana asociada a la función del ejemplo anterior, $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$, *es*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particular, como $H_f(x,y)$ *es constante, si evaluamos en el punto crítico,* $(2,1)$*, obtenemos*

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det\left(H_f(2,1)\right) = 3 > 0$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 2 > 0$*, podemos concluir que* $(2,1)$ *es un mínimo local de* f*.*

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que F es una **primitiva** *de f si $F' = f$.*

Ejemplos

1. $F(x) = x^3$ *es una primitiva de* $f(x) = 3x^2$.
2. $F(x) = x^3 + 1$ *también es una primitiva de* $f(x) = 3x^2$.
3. *En general,* $F(x) = x^3 + C$ *es una primitiva de* $f(x) = 3x^2$ $\forall C \in \mathbb{R}$.
4. $F(x) = \ln(x) + C$ *es una primitiva de* $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall C \in \mathbb{R}$.
5. $F(x) = \sin(x) + C$ *es una primitiva de* $f(x) = cos(x)$, $\forall C \in \mathbb{R}$.
6. $F(x) = -\cos(x) + C$ *es una primitiva de* $f(x) = \sin(x)$, $\forall C \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si f es continua y F_1, F_2 son primitivas de f, entonces $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $F_2 - F_1 = C$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Definimos

$$\int f(x)dx$$

como la familia formada por todas las primitivas de f.

Por el teorema anterior, bastará con encontrar una única primitiva F cumpliendo $F' = f$, puesto que el resto de primitivas posibles vendrá unívocamente determinado por las funciones de la forma $F + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Para calcular primitivas, basta con fijarse en las tablas de las derivadas en sentido inverso:

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$g(x)^r g'(x)$	$\frac{1}{r+1} g(x)^{r+1} + C$
$\cos(g(x))g'(x)$	$\sin(g(x)) + C$
$\sin(g(x))g'(x)$	$-\cos(g(x)) + C$
$[1 + \tan^2(g(x))]g'(x)$	$\tan(g(x)) + C$
$e^{g(x)} g'(x)$	$e^{g(x)} + C$
$a^{g(x)} g'(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} a^{g(x)} + C$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln(g(x)) + C$
$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$	$\arcsin(g(x)) + C$
$-\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$	$\arccos(g(x)) + C$
$\dfrac{g'(x)}{1+g(x)^2}$	$\arctan(g(x)) + C$

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$
2. $\displaystyle\int e^{2x+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C.$
3. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$
4. $\displaystyle\int \tan(x) \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\ln\big(\cos(x)\big) + C.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-2)^2} \mathrm{d}x = \arctan(x-2) + C.$

- Algunas integrales no pueden realizarse de forma inmediata a través de los métodos elementales, como por ejemplo

$$\int x \sin(x) \mathrm{d}x.$$

- Un método para calcular algunas primitivas como la anterior es el conocido como **integración por partes**, que se basa en la fórmula de la derivada de un producto:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Tomando primitivas:

$$uv = \int u'v + \int uv' \to \int uv' = uv - \int vu'.$$

Ejemplo

Consideremos la primitiva anterior:

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Identificamos:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$dv = \sin(x)\mathrm{d}x \qquad v = -\cos(x)$$

Por tanto:

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sin(x) - x\cos(x) + C.$$

Este método también funciona para algunos casos donde no aparece de forma explícita un producto.

Ejemplo

Obtengamos

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x.$$

Identificamos:

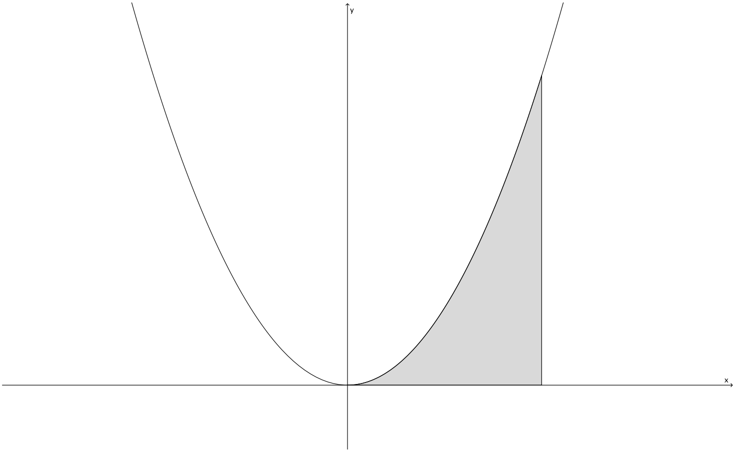
$u = \ln(x)$ $\qquad$ $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$dv = dx$ $\qquad$ $v = x$

Luego:

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.$$

Nuestro objetivo es aproximar el área que encierra una función f en un determinado intervalo $[a, b]$:



- Una forma de obtener una solución aproximada es considerar una **partición** del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con extremos $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ y considerar en cada caso el área de rectángulo con base en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\xi_i)$, para algún conjunto de puntos intermedios $\mathcal{R} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n\}$, cuya área será por tanto $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$, $1 \leq i \leq n$.
- Por tanto, una aproximación del área que encierra f en $[a, b]$ asociada a dicha partición consiste en sumar las áreas de dichos rectángulos:

$$\sigma_f(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

- En los casos en los que f tenga un comportamiento "razonable" en $[a, b]$, cabe esperar que al aumentar n (el número de intervalos) la expresión anterior se irá aproximando cada vez más al área que se desea calcular.

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$ *tal que* $a < b$ *y* $[a, b] \subseteq A$. *Sea* $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ *una partición asociada a dicho intervalo. Llamamos* **suma inferior de Riemann** *asociada a dicha partición al resultado de calcular la siguiente suma de áreas de rectángulos:*

$$\sigma_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

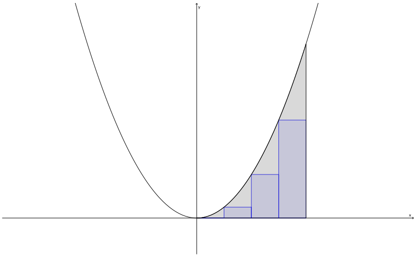
Definición

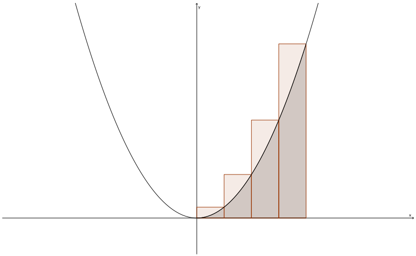
En las condiciones anteriores, llamamos **suma superior de Riemann** *al resultado de calcular la siguiente suma de áreas de rectángulos:*

$$\Sigma_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

- En el caso particular en que los puntos de una partición $\mathcal{P}$ estén igualmente equiespaciados, diremos que la partición es **uniforme**, en cuyo caso se cumple $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $1 \leq i \leq n$.
- En tal caso, podemos escribir

$$\sigma_f(\mathcal{P}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \Sigma_f(\mathcal{P}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$





Definición

Diremos que f es **integrable Riemann** *en $[a,b]$ si*

$$\sup_{\mathcal{P}} \sigma_f(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \Sigma_f(\mathcal{P}).$$

En tal caso, llamaremos

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} \sigma_f(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \Sigma_f(\mathcal{P}),$$

que representa el área encerrada por f entre a y b, y que recibe el nombre de **integral definida** *de f en $[a,b]$.*

Teorema (Teorema fundamental del cálculo)

Si F es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int_0^1 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2.$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$