02MAIR - Matemáticas para la IA
Vectores y matrices

David Zorío Ventura

Universidad Internacional de Valencia
Máster en Inteligencia Artificial

Definición

Un vector v de dimensión n es una lista ordenada de n números reales:

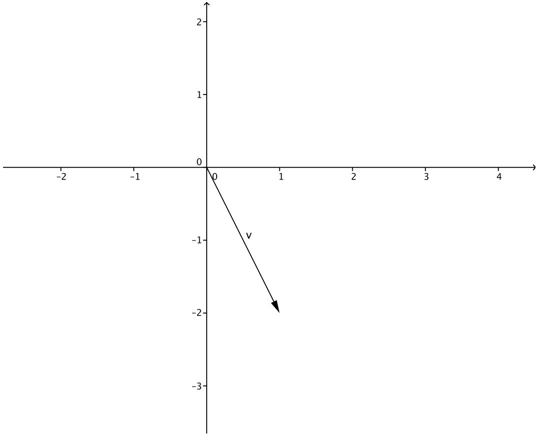
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

Se denota por $\mathbb{R}^n$ el conjunto formado por todos los vectores de dimensión n. Por tanto, podemos escribir $v \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplos

1. $v = (1, -\frac{2}{3}) \in \mathbb{R}^2$.
2. $w = (\sqrt{2}, -1.2, \pi) \in \mathbb{R}^3$.

Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden interpretar de forma gráfica mediante un sistema de n coordenadas. En caso de tener una dimensión de $n = 3$ o inferior, éstos se pueden dibujar.



Definición

Dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, *podemos definir su suma como*

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n).$$

Definición

Dado un valor real $\lambda \in \mathbb{R}$ *(escalar) y un vector* $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *podemos definir su producto como*

$$\lambda \cdot v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n).$$

Ejemplos

1. $(0,1)+(2,3)=(0+2,1+3)=(2,4)$.
2. $(-1,3,4)+(1,-2,-3.5)=(-1+1,3+(-2),4+(-3.5))=(0,1,0.5)$.
3. $4\cdot(3,-1,2)=(4\cdot 3,-1\cdot 4,2\cdot 4)=(12,-4,8)$.
4. $\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2},2,3\sqrt{5})=(-(\sqrt{2})^2,2\sqrt{2},3\sqrt{5}\sqrt{2})=(-2,2\sqrt{2},3\sqrt{10})$.

Ejercicio

Expresar la resta entre dos vectores v,w, definida como

$$v-w=(v_1-w_1,v_2-w_2,\dots,v_n-w_n)$$

únicamente en función de la suma y el producto por un escalar.

La longitud de los vectores se puede medir a través de **normas**. Algunas normas vectoriales importantes son:

- Norma euclídea:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

- Norma 1:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|.$$

- Norma del máximo:

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|.$$

El producto escalar entre dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Ejemplo

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$, *con* $v = (2, -1, 0)$ *y* $w = (-3, -2, 1)$. *Entonces*

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (2, -1, 0) \cdot (-3, -2, 1) \\ &= 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -6 + 2 + 0 = -4. \end{aligned}$$

Definición

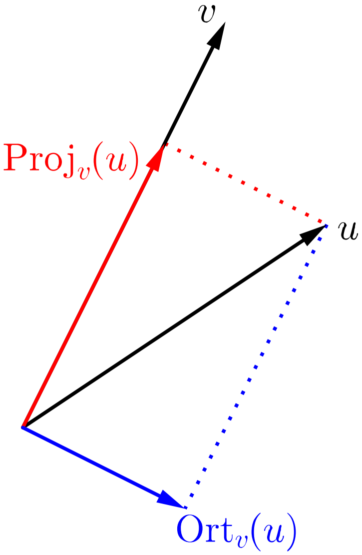
Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **proyección** *de u sobre v como*

$$\mathrm{Proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Definición

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **ortogonal** *de u sobre v como*

$$\mathrm{Ort}_v(u) = u - \mathrm{Proj}_v(u).$$



Definición

Diremos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ *son* **ortogonales** *si* $u \cdot v = 0$.

La definición de ortogonalidad entre dos vectores se corresponde con la noción geométrica de perpendicularidad.

Más concretamente,

$$u \cdot v = \|u\|_2 \|v\|_2 \cos(\widehat{uv}),$$

donde $\widehat{uv}$ es el ángulo que forman los vectores u y v.

Propiedades

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}$*:*

- $u + v = v + u$.
- $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
- $(a \cdot u) \cdot v = a \cdot (u \cdot v)$.
- $v \cdot v = \|v\|_2^2$.
- $u \cdot v = 0$ *si y sólo si* u *y* v *son ortogonales.*
- $v \cdot u = v \cdot \mathrm{Proj}_v(u)$.
- $\mathrm{Ort}_v(u) \cdot v = 0$

Ejemplo

Construimos un modelo de machine learning para predecir las temperaturas a partir de algunas variables de entrada (input). Una vez entrenado y listo, supongamos que obtenemos un conjunto de n predicciones con el modelo considerado, almacenadas en un vector:

$$\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Comparamos ahora el vector de predicciones, $\hat{v}$, con el vector de respuestas reales (observaciones), $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Una forma de hacerlo es utilizar alguna norma sobre la diferencia de los dos vectores:

$$E = \frac{1}{n}\|\hat{v} - v\|.$$

Objetivo: encontrar un algoritmo que minimice E.

Definición

Una **matriz** *de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto formado por $m \cdot n$ valores reales, $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, distribuidos en m filas y n columnas de la siguiente forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Escribimos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, siendo $\mathbb{R}^{m \times n}$ el conjunto formado por todas las matrices $m \times n$. Asimismo, diremos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es **cuadrada** *si $m = n$, es decir, si tiene el mismo número de filas y de columnas.*

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Entonces $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ *y* $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Podemos definir la **suma** y la **resta** $A \pm B$ como:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \pm b_{1,n} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \pm b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} \pm b_{m,1} & a_{m,2} \pm b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \pm b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-5 \\ -1+1 & 0+4 \\ -4-2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-(-5) \\ -1-1 & 0-4 \\ -4-(-2) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Asimismo, dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el **producto** $\lambda \cdot A$ como

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Por último, si $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ y $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$, entonces definimos el **producto matricial** $A\cdot B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

donde $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,s}b_{s,j}$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Teorema

El conjunto de las matrices **cuadradas** *es un anillo. Es decir,* $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ *es un anillo* $\forall n \in \mathbb{N}$, *siendo*

$$0_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

*los elementos neutros para la suma (***matriz nula***) y el producto (***matriz identidad***), respectivamente.*

Nota

En general, el producto de matrices **NO** *es conmutativo. Por ejemplo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que A es **invertible** *o* **regular** *si $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. La matriz B recibe el nombre de* **matriz inversa** *y se denota por A^{-1}.*

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz cuadrada de la forma*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Definimos el **determinante** *de* A *de forma recurrente como sigue:*

- *Si* $n = 1$, $\det(A) = a_{1,1}$.
- *Para* $n > 1$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(A_{1,j}),$$

donde $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ *es la matriz resultante de eliminar en* A *la fila* i *y la columna* j.

Ejemplos

1. *Sea* $A = (-1)$. *Entonces* $\det(A) = -1$.

2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces

$$\det(A) = 1 \cdot \det(0) - 2 \cdot \det(-1) = 2.$$

Ejemplos

3. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot [0 \cdot 3 - 3 \cdot (-4)] - 2 \cdot [4 \cdot 3 - 3 \cdot 2] - 1 \cdot [4 \cdot (-4) - 0 \cdot 2] \\ &= 1 \cdot 12 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot (-16) \\ &= 16. \end{aligned}$$

Pseudocódigo

Función $d = \text{determinante}(A)$.
Entrada: matriz $n \times n$ A.
Salida: determinante d.

- Si $n = 1$: salida $d = a_{1,1}$.
- Si no:
  - $d = 0$.
  - Desde $j = 1$ hasta $j = n$:
    - $B_j = A_{1,j}$.
    - $d = d + (-1)^{1+j} * a_{1,j} * \text{determinante}(B_j)$.
  - Salida: d.

Teorema

El determinante de una matriz A puede calcularse de cualquiera de las siguientes formas:

- *Desarrollo por la fila i, $1 \leq i \leq n$:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

- *Desarrollo por la columna j, $1 \leq j \leq n$:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

donde $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es la matriz resultante de eliminar en A la fila i y la columna j.

Ejemplo

Desarrollo por columnas del determinante de la matriz anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - (-4) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot [-2 \cdot 3 + 3 \cdot 4] + 0 - (-4) \cdot [-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1] \\
&= -2 \cdot 6 + 0 - (-4) \cdot 7 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

Teorema

$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *se cumple*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Teorema

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es regular si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Ejercicio

Comprueba que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es regular, entonces*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Pista: $\det(I_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Un **menor** *de A de tamaño $k \times k$, con $1 \leq k \leq \min(m, n)$, es una matriz en $A_{I,J} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, consistente en eliminar las filas correspondientes al conjunto de índices $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, $|I| = m - k$, y las columnas correspondientes al conjunto de índices $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|J| = n - k$.*

Ejemplo

Sea $I = \{2\}$, $J = \{3, 5\}$. Eliminamos las filas 2 y columnas 3 y 5 de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A_{I,J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición

El **rango** *de una matriz* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *es el valor de* k *más grande para el cual existe algún menor* M *de tamaño* $k \times k$ *tal que* $\det(M) \neq 0$. *En este caso, denotaremos*

$$\operatorname{rank}(A) = k.$$

En caso de que el rango sea el máximo posible, es decir, si $\operatorname{rank}(A) = \min(m, n)$, *se dice que* A *tiene* **rango máximo**.

Ejemplo

Calculemos el rango de la matriz 2×3 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$:

$$\det(A_{\emptyset,\{1\}}) = 0, \det(A_{\emptyset,\{2\}}) = 0, \det(A_{\emptyset,\{3\}}) = 0, \det(A_{\{1\},\{1,2\}}) \neq 0.$$

Por tanto, $\operatorname{rank}(A) = 1$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *A es regular.*
2. $\det(A) \neq 0$.
3. *El rango de A es máximo, es decir,* $\operatorname{rank}(A) = n$.

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La **traspuesta** *de la matriz A se define como la matriz $A' \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $A'(i,j) = A(j,i)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.*

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regular. Entonces la inversa de* A, A^{-1}, *viene dada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A),$$

donde $\text{adj}(A)$ *es la* **matriz adjunta** *de* A, *dada por* $\text{adj}(A) = C'$, *con* $C(i,j) = (-1)^{i+j}|A_{i,j}|$, $1 \leq i,j \leq n$, *con* $|A_{i,j}| = \det(A_{i,j})$.

Ejemplos

1. *Inversa de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $\det(A_{1,1}) = 1 \quad \det(A_{1,2}) = -1$, $\det(A_{2,1}) = 0 \quad \det(A_{2,2}) = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \text{adj}(A) = C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 2. \to A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

2. *Calculemos la inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A_{1,1}) = -4 \quad \det(A_{1,2}) = 0 \quad \det(A_{1,3}) = 0$$
$$\det(A_{2,1}) = 0 \quad \det(A_{2,2}) = -2 \quad \det(A_{2,3}) = 0$$
$$\det(A_{3,1}) = 0 \quad \det(A_{3,2}) = -1 \quad \det(A_{3,3}) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -0 & 0 \\ -0 & -2 & -0 \\ 0 & -(-1) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \operatorname{adj}(A) = C' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\det(A) = -4$.

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

puede escribirse como

$$AX = B,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ son tales que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = \quad 0 \\ 4x + 5y = -1 \end{array}\right\} \textit{ puede reescribirse como } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Definición

Bajo la notación anterior, definimos la **matriz ampliada** *de un sistema, $A|B$, como la concatenación por columnas de A con B; es decir, la matriz $m \times (n+1)$ dada por*

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo

La matriz ampliada asociada a $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = \quad 0 \\ 4x + 5y = -1 \end{array}\right\}$ *es* $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Teorema (Rouché-Frobenius)

Sea $AX = B$ *un sistema de ecuaciones lineal escrito matricialmente. Entonces se cumple:*

- *Si* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = k$, *entonces el sistema es* **compatible**, *pudiéndose dar los dos casos siguientes:*
  - *Si* $k = n$, *es decir, si el rango coincide con el número de incógnitas, entonces el sistema es* **compatible determinado**.
  - *Si* $k < n$, *entonces el sistema es* **compatible indeterminado**.
- *Si* $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A|B)$, *entonces el sistema es* **incompatible**.

En el caso de un sistema $n \times n$, éste es sistema compatible determinado si y sólo si $\mathrm{rank}(A) = n$ (es decir, si y sólo si A es una matriz regular, que a su vez equivale a la condición $\det(A) \neq 0$):

$$AX = B \leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \leftrightarrow I_n X = A^{-1}B \leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ejemplo

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x + 3y = 4 \\ 2x + 2y = 0 \end{array}\right\}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -8 \neq 0$$

$$\rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $m > n$, entonces $\exists I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $|I| = m - n$, con $\det(A_{I,\emptyset}) \neq 0$. Definimos $A_* = A_{I,\emptyset}$ y $B_* = B_{I,\emptyset}$ y se tiene:

$$AX = B \leftrightarrow A_*X = B_* \leftrightarrow A_*^{-1}A_*X = A_*^{-1}B_* \leftrightarrow X = A_*^{-1}B_*.$$

Ejemplo

Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 3x + y &= 6 \\ -2x + y &= -4 \end{aligned}\right\}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = rank(A|B) = 2 = n \to A_* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_*) = 7 \neq 0,$$

$$B_* = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \to X = A_*^{-1}B_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemas compatibles indeterminados:

- Si $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = m$, entonces existen $n - m$ incógnitas que pueden parametrizarse.

  Como $\text{rank}(A) = m$, $\exists J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, con $|J| = n - m$ tal que $\det(A_{\emptyset,J}) \neq 0$. En ese caso, pueden parametrizarse las $n - m$ incógnitas del vector X correspondientes a las filas con índices en J. Definimos por tanto $A_* = A_{\emptyset,J}$ y $X_* = X_{J,\emptyset}$.

  Una vez parametrizadas dichas incógnitas, las despejamos al vector de términos independientes obteniéndose el vector dependiente de parámetros B_*.

  Por tanto, el sistema equivalente resultante es $A_* X_* = B_*$, cuya solución depende de los parámetros considerados.

Ejemplo

Sea el sistema

$$\left.2x-y+z=2\right\}, A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A|B)=1=m \to A_*=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \to X_*=\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}, \begin{cases} y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

$$\to \left.2x-\lambda+\mu=2\right\} \to \left.2x=2+\lambda-\mu\right\} \to B_*=\begin{pmatrix} 2+\lambda-\mu \end{pmatrix} \to$$

$$X_*=A_*^{-1}B_*=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+\lambda-\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2+\lambda-\mu}{2} \end{pmatrix} \to X=\begin{pmatrix} \frac{2+\lambda-\mu}{2} \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

- Si $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = k < m$, entonces $\exists I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, $|I| = m - k$ y $\exists J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|J| = n - k$ tales que $\det(A_{I,J}) \neq 0$. Definimos $A_* = A_{I,J}$, $X_* = X_{J,\emptyset}$ y $B^* = B_{I,\emptyset}$.

  Parametrizamos las incógnitas de índices en J y llamamos B_* a la matriz de términos independientes tras despejar los parámetros en la ecuación $A_{I,\emptyset}X = B^*$. El sistema equivalente es $A_*X_* = B_*$.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 6 \\ 4x + 6y - 2z = 12 \\ x + 3z = -2 \end{array}\right\}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 2 < m \to$$

$$A_* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A_*) \neq 0, X_* = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \{ z = \lambda, B^* = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{rl} 2x+3y-\lambda= & 6 \\ x+3\lambda= & -2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl} 2x+3y= & 6+\lambda \\ x= & -2-3\lambda \end{array}\right\} \to B_* = \begin{pmatrix} 6+\lambda \\ -2-3\lambda \end{pmatrix}.$$

$$X_* = A_*^{-1}B_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6+\lambda \\ -2-3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3\lambda \\ \frac{2-5\lambda}{3} \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} -2-3\lambda \\ \frac{2-5\lambda}{3} \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Sistemas incompatibles:

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y= & 0 \\ -4x+2y= & 1 \end{array}\right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1 = \text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|B) = 2 \to \text{Sistema incompatible.}$$

Definición

Diremos que una matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **triangular inferior** *si $L(i,j) = 0$ para $j > i$. Por otra parte,diremos que una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es* **triangular superior** *si $L(i,j) = 0$ para $i > j$. En otras palabras, si L y U tienen el siguiente aspecto, respectivamente:*

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diremos que A admite una **factorización LU** *si $\exists L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular inferior y $\exists U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tales que*

$$A = LU.$$

Esta factorización de A en forma de producto de matrices triangulares es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados y compatibles determinados de forma eficiente, entre otras muchas aplicaciones.

Supongamos que queremos resolver el sistema $n \times n$ $Ax = b$, con $\det(A) \neq 0$.

1. En esas condiciones, sabemos que podemos expresar $A = LU$, con L triangular inferior y U triangular superior. El sistema por tanto puede expresarse como

$$LUX = B.$$

2. Definimos provisionalmente $V = UX$ y resolvemos el sistema resultante para V:

$$LV = B.$$

3. Una vez obtenida la solución V_0 cumpliendo $LV_0 = B$, X se obtiene resolviendo el sistema

$$UX = V_0,$$

fruto de la identidad definida en el paso anterior $(V = UX)$.

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz cuadrada.*

Diremos que A *es* **diagonalizable** *si* $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regular tal que*

$$P^{-1}AP = D,$$

siendo D *una* **matriz diagonal**, *es decir, de la forma*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La diagonalización de matrices tiene muchas aplicaciones. Entre una de ellas, se encuentra la exponenciación eficiente de matrices. Si $P^{-1}AP = D$, entonces multiplicando por P a la izquierda y P^{-1} a la derecha podemos obtener

$$A = PDP^{-1}.$$

Se puede comprobar que

$$A^k = PD^kP^{-1},$$

donde

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que A es una matriz simétrica si $A' = A$. En otras palabras, si $A(i,j) = A(j,i)$, $\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Ejemplo

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Teorema

Toda matriz simétrica es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Si $P^{-1}AP = D$, entonces multiplicando por P a la izquierda y P^{-1} a la derecha podemos obtener

$$A = PDP^{-1}.$$

Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} A^k &= AA\overbrace{\cdots}^{k}AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\overbrace{\cdots}^{k}(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}}\overbrace{\cdots}^{k}\cancel{P}D\cancel{P^{-1}P}DP^{-1} = PD\overbrace{\cdots}^{k}DP^{-1} = PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

donde

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Tomemos la matriz diagonalizable del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Si quieremos calcular, por ejemplo, A^7, basta con hacer

$$\begin{aligned} A^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 257 & -129 \\ 258 & -130 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz cuadrada. Un* **valor propio** *o* **autovalor** $\lambda \in \mathbb{R}$ *asociado a* A *es aquel que cumple que* $\exists v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $v \neq 0$, *llamado* **vector propio** *o* **autovector**, *tal que se verifica* $Av = \lambda v$.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = -3$ *son valores propios de* A *asociados a los vectores propios* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *resp.:*

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

λ *es un valor propio de* A *si y sólo si* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definición

La expresión $\det(A - \lambda I_n)$ *es un polinomio de grado n que recibe el nombre de* **polinomio característico**.

Análogamente, la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *recibe el nombre de* **ecuación característica**.

Definición

Sea λ *un valor propio asociado a una matriz A. Entonces se define:*

- **Dimensión algebraica:** *es la multiplicidad de* λ *como raíz de la ecuación polinómica asociada al polinomio característico* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- **Dimensión geométrica:** $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si todas las dimensiones algebraicas asociadas a cada valor propio coinciden con las correspondientes dimensiones geométricas y, además, la suma de todas las dimensiones asociadas a los diferentes valores propios es n.

Además, en este caso la matriz D está formada por todos los valores propios ubicados en la diagonal (cada uno de ellos repetidos tantas veces como su multiplicidad) y la matriz P por vectores propios linealmente independientes colocados por columnas, de forma que el vector propio de la columna i de P está asociado al valor propio de la entrada (i, i) de la matriz D.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Veamos si A es diagonalizable y, en ese caso, obtengamos $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regular, $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

- *Ecuación característica, valores propios y matriz diagonal D:*

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$:*

Ejemplo

- $\lambda_1 = -1$: $\text{rank}(A - (-1)I_2) = 1$. *Dimensión geométrica:* $2 - 1 = 1$.

$$(A - (-1)I_2)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2$: $\text{rank}(A - 2I_2) = 1$. *Dimensión geométrica:* $2 - 1 = 1$.

$$(A - 2I_2)v = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=1} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Matrices P y P^{-1}:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejemplos

1. *Sea*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Entonces A no es diagonalizable, ya que la ecuación característica no tiene raíces reales:
$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

2. *Sea*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Entonces A no es diagonalizable, ya que hay dimensiones algebraicas y geométricas que no coinciden.