Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Fisica I con Laboratorio

Professore:
Prof. Ignazio Bombaci

Autore:
Camilla Poscia

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Capitolo 1

Grandezze fisiche e loro misurazione

1.1 Grandezze e unità di misura

La fisica è una scienza quantitativa, basata su misure, quindi su esperimenti. Ciascuna misura presuppone la scelta di una unità di misura e di strumenti di misurazione.
Le unità di misura possono essere: *fondamentali* (permettono di esprimere l'unità di misura di ogni altra grandezza fisica) e *derivate*.
Le grandezze fondamentali che interessano a noi per questo corso sono quelle relative alla meccanica che, nel SI (Sistema Internazionale) sono: la **lunghezza** (metro - m), la **massa** (chilogrammo - kg) e il **tempo** (secondo - s).
Alcuni esempi di grandezze derivate sono la velocità, che è definita (come vedremo) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ con unità di misura $\frac{m}{s}$ e l'accelerazione, cioè $v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. L'unità di misura si ottiene a partire da quelle della velocità ($\frac{m}{s}$) e del tempo (s), che quindi fa ottenere: $\frac{m}{s \cdot s} = \frac{m}{s^2}$.
In fisica è utile conoscere i prefissi per i multipli e i sottomultipli di una grandezza, che sono riassunti in figura 1.1

1.1.1 Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si suddividono in scalari, vettoriali e tensoriali.

- **Grandezze scalari** : Fissata un'unità di misura, sono caratterizzate da un numero e si indicano con una lettera maiuscola o minuscola (ad es. temperatura T). Un esempio di grandezza scalare è la pressione P con unità di misura Pa (Pascal). Essendo la pressione il rapporto tra una forza e una superficie, si avrà che $1Pa = 1\frac{N}{m^2} = 1\frac{Kg}{ms^2}$

- **Grandezze vettoriali**: Hanno *intensità* cioè il modulo o norma (indicata con $||\vec{v}||$ e sempre ≥ 0), *direzione* e *verso*. Alcuni esempi sono il vettore spostamento $\vec{\Delta}$, velocità $\vec{v}$ e forza $\vec{F}$.
In fisica, le grandezze vettoriali vengono rappresentate graficamente come dei segmenti orientati chiamati vettori, che sono approfonditi al capitolo 2.

fattore di moltiplicazione	prefisso	simbolo	valore
10^{24}	**yotta**	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	**zetta**	Z	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	**exa**	E	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	**peta**	P	1 000 000 000 000 000
10^{12}	**tera**	T	1 000 000 000 000
10^{9}	**giga**	G	1 000 000 000
10^{6}	**mega**	M	1 000 000
10^{3}	**chilo**	k	1 000
10^{2}	**etto**	h	100
10^{1}	**deca**	da	10
10^{-1}	**deci**	d	0.1
10^{-2}	**centi**	c	0.01
10^{-3}	**milli**	m	0.001
10^{-6}	**micro**	µ	0.000 001
10^{-9}	**nano**	n	0.000 000 001
10^{-12}	**pico**	p	0.000 000 000 001
10^{-15}	**femto**	f	0.000 000 000 000 001
10^{-18}	**atto**	a	0.000 000 000 000 000 001
10^{-21}	**zepto**	z	0.000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	**yocto**	y	0.000 000 000 000 000 000 000 001

Figura 1.1: Multipli e sottomultipli nel SI

Capitolo 2

Vettori in fisica

Le grandezze vettoriali si indicano come dei segmenti orientati la cui lunghezza è proporzionale all'intensità e la freccetta ne indica il verso.
Nelle grandezze vettoriali sono definite le stesse operazioni che valgono per gli spazi vettoriali in matematica.

Spazi vettoriali Ricordiamo che uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme V che ha per elementi dei vettori e su cui sono definite due operazioni:

- somma: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$
- prodotto di un vettore per uno scalare: $\vec{a}k = \vec{b} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Queste due operazioni soddisfano le seguenti proprietà, che quindi valgono anche nel caso dei vettori:

- esistenza del vettore nullo (elemento neutro): $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- proprietà commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- proprietà associativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- esistenza del vettore opposto: $\vec{a} \implies -\vec{a} = -(\vec{a})$
- proprietà distributive: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad (k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$

2.1 Coordinate di un vettore

Su un sistema di assi cartesiani x, y, z, a ciascun asse è associato un **versore**, ovvero un vettore di modulo 1. All'asse x corrisponde il versore $\hat{\imath}$, ad y il versore $\hat{\jmath}$ ed infine all'asse z il versore $\hat{k}$ come è mostrato nella figura 2.1
Le componenti di un versore sono i *coseni direttori*, cioè i coseni degli angoli che il versore stesso forma con i tre assi cartesiani.

I versori $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ sono ortogonali tra loro. Questo implica:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

La funzione del versore è quella di dare *direzione* e *verso* ad un vettore. Per questo motivo, ogni generico vettore $\vec{a}$ è espresso come prodotto tra il modulo e il proprio versore: $\vec{a} = a\hat{a}$.

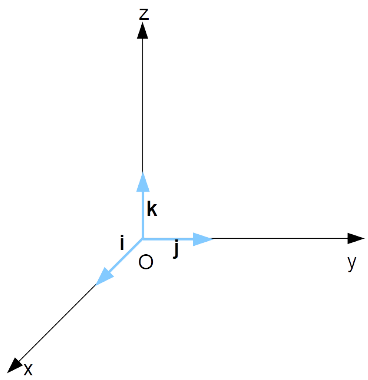

Figura 2.1: Versori sul piano cartesiano

Dalla formula inversa si ottiene che il versore associato ad un vettore $\vec{a}$ è pari al rapporto tra il vettore stesso e il proprio modulo $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$.

2.1.1 Coordinate cartesiane

Ciascun vettore, quando si trova in uno spazio $\mathbb{R}^3$, ha tre componenti una per ogni asse cartesiano x, y e z: $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$. Dato che, come abbiamo detto, a ciascun asse è associato un versore $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, allora deduciamo che ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare dei tre versori:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

2.1.2 Coordinate polari

Un vettore può essere espresso anche in coordinate polari. In questo caso le sue componenti sono due: il suo modulo e l'angolo che forma con l'asse delle ascisse (asse x).
Quindi, un generico vettore $\vec{a}$ in coordinate polari sarà espresso nella seguente forma:

$$\vec{a} = (a, \vartheta)$$

Il modulo del vettore $\vec{a}$ può essere calcolato mediante il classico teorema di Pitagora, perciò si avrà:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Nella formula, a_x e a_y sono le componenti del vettore $\vec{a}$ in coordinate cartesiane.
Ciascuna componente a_x e a_y può essere espressa in coordinate polari in questo modo:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\vartheta \\ a_y = a\sin\vartheta \end{cases}$$

L'angolo ϑ è l'angolo che il vettore forma con l'asse delle ascisse e si calcola attraverso identità trigonometriche note. Riprendendo 2.1.2 si ha che $\frac{a_y}{a_x} = \frac{a \cdot sin\vartheta}{a \cdot cos\vartheta} = tg\vartheta$. Dunque, per calcolare l'angolo ϑ:

$$\vartheta = arctg\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

Vettori linearmente indipendenti Presi n vettori $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ...\vec{u_n}$, si dicono *linearmente indipendenti* se la seguente equazione ammette come unica soluzione $c_1 = c2 = ... = c_n = 0$:

$$c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} + ... + c_n\vec{u_n} = 0$$

.

2.2 Operazioni tra vettori

2.2.1 Somma

Dati due vettori omogenei $\vec{a}$, $\vec{b}$, definiamo la loro somma:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$$

Somma in coordinate cartesiane Come abbiamo visto nella sezione 2.1.1 un vettore può essere espresso come combinazione lineare dei tre versori:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

Se voglio calcolare la somma in coordinate cartesiane devo esprimere entrambi i vettori in questo modo:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

e procedere con la somma:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$

Dal momento che stiamo parlando di vettori e, come detto nella sezione 2 la somma tra di essi soddisfa le proprietà commutativa, associativa e distributiva, possiamo utilizzarle per semplificare la nostra somma. Raccolgo i versori e ottengo:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

Somma geometrica In fisica è utile calcolare la somma utilizzando un metodo geometrico e quindi disegnando i vettori come segmenti orientati.
Spesso viene utilizzata la regola del parallelogramma che consiste nel prolungare i due vettori. Il punto di incontro dei due prolungamenti sarà l'estremo del vettore somma. Come si vede in figura 2.2 il vettore somma parte dal punto di applicazione O e arriva

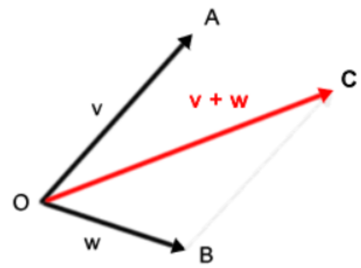

Figura 2.2:

2.3 Prodotti scalari e vettoriali

Prodotto scalare Il prodotto scalare tra due vettori dà come risultato una grandezza scalare che, come visto nella sezione 1.1.1 è un numero seguito da una unità di misura. Il prodotto scalare si definisce come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|cos(\theta)$$

in cui $|a|$ e $|b|$ sono rispettivamente i moduli dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e θ è l'angolo tra essi compreso, che si misura a partire dal primo fino al secondo vettore.
Ad esempio, se $a \perp b$, cioè i due vettori sono perpendicolari (l'angolo tra essi compreso è $\frac{\pi}{2}$) allora $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ perché $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Proprietà Il prodotto scalare soddisfa alcune proprietà:

- commutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- distributiva: $\vec{a} \cdot (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta \vec{a} \cdot \vec{b} + \gamma \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, cioè il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ è pari al quadrato del modulo del vettore.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dà come risultato un altro vettore $\vec{c}$. La notazione è la seguente:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

e si legge "a vettor b".
$\vec{c}$ è un vettore che ha per **modulo** $c = ab \sin \vartheta \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$.
La **direzione** è quella della retta perpendicolare al piano individuato dai due vettori e che passa per l'origine. Il **verso** è determinato attraverso la *regola della mano destra.*

Regola della mano destra Come già detto, la regola della mano destra permette di determinare il verso del prodotto vettoriale tra due vettori. Consiste nell'utilizzare tre dita della mano destra: pollice, indice e medio. Supponiamo di dover determinare il verso del seguente prodotto vettoriale: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Il pollice deve seguire il verso del primo vettore (in questo caso $\vec{a}$), l'indice il verso del secondo vettore ($\vec{b}$) e infine il medio, in base al verso degli altri due, indicherà il verso del loro prodotto vettoriale.

Capitolo 3

Cinematica del punto

3.1 Legge oraria e traiettoria

Il sistema più semplice che possiamo immaginare è il punto, che in questo contesto chiameremo *punto materiale*. Il punto materiale ha dimensioni trascurabili e una massa m.
Fissato un riferimento O nello spazio, diremo che la posizione del punto P è determinata da un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, normalmente indicato con $\vec{r}$. Le componenti del vettore $\vec{r}$ sono $(x - x_O, y - y_O, z - z_O)$, dove x_O, y_O e z_O indicano le coordinate del punto di riferimento fissato O.
Quando P si muove, il vettore $\vec{r}$ dipende dal tempo, perciò diventerà una funzione $\vec{r}(t)$, le cui componenti sono $x(t), y(t)$ e $z(t)$. Queste tre componenti formano la cosiddetta **legge oraria del moto**.
Mentre l'insieme delle posizioni che il punto materiale occupa nei diversi istanti è la **traiettoria**, cioè una curva $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ x = z(t) \end{cases}$.
La legge oraria specifica come viene percorsa questa traiettoria al passare del tempo.