GIIN06 - Álgebra
Unidad Competencial 4

David Zorío Ventura

Universidad Internacional de Valencia
Grado en Ingeniería Informática

Definición

Un **espacio vectorial** *asociado a un cuerpo K (cuyos elementos reciben el nombre de* **escalares***), consiste en un conjunto $V \neq 0$ con una operación interna, suma $(+)$, y una operación externa, producto $(\cdot)$, involucrando elementos de K y de V, cumpliendo:*

1. *La suma es asociativa:*
$$u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in V.$$
2. *La suma es conmutativa:*
$$u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$
3. *Existencia de elemento neutro para la suma:*
$$\exists 0 \in V : \; v + 0 = v.$$
4. *Existencia de elemento opuesto para la suma:*
$$\forall v \in V, \exists -v \in V : \; v + (-v) = 0.$$

Definición

5. *El producto es asociativo:*

$$a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u, \quad \forall a, b \in K, \forall u \in V.$$

6. *Existe un elemento neutro multiplicativo:*

$$\exists 1 \in K : 1 \cdot u = u, \quad \forall u \in V.$$

7. *El producto es distributivo con respecto a la suma de vectores:*

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v, \quad \forall a \in K, \forall u, v \in V.$$

8. *El producto es distributivo con respecto a la suma de escalares:*

$$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u, \quad \forall a, b \in K, \forall u \in V.$$

Ejemplos

1. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *dotado de las siguientes operaciones suma y producto: Dados* $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n).$$

2. *El grupo de matrices* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *es también un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *mediante sus operaciones suma y producto por escalares habituales.*

Definición

Dados $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, una **combinación lineal** *de los k vectores anteriores es cualquier expresión de la forma*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k,$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$.

Definición

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Diremos que los vectores anteriores son **linealmente independientes** *si se cumple que la ecuación*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k = 0$$

tiene como única solución $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. En caso contrario, se dice que dichos vectores son **linealmente dependientes**.

Ejemplos

1. *Los vectores de* $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 2)$ *y* $v_2 = (-2, 0, -4)$ *son linealmente dependientes, ya que*

$$2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0.$$

2. *Los vectores* $v_1 = (1, -1, 2)$ *y* $v_2 = (0, 1, 1)$ *son linealmente independientes. En efecto, supongamos que*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (1, -1, 2) + a_2 \cdot (0, 1, 1) &= 0 \\ (a_1, -a_1, 2a_1) + (0, a_2, a_2) &= 0 \\ (a_1, -a_1 + a_2, 2a_1 + a_2) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplos

De lo anterior se induce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \qquad = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 2 = n \rightarrow$ *sistema compatible determinado.*
- $a_1 = a_2 = 0$ *es la única solución.*

Teorema

Sean k *vectores* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}) \\ v_2 &= (v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,n}) \\ &\vdots \\ v_k &= (v_{k,1}, v_{k,2}, \ldots, v_{k,n}) \end{aligned}$$

Entonces el sistema de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *es linealmente independiente si y sólo si* $\operatorname{rank}(A) = k$*, donde* $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{k,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{k,n} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

1. *Los vectores* $v_1 = (1, 0, -1)$ *y* $v_2 = (1, -2, 0)$ *son linealmente independientes, ya que*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

2. *Los vectores* $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$ *y* $v_3 = (1, 4, -3)$ *son linealmente dependientes, pues*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2 < 3.$$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Diremos que un subconjunto $W \subseteq V$ es un **subespacio vectorial** *de V, denotado por $W \leq V$, si se cumple:*

$$\forall v, w \in W, \forall a, b \in K, \quad a \cdot v + b \cdot w \in W.$$

Ejemplos

1. *Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$. Entonces*

$$W = \{(\lambda, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, ya que por ejemplo $(0,1) \in W$, $(1,1) \in W$, pero $(0,1) + (1,1) = (1,2) \notin W$.

Ejemplos

2. *Sea* $V = \mathbb{R}^2$ *y* $K = \mathbb{R}$*. Entonces*

$$W = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es un espacio vectorial.

En efecto, tomamos $v, w \in W$ *y* $a, b \in K$*. Entonces* $v = (\lambda_0, 0)$ *y* $w = (\lambda_1, 0)$*, para ciertos* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$*. Por tanto,*

$$a \cdot v + b \cdot w = a \cdot (\lambda_0, 0) + b \cdot (\lambda_1, 0) = (a\lambda_0 + b\lambda_1, 0) \in W.$$

En consecuencia, W *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$*.*

Teorema

El conjunto de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo (es decir, con términos independientes nulos) es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, donde n es el número de incógnitas.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Entonces el conjunto definido por

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K \right\}$$

es un subespacio vectorial de V. Éste recibe el nombre de **subespacio generado** *por $v_1, v_2, \ldots, v_k$.*

Ejemplos

Sean $V = \mathbb{R}^3$ *y* $K = \mathbb{R}$.

1. *Tomamos* $v = (1, 1, 1)$. *Entonces:*

$$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. *Sean* $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$. *Entonces:*

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2 \rangle &= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\lambda_1 (1, 2, 0) + \lambda_2 (0, 1, -1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Un subconjunto $S \subseteq V$ se dice **sistema libre** *de vectores si todos ellos son linealmente independientes.*

Ejemplos

- $\{(1,-1,2),(0,1,1)\}$ *es un sistema libre, pues el rango de la matriz asociada es* 2 *(que coincide con el número de vectores,* 2*).*
- $\{(1,0,-1),(1,-2,0),(1,-4,3)\}$ *no es un sistema libre, ya que el rango de la matriz asociada es* 2 *(menor que el número de vectores,* 3*).*

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Un subconjunto $S \subseteq V$ se dice **sistema generador** *de vectores si $\langle S \rangle = V$.*

Ejemplos

- $S = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ *es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, ya que cualquier vector $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ puede escribirse como una combinación de los vectores de S:*

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) + 0 \cdot (1,1).$$

- $S = \{(1,0),(2,0)\}$ *no es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, ya que por ejemplo $(0,1)$ no puede escribirse como una combinación lineal de sus dos vectores.*

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $B \subseteq V$. Diremos que B es **base** *de V si B es un sistema libre y generador.*

Ejemplos

1. $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^2$.
2. $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *En general,* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *con*

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,\ldots,0) \\ e_2 & = & (0,1,\ldots,0) \\ & \vdots & \\ e_n & = & (0,0,\ldots,1) \end{array}$$

   es base de $\mathbb{R}^n$. *Ésta recibe el nombre de* **base canónica** *de* $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y B una base finita (como conjunto) de V. Entonces, si B' es otra base de V, se tiene que B' también es finita, y, además, $|B'| = |B|$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Si B es una base finita de V, con $|B| = n$, diremos que la **dimensión** *de V es n, y lo denotaremos como $\dim(V) = n$.*

Ejemplo

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Teorema

Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* A *la matriz cuyas columnas son las componentes de cada vector de* S*. Entonces:*

- S *es un sistema libre si y sólo si* $\operatorname{rank}(A) = k$.
- S *es un sistema generador si y sólo si* $\operatorname{rank}(A) = n$.
- S *es base si y sólo si* $\operatorname{rank}(A) = k = n$.

Además, $\dim(\langle S\rangle) = \operatorname{rank}(A)$.

Ejemplos

1. *Sea* $S = \{(1,0),(2,0)\} \to k = 2,\ n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *luego:*
   - S *no es sistema libre de* $\mathbb{R}^2$, *ya que* $\operatorname{rank}(A) = 1 < 2 = k$.
   - S *no es sistema generador de* $\mathbb{R}^2$, *pues* $\operatorname{rank}(A) = 1 < 2 = n$.
   - *Por tanto,* S *no es base de* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos

2. *Sea* $S = \{(1, 2-1), (0, 0, 1)\}$, $k = 2$, $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

   luego:
   - S *es sistema libre de* $\mathbb{R}^3$, *ya que* $\text{rank}(A) = 2 = k$.
   - S *no es sistema generador de* $\mathbb{R}^3$, *pues* $\text{rank}(A) = 2 < 3 = n$.
   - *Por tanto,* S *no es base de* $\mathbb{R}^3$.

3. $S = \{(1, 0), (1, 1), (-1, 0)\}$, $k = 3$, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   luego:
   - S *no es sistema libre de* $\mathbb{R}^2$, *ya que* $\text{rank}(A) = 2 < 3 = k$.
   - S *es sistema generador de* $\mathbb{R}^2$, *pues* $\text{rank}(A) = 2 = n$.
   - *Por tanto,* S *no es base de* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos

4. *Sea* $S = \{(2,-1,0),(0,1,1),(1,-1,1)\} \rightarrow k = 3,\ n = 3.$

   La matriz asociada, A, es, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3.$$

   Así pues, se tiene:

   - S *es sistema libre de* $\mathbb{R}^3$*, ya que* $\operatorname{rank}(A) = 3 = k$.
   - S *es sistema generador de* $\mathbb{R}^3$*, pues* $\operatorname{rank}(A) = 3 = n$.
   - *Por tanto,* S *es base de* $\mathbb{R}^3$*, en tanto que* $\operatorname{rank}(A) = 3 = n = k$.

Definición

Sean U, V espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Diremos que una aplicación $f : U \to V$ es una **aplicación lineal** *si $\forall u_1, u_2 \in U$ y $\forall a, b \in K$ se cumple*

$$f(au_1 + bu_2) = af(u_1) + bf(u_2).$$

Ejemplos

1. *Sea $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$. Entonces la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, 2z - x)$ es lineal. En efecto, tomando $u_1 = (x, y, z), u_2 = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene:*

Ejemplos

$$\begin{aligned} f(au_1 + bu_2) &= f(a\cdot(x,y,z) + b\cdot(x',y',z')) \\ &= f(ax+bx', ay+by', az+bz') \\ &= (ax+bx'+ay+by', 2(az+bz') - (ax+bx')) \\ &= (a(x+y) + b(x'+y'), a(2z-x) + b(2z'-x')) \\ &= a(x+y, 2z-x) + b(x'+y', 2z'-x') \\ &= a\cdot f(x,y,z) + b\cdot f(x',y',z'). \end{aligned}$$

2. *Sean* $U = V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ *y* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x,y) = (x, x^2 - y)$. *Entonces* f *no es lineal, ya que por ejemplo, para* $(2,0),(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *y* $2,0 \in \mathbb{R}$, *se tiene*

$$f(2\cdot(2,0) + 0\cdot(0,0)) = f(4,0) = (4,16),$$

pero

$$2\cdot f(2,0) + 0\cdot f(0,0) = 2\cdot(2,4) + 0\cdot(0,0) = (4,8).$$

Teorema

Toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tiene una matriz que la representa, que además es única. Concretamente,* $\exists! A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que* $\forall v \in \mathbb{R}^n$ *puede escribirse:*

$$f(v) = Av.$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *dada por*

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ 2x + y + z \\ 3z \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada. Un **valor propio** *o* **autovalor** *$\lambda \in \mathbb{R}$ asociado a A es aquel que cumple que $\exists v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $v \neq 0$, llamado* **vector propio** *o* **autovector***, tal que se verifica $Av = \lambda v$.*

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son valores propios de A asociados a los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, resp.:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1, \\ Av_2 &= \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3v_2. \end{aligned}$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz cuadrada.*

Diremos que A *es* **diagonalizable** *si* $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regular tal que*

$$P^{-1}AP = D,$$

siendo D *una* **matriz diagonal**, *es decir, de la forma*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A y $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es un vector propio asociado a λ, entonces:

$$Av = \lambda v \leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \leftrightarrow Av - \lambda I_n v = 0 \leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0.$$

Por tanto, denotando

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

se tiene que la relación anterior se traduce en

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La condición anterior es equivalente al **sistema homogéneo**

$$\left.\begin{array}{rcrcccrcl}(a_{1,1}-\lambda)x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & 0\\ a_{2,1}x_1 & + & (a_{2,2}-\lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & 0\\ & & & & \ddots & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{n,n}-\lambda)x_n & = & 0\end{array}\right\}$$

- El sistema anterior siempre es compatible, pues $x_i = 0$, $1 \leq i \leq n$ es claramente una solución.
- Buscamos soluciones $v \neq 0$. Por tanto, queremos que el sistema $(A - I_n\lambda)v = 0$ sea compatible indeterminado (puesto que si es determinado, $v = 0$ sería la única solución).
- Para que sea compatible indeterminado, $\operatorname{rank}(A - \lambda I_n) < n$, que en este caso es equivalente a la condición $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Teorema

λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definición

La expresión $\det(A - \lambda I_n)$ *es un polinomio de grado n que recibe el nombre de* **polinomio característico**.

Análogamente, la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *recibe el nombre de* **ecuación característica**.

Definición

Sea λ *un valor propio asociado a una matriz A. Entonces se define:*

- **Dimensión algebraica:** *es la multiplicidad de* λ *como raíz de la ecuación polinómica asociada al polinomio característico* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- **Dimensión geométrica:** $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si todas las dimensiones algebraicas asociadas a cada valor propio coinciden con las correspondientes dimensiones geométricas y, además, la suma de todas las dimensiones asociadas a los diferentes valores propios es n.

Además, en este caso la matriz D está formada por todos los valores propios ubicados en la diagonal (cada uno de ellos repetidos tantas veces como su multiplicidad) y la matriz P por vectores propios linealmente independientes colocados por columnas, de forma que el vector propio de la columna i de P está asociado al valor propio de la entrada (i, i) de la matriz D.

Ejemplos

1. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Veamos si A es diagonalizable y, en ese caso, obtengamos $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regular, $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

- *Ecuación característica, valores propios y matriz diagonal D:*

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Cálculo de vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$:*

Ejemplos

- $\lambda_1 = -1$: $\text{rank}(A-(-1)I_2) = 1$. *Dimensión geométrica:* $2-1=1$.

$$(A-(-1)I_2)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2$: $\text{rank}(A-2I_2) = 1$. *Dimensión geométrica:* $2-1=1$.

$$(A-2I_2)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=1} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Matrices P y P^{-1}:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejemplos

2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- *Ecuación característica:*

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -6 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda(1-\lambda)^2 = 0.$$

$$\leftrightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Cálculo de vectores propios asociados a los valores propios* $\lambda_1 = 0$ *y* $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$*.*

Ejemplos

- $\lambda_1 = 0$: $\text{rank}(A - 0I_3) = 2$. *Dimensión geométrica:* $3 - 2 = 1$.

$$(A - 0I_3)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: $\text{rank}(A - 1I_3) = 1$. *Dimensión geométrica:* $3 - 1 = 2$.

$$(A - 1I_3)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 3\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\beta=0]{\alpha=1} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \xrightarrow[\beta=1]{\alpha=0} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Matrices P y P^{-1}:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplos

3. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces A no es diagonalizable, ya que la ecuación característica no tiene raíces reales:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

4. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces A no es diagonalizable, ya que hay dimensiones algebraicas y geométricas que no coinciden.

Ejemplos

En efecto,

$$\det(A-\lambda I_2)=0 \leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}=0 \leftrightarrow \lambda^2=0.$$

- *Así pues, por una parte, se obtiene una raíz doble,* $\lambda_1=0$ *y* $\lambda_2=0$, *luego* A *tiene un valor propio con multiplicidad algebraica doble.*
- *No obstante, por otra parte, se tiene que*

$$\operatorname{rank}(A-0I_2)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0-0 & 1 \\ 0 & 0-0 \end{pmatrix}=1,$$

luego la multiplicidad geométrica asociada al valor propio $\lambda=0$ *es* $2-\operatorname{rank}(A-0I_2)=2-1=1$, *que no se corresponde con su multiplicidad algebraica,* 2.