Lógica Borrosa y razonamiento aproximado.

José A. Olivas

Universidad Internacional de Valencia

Lógica borrosa - Historia I

La lógica borrosa o teoría de los conjuntos borrosos fue propuesta por Lotfi Zadeh en 1965.

"**Los elementos clave en el pensamiento humano** no **son** números, sino **etiquetas**. Estas etiquetas permiten que los objetos pasen de pertenecer de una clase a otra de forma suave y flexible”.

La lógica borrosa puede verse como una <u>extensión de la lógica multivaluada</u>. (En 1922 Lukasiewicz cuestionaba la lógica clásica bivaluada de valores cierto y falso, propuso una lógica trivaluada).

Lógica borrosa - Historia II

<u>Lógica multivaluada</u>

Lukasiewicz suponía una lógica de valores ciertos en el intervalo unidad como generalización de su lógica tri-valuada.

Amplios trabajos de lógica multivaluada han sido realizados por Rosser y Rescher.

En los años 30 fueron propuestas lógicas Multivaluadas para un número cualquiera de valores ciertos $n \geq 2$ identificados mediante números racionales en el intervalo [0,1].

$$\left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

Lógica borrosa - Historia III

La lógica borrosa puede verse como una extensión de la lógica multivaluada.

Su objetivo es proporcionar las bases del razonamiento aproximado que utiliza premisas imprecisas como instrumento para formular el conocimiento.

La lógica borrosa incluye:

- Predicados borrosos (caro, alto, raro, peligroso, ...)
- Cuantificadores borrosos (mucho, parecido, casi todo,...)
- Valores de verdad borrosos (muy cierto, más o menos cierto,...)
- Cercas semánticas (*Semantic fences*, muy, algo…)

Lógica borrosa - Historia IV

Tras la publicación de Zadeh de 1965 hubo unos años
de profundización de los aspectos teóricos.
Fuerte apoyo de Zadeh, Trillas, Dubois y Prade…

A partir de 1975 se empezaron a desarrollar aplicaciones.
Primeras aplicaciones con éxito en el campo del control.

En Japón hubo una gran penetración de las teorías borrosas
y se esperaba mucho de su aplicación en I.A.

Frialdad en Europa y EE.UU. por las teorías de Zadeh.
Críticas de Kalman, 1972 y Mac Lane.
Frivolidad de los conceptos y sin obtención de resultados.

Lógica borrosa - Historia V

En Japón el éxito de los productos de consumo borrosos fue total (cámaras, lavadoras, ABS de vehículos,...) Casi todo el desarrollo fue en el campo de control.

La llama de las teorías borrosas se mantuvo no obstante en Europa y EE.UU. y a partir de los 80 ayudado del éxito japonés se afianza en los círculos técnicos poco a poco.

Hoy día el campo de las aplicaciones está en pleno desarrollo y se esperan fuertes avances tanto técnicos como teóricos.

Lógica borrosa - Historia V

Lógica borrosa - Conceptos I

Definición de conjunto clasico o conjunto crisp:

Sea X un conjunto universal o <u>universo de discurso</u>

Sea A un subconjunto de X

$x \in A$ significa que <u>x es miembro</u> o elemento del conjunto A

$x \notin A$ significa <u>x no es un elemento</u> del conjunto A

Lógica borrosa - Conceptos II

Descripción de un conjunto clásico:

- **Método de listas**: se listan todos los elementos del conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n\}$$

- **Método de propiedades o reglas**: se especifican propiedades de los elementos del conjunto.

$$B = \{ b \mid b \text{ tiene las propiedades } P_1, P_2, \ldots P_m \}$$

Lógica borrosa - Conceptos III

El proceso por el que un individuo del conjunto universal X es o no miembro de un conjunto se puede definir como una "función característica" así:

Para un conjunto A, esta función asigna un valor: $\mu_A(x)$ a cada $x \in X$ tal que

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{sí y sólo sí } x \in A \\ 0 & \text{sí y sólo sí } x \notin A \end{cases}$$

Lógica borrosa - Conceptos IV

La “función característica” definida en A (μ_A) asocia elementos del conjunto universal al conjunto {0,1}

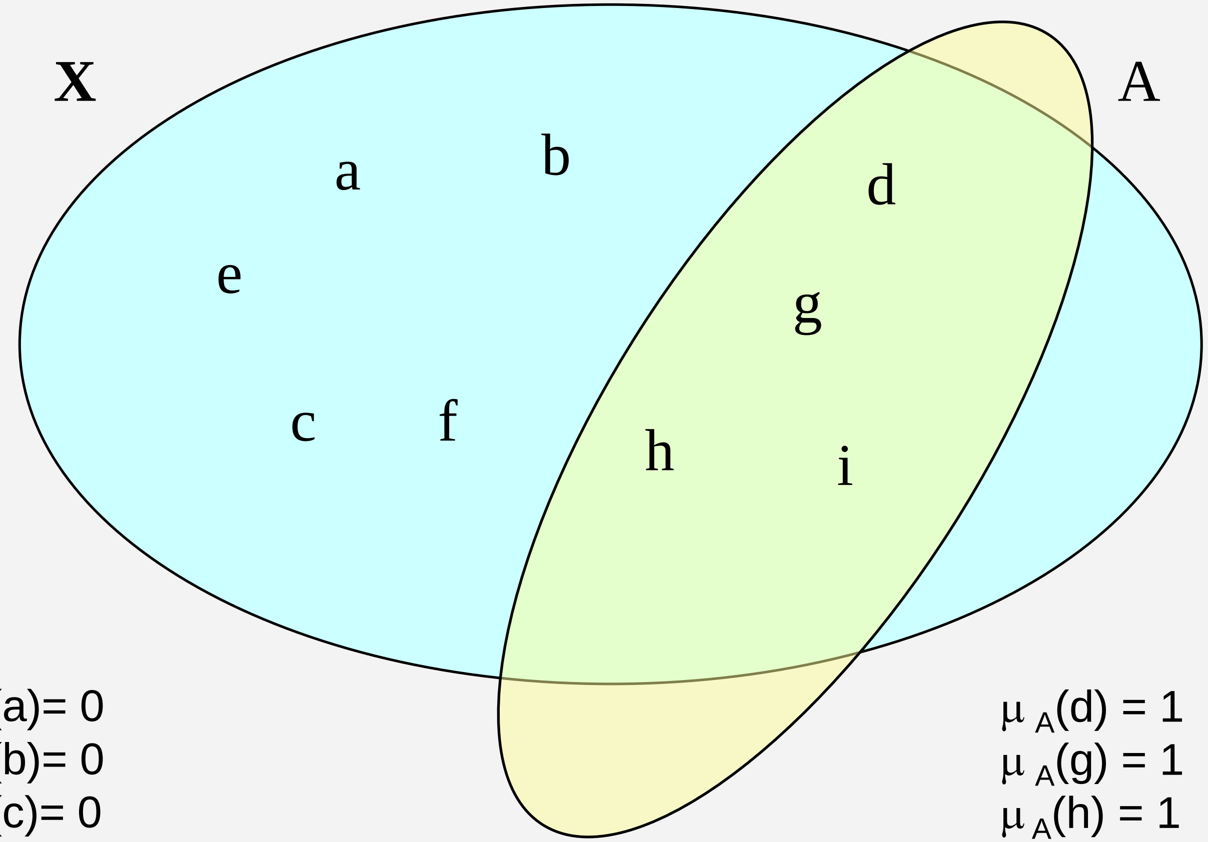
$$\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$$

El número de elementos que pertenecen a un conjunto A se llama "cardinalidad" del conjunto |A|

La familia de conjuntos que incluye todos los subconjuntos de un conjunto dado A se denomina conjunto potencia de A. El número de elementos del conjunto potencia será:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

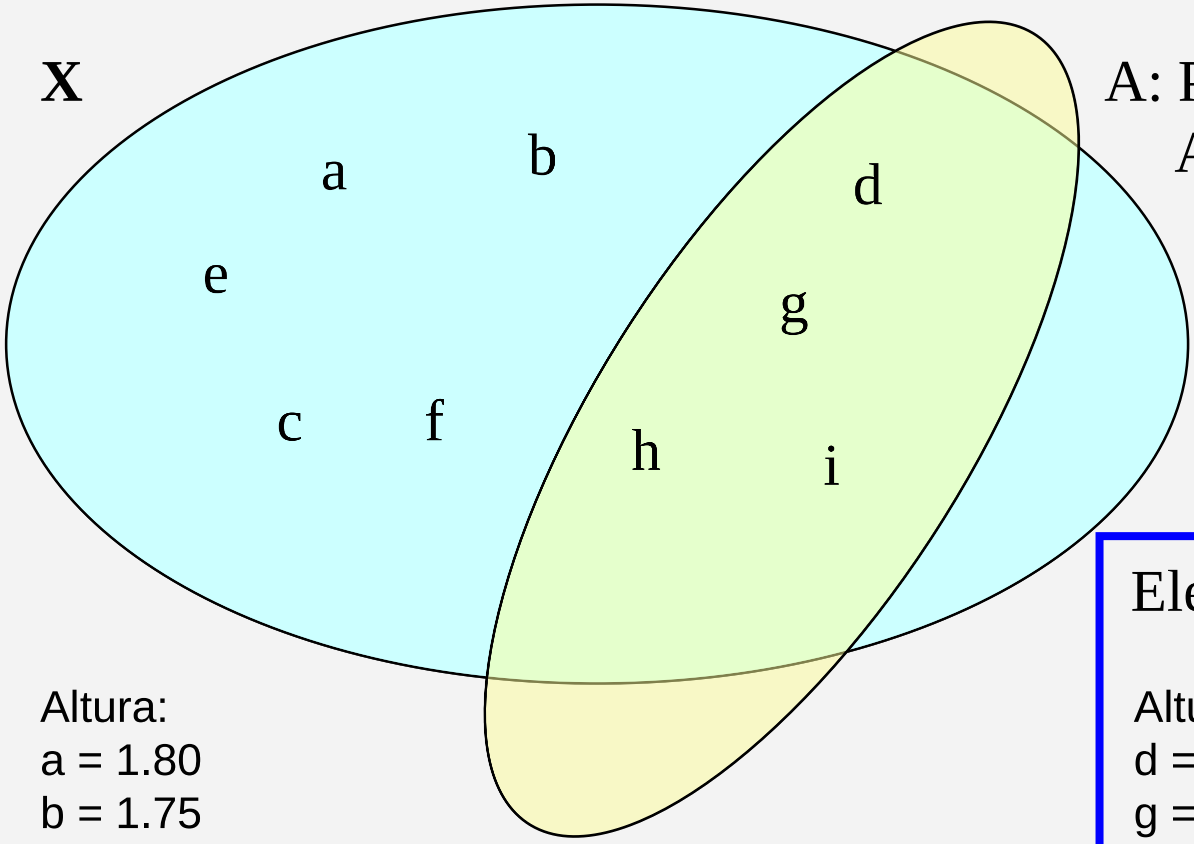
Lógica borrosa - Conceptos V



$\mu_A(a) = 0$
$\mu_A(b) = 0$
$\mu_A(c) = 0$
$\mu_A(e) = 0$
$\mu_A(f) = 0$

$\mu_A(d) = 1$
$\mu_A(g) = 1$
$\mu_A(h) = 1$
$\mu_A(i) = 1$

Lógica borrosa - Conceptos VI



A: Persona Baja
Altura < 1.70

Altura:
a = 1.80
b = 1.75
c = 1.71
e = 1.70
f = 1.79

Elementos de A:

Altura
d = 1.60
g = 1.69
h = 1.68
i = 1.65

Lógica borrosa - Conceptos VII

La función característica de pertenencia de un elemento a un conjunto se podría generalizar de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular y con ello indiquen el <u>grado de pertenencia</u> de los elementos al conjunto en cuestión.

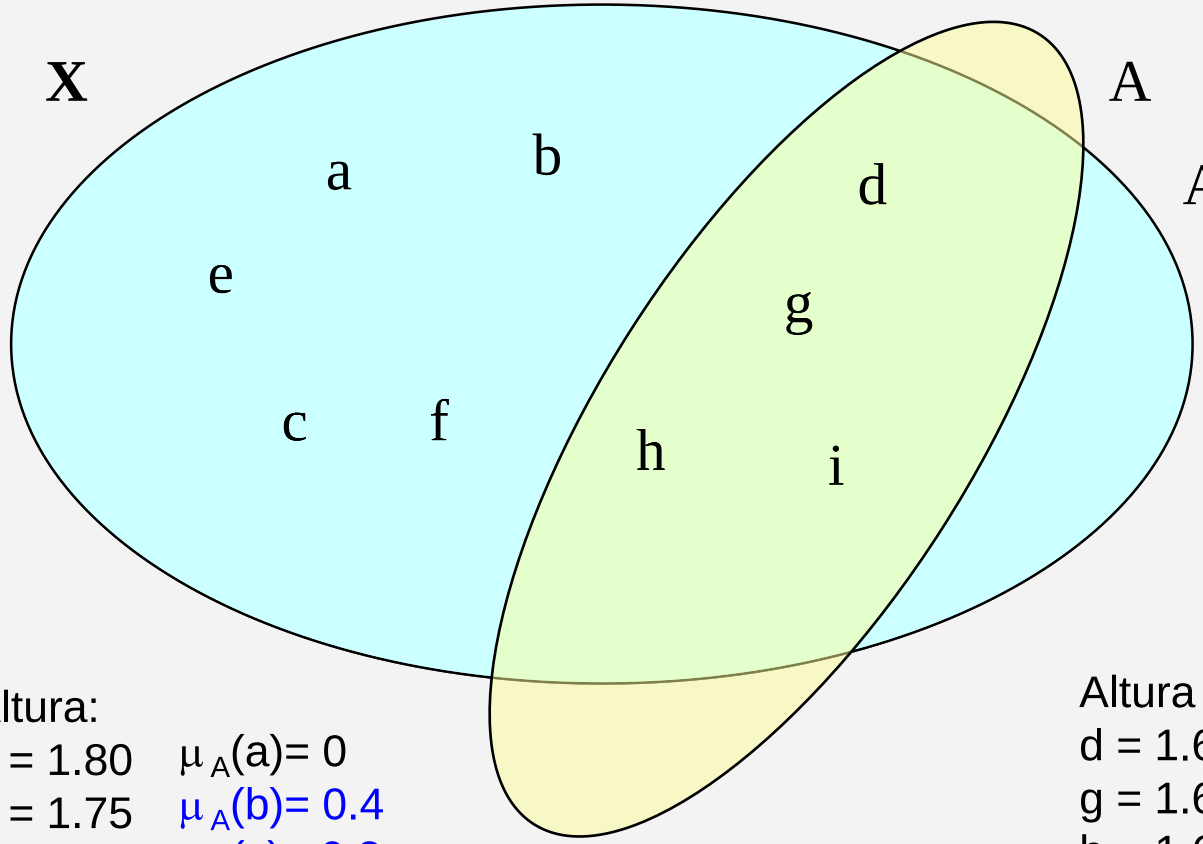
A esta función generalizada se llama "función de pertenencia" y el conjunto definido por ella **CONJUNTO BORROSO.**

La función de pertenencia μ_A que define un conjunto borroso A tiene la forma:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

[0,1] intervalo de números reales que incluye los extremos.

Lógica borrosa - Conceptos VIII



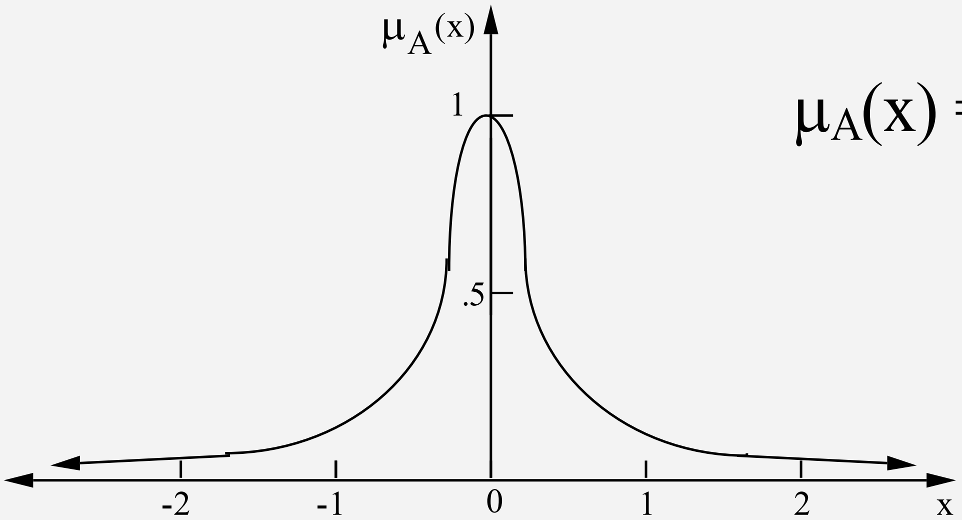
A: Persona Baja
Altura < 1.70

Altura:
a = 1.80 $\mu_A(a) = 0$
b = 1.75 $\mu_A(b) = 0.4$
c = 1.71 $\mu_A(c) = 0.8$
e = 1.70 $\mu_A(e) = 0.9$
f = 1.79 $\mu_A(f) = 0$

Altura
d = 1.60 $\mu_A(d) = 1$
g = 1.69 $\mu_A(g) = 1$
h = 1.68 $\mu_A(h) = 1$
i = 1.65 $\mu_A(i) = 1$

Lógica borrosa - Conceptos IX

Una posible función de pertenencia que defina los números reales próximos a cero puede ser la siguiente:



$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+10x^2}$$

El número 3 tiene un grado de pertenencia 0.1
El número 1 tiene un grado de pertenencia 0.9

Lógica borrosa - Conceptos X

Intuitivamente se podría pensar que haciendo alguna operación en la función correspondiente al conjunto de números cercanos a Ø, podríamos obtener una función que representase los números <u>muy</u> cercanos a Ø. Por ejemplo:

$$\mu_A(x) = \left(\frac{1}{1+10\,x^2} \right)^2$$

Podríamos pensar en la generalización a la función que representase los números cercanos a uno dado "a":

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+10\,(x-a)^2}$$

Lógica borrosa - Conceptos XI

Aunque [0,1] es el rango de valores más extendido para representar funciones de pertenencia, cualquier conjunto arbitrario con alguna ordenación total o parcial se podría utilizar: $\mu_A: X \to L$

A estos se les llama conjuntos borrosos L-fuzzy (L = lattice).

Lógica borrosa - Conceptos XII

Sea un universo de discurso X de franjas de edad personas:

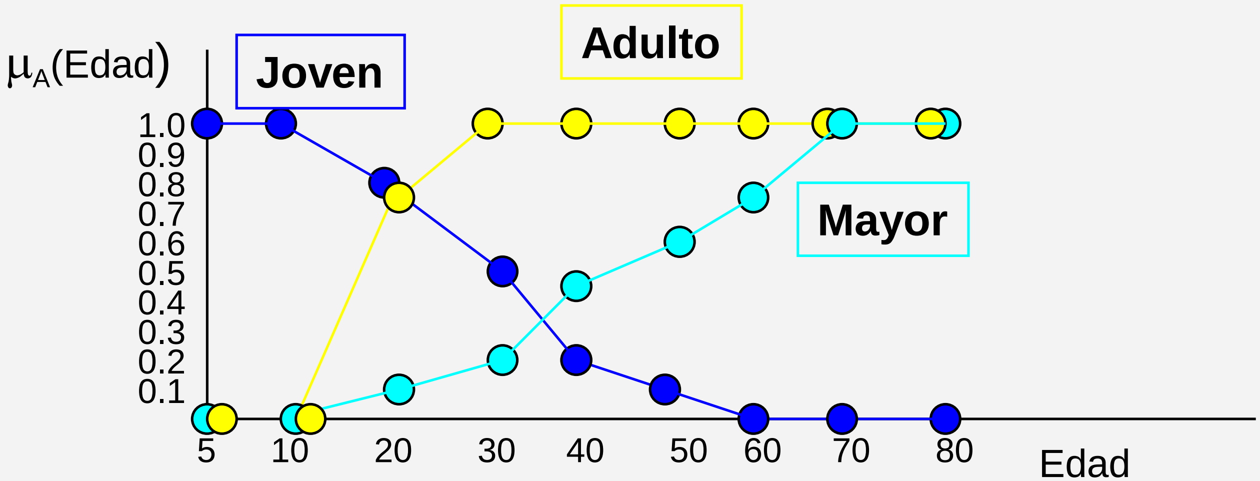
X = { 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60 70, 80}

(5 significa edad menor de años. 10 significa entre 5 y menor que 10 años)

Se definen en X los siguientes conjuntos borrosos:

Edad	joven	adulto	mayor
5	1	0	0
10	1	0	0
20	0.8	0.8	0.1
30	0.5	1	0.2
40	0.2	1	0.4
50	0.1	1	0.6
60	0	1	0.8
70	0	1	1
80	0	1	1

Lógica borrosa - Conceptos XIII



Soporte de un conjunto borroso A es el conjunto crisp que contiene todos los elementos del dominio que tienen un grado de pertenencia no nulo en A

$$\text{Sop } A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Ejemplo: Sop (joven) = {5, 10, 20, 30, 40, 50}

Lógica borrosa - Conceptos XIV

Notación usada para describir un conjunto borroso con un número finito de elementos del dominio:

Sea x_i un elemento del soporte del conjunto borroso A y μ_i su grado de pertenencia a A. (El índice i va de 1 a n)

El conjunto borroso A se puede escribir como:

$$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + ...+ \mu_n / x_n$$

Lógica borrosa - Conceptos XV

Altura de un conjunto borroso es el mayor grado de pertenencia que tiene cualquiera de los elementos del conjunto borroso

Altura de Mayor = 1

Núcleo de un conjunto borroso es el conjunto de elementos del soporte que tienen el máximo grado de pertenencia al conjunto borroso

Núcleo de Mayor = {70, 80}

Un conjunto borroso es **normalizado** cuando al menos uno de sus elementos alcanza el grado de pertenencia 1

Joven, Adulto y Mayor son normalizados

Lógica borrosa - Conceptos XVI

α-corte de un conjunto borroso A es un conjunto crisp que contiene todos los elementos de conjunto universal X que que tienen un grado de pertenencia en A mayor o igual que el valor α: $A_\alpha = \{ x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}$

$Joven_{0.2}=\{5,10,20,30,40\}$
$Joven_{0.8}=\{5,10,20\}$
$Joven_{1}=\{5,10\}$

El núcleo de un conjunto borroso normalizado es el α-corte de nivel 1

Conjunto nivel de un conjunto borroso A es el conjunto de sus distintos α-cortes o niveles $\alpha \in [0,1]$

$$\Lambda_A = \{\alpha \mid \mu_A(x) \geq \alpha \text{ para algún } x \in X\}$$

Lógica borrosa - Conceptos XVII

Cardinalidad escalar de un conjunto borroso A definido en un conjunto de universo finito se define como la suma de los grados de pertenencia de todos los elementos del dominio en A

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

$$|\mathrm{Mayor}| = 0+0+0.1+0.2+0.4+0.6+0.8+1+1 = 4.1$$

Cardinalidad borrosa es un conjunto borroso cuya función de pertenencia se define como:

$$\mu_{|A'|}(|A_\alpha|) = \sum_{i=1,n} \alpha_i / n_i$$

α_i es un α-corte de A y n_i es el número de elementos del universo de discurso con grado de pertenencia superior o igual a α

$$|\mathrm{Mayor'}| = 0.1/7 + 0.2/6 + 0.4/5 + 0.6/4 + 0.8/3 + 1.0/2$$

Lógica borrosa - Conceptos XVIII

A es un **subconjunto borroso** del B cuando:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Mayor es un subconjunto de Adulto

$$\mu_{mayor}(x) \leq \mu_{adulto}(x)$$

Los conjuntos borrosos A y B son iguales si:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Lógica borrosa - Conceptos XIX

Se dice que un conjunto crisp (A) es un conjunto convexo en $\Re^n$ si para cada par de puntos:

$$r = (r_i \mid i \in N_n) \ \ y \ \ s = (s_i \mid i \in N_n) \quad (N_n = \{1,2,...,n\})$$

r y s pertenecen a A y cada número real λ entre 0 y 1,

el punto: $t = (\lambda\, r_i + (1 - \lambda)\, s_i \mid i \in N_n)$ es también de A

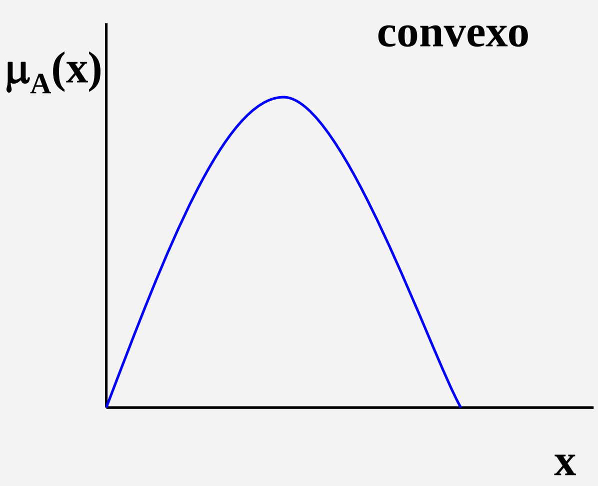
O sea, si para cada par de puntos r y s los puntos pertenecientes a la recta que los une pertenecen a A

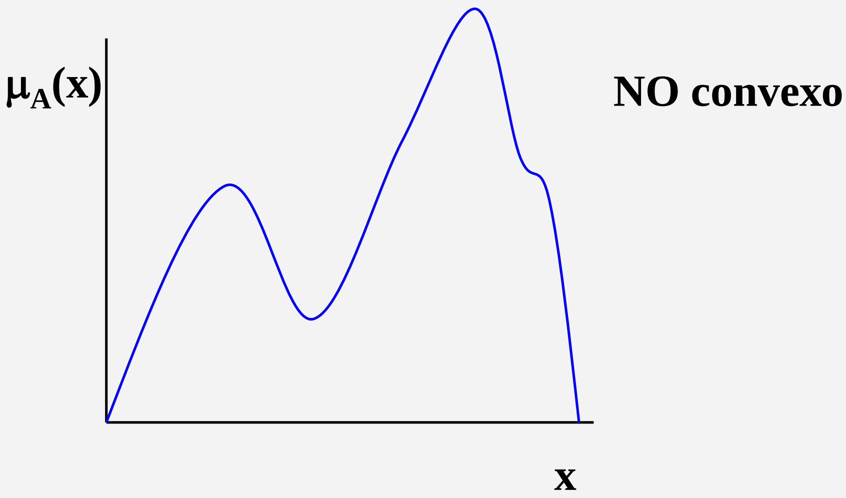
Lógica borrosa - Conceptos XX

Un conjunto borroso A es convexo sí y solo sí cada uno de sus α-cortes es un conjunto convexo en sentido crisp

$$\mu_A(\lambda r + (1-\lambda)s) \geq \min[\mu_A(r), \mu_A(s)] = \alpha$$

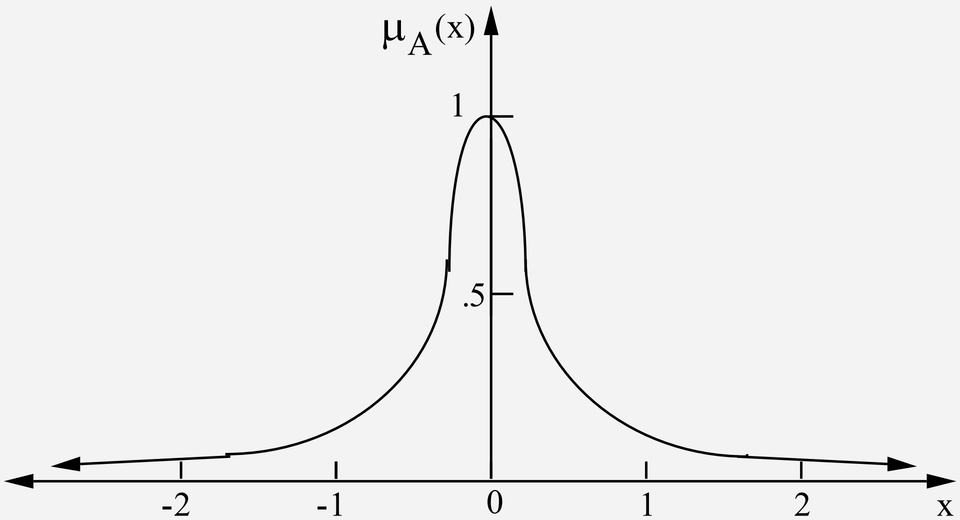
Para todo r y s reales y λ entre 0 y 1





Lógica borrosa - Conceptos XXI

Número borroso es un conjunto borroso convexo y normalizado cuya función de pertenencia es continua



Ejemplo del número borroso 0

Lógica borrosa - Operadores I

Conjunto borroso **complemento** del A es aquel que

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in X$$

$\overline{\text{Mayor}}$= 1/5+1/10+0.9/20+0.3/30+0.6/40+0.4/50+0.2/60

La **unión** de dos conjuntos borrosos A y B es otro conjunto borroso $A \cup B$ tal que:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall\, x \in X$$

Joven $\cup$ Mayor = 1/5+1/10+0.8/20+0.5/30+0.4/40+0.6/50+ +0.8/60+1/70+1/80

Lógica borrosa - Operadores II

La **intersección** de dos conjuntos borrosos A y B es otro conjunto borroso $A \cap B$ tal que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall\ x \in X$$

$\text{Joven} \cap \text{Mayor} = 1/20 + 0.2/30 + 0.2/40 + 0.1/50$

Lógica borrosa - Principio de Extensión I

Permite la generalización de conceptos matemáticos crisp sobre funciones a la teoría de conjuntos borrosos.

Cualquier función f que asocie elementos x_1, x_2, ..., x_n del conjunto crisp X al Y puede generalizarse en lógica borrosa asociando subconjuntos borrosos de X a otros de Y mediante una función f cualquiera:

$$f: X \to Y$$

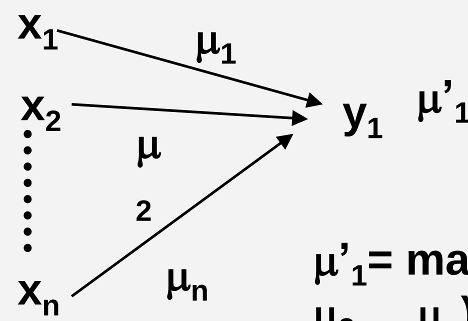
Sea un conjunto borroso en X: $A = \mu_1|x_1+\mu_2|x_2 + ... + \mu_n|x_n$

Se puede obtener otro conjunto borroso en Y como:

$$f(A) = f(\mu_1|x_1 + \mu_2|x_2 +...+ \mu_n|x_n) = \mu'_1|f(x_1) + \mu'_2|f(x_2) +...+ \mu'_n|f(x_n)$$

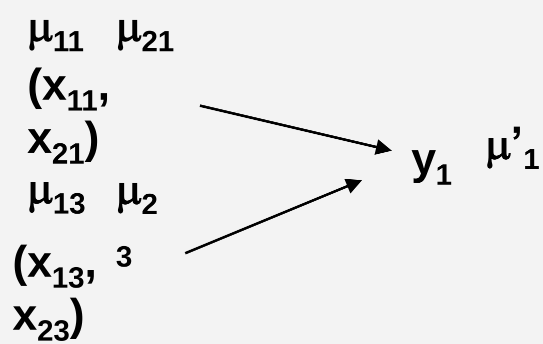
Lógica borrosa - Principio de Extensión II

Si más de un x de X es asociado por f a un mismo elemento **y** de Y, su grado de pertenencia será el **máximo** de los grados de pertenencia



μ'_1**= max (**$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$**)**

Si varias tuplas de elementos x_i apuntan a un **y**, su grado de pertenencia será el **mínimo** de los grados de pertenencia de los elementos de la tupla



μ'_1**= max [min(**μ_{11}, μ_{21}**), min(**μ_{13},μ_{23}**)]**

Lógica borrosa - Principio de Extensión III

Sea f: $X \rightarrow Y$ una función que asocia elementos de X a elementos de Y: $y=f(x)$

Sea el dominio de X = {a, b, c} y el de Y = { p,q, r}

Definición de f: $a \rightarrow p$, $b \rightarrow q$, $c \rightarrow p$

Sea A = 0.3/a + 0.9/b + 0.5/c (conj. bor. definido en X)

B = f(A) será:

$\mu_B(p)= \max[0.3, 0.5] = 0.5$

$\mu_B(q)= \max[0.9] = 0.9$

$\mu_B(r)= 0$

B=f(A) = 0.5/p + 0.9/q

Lógica borrosa - Prinpio. de Extensión IV

Sea f: X$\rightarrow$Y una función que asocia pares de elementos de X con elementos de Y: y=f(x1, x2)
Sea el dominio de X = {x1, x2} con x1={a,b,c} y x2={x,y}
y el domino de Y = {p,q,r}

Definición de f:

$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline a & p & p \\ b & q & r \\ c & r & p \end{array}$$

A_1 = 0.3/a + 0.9/b + 0.5/c (conj. bor. definido en x1)
A_2 = 0.5/x + 1/y (conj. bor. definido en x2)
B = f(A_1, A_2)

μ_B(p)=max[min(0.3, 0.5),min(0.3, 1),min(0.5, 1)]=0.5

μ_B(q)= max[min(0.9, 0.5)] = 0.5

μ_B(r)= max[min(0.5, 0.5), min(0.9,1)] = 0.9

B=f(A_1,A_2) = 0.5/p + 0.5/q + 0.9/r

Lógica borrosa - OPERADORES

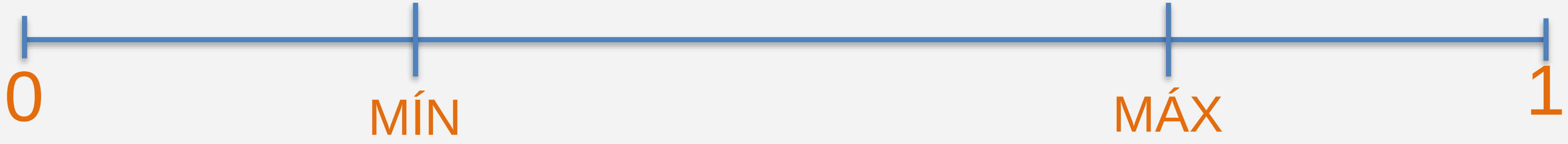
Los conjuntos borrosos pueden operarse como los conjuntos *crisp*.

La teoría original de conjuntos borrosos se formuló en base a los siguientes operadores:

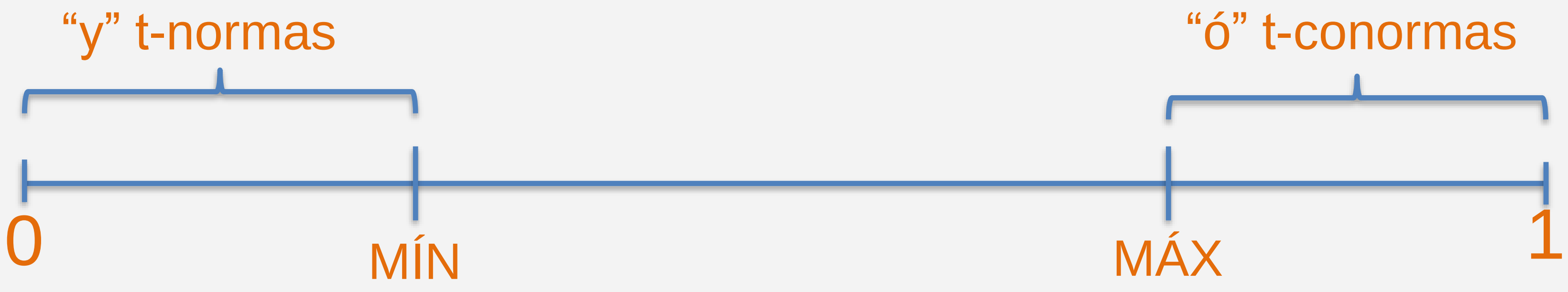
- Negación $\mu_{A'} = 1 - \mu_A(x)$
- Unión $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
- Intersección $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

Los conjuntos *crisp* tienen también estos operadores.

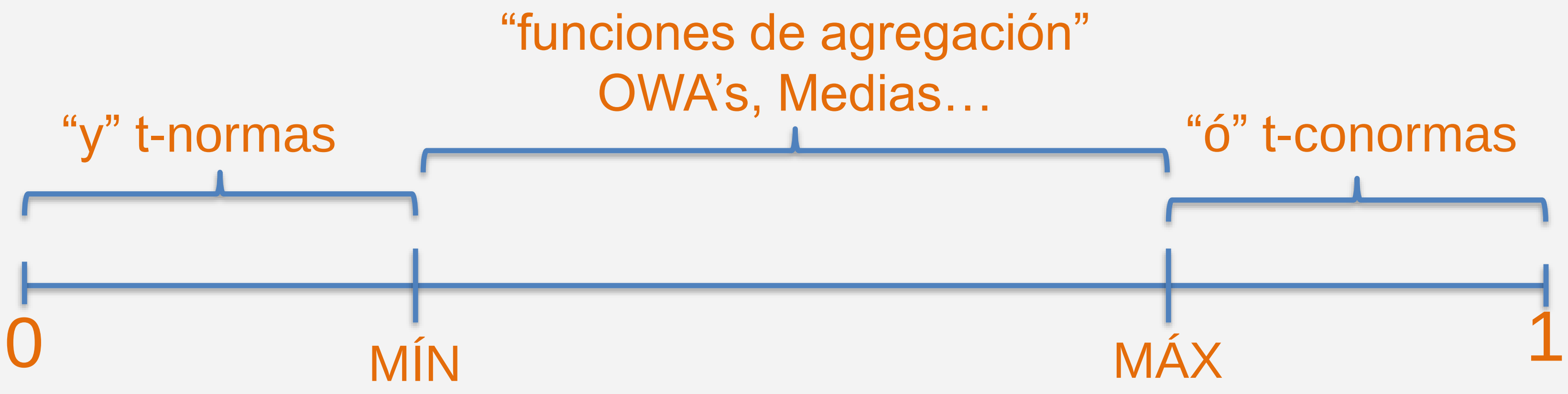
Lógica borrosa - OPERADORES



Lógica borrosa - OPERADORES



Lógica borrosa - OPERADORES



Lógica borrosa - Complemento Borroso I

Una función es un complemento borroso

$c: [0,1] \to [0,1]$

Cuando satisface los siguientes axiomas:

C1) Condiciones límite o frontera

$c(0) = 1$ y $c(1) = 0$

C2) Monotonicidad

$\forall\ a,b \in [0,1]$ Si $a \leq b$ Entonces $c(a) \geq c(b)$

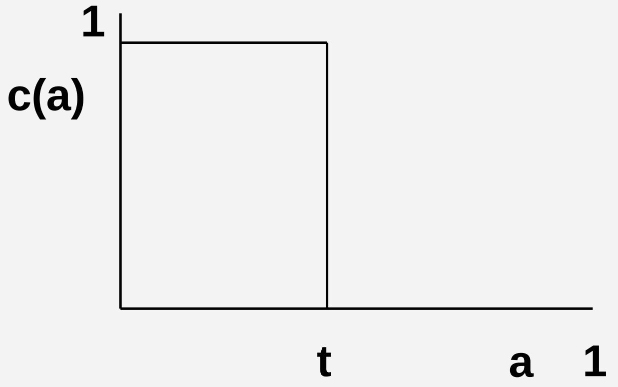
c es monotónica creciente, a y b son grados de pertenencia

Lógica borrosa - Complemento Borroso II

Funciones que satisfacen C1 y C2 son las funciones complemento borroso más generales

$$c(a) = \begin{cases} 1 & a \leq t \\ 0 & a > t \end{cases}$$

$a,t \in [0,1)$ (umbral de complemento)



Lógica borrosa - Complemento Borroso III

A efectos prácticos es necesario exigir otros dos requisitos más:

C3)c es una función continua

C4)c es involutiva: $c(c(a)) = a \quad \forall a \in [0,1]$

Ej. función continua pero no involutiva

$$c(a) = 0.5*(1 + \cos(\pi a))$$

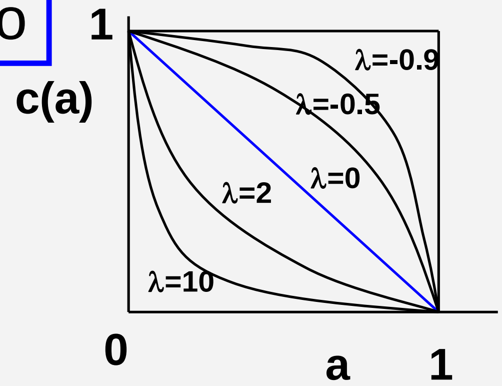
con $c(0.33) = 0.75$ y $c(0.75) = 0.15$

Lógica borrosa - Complemento Borroso IV

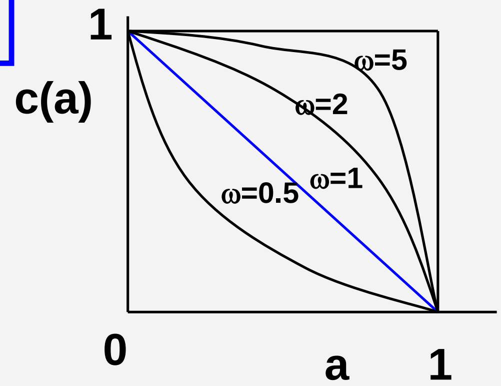
Ej. funciones complemento involutivas:

- Clásica $\mu_{\tilde{A}} = c(a) = 1-a$
- Sugeno $c_{\lambda}(a) = \dfrac{1-a}{1+\lambda a}$ $\lambda \in (-1,\infty)$
- Yager $c_{\omega}(a) = (1-a^{\omega})^{1/\omega}$ $\omega \in (0,\infty)$

Sugeno



Yager



Lógica borrosa - Intersección Borrosa I

Es una función $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

$\mu_{A \cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ que ha de verificar los axiomas:

I1) $T(a,1) = a$; Elemento unidad

I2) $T(a,b) = T(b,a)$ T es conmutativa

I3) Si $a \leq a'$ y $b \leq b'$ Entonces $T(a,b) \leq T(a',b')$

T es monotónica

I4) $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$ T es asociativa

Adicionales recomendados:

I5) T es una función continua

I6) $T(a,a) \leq a$, T es subidempotente

Una T-norma continua que satisface la subidempotencia se denomina Arquímedea

Lógica borrosa - Intersección Borrosa II

Ejemplos

Mínimo: T_{min} (a,b) = min(a,b)

Producto T_{prod} (a,b) = a*b

Lukasiewick $T_{Lukasiewick}$ (a,b) = max [0, a+b-1]

Clase de Yager T_w (a,b) = 1 - min [1, $(1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}$]

T_1(a,b) = 1 - min (1, 2-a-b)

T_2(a,b) = 1 - min (1,$\sqrt{(1\text{-}a)^2 + (1\text{-}b)^2}$)

$$\lim_{w\to\infty} T_w = (1 - min[1, ((1-a)^w + (1+b)^w)^{1/w}]) = \min(a,b)$$

max(0,a+b-1) ≤ a*b ≤ min(a,b)

Lógica borrosa - Unión Borrosa I

Es una función $\perp : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
$\mu_{A \cup B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ que ha de verificar los axiomas:

U1) $\perp(a,0) = a$; Elemento cero
U2) $\perp(a,b) = \perp(b,a)$ T es conmutativa
U3) Si $a \leq a'$ y $b \leq b'$ Entonces $\perp(a,b) \leq \perp(a',b')$
$\perp$ es monotónica
U4) $\perp(\perp(a,b),c) = \perp(a, \perp(b,c))$ $\perp$ es asociativa

Adicionales recomendados:
U5) $\perp$ es una función continua
U6) $\perp(a,a) > a$ $\perp$ es superidempotente

Una T-conorma continua superidempotente se denomina Arquímedea

Lógica borrosa - Unión Borrosa II

EJEMPLOS

Máximo $\perp_{max}$ (a,b) = max(a,b)
Producto $\perp_{prod}$ (a,b) = a + b - a*b
Lukasiewick $\perp_{Lukasiewick}$ (a,b) = min [a+b,1]
Clase de Yager (No idempotentes) $\perp_w$(a,b) = min [1, $(a^w + b^w)^{1/w}$]

w = 1 $\perp_1$(a,b) = min [1, a+b]
w = 2 $\perp_2$(a,b) = min [1, $\sqrt{a^2+b^2}$]

$$\lim_{w \to \infty} \min [1, a^w+b^w)^{1/w}] = \max(a,b)$$

max(a,b) ≤ a+b-a*b ≤ min(1,a+b)

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas I

Una relación entre conjuntos crisp $X_1, X_2,..., X_n$ es un subconjunto de su producto cartesiano

$$R(X_1, X_2,..., X_n) \subseteq X_1 x\ X_2 x ... x\ X_n$$

Una relación es un conjunto por sí mismo al que se le puede aplicar cualquiera de los operadores de conjuntos.

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas II

Cada relación crisp puede definirse por una **función característica** que asigna un valor 1 a cada tupla del conjunto universal que pertenezca a la relación y 0 a cada tupla no perteneciente a ella

$R(X_1, X_2,..., X_n)= 1$, s y ss $<X_1 x\ X_2 x ... x\ X_n> \in R$

$R(X_1, X_2,..., X_n)= 0$, en cualquier otro caso

Una relación entre dos conjuntos es una **relación binaria.**

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas III

Ejemplo: R es una relación binaria que expresa la noción de “muy cerca” entre un conjunto de ciudades.

Sean este conjunto de ciudades:

{Cádiz, Sevilla, Ciudad Real, Madrid, Toledo}

La expresión de R podría ser:

	C	S	CR	M	T
C	1	1	0	0	0
S	1	1	0	0	0
CR	0	0	1	0	1
M	0	0	0	1	1
T	0	0	1	1	1

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas IV

El concepto de relación se puede extender al campo borroso haciendo que la función característica que indica la pertenencia o no de una tupla a una relación pueda tomar valores en [0,1].

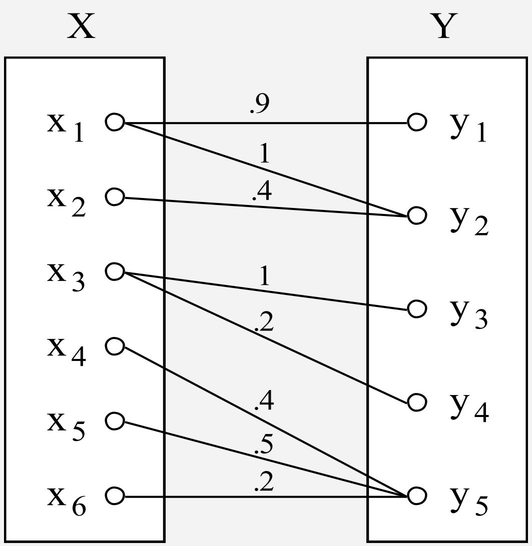
En el ejemplo anterior en que R expresaba “muy cerca”. La relación binaria se podría hacer borrosa flexibilizando la pertenencia o no de las tuplas a la relación

	C	S	CR	M	T
C	1	0.9	0.2	0	0
S	0.9	1	0.8	0	0
CR	0.2	0.8	1	0.6	0.9
M	0	0	0.6	1	0.9
T	0	0	0.9	0.9	1

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas V

Representación de relaciones binarias borrosas

gráfica



matricial

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & .2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas VI

En conjuntos crisp, el "dominio" de una relación binaria se define como el subconjunto de X cuyos elementos participan en la relación:

$$\text{dom } R(X,Y) = \{x \mid x \in X, (x,y) \in R \text{ para algún } y \in Y\}$$

Si R(X,Y) es una relación binaria borrosa, su dominio será el conjunto borroso cuya función de pertenencia viene definida por

$$\mu_{\text{domR(X,Y)}} = \max_{y \in Y} \mu_R(X,Y) \qquad \forall\ x \in X$$

Cada elemento del conjunto X pertenece al dominio de R en un grado igual a la fuerza de su mayor relación con cualquier miembro del conjunto Y

En el ejemplo: $\mu_{\text{domR(X,Y)}} = 1/x_1 + 0.4/x_2 + 1/x_3 + 0.4/x_4 + 0.5/x_5 + 0.2/x_6$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas VII

En conjuntos crisp el rango de una relación binaria R(X,Y) se define como el subconjunto de Y cuyos miembros participan en esa relación

$$\text{ran } R(X,Y) = \{y \mid y \in Y, (x,y) \in R \text{ para algún } x \in X\}$$

Cuando R(X,Y) es una relación borrosa, su rango es un conjunto borroso cuya función de pertenencia se define como

$$\mu_{ranR(X,Y)} = \max_{x \in X} \mu_R(X,Y) \qquad \forall\, y \in Y$$

La fuerza de la más fuerte relación que cada elemento de Y tiene con un elemento de X es igual al grado de pertenencia de ese elemento en el rango de R

En el ejemplo: $\mu_{ranR(X,Y)} = 0.9/y_1 + 1/y_2 + 1/y_3 + 0.2/y_4 + 0.5/y_5$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas VIII

Altura de una relación borrosa R(X,Y) es un número h(R) definido por

$$h(R)=\max_{y\in Y} \max_{x\in X} R(X,Y)$$

En el ejemplo h(R)=1

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas IX

Una relación binaria borrosa se puede definir como unión de α-cortes de un determinado nivel α de la siguiente manera:

$R = U_{\alpha}\ \alpha R_{\alpha}\ \ \alpha \in \Lambda_R$ (Λ_R Conjunto nivel de R)

Donde $\alpha\ R_{\alpha}$ es una relación borrosa definida por:

$$\mu_{\alpha R\alpha}(x,y) = \alpha * \mu_{R\alpha}(x,y) \qquad\qquad \forall\ (x,y) \in XxY$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas X

Ejemplo: Sea una relación binaria borrosa R tal que

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.0 \\ 0.9 & 1.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.0 \end{bmatrix}$$

cuyo conjunto nivel es:

$$\Lambda_R = \{0, 0.4, 0.7, 0.9, 1\}$$

$$R_{0.4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_{0.7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.4 * R_{0.4} \cup 0.7 * R_{0.7} \cup 0.9 * R_{0.9} \cup 1 * R_1$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XI

COMPOSICIÓN DE RELACIONES BINARIAS BORROSAS I

En conjuntos crisp, dadas 2 relaciones binarias P(X,Y) y Q(Y,Z), la composición de estas relaciones se define como:

$$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$$

Propiedades: $P \circ Q \neq Q \circ P$

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XII

COMPOSICIÓN DE RELACIONES BINARIAS BORROSAS II

La operación de composición para relaciones borrosas puede tener varias formas. La más extendida es la composición

"**max-min**"

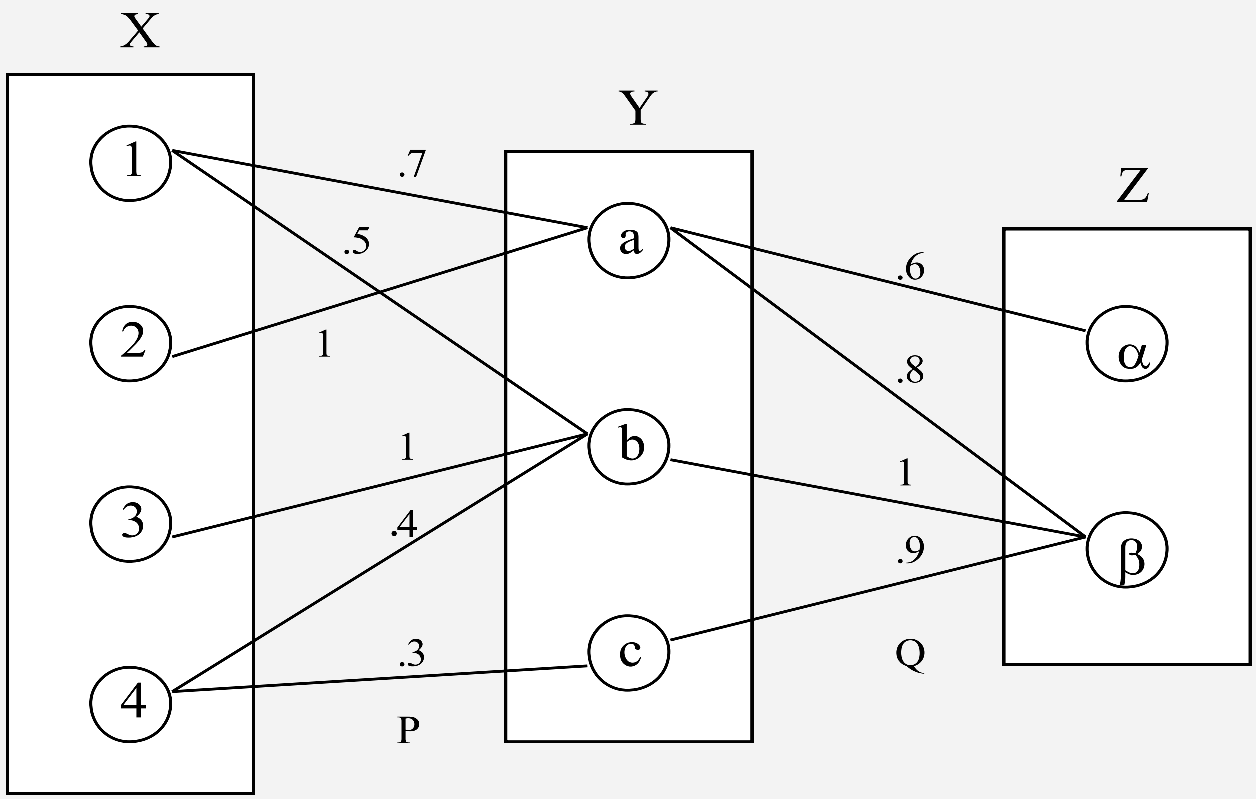
$$\mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in Y} \min [\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)]$$

Alternativa es la composición "**max-producto**"

$$\mu_{P\Theta Q}(x,z) = \max_{y\in Y} [\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)]$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XIII

Ejemplo de 2 relaciones binarias P(x,y) y Q(y,z) definidas como:

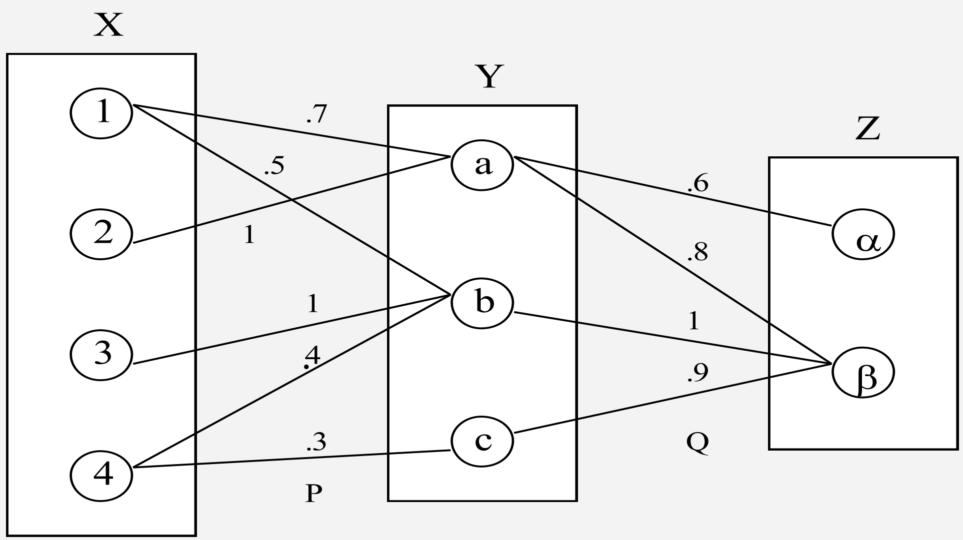


Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XIV

Composición: R = P o Q		
x	z	$\mu_{R(x,z)}$
1	α	.6
1	β	.7
2	α	.6
2	β	.8
3	β	1
4	β	.4

Intermedio			
x	y	z	μ
1	a	α	.6
1	a	β	.7
1	b	β	.5
2	a	α	.6
2	a	β	.8
3	b	β	1
4	b	β	.4
4	c	β	.3

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XV



$$
\mathbf{X}\;
\underset{\mathbf{P}}{\overset{\mathbf{Y}}{\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}
\end{array}}}
\;\mathbf{o}\;
\underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{Z}}{\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}
\end{array}}}
\;=\;
\underset{\mathbf{R}}{\overset{\mathbf{Z}}{\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}
\end{array}}}
$$

Lógica borrosa - Relaciones Borrosas XVI

max-min

$$\underset{P}{\begin{array}{c|c} & Y \\ X & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}} \circ \underset{Q}{\begin{array}{c} Z \\ \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}} = \underset{R}{\begin{array}{cc} & Z \\ & \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}}$$

max-prod

$$\underset{P}{\begin{array}{c|c} & Y \\ X & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}} \circ \underset{Q}{\begin{array}{c} Z \\ \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}} = \underset{R}{\begin{array}{cc} & Z \\ & \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.40 & 0.45 \\ 1.00 & 0.14 & 0.50 & 0.63 \\ 0.50 & 0.20 & 0.28 & 0.54 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Lógica Borrosa

Definición de Sistema Borroso y de sus componentes fundamentales

Definición de Sistema Borroso

Un Sistema Borroso es aquel que utiliza alguna de las técnicas propias de la lógica borrosa bien sea en la representación de su conocimiento, en la combinación de dicho conocimiento mediante diversos operadores borrosos o en cualquier otra función propia de dicho sistema.

Diseño de un Sistema Borroso

Los pasos requeridos en el diseño de un Sistema Borroso son los siguientes:

- Adquisición del conocimiento.
- Representación del conocimiento mediante las definiciones apropiadas de los conjuntos borrosos que se requieran y de reglas de producción borrosas adecuadas (borrosificación).
- Definición de operadores a emplear para combinar conjuntos borrosos, así como de los mecanismos de inferencia de conclusiones borrosas más convenientes.
- En caso necesario, articular mecanismos de desborrosifica-ción.
- Simulación y pruebas.

Implantación de un Sistema Borroso

La implantación de un Sistema Borroso puede/suele hacerse de las siguientes maneras:

- Mediante programas embebidos en aplicaciones software diversas (*Es la más común*).
  Desarrollos borrosos hechos en C, C++, Python, Matlab, FuzzyCLIPS, etc. como partes de una aplicación.

- Mediante programas fuentes cargados en chips.

- Mediante circuitería analógica.

Herramientas de desarrollo de un Sistema Borroso

Los Sistemas Borrosos se desarrollan básicamente en cualquier lenguaje de programación, o bien con herramientas.

Algunas son las siguientes:

- Fuzzy toolbox de MATLAB de MathWorks Inc.
- FuzzyCLIPS de NASA
- CubiCalc de Hyperlogic Corp.
- TIL Shell de Togai InfraLogic

Hay muchas más tanto de libre disposición como de pago.

Representación borrosa del conocimiento

Representación borrosa - Introducción I

En lenguaje natural identificamos objetos o situaciones en **términos imprecisos**: pequeño, rápido, viejo, peligroso,...

El razonamiento basado en estos términos no puede ser exacto ya que representan **impresiones subjetivas** quizás probables pero no exactas.

La teoría de conjuntos borrosos representa mejor que la lógica clásica el conocimiento humano al permitir que los fenómenos y observaciones tengan más de dos estados lógicos.

Representación borrosa - Introducción II

En los sistemas basados en conocimiento la función de pertenencia debe ser obtenida del experto en ese dominio de conocimiento.

Esta función de pertenencia no ha de ser confundida con una función de distribución de probabilidad ya que no está basada en la repetibilidad de las observaciones sino en la opinión de un experto.

Representación borrosa

Construcción de conjuntos borrosos I

Se requiere participación de expertos

- Preguntas directas para obtener conocimiento (métodos directos)
- Preguntas más sencillas que se procesan después (métodos indirectos)

Participación de uno o más expertos

Métodos

- Directos con un experto
- Directos con múltiples expertos
- Indirectos con un experto
- Indirectos con múltiples expertos

Representación borrosa

Construcción de conjuntos borrosos II

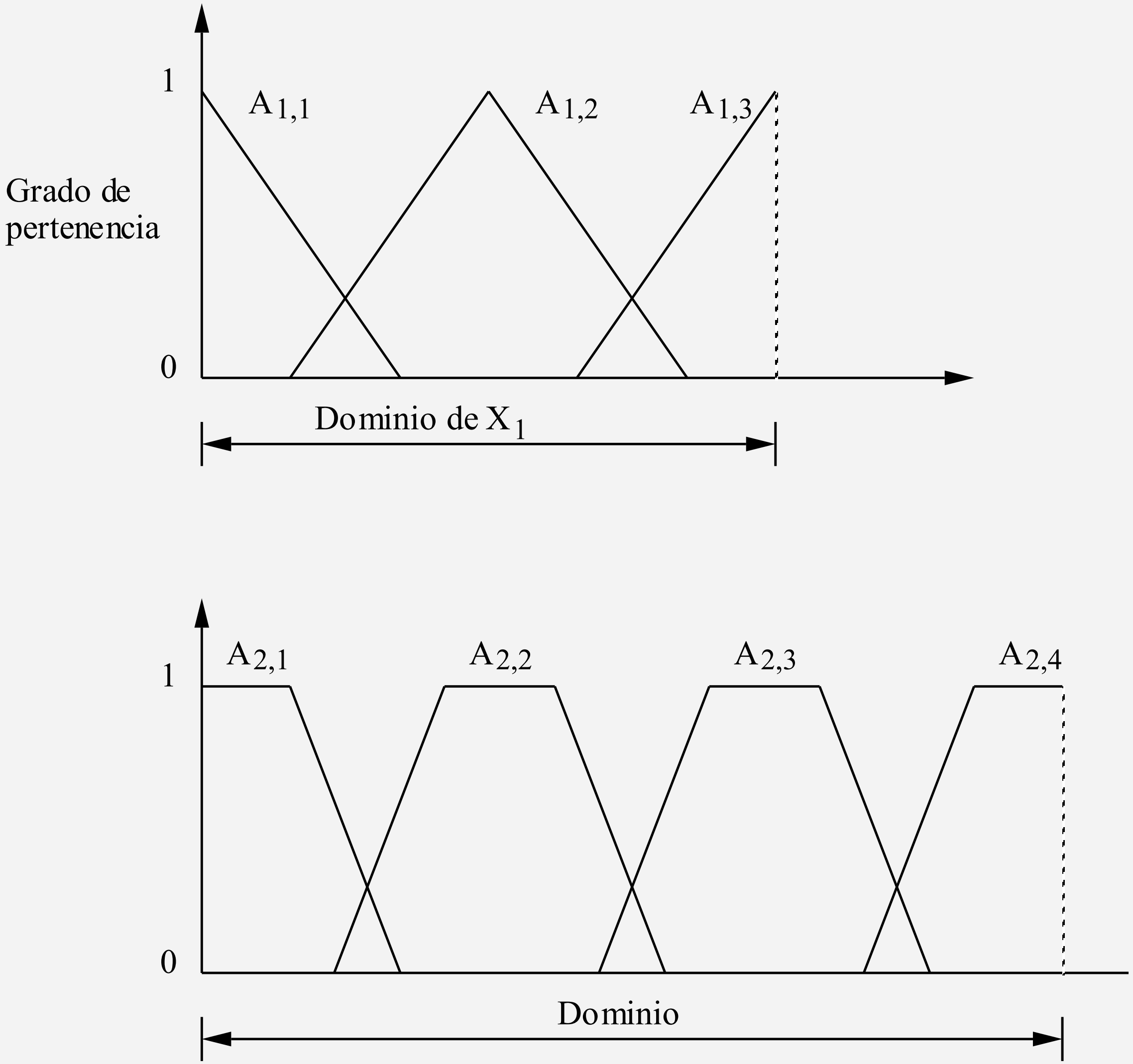
La representación típica del conocimiento en términos borrosos se realiza por medio de reglas.

Si x_1 es $A_{1,1}$
y x_2 es $A_{2,1}$
....
y x_n es $A_{n,1}$
Entonces y es B_1

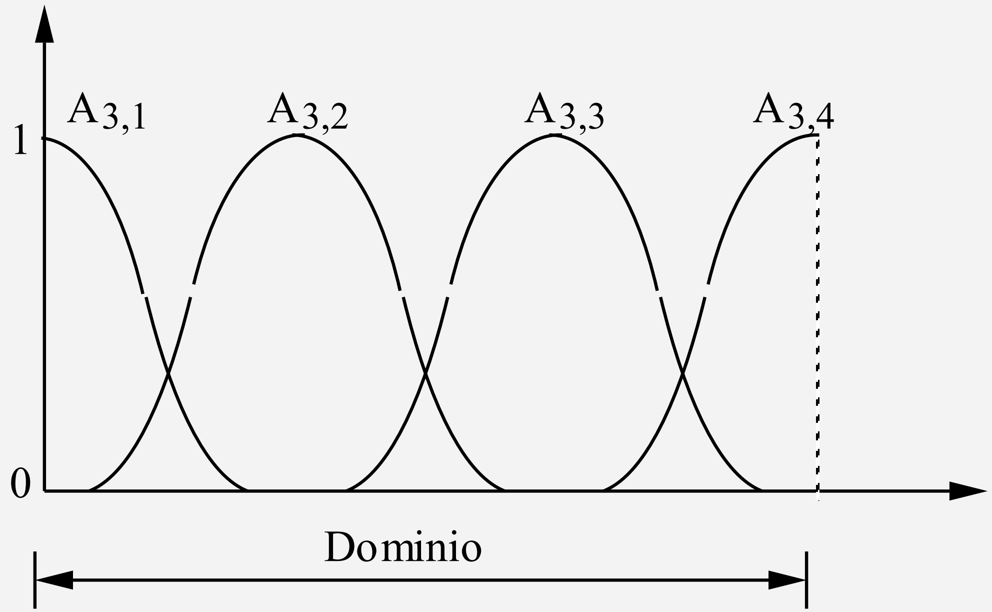
Cada variable que intervenga como hipótesis en una regla está asociada a un **dominio.**

Cada dominio puede estar **dividido** en tantos conjuntos borrosos como el experto considere oportuno. Cada una de estas particiones tiene asociada una etiqueta lingüística.

Representación borrosa - Ejemplos I



Representación borrosa - Ejemplos II



Representación borrosa

Etiquetas borrosas

La representación del dominio de conocimiento de cada variable por medio de etiquetas lingüísticas permite flexibilizar la representación del conocimiento por medio de reglas.

Cada predicado simple o hipótesis de la regla se represen-ta por tanto por un conjunto borroso.

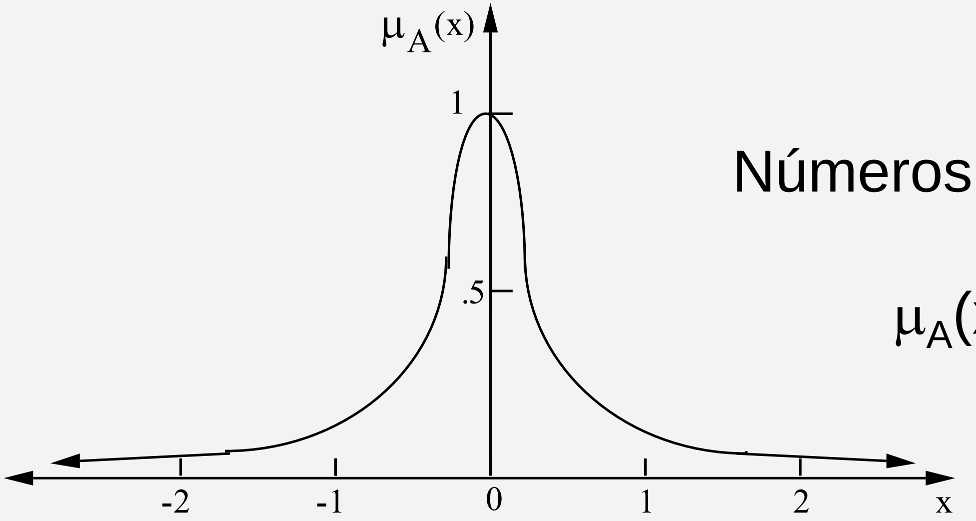
El valor crisp de una variable en la hipótesis pertenecerá con un cierto grado de pertenencia al conjunto borroso que especifica la premisa de la regla.

Representación borrosa

Cercas semánticas I

Existen palabras que **enfatizan** más o menos un predicado. Ejemplo:

Números próximos a cero: $\mu_A(x) = \frac{1}{1+10\,x^2}$



Números **muy** próximos a cero:

$$\mu_A(x) = \left(\frac{1}{1+10\,x^2}\right)^2$$

Representación borrosa

Cercas semánticas II

Cercas semánticas más usadas:

- Muy A = $A^2 = \int_u \mu_A(u)^2 / u$
- Más o menos A = $A^{0.5} = \int_u \mu_A(u)^{0.5} / u$
- No A = $\int_u 1-\mu_A(u) / u$
- No muy A = $\int_u 1- \mu_A(u)^2 / u$
- No más o menos A = $\int_u 1- \mu_A(u)^{0.5} / u$

Lógica Borrosa

Razonamiento aproximado

(Regla composicional de inferencia)

Razonamiento borroso

REGLA DE COMPOSICIÓN DE INFERENCIAS I

Sea R es una relación binaria borrosa en los universos X x Y. Sean A' y B' conjuntos borrosos en X e Y

Si conocemos R y conocemos A' podríamos conocer B' a través de la **regla de composición de inferencias**:

$$B' = A' \circ R$$

$$\mathbf{B'(y) = \sup_{x \in X} \min [A'(x), R(x,y)]} \quad \text{con } x \in X,\ y \in Y$$

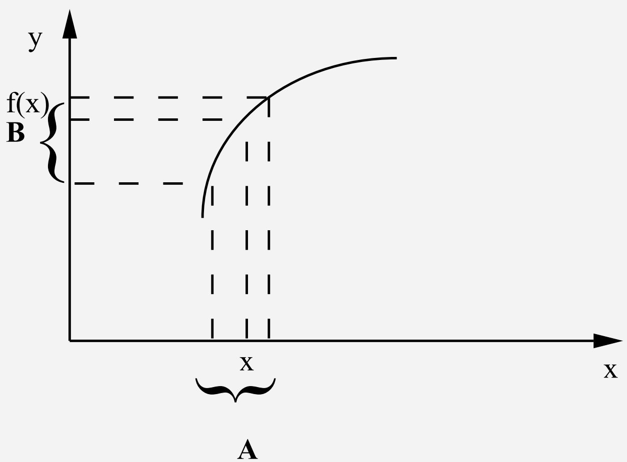
Si x es A entonces y es B (Relación R)

R(x,y) = I (A(x), B(y)) Función de implicación

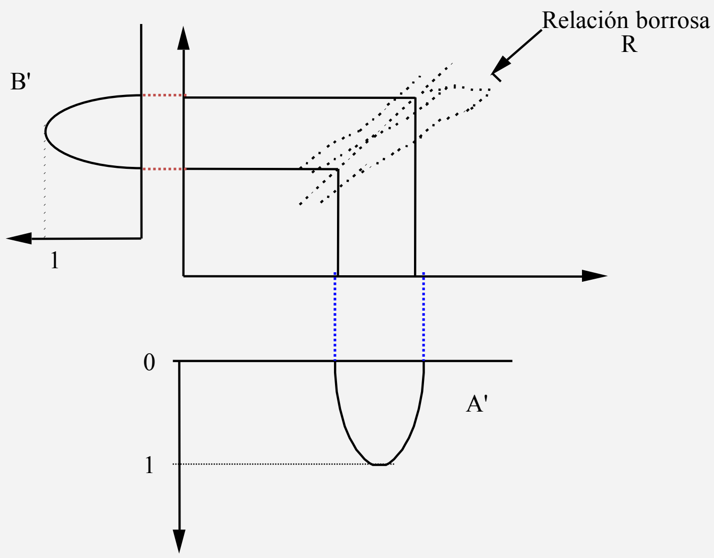
Razonamiento borroso

REGLA DE COMPOSICIÓN DE INFERENCIAS II

La relación R (Si x es A entonces y es B) es una función de implicación definida como: R(x,y) = I (A(x), B(y))



Una función relaciona una variable con otra



Razonamiento borroso

REGLA DE COMPOSICIÓN DE INFERENCIAS III

Modus ponens clásico

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Modus ponens generalizado

Regla: Si x es A entonces y es B
Hecho: x es A'
Conclusión: y es B'

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A' \end{array}}{B'}$$

Cuando A' = A y B' = B
Modus ponens clásico es un caso particular

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS I

Un implicación borrosa I es una función de la forma:

$$I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

donde para cualesquiera dos valores ciertos a y b de proposiciones borrosas p,q define **el valor cierto I(a,b) de la proposición condicional "si p entonces q”**

Es una extensión de la implicación clásica $p \rightarrow q$ del dominio restringido {0,1} al dominio completo [0,1]

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS II

En lógica clásica una implicación se puede expresar de distintas formas y todas son equivalentes entre sí.

Sus extensiones a lógica borrosa resultan no ser equivalentes y dan lugar a diferentes implicaciones borrosas.

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS III

Una forma de definir I en lógica clásica es:

$$I(a,b) = \bar{a} \vee b$$ **<u>1</u>**

Extendiendo a lógica borrosa $I(a,b) = \perp(c(a),b)$

$\perp$ disyunción (t-conorma) , c negación

Otra forma alternativa de definir la implicación es:

$$I(a,b) = \max\{x \in \{0,1\} | a \wedge x \leq b\}$$ **<u>2</u>**

En borrosa $I(a,b) = \sup\{x \in [0,1] | \mathrm{T}(a,x) \leq b\}$

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS IV

Otras forma de definir I usando la ley de absorción son:

$$I(a,b) = \bar{a} \vee b \Leftrightarrow \bar{a} \vee (a \wedge b) \quad \underline{\mathbf{3}} \qquad \Rightarrow \perp(c(a), \mathrm{T}(a,b))$$

$$I(a,b) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee b \quad \underline{\mathbf{4}} \Rightarrow \perp(\mathrm{T}(c(a),(c(b)),b)$$

En lógica borrosa hay distintas clases de implicaciones borrosas que al emplear diferentes t-normas y t-conormas dan lugar a diferentes implicaciones.

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS V

Familia S-implicaciones (*Strong*, asociadas con t-conormas)

Caso 1: I(a,b) = ⊥(c(a),b) (**usando neg. clásica**)

1. Si usamos $\perp_{max}(a,b) = max(a,b)$
   (Implicación de Kleene-Dienes) $I_b(a,b) = max(1-a,b)$
2. Si usamos $\perp_{prod}(a,b) = a+b-ab$
   (Reichenbach) $I_r(a,b) = 1-a+a*b$
3. Si usamos $\perp_{Lukasiewicz}(a,b) = min(a+b,1)$
   (Lukasiewicz) $I_a(a,b) = min(1-a+b,1)$

Se demuestra que $I_b \leq I_r \leq I_a$ (I_b es la más pequeña S-implicación posible)

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS VI

Familia R-implicaciones (Residuated, asociadas con t-normas)

Caso 2: $I(a,b)=\sup\{x\in[0,1] \mid T(a,x)\leq b\}$ (usando neg. clásica)

1. Si usamos $T_{min}(a,b)=min(a,b)$ (Implicación de Gödel)

$$I_g(a,b)=\sup\{x\in[0,1] \mid min(a,x)\leq b\}=\begin{cases}1\ cuando\ a\leq b\\ b\ cuando\ a>b\end{cases}$$

2. Si usamos $T_{prod}(a,b)=a*b$ (Implicación de Goguen)

$$I_\Delta(a,b)=\sup\{x\in[0,1] \mid (a*x)\leq b\}=\begin{cases}1\ cuando\ a\leq b\\ b/a\ cuando\ a>b\end{cases}$$

3. Si usamos $T_{Lukasiewicz}(a,b)=max(0, a+b-1)$

$$I_a(a,b)=\sup\{x \mid max(0,a+x-1)\leq b\}=min(1,1-a+b)$$

La implicación de Lukasiewicz es una S y una R implicación

Se demuestra que $I_g\leq I_\Delta\leq I_a$ (I_g es la más pequeña R posible)

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS VII

Familia QL (Quantum Logic)

Caso 3: I(a,b)= $\perp$(c(a), T(a,b)) (usando neg. clásica)

1. I_m(a,b)=max(1-a, min(a,b)) (Implicación de Early-Zadeh)

2. Con T_{prod}(a,b)=a*b y $\perp_{prod}$(a,b)=a+b-a*b

$$I_p(a,b) = 1 - a + ab - (1-a)ab = 1 - a + ab - ab + a^2 b = 1 - a + a^2 b$$

(Implicación de Klir y Yuan)

Razonamiento borroso

SELECCIÓN DE FUNCIONES DE IMPLICACIÓN I

Seleccionar una función de implicación apropiada para razonamiento aproximado bajo cada situación particular es un problema difícil.

Hay algunas directrices o sugerencias para algunos casos para aún esto es un problema sin resolver:

Razonamiento borroso

SELECCIÓN DE FUNCIONES DE IMPLICACIÓN II

Una proposición fuzzy condicional (una regla) es

p: si x es A entonces y es B

Se puede expresar para una relación R(x,y) = I(A(x), B(y))

para todo $x \in$ X y todo $y \in$ Y

El modus ponens generalizado: B' = A' o R coincidirá con el clásico cuando A' = A. Entonces: **B = A o R**

y

$$B(y) = \sup_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{T}\left[A(x), I(A(x), B(y))\right]$$

Razonamiento borroso

SELECCIÓN DE FUNCIONES DE IMPLICACIÓN III

Un criterio se selección podría ser el que una implicación borrosa adecuada para razonamiento aproximado basada en el MPG debería satisfacer la ecuación anterior para cualesquiera conjuntos borrosos A y B.

Otro criterio podría ser que se mantenga el ***modus tollens***:

$$c(A(x)) = \sup_{y \in Y} \mathrm{T}[c(B(y)), I(A(x), B(y))]$$

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS VIII - Ejemplo

Sean las variables X e Y con valores en los conjuntos:

$X=\{x_1,x_2,x_3\}$ e $Y=\{y_1,y_2\}$

Sean A y B conjuntos borrosos en X e Y definidos como:

$A = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3$ y $B = 1/y_1 + 0.4/y_2$

Sea R una relación R(x,y) = I (A(x), B (y)) definida por Lukasiewicz. En este caso:

$I(a,b) = \min(1, 1-a+b)$

De acuerdo a la definición de R, A y B, se tiene que

$R = 1/x_1y_1 + 0.9/x_1y_2 + 1/x_2y_1 + 0.4/x_2y_2 + 1/x_3y_1 + 0.8/x_3y_2$

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS IX - Ejemplo

Hecho x es A’ definido como $A' = 0.6/x_1 + 0.9/x_2 + 0.7/x_3$

$B'(y_1)=\sup_{x\in X} \min [A'(x), R(x, y_1)]=$
$\max[\min(0.6,1), \min(0.9,1), \min(0.7,1)]=0.9$

$B'(y_2)=\sup_{x\in X} \min [A'(x), R(x, y_2)]=$
$\max[\min(0.6,0.9), \min(0.9,0.4), \min(0.7,0.8)]=0.7$

$B' = 0.9/y_1 + 0.7/y_2$

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS X - Ejemplo *Modus tollens*

Regla	Si x es A entonces y es B
Hecho	y es B’
Conclusión	x es A'

$$A'(x)=\sup_{y\in Y} \min [B'(y), R(x, y)]$$

Modus tollens generalizado

Razonamiento borroso

IMPLICACIONES BORROSAS XI - Ejemplo *Modus tollens*

Mismo ejemplo de antes pero observando ahora:

$$B' = 0.9/y_1 + 0.7/y_2$$

$A'(x_1)=\sup_{y\in Y} \min [B'(y), R(x_1, y)]=$
$\max[\min(0.9,1), \min(0.7,0.9)]=0.9$

$A'(x_2)=\sup_{y\in Y} \min [B'(y), R(x_2, y)]=$
$\max[\min(0.9,1), \min(0.7,0.4)]=0.9$

$A'(x_3)=\sup_{y\in Y} \min [B'(y), R(x_3, y)]=$
$\max[\min(0.9,1), \min(0.7,0.8)]=0.9$

$$A' = 0.9/x_1+ 0.9/x_2+ 0.9/x_3$$

Proposiciones borrosas

1. Proposiciones no condicionadas y no cualificadas I

Modelo **p:v es F**

Ejemplo: p: la temperatura es alta

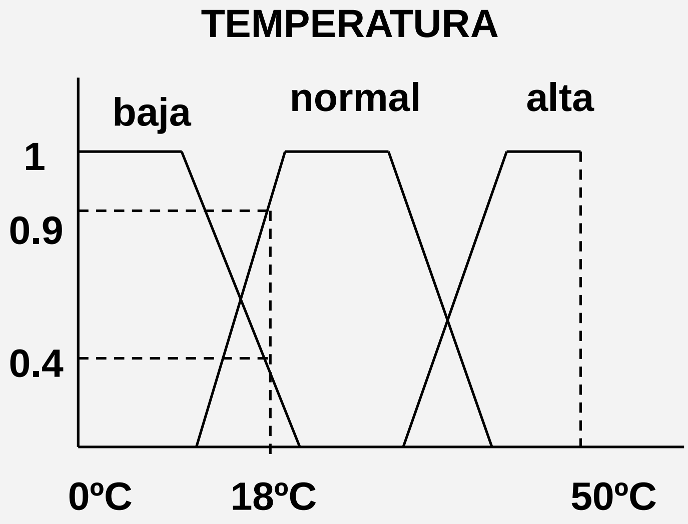
- v es una variable que toma valores en el universo de discurso V
- F es un conjunto borroso en V que representa un predicado borroso

Dado un valor de v, este valor pertenece a F con un grado de pertenencia F(v). Esto se interpreta como el grado de verdad (T(p)) de la proposición p

Proposiciones borrosas

1. Proposiciones no condicionadas y no cualificadas II

El grado de verdad de p dependerá del valor de la variable
y de la definición del conjunto borroso



El grado de verdad de que 18ºC es una temperatura baja es igual a 0.4

El grado de verdad de que 18ºC es una temperatura normal es igual a 0.9

Proposiciones borrosas

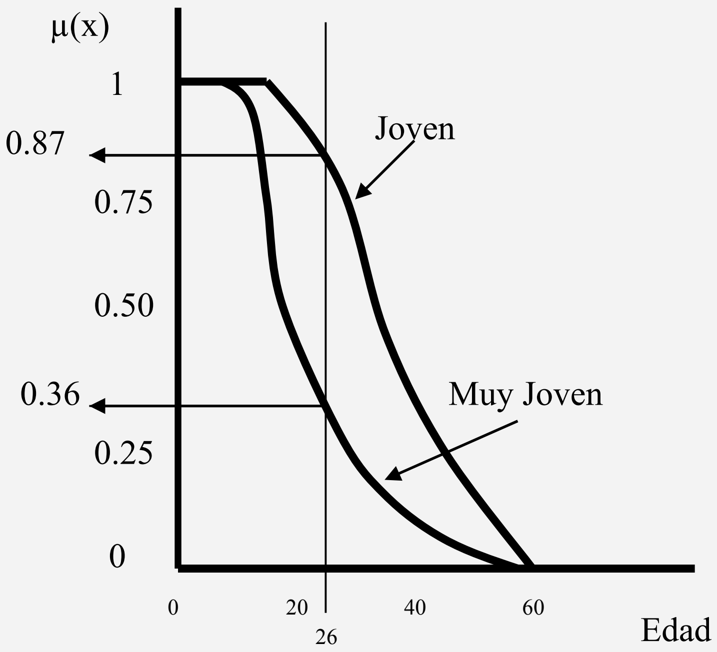
2. Proposiciones no condicionadas y cualificadas I

Modelo **p:v es F es S**

Ejemplo: p: María es joven

es muy cierto

- v y F mismo significado que caso 1
- S es un calificador de verdad borroso

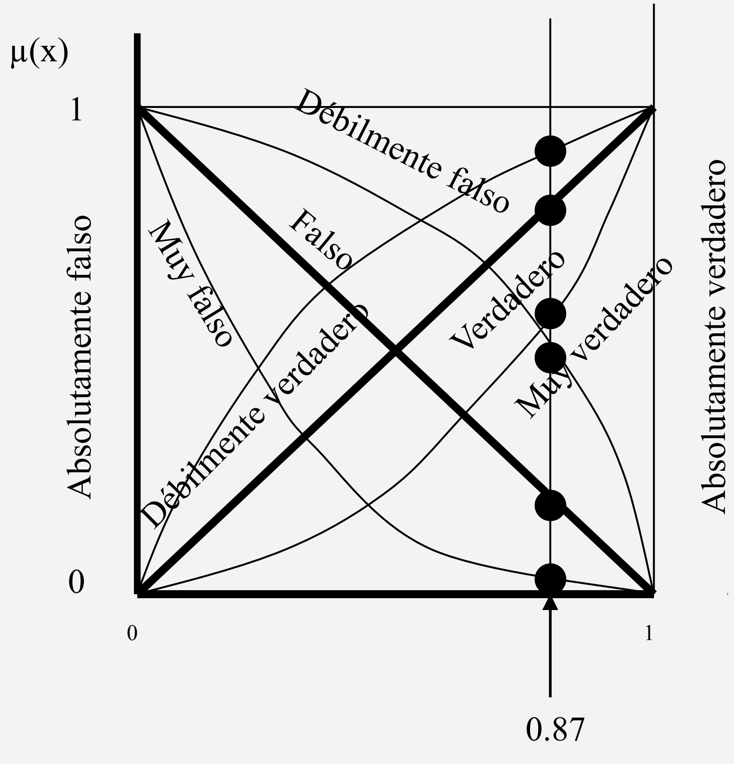


Si María tiene 26 años pertenecerá al conjunto borroso joven en grado 0.87 y en grado 0.36 al muy joven

Proposiciones borrosas

2. Proposiciones no condicionadas y cualificadas II

Los calificadores de verdad de las proposiciones se representan como:



El grado de verdad de la proposición del caso 2 será: T(p)= S(F(v))

Para joven, 0.87 su grado de verdad es T(p)=0.76

Éste depende no sólo del conjunto borroso, sino de la fuerza de la verdad

Proposiciones borrosas

3. Proposiciones condicionadas y no cualificadas I

Modelo: **p: Si x es A, entonces y es B**

Ejemplo: p: Si la temperatura es alta, entonces el día será soleado

- x e y son variables cuyos valores están en los dominios X e Y
- A y B son conjuntos borrosos en X e Y respectivamente

La proposición p expresa una relación en los dominios X e Y: $R(x,y)=I[A(x),B(y)]$

Proposiciones borrosas

3. Proposiciones condicionadas y no cualificadas II

Los valores de verdad de p serán los valores de esa relación. Ej. con $I(a,b)=\min(1,1-a+b)$

Sea: $A= 0.1/ x_1 +0.8/ x_2+1/x_3$ y $B= 0.5/ y_1 +1/ y_2$

$R=1/x_1y_1+1/x_1y_2+0.7/x_2y_1+1/x_2y_2+0.5/x_3y_1+1/x_3y_2$

$T(p)=1.0$ cuando $x=x_1$ e $y=y_1$

$T(p)=0.7$ cuando $x=x_2$ e $y=y_1$

Proposiciones borrosas

4. Proposiciones condicionadas y cualificadas

Modelo **p: Si x es A, entonces y es B es S**

Ejemplo: p: Si la temperatura es alta,
entonces el día será soleado es muy cierto

Grado de verdad se calcula con la combinación de 3 y 2

Aplicación de la

Lógica Borrosa al Control

(Controladores borrosos)

Control y lógica borrosa I

Control experto y controlador fuzzy como nuevos paradigmas de control I

Ha habido una intensiva investigación en teoría de control e ingeniería de control. Sus múltiples enfoques se apoyan en dos hipótesis fundamentales:

A) El sistema a ser controlado ha de ser conocido.
El conocimiento es recogido en un modelo cuyos parámetros han de ser identificados.

B) El objetivo de control ha de ser especificado en términos de concisas fórmulas matemáticas en las que están envueltas las variables del sistema.

Control y lógica borrosa II

Control experto y controlador fuzzy como nuevos paradigmas de control II

A medida que la complejidad del sistema a controlar aumenta, o la no fácil expresión matemática de su comportamiento, las hipótesis empiezan a fallar así como los métodos de identificación y ajuste del controlador existentes.

Nace un nuevo paradigma de control o control experto basado en el uso de cálculo simbólico como aplicación clásica de I.A. en el diseño de un algoritmo de control. Esta metodología permite el uso de lógica heurística para diseñar tanto reguladores simples como multivariables con sofisticadas leyes de control.

Control y lógica borrosa III

Control experto y controlador fuzzy como nuevos paradigmas de control III

La aportación de la lógica borrosa al control experto parece atractiva por su tratamiento de la vaguedad de conceptos. Mejor modelado del comportamiento.

Control y lógica borrosa IV

Aplicaciones de controladores borrosos I

Primeros controladores aparecieron en la literatura en 1974.

Dos periodos de trabajos:

- Experimentos en laboratorio y desarrollo de prototipos.
- Finales de los 80 explosión de aplicaciones comerciales.

Control y lógica borrosa V

Aplicaciones de controladores borrosos II

Algunos trabajos:

- Depuradoras de agua
- Control de tráfico
- Pilotaje de barcos
- Hornos de cemento
- Lavadora con control automático borroso (Matsushita Electrical)
- Sistemas de aire acondicionado (Mitsubishi Heavy Industry)
- Video cámaras de 8mm (Sanyo)
- Bosch Eco-fuzzy
- ABS/*cruise control* de Mazda y Nissan…

Control y lógica borrosa VI

Aplicaciones de controladores borrosos III

Algunas observaciones sobre las aplicaciones comerciales:

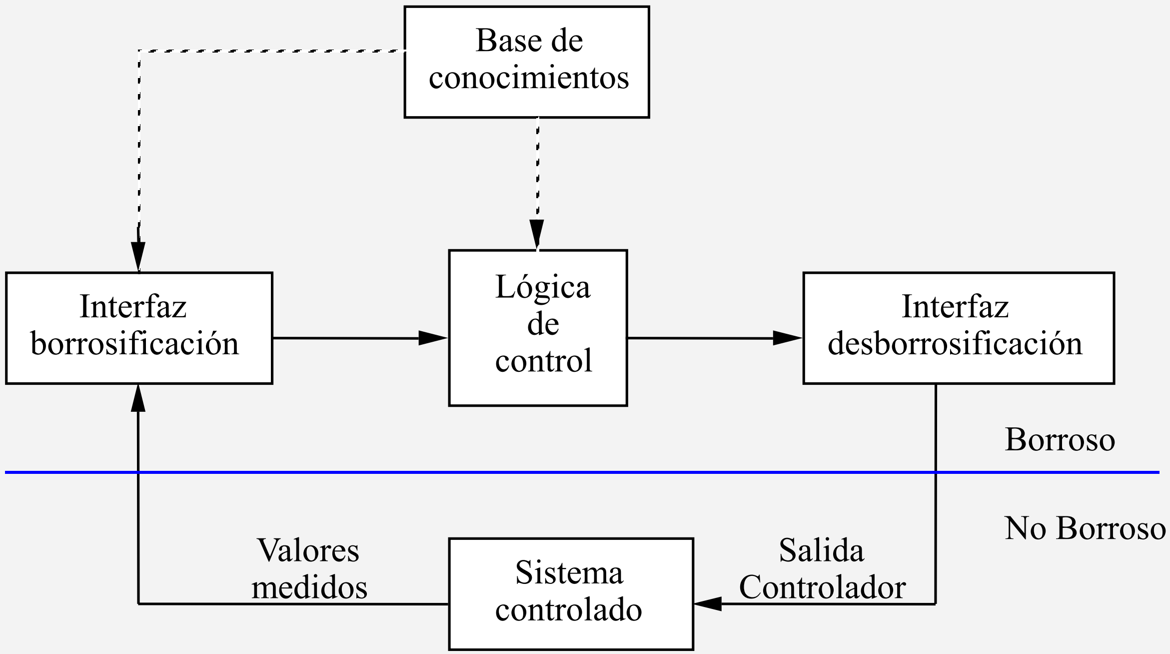
a. Los controladores borrosos son usados en un entorno donde se ha trabajado mucho con éxito se tiene por tanto, mucha experiencia y se dispone de una valiosa fuente de información acerca de las políticas de control utilizadas.

b. Los sensores añadidos a estos dispositivos <u>no son caros</u> debido a que no es necesaria una precisión importante.

c. El <u>tiempo de desarrollo es usualmente menor</u> que los basados en los principios clásicos de control.

Control y lógica borrosa VII

Arquitectura de un controlador borroso



Control y lógica borrosa VIII

Enfoque de Mamdani al control borroso I

Un experto ha de especificar su conocimiento en forma de reglas lingüísticas:

- Ha de definir las etiquetas lingüísticas que van a describir los estados de las variables.

- Para cada entrada (X_1, X_2,...,X_n) se ha de especificar la correspondiente etiqueta lingüística que define la salida Y

Cada una de las n variables de entrada y la de salida han de repartirse en conjuntos borrosos específicos con unos Significados.

Control y lógica borrosa IX

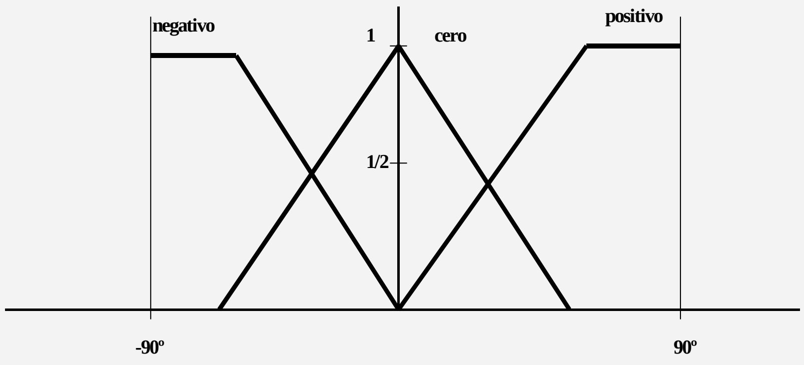
Enfoque de Mamdani al control borroso II

Así podemos definir P_1 conjuntos borrosos distintos en la variable X_1 por ejemplo:

$$\mu_1^{(1)},\ldots,\mu_{P1}^{(1)} \in F(X_1)$$

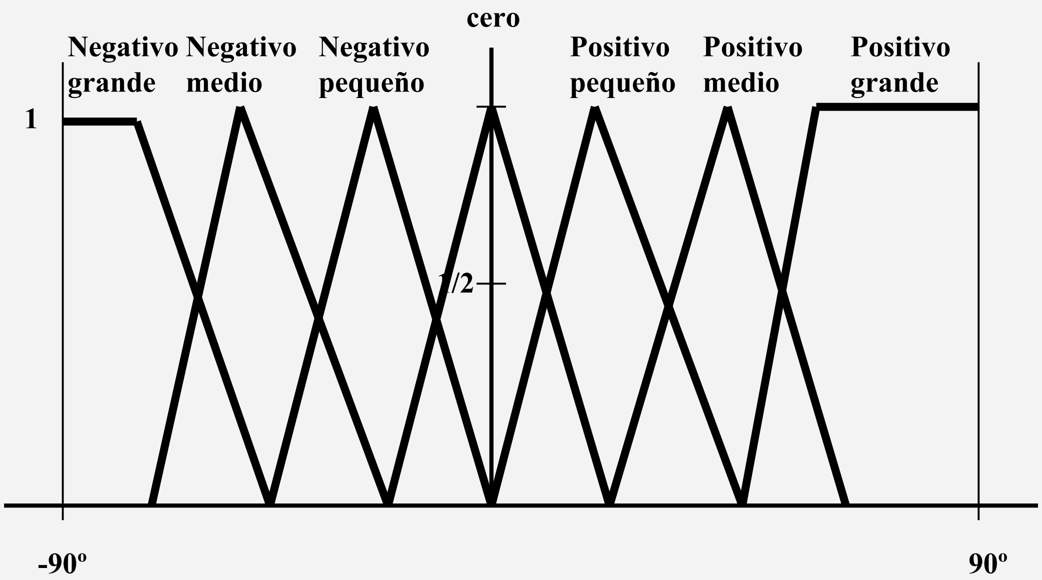
Lo mismo podemos hacer con el resto de las variables.

Cada conjunto borroso P_i ha de llevar asociado una etiqueta lingüística



Control y lógica borrosa X

Enfoque de Mamdani al control borroso III



Control y lógica borrosa XI

Enfoque de Mamdani al control borroso IV

Base de Reglas

Una regla tiene la forma clásica:

Si h_1 es $A^{(1)}$ y h_2 es $A^{(2)}$ .... y h_n es $A^{(n)}$
Entonces η es B

$A^{(1)},\ldots,A^{(n)}$ y B son etiquetas lingüísticas que corresponden a los conjuntos borrosos $\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(n)}$ y μ, de acuerdo a las particiones de los conjuntos X_1, x X_2 x ... x X_n e Y

Control y lógica borrosa XII

Enfoque de Mamdani al control borroso V

La base de reglas constará de K reglas de control

R_r ; Si H_1 es $A^{(1)}_{i_{1,r}}$ y....y H_n es $A^{(n)}_{i_{n,r}}$ Entonces y es B_{ir}, con r = 1,....,K

Esta definición de reglas tiene el sentido de definir una función a trozos más que una inferencia propiamente dicha.

Las K reglas corresponden a la definición de la función $\eta = \varphi (H_1, H_2,\ldots,H_n)$ donde

$$y \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} B_{i_1} & \text{si } H_1 \mathrel{\hat{=}} A^{(1)}_{i_{1,1}} \text{ y ... y } H_n \mathrel{\hat{=}} A^{(n)}_{i_{n,1}} \\ \text{-----------------------} & \\ B_{i_k} & \text{si } H_1 \mathrel{\hat{=}} A^{(1)}_{i_{1,k}} \text{ y ... y } H_n \mathrel{\hat{=}} A^{(n)}_{i_{n,k}} \end{cases}$$

Control y lógica borrosa XIII

Enfoque de Mamdani al control borroso VI

Ejemplo de base de reglas:

θ (columnas), $\dot{\theta}$ (filas)

	nb	nm	ns	az	ps	pm	pb
nb			ps	pb			
nm				pm			
ns	nm		ns	ps			
az	nb	nm	ns	az	ps	pm	pb
ps				ns	ps		pm
pm				nm			
pb				nb	ns		

(La tabla puede no estar completamente llena)

Control y lógica borrosa XIV

Enfoque de Mamdani al control borroso VII

Lógica de Control

Cada regla de la base de reglas se comprueba separadamente.
Se determina el grado de cumplimiento de cada hipótesis de la regla de acuerdo a la variable medida.

Si H_1 es $A^{(1)}$ y ...y H_n es $A^{(n)}$ Entonces η es B

Para cada regla se observa el grado de cumplimiento de las variables medidas H_1, H_2,....H_n a las etiquetas lingüísticas $A^{(1)}$...$A^{(n)}$ y después se hace la conjunción de grados de cumplimiento.

Control y lógica borrosa XV

Enfoque de Mamdani al control borroso VIII

Para cada regla R_r de las K de control se calcula:

$$\alpha_r = \min \{\mu^{(1)}_{i_{1,r}}(x_1), \ldots, \mu^{(n)}_{i_{n,r}}(x_n)\}$$

La salida de R_r es un conjunto borroso de valores de salida obtenidos cortando el conjunto borroso μ_{ir} asociado con la conclusión de la regla R_r en el nivel de cumplimiento α_r

Control y lógica borrosa XVI

Enfoque de Mamdani al control borroso IX

Ejemplo con una base de reglas tal como:

R_1: Si θ es positivo pequeño
y $\dot{\theta}$ es aproximadamente cero
Entonces F es positivo pequeño

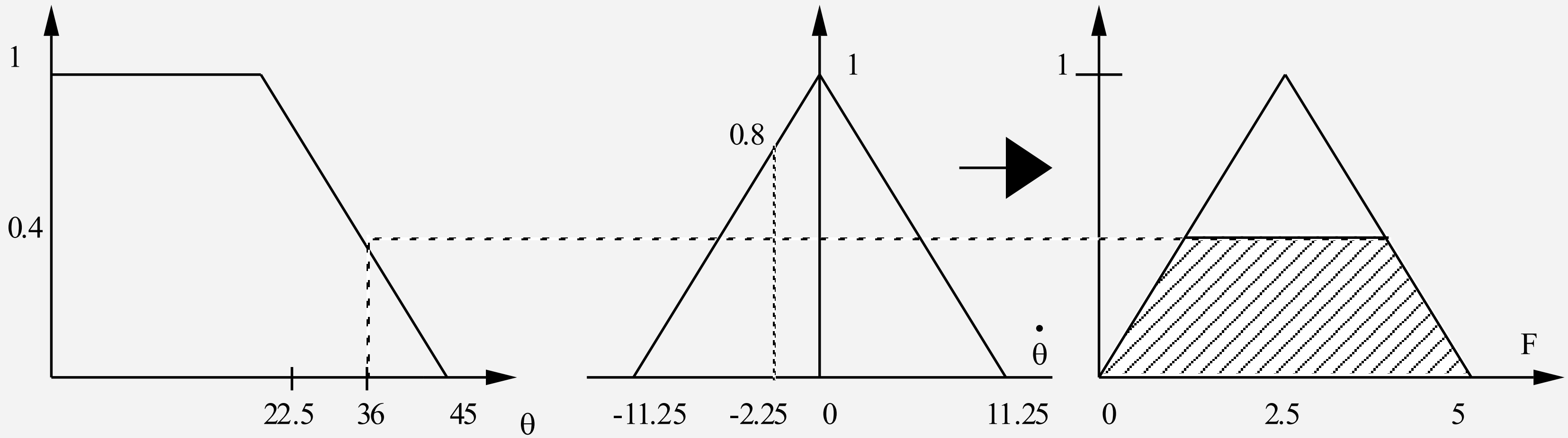
R2: Si θ es positivo medio
y $\dot{\theta}$ es aproximadamente cero
entonces F es positivo medio

Datos medidos $\theta = 36°$ y $\dot{\theta} = -2.25°s^{-1}$

Control y lógica borrosa XVII

Enfoque de Mamdani al control borroso X

<u>Evaluación de la regla R_1</u>: Si θ es positivo pequeño
y $\dot{\theta}$ es aproximadamente cero
Entonces F es positivo pequeño



Positivo pequeño

Aproximadamente cero

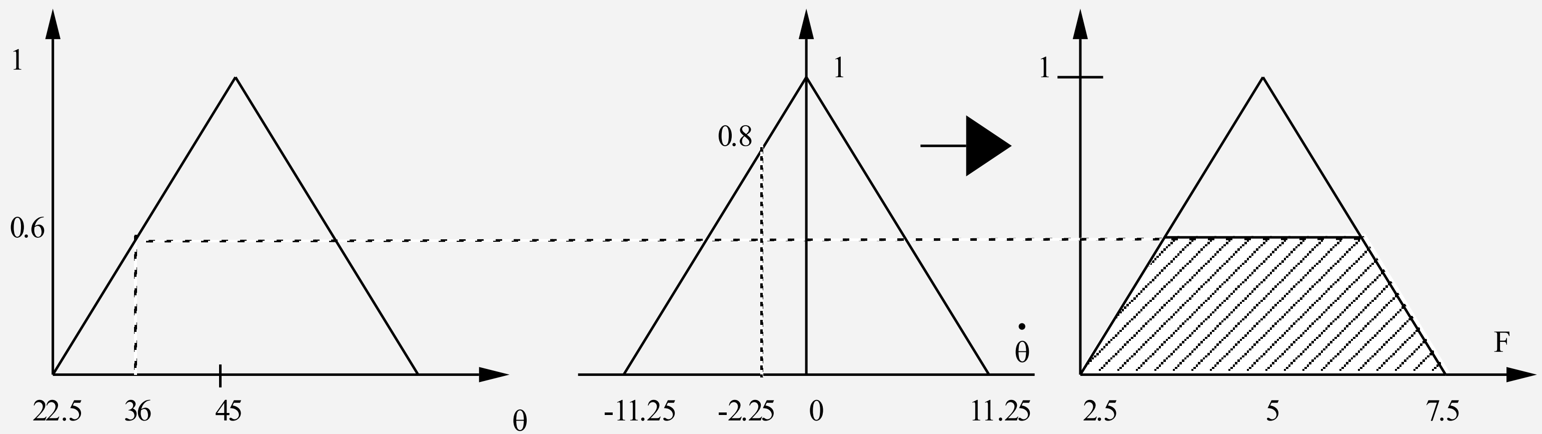
Positivo pequeño

Control y lógica borrosa XVIII

Enfoque de Mamdani al control borroso XI

<u>Evaluación de la regla R_2</u>:

Si θ es positivo medio
y $\dot{\theta}$ es aproximadamente cero
entonces F es positivo medio



Positivo medio

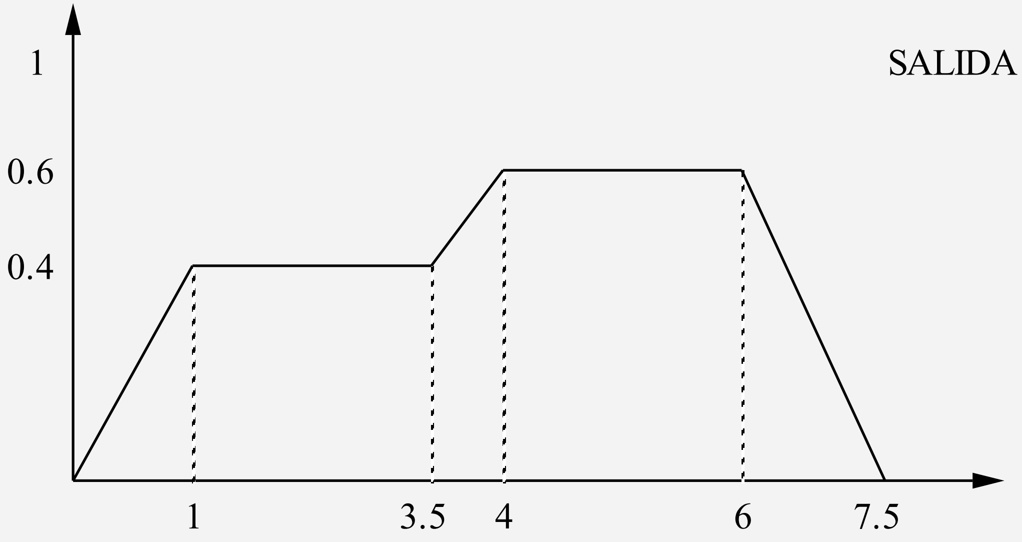
Aproximadamente cero

Positivo medio

Control y lógica borrosa XIX

Enfoque de Mamdani al control borroso XII

Tras la evaluación de cada regla, se han de combinar todos los conjuntos borrosos obtenidos de la salida de las reglas mediante la operación máximo (unión)



Control y lógica borrosa XX

Enfoque de Mamdani al control borroso XIII

Desborrosificación

La asociación de cada tupla de entradas medidas $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ con un conjunto borroso de salida para Y

NO ES UN VALOR CRISP

Es necesario un interface de "defuzificación“ o "desborrosificación”

Existen varias estrategias:

- Método del criterio del Máximo.
- Método de la Media del Máximo.
- Método del Centro de Gravedad.

Control y lógica borrosa XXI

Enfoque de Mamdani al control borroso XIV

Desborrosificación. Método del criterio del máximo

Consiste en elegir un valor arbitrario $y \in Y$ que en el conjunto borroso de salida alcance el máximo grado de pertenencia

En el ejemplo cualquier valor en [4,6] podría ser el valor crisp de salida

Ventaja: Aplicable a conjuntos borrosos arbitrarios y para cualquier dominio de control de Y

Desventaja: No especificación de qué valor de máximo grado de pertenencia ha de ser elegido. Si se escoge un valor aleatorio cada vez se obtendría un controlador no determinista que puede llevar a acciones de control discontinuas.

Control y lógica borrosa XXII

Enfoque de Mandani al control borroso XV

Desborrosificación. Método de la media del máximo

Si el conjunto $\mathrm{Max}\,(\mu^{\text{salida}}_{x_1},\ldots,\mu_{x_n})$ de la salida no es vacío, entonces el valor crisp de salida será el valor medio del conjunto máximo.

El método puede dar lugar a acciones de control discontinuas.

La salida salta de un valor a otro a intervalos de máximo grado de pertenencia.

En el ejemplo el valor de salida será 5 con este criterio.

Control y lógica borrosa XXIII

Enfoque de Mandani al control borroso XVI

Desborrosificación. Método del centro de gravedad

El valor crisp de salida para la acción de control es aquel que es el centro de gravedad del conjunto borroso de salida.

Ventaja: el controlador muestra un comportamiento suave de control (continuo). Tiene en cuenta las reglas considerando su grado de aplicabilidad.

Desventaja: difícil justificación desde el punto de vista semántico y necesita más tiempo de cálculo que otros métodos.

En el ejemplo el valor de salida con este método es 3.9

(0.4*1 + 0.4*3.5 +0.6*4 + 0.6*6)/(0.4+0.4+0.6+0.6)=3.9

Control y lógica borrosa XXIV

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso I

Misma especificación de las particiones borrosas de los dominios de las entradas que en el modelo de Mandani.

No se requiere una partición borrosa del dominio de salida.

Reglas de control: R_r : si h_1 es $A^{(1)}_{i_{1,r}}$ y ... y h_n es $A^{(n)}_{i_{n,r}}$

Entonces $\eta = f_r(h_1,\ldots,h_n)$ con r = 1,...,k

f_r es una función de X_1 x ... x X_n en Y que se supone generalmente lineal: $f_r(x_1,\ldots x_n) = a^{(r)}_1 x_1 + \ldots + a^{(r)}_n).x_n + a^{(r)}$

Control y lógica borrosa XXV

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso II

Obtención del grado de aplicabilidad α_r de la misma manera que el modelo de Mandani

El valor de control crisp de salida de obtiene como:

$$\eta = \frac{\sum_{r=1}^{k} \alpha_r f_r(x_1,\dots,x_n)}{\sum_{r=1}^{k} \alpha_r}$$

No es necesaria etapa de desborrosificación

Control y lógica borrosa XXVI

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso III

Ejemplo

Objetivo: Sortear una curva con un modelo de coche avanzando a velocidad constante.

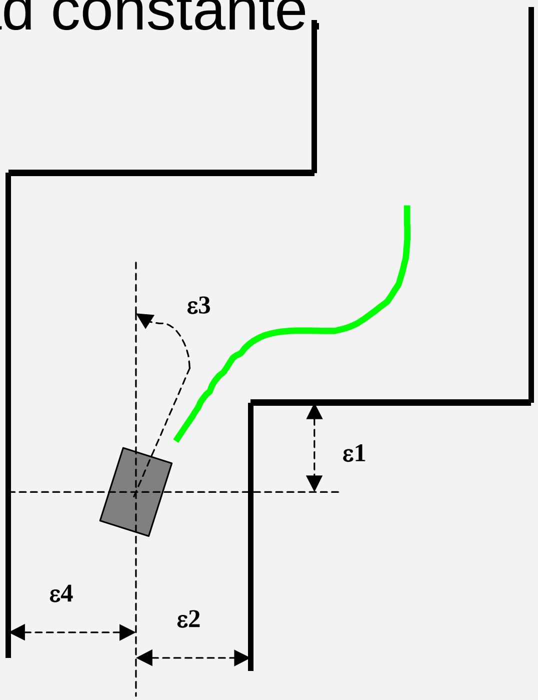
Entradas:

ε_1 distancia del coche a la esquina más cercana

ε_2 distancia del coche al borde interior

ε_3 dirección (ángulo) del coche

ε_4 distancia del coche al borde exterior.



Control y lógica borrosa XXVII

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso IV

Ejemplo:

La salida o variable de control η representa el movimiento de giro del volante.

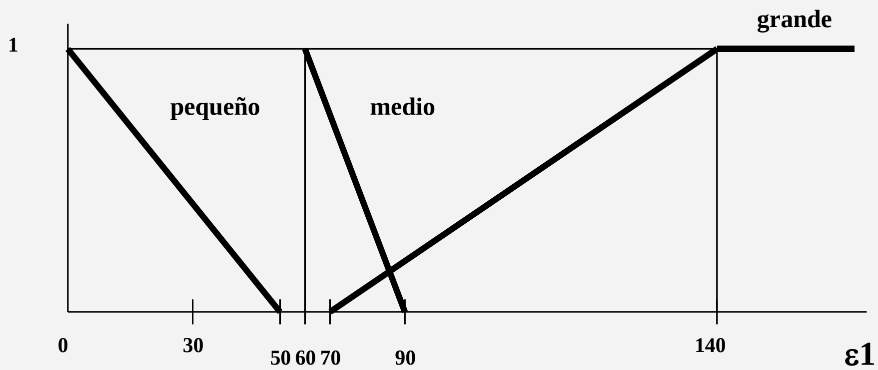
Dominios de las variables de entrada:

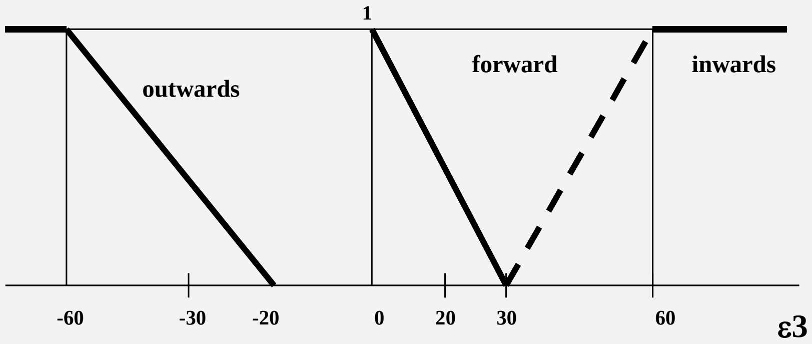
X_1 [0,150] (cm)
X_2 [0,150] (cm)
X_3 [-90,90] (°)
X_4 [0,150] (cm)

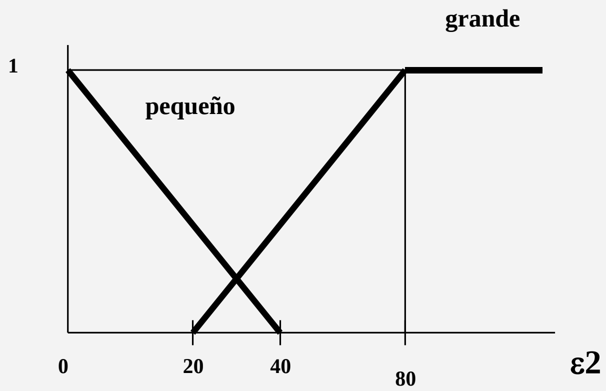
Control y lógica borrosa XXVIII

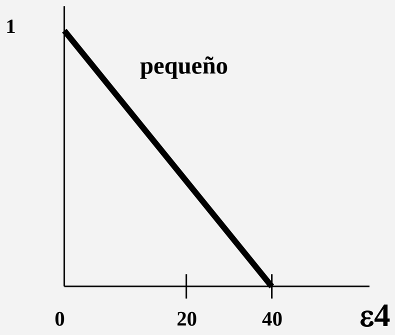
Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso V

Ejemplo. Definición de conjuntos borrosos









Control y lógica borrosa XXIX

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso VI

Ejemplo. Reglas de control

Rr : Si ε_1 es A y ε_2 es B y ε_3 es C y ε_4 es D

Entonces $\mu = P_0^{(A,B,C,D)} + P_1^{(A,B,C,D)}\,\varepsilon_1 + P_2^{(A,B,C,D)}\,\varepsilon_2 + P_3^{(A,B,C,D)}\,\varepsilon_3 + P_4^{(A,B,C,D)}\,\varepsilon_4$

A $\in$ {small, medium, big}
B $\in$ {small, big}
C $\in$ {outwards, forward, inwards}
D $\in$ {small}

$$P_o^{(A,B,C,D)}, \ldots , P_4^{(A,B,C,D)} \in \mathbb{R}$$

Control y lógica borrosa XXX

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso VII

Ejemplo. **Base de conocimientos**

REGLA	ε1	ε2	ε3	ε4	P0	P1	P2	P3	P4
R1	-	-	outwards	pequeño	3.000	0.000	0.000	-0.045	-0.004
R2	-	-	forward	pequeño	3.000	0.000	0.000	-0.030	-0.090
R3	pequeño	pequeño	outwards	-	3.000	-0.041	0.004	0.000	0.000
R4	pequeño	pequeño	forward	-	0.303	-0.026	0.061	-0.050	0.000
R5	pequeño	pequeño	inwards	-	0.000	-0.025	0.070	-0.075	0.000
R6	pequeño	grande	outwards	-	3.000	-0.066	0.000	-0.034	0.000
R7	pequeño	grande	forward	-	2.990	-0.017	0.000	-0.021	0.000
R8	pequeño	grande	inwards	-	1.500	0.025	0.000	-0.050	0.000
R9	medio	pequeño	outwards	-	3.000	-0.017	0.005	-0.036	0.000
R10	medio	pequeño	forward	-	0.053	-0.038	0.080	-0.034	0.000
R11	medio	pequeño	inwards	-	-1.220	-0.016	0.047	-0.018	0.000
R12	medio	grande	outwards	-	3.000	-0.027	0.000	-0.044	0.000
R13	medio	grande	forward	-	7.000	-0.049	0.000	-0.041	0.000
R14	medio	grande	inwards	-	4.000	-0.025	0.000	-0.100	0.000
R15	grande	pequeño	outwards	-	0.370	0.000	0.000	-0.007	0.000
R16	grande	pequeño	forward	-	-0.900	0.000	0.034	-0.030	0.000
R17	grande	pequeño	inwards	-	-1.500	0.000	0.005	-0.100	0.000
R18	grande	grande	outwards	-	1.000	0.000	0.000	-0.013	0.000
R19	grande	grande	forward	-	0.000	0.000	0.000	-0.006	0.000
R20	grande	grande	inwards	-	0.000	0.000	0.000	-0.010	0.000

Control y lógica borrosa XXXI

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso VIII

Ejemplo. Suponiendo como entradas: ε_1 = 10 cm, ε_2 = 30 cm,
ε_3 = 0°, ε_4 = 50 cm

Grado de pertenencia de **ε_1= 10** a los conjuntos borrosos del dominio X_1: small 0.8, medium 0, big 0

Grado de pertenencia de **ε_2= 30** a los conjuntos borrosos del dominio X_2: small 0.25, big 0.167

Grado de pertenencia de **ε_3= 0** a los conjuntos borrosos del dominio X_3: outwards 0, forward 1, inwards 0

Control y lógica borrosa XXXII

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso IX

Grado de pertenencia de ε_4**= 50** al conjunto borroso del dominio X_4: small =0

Sólo para las reglas R_4 y R_7 el grado de aplicabilidad es distinto de cero:

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \alpha_7 = \frac{1}{6}$$

Parte conclusión de las reglas R_4 y R_7:

μ_4 = 0.303-0.026x10+0.061x30-0.050x0+0.000x50 = 1.873

μ_7 = 2.990-0.017x10+0.000x30-0.021x0+0.000x50 = 2.820

Control y lógica borrosa XXXIII

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso X

Salida obtenida para el ejemplo:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4} \text{ x } 1.873 + \frac{1}{6} \text{ x } 2.820}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{3}{5} \quad 1.873 + \frac{2}{5} \quad 2.820 = 2.2518$$

Control y lógica borrosa XXXIII

Enfoque de Takagi y Sugeno al control borroso X

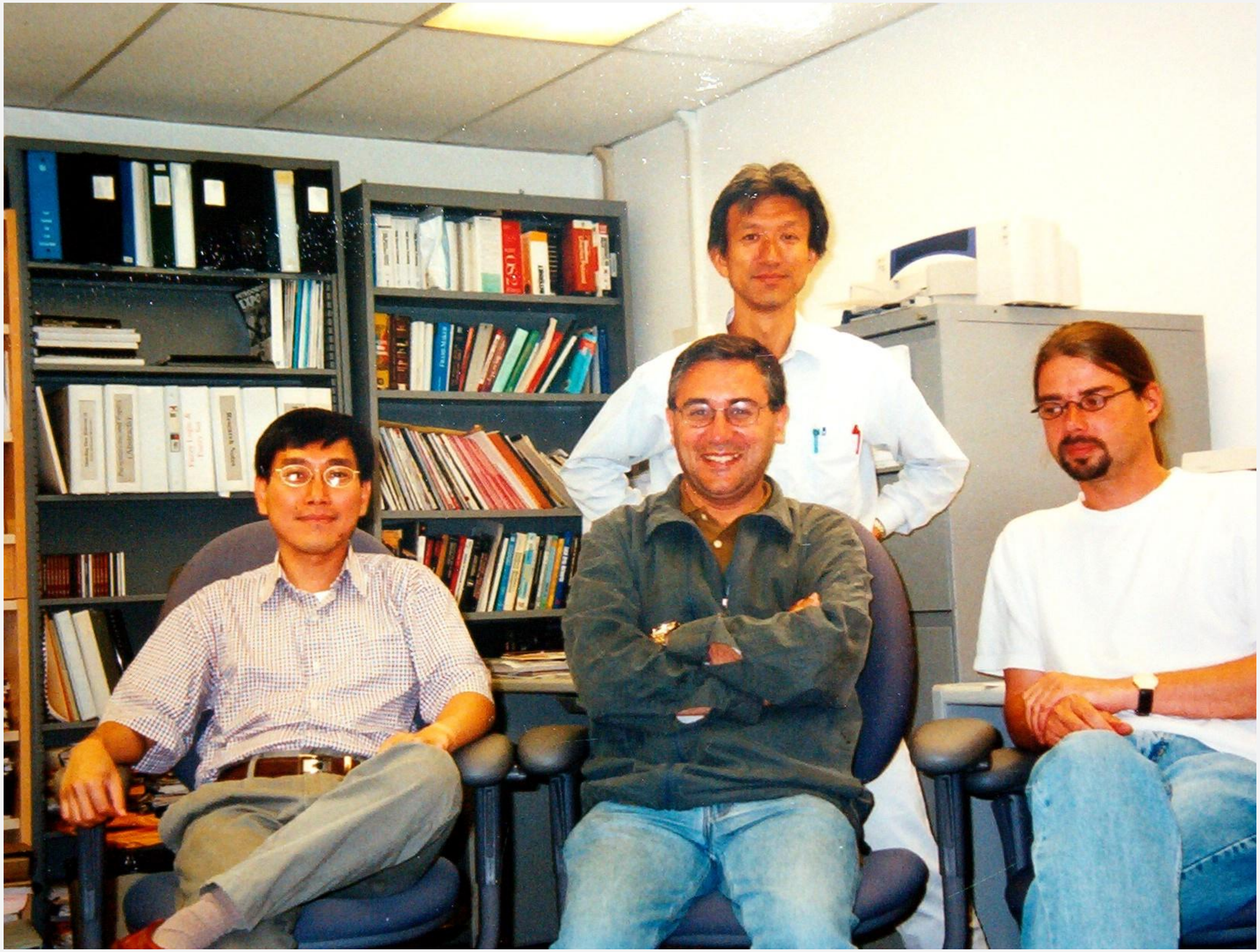
Salida obtenida para el ejemplo:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4} \text{ x } 1.873 + \frac{1}{6} \text{ x } 2.820}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{3}{5} \quad 1.873 + \frac{2}{5} \quad 2.820 = 2.2518$$

Control y lógica borrosa XXXIII

Control y lógica borrosa XXXIII



Control y lógica borrosa XXXIII

¡Hasta siempre Lotfi!

GRACIAS

viu | Universidad Internacional de Valencia