Esercitazioni del corso di

Elementi di Probabilità e Statistica

Camilla Poscia

A.A. 2024/2025

Contents

1 Foglio 1

1.1 Esercizio 1

Tirando un dado non truccato due volte, si descriva uno spazio degli esiti e una misura di probabilità P per modellare il risultato di questo esperimento. Sia A l'evento "*il secondo lancio più grande del primo*". Calcolare la probabilità $P(A)$.

Soluzione Assumiamo che $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e consideriamo una probabilità uniforme su Ω. Lo spazio campionario Ω è dato dall'insieme di tutte le coppie ordinate di risultati ottenibili lanciando due dadi a sei facce:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots, 6\}\} = \{1, \ldots, 6\}^2.$$

Poiché ogni dado ha 6 facce, il numero totale di esiti possibili è:

$$\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36.$$

Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \Omega$, la probabilità di A è definita come:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{36}.$$

L'evento di interesse è:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 > \omega_1\}.$$

Questo rappresenta l'insieme delle coppie in cui il secondo lancio è maggiore del primo.

Per determinare $\#A$, osserviamo che ogni coppia (ω_1, ω_2) in cui $\omega_2 > \omega_1$ ha un corrispondente simmetrico (ω_2, ω_1) in cui $\omega_1 > \omega_2$, formando così due insiemi equipotenti: A e B (con B definito simmetricamente come l'evento $\omega_1 > \omega_2$).

Inoltre, esiste un insieme D di coppie (ω_1, ω_2) in cui i due valori coincidono, ovvero:

$$D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\},$$

che ha cardinalità $\#D = 6$.

Poiché lo spazio campionario è partizionato in tre sottoinsiemi disgiunti (A, B, e D) e per simmetria $\#A = \#B$, possiamo scrivere:

$$\#\Omega = 2 \cdot \#A + \#D.$$

Sostituendo i valori noti:

$$36 = 2 \cdot \#A + 6.$$

Risolvendo per $\#A$:

$$\#A = \frac{36 - 6}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Infine, calcoliamo la probabilità cercata:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

1.2 Esercizio 2

In un gioco il giocatore ed il banco lanciano entrambi per 10 volte una moneta equilibrata. Il giocatore vince solo se il numero di teste da lui ottenuto è maggiore strettamente del numero di teste ottenuto dal banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

Soluzione Sia $\Omega_2 = \{0, 1\}$ e sia lo spazio campionario:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{10}, \omega_{11}, \ldots, \omega_{20} \mid \omega_i \in \Omega_2\} = (\{0,1\}^2)^{10} = \{0,1\}^{20}$$

dove i primi 10 valori corrispondono al giocatore e i secondi 10 al banco. Da cui si ottiene che $\#\Omega = 2^{20}$ e di conseguenza ogni configurazione ha probabilità:

$$P(\omega) = \frac{1}{2^{20}}$$

Definiamo i seguenti eventi:

- $A_+ = \left\{\sum_{i=1}^{10} \omega_i > \sum_{j=11}^{20} \omega_j\right\}$ (il giocatore vince)
- $A_= = \left\{\sum_{i=1}^{10} \omega_i = \sum_{j=11}^{20} \omega_j\right\}$ (pareggio)
- $A_- = \Omega \setminus (A_+ \cup A_=) = \left\{\sum_{j=11}^{20} \omega_j > \sum_{i=1}^{10} \omega_i\right\}$ (il banco vince)

Poiché Ω può essere diviso nei tre eventi disgiunti A_+, $A_=$ e A_-, si ha:

$$P(A_+) + P(A_=) + P(A_-) = 1$$

Inoltre, dalla simmetria del problema, segue che $|A_+| = |A_-|$, quindi:

$$P(A_+) = P(A_-)$$

Quindi possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$2P(A_+) + P(A_=) = 1$$

da cui si ricava:

$$P(A_+) = \frac{1 - P(A_=)}{2}$$

Il valore di $P(A_=)$ si ottiene considerando i casi in cui i punteggi sono uguali:

$$P(A_=) = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2 \frac{1}{2^{20}}$$

Infine, sostituendo:

$$P(A_+) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2 \frac{1}{2^{20}}}{2}$$

1.3 Esercizio 3

Le n cifre di un numero sono scelte in maniera casuale. Calcolare la probabilità che (a) non appaia il 3. (b) non appaiono né il 4 né il 7. (c) appaia almeno un 5. Scrivere poi un'espressione per la probabilità che nel numero il 3 appaia prima del 4.

Soluzione Sia lo spazio campionario:

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_2\}$$

Ogni elemento dello spazio campionario ha probabilità uniforme:

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{10^n}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

(a) Definiamo l'evento in cui il numero 3 non compare nella sequenza, cioè l'insieme A_3 degli elementi di Ω che non contengono il 3:

$$P(\text{non appare il 3}) = \sum_{\omega \in A_3} P(\omega)$$

Poiché ogni cifra può assumere uno dei 9 valori diversi da 3, il numero di tali sequenze è 9^n, quindi:

$$P(A_3) = \frac{9^n}{10^n}$$

(b) Definiamo l'evento $A_{4,7}$ come l'insieme delle sequenze che non contengono né il 4 né il 7. In questo caso, ogni cifra ha 8 possibili valori, quindi il numero di sequenze valide è 8^n. La probabilità è:

$$P(A_{4,7}) = \frac{8^n}{10^n}$$

(c) Definiamo A_5 come l'evento in cui il 5 non appare. Questo evento è complementare all'evento in cui il 5 appare almeno una volta (A_5^c). Dunque:

$$P(A_5) = \frac{9^n}{10^n}$$

e quindi:

$$P(\text{il 5 appare almeno una volta}) = 1 - P(A_5) = 1 - \frac{9^n}{10^n}.$$

(d) Probabilità che il 3 appaia prima del 4
L'evento che il 3 appaia prima del 4 si può esprimere come:

$$P(\text{3 appare prima di 4}) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \text{il primo 3 è in posizione } j \right).$$

Poiché il primo 3 compare in posizione j, significa che nelle prime $j-1$ posizioni non ci sono né 3 né 4, mentre in posizione j c'è un 3. Le $n-j$ cifre successive sono arbitrarie. La probabilità di questa configurazione è:

$$P(\text{il primo 3 in posizione } j, \text{ nessun 3 o 4 prima di } j) = \left(\frac{8}{10}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{10}.$$

Sommando su tutte le possibili posizioni j:

$$P(\text{3 appare prima di 4}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{8}{10}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{10}.$$

1.4 Esercizio 4

Si estraggono due numeri a e b da una scatola contenente n palline numerate da 1 a n. Calcolare la probabilità che $|a-b|=1$ nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate: (a) senza reinserimento (b) con reinserimento.

Soluzione

(a) Siano $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, ..., n\}$, $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \omega_1 \neq \omega_2\}$. Quando si estrae senza reinserimento, si scelgono due numeri distinti da $\{1, 2, \dots, n\}$ senza ripetizioni. Il numero totale di coppie possibili è dato dal numero di combinazioni di n elementi presi 2 alla volta:

$$\text{Coppie totali} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ora contiamo i casi favorevoli in cui $|a-b|=1$. Questo si verifica se a e b sono due numeri consecutivi, ovvero $(1,2), (2,3), (3,4), \dots, (n-1, n)$. Il numero di tali coppie è esattamente $n-1$.

Dunque, la probabilità richiesta è:

$$P(|a-b|=1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi totali}} = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}.$$

(b) Quando si estrae con reinserimento, ogni numero è scelto indipendentemente tra n possibili valori, quindi il numero totale di coppie ordinate (a, b) è:

$$\text{Coppie totali} = n \times n = n^2.$$

Ora contiamo i casi favorevoli: per ogni numero a, affinché $|a-b|=1$, b deve essere $a+1$ o $a-1$. I numeri validi per b sono quindi al più 2 per ogni a, tranne nei casi $a=1$ (dove $b=2$) e $a=n$ (dove $b=n-1$), in cui c'è solo una scelta possibile.

Il numero totale di coppie favorevoli è dunque:

$$2(n-2)+2 = 2n-2.$$

Pertanto, la probabilità cercata è:

$$P(|a-b|=1) = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

1.5 Esercizio 5

Due amici si trovano in coda ad uno sportello della loro banca, insieme ad altre n persone. Assumendo di non avere informazioni sul momento del loro arrivo (cioè assumendo che ogni configurazione delle persone in coda è ugualmente probabile), calcolare la probabilità che siano separati (a) da esattamente k persone (b) da almeno 3 persone.

Soluzione Numeriamo le posizioni nella fila e rappresentiamo le possibili posizioni dei due amici come coppie di numeri distinti:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \neq \omega_2,\, \omega_i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Dunque, il numero totale di configurazioni possibili è:

$$|\Omega| = n(n-1).$$

Sia A_k l'evento in cui i due amici sono separati esattamente da k persone. Analogamente al caso precedente, si può dimostrare che:

$$P(A_k) = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Ora consideriamo l'evento B in cui i due amici siano separati da almeno 3 persone:

$$B = \bigcup_{k=3}^{n-2} A_k.$$

Poiché gli eventi A_k sono disgiunti, si potrebbe calcolare $P(B)$ sommando direttamente le probabilità di A_k per $k \geq 3$. Tuttavia, è più semplice calcolare la probabilità complementare $P(B^c)$, dove B^c è l'evento in cui i due amici sono separati da meno di 3 persone ($k = 0, 1, 2$).

$$P(B^c) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2).$$

Dal risultato precedente:

$$P(A_k) = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

Quindi:

$$P(B^c) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

$$P(B^c) = \frac{2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3)}{n(n-1)} = \frac{2(3n-6)}{n(n-1)} = \frac{6n-12}{n(n-1)}.$$

Infine, la probabilità richiesta è:

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{6n-12}{n(n-1)} = \frac{n(n-1) - (6n-12)}{n(n-1)}.$$

$$P(B) = \frac{n^2 - n - 6n + 12}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)}.$$

1.6 Esercizio 6

Si scrivono su 11 foglietti di carta le lettere della parola ABRACADABRA, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti. Qual è la probabilità che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola?

Soluzione Definiamo l'insieme delle lettere presenti nella parola "ABRACADABRA":

$$S = \{\text{lettere in "ABRACADABRA"}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, R_1, R_2, C_1, D_1\},$$

quindi si hanno in totale 11 lettere.

Lo spazio campionario è dato dall'insieme delle permutazioni di queste lettere:

$$\Omega = \{\text{permutazioni degli oggetti in } S\}, \quad \text{con } \#\Omega = 11!.$$

Definiamo ora l'evento F come l'insieme delle sequenze di 11 caratteri che formano esattamente la parola "ABRACADABRA":

$$F = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{11}) \in \Omega \mid \omega_k = k\text{-esima lettera di "ABRACADABRA"}, \forall k \in \{1, \ldots, 11\}\}.$$

Questo significa che una sequenza $(\omega_1, ..., \omega_{11})$ appartiene a F solo se ogni carattere ω_k della sequenza coincide con la corrispondente lettera nella parola "ABRACADABRA".

Il numero di permutazioni valide è dato da:

$$\#F = 5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! = 480.$$

La probabilità di ottenere esattamente la parola "ABRACADABRA" è quindi:

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{480}{11!}.$$

1.7 Esercizio 7

Quattro giocatori sono ad un tavolo da poker. Determinare la probabilità che, una volta distribuite le carte (ognuno dei quattro giocatori riceve 5 carte), (a) il primo giocatore riceva esattamente un asso (b) ogni giocatore abbia esattamente un asso.

Soluzione
Definiamo l'evento A_1 come:

$$A_1 = \{\text{il primo giocatore riceve esattamente un asso}\}.$$

Per calcolare $P(A_1)$, consideriamo che il primo giocatore deve ricevere:

- Un asso (ci sono 4 assi disponibili).
- Quattro carte non asso (ci sono 48 carte rimanenti nel mazzo).

Il numero di modi in cui il primo giocatore può ricevere 5 carte con esattamente un asso è:

$$\binom{4}{1} \times \binom{48}{4} = 4 \times \frac{48!}{4!(48-4)!}.$$

Il numero totale di modi in cui il primo giocatore può ricevere 5 carte qualsiasi è:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!}.$$

Pertanto, la probabilità cercata è:

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{4 \times \frac{48!}{4!44!}}{\frac{52!}{5!47!}}.$$

Semplificando:

$$P(A_1) = \frac{4 \times 48! \times 47!}{4! \times 44! \times 52!} \times \frac{5! \times 47!}{47!}.$$

$$P(A_1) = \frac{4 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}.$$

Ora consideriamo la probabilità che ogni giocatore riceva esattamente un asso. Definiamo l'evento:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4.$$

Dato che ci sono esattamente 4 assi, ciascun giocatore deve riceverne uno. Inoltre, le restanti 16 carte (52 - 4 assi) devono essere distribuite tra i giocatori, con 4 carte a testa.

Il numero di modi in cui possiamo assegnare un asso a ciascun giocatore è 4! (permutazioni degli assi).

Il numero di modi in cui possiamo distribuire le restanti 16 carte tra i giocatori è:

$$\frac{48!}{(12!4!4!4!4!)}.$$

Il numero totale di modi per distribuire tutte le 20 carte ai giocatori è:

$$\frac{52!}{(32!5!5!5!5!)}.$$

Pertanto, la probabilità cercata è:

$$P(B) = \frac{4! \times \frac{48!}{(4!)^4 32!}}{\frac{52!}{(5!)^4 32!}}.$$

Semplificando:

$$P(B) = \frac{4! \times 48! \times (5!)^4}{(4!)^4 \times 52!}.$$

$$P(B) = \frac{5! \times 4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49}.$$

1.8 Esercizio 8

Siano A, B, C, D quattro eventi tali che $P(A) = 1/2$, $P(A \cap B \cap D) = 1/4$ e $P(A \cap B \cap C \cap D) = 1/9$. (a) Dimostrare che le ipotesi fatte non sono in contraddizione con gli assiomi di Kolmogorov. (b) Calcolare, se possibile, $P(A \cap [(B \cap D)^c \cup C])$.

Soluzione

(a) Gli assiomi di Kolmogorov sono i seguenti:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$ per ogni evento E.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Se $E_1, E_2, \ldots$ sono eventi mutuamente esclusivi, allora $P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$.

Controlliamo la coerenza delle probabilità date:

- $P(A) = \frac{1}{2}$ è un valore valido perché compreso tra 0 e 1.
- $P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4} \leq P(A) = \frac{1}{2}$, il che è coerente con la proprietà di monotonicità della probabilità.
- $P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{1}{9} \leq P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4}$, quindi non si verifica alcuna contraddizione.

Poiché nessuna delle probabilità viola gli assiomi di Kolmogorov, i dati sono coerenti.

(b) Utilizziamo la proprietà della probabilità dell'unione:

$$P(A \cap [(B \cap D)^c \cup C]) = P(A \cap (B \cap D)^c) + P(A \cap C) - P(A \cap (B \cap D)^c \cap C).$$

Notiamo che:

$$(B \cap D)^c = \Omega \setminus (B \cap D),$$

quindi possiamo scrivere:

$$P(A \cap (B \cap D)^c) = P(A) - P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ora, possiamo calcolare $P(A \cap C)$ utilizzando la relazione con $P(A \cap B \cap C \cap D)$:

$$P(A \cap C) \geq P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{1}{9}.$$

Senza ulteriori informazioni su come C interagisce con gli altri eventi, non possiamo determinare esattamente $P(A \cap C)$, ma possiamo dare una stima inferiore.

Infine, per calcolare $P(A \cap (B \cap D)^c \cap C)$, notiamo che:

$$P(A \cap (B \cap D)^c \cap C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C \cap D).$$

Se assumiamo che $P(A \cap C) = \frac{1}{3}$ (supposizione necessaria per proseguire), allora:

$$P(A \cap (B \cap D)^c \cap C) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Ora possiamo concludere:

$$P(A \cap [(B \cap D)^c \cup C]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{9}{36} + \frac{12}{36} - \frac{8}{36} = \frac{13}{36}.$$

1.9 Esercizio 9

(Paradosso dei compleanni). Consideriamo una classe di n persone e a ognuna di esse associamo un numero da 1 a 365 (per semplicità non si considerano gli anni bisestili) che corrisponde al numero di giorni tra il primo gennaio ed il giorno del rispettivo compleanno. Qual è la probabilità che almeno due persone abbiano il compleanno lo stesso giorno? (Dare una formula per il risultato, e tempo permettendo valutarla con l'aiuto di un computer per $n \in \{2, ..., 100\}$).

Soluzione

1.10 Esercizio 10

Il problema di Monty Hall è un famoso problema di matematica basato su un quiz televisivo condotto da Monty Hall. Tu (il concorrente) hai davanti tre porte chiuse. C'è un premio (10^4 EUR) dietro una porta, e una capra dietro ognuna delle altre due. Ti viene chiesto di scegliere una porta tra le tre, ma non puoi ancora vedere cosa c'è dietro. Monty, che sa cosa c'è dietro ogni porta, apre una delle altre due porte per rivelare che c'è dietro una capra. Quindi ti offre una possibilità per cambiare la tua scelta. E' una buona idea cambiare (assumendo di avere già tante capre a casa, quindi di volere il premio)? Questa domanda genera spesso molta confusione (provate con amici/famiglia!). Un'allettante risposta intuitiva potrebbe essere: dopo che Monty ti ha mostrato una porta senza premio, è ugualmente probabile che il premio si trovi dietro una delle altre due porte. Quindi, cambiare non fa differenza. E' corretto? Per fare chiarezza, usiamo il modello più semplice possibile: assumiamo che tu abbia deciso se cambiare o no prima dell'inizio del gioco. (a) Lascia che il risultato di l'esperimento sia la porta dietro la quale si nasconde il premio. Trova lo spazio di probabilità che descrive l'esperimento (la tua decisione di cambiare o meno non fa parte del modello). Ora, usiamo il modello per calcolare la probabilità di vincita separatamente per i due scenari (quello dove cambi e quello dove non cambi). Per ragioni di simmetria, possiamo sistemare l'etichettatura delle porte in modo che la tua scelta iniziale sia la porta numero 1. (b) Supponi che la tua strategia sia di non cambiare. Qual è la probabilità di vincere il premio? 1 (c) Supponi che la tua strategia sia di cambiare dopo che Monty mostra una porta senza premio. Qual è la probabilità di vincere il premio?

Soluzione

1.11 Esercizio 11

Piastrelliamo una scacchiera di dimensione $2 \times (2n+1)$ con $2n+1$ piastrelle di taglia 2×1 in modo che ogni casella sia coperta da esattamente una piastrella. Le piastrelle possono essere disposte orizzontalmente o verticalmente. Assumiamo di scegliere una configurazione a caso in modo che ogni configurazione distinta abbia la stessa probabilità di essere scelta. La figura qui sotto mostra due configurazioni possibili per $2n+1 = 9$.
(a) Calcolare la probabilità della configurazione con tutte le piastrelle disposte verticalmente. (b) Trovare la probabilità che ci sia una piastrella verticale al centro della scacchiera (nella posizione $n+1$).

Soluzione

1.12 Esercizio 12

Un sacchetto contiene 90 gettoni numerati da 1 a 90. Tre giocatori, detti A, B, C , estraggono (senza reinserimento) 2 gettoni a testa, ed ognuno dei giocatori sceglie il gettone con il valore più grande tra i suoi gettoni. Si stila poi una classifica, in base al valore dei gettoni dal più grande al più piccolo, dei tre giocatori. (a) Dire quante sono le estrazioni possibili (ovvero gli insiemi di coppie di gettoni in possesso dei tre giocatori prima della selezione del massimo). Dire se le estrazioni sono equiprobabili, giustificando la propria risposta. (b) Dire quanti sono i risultati possibili (ovvero le terne di gettoni dei tre giocatori dopo la selezione del massimo). Dire se i risultati sono equiprobabili, giustificando la propria risposta. (c) Calcolare le probabilità che A si classifichi primo e che A si classifichi secondo. (d) Calcolare le probabilità del quesito precedente nel caso in cui inizialmente A estragga 2 gettoni, B ne estragga 3 e C ne estragga 4.

Soluzione

2 Foglio 2

2.1 Esercizio 1

Un giocatore lancia due dadi. Se il risultato del lancio del primo dado è 3, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia almeno 6? Rispondere a questa domanda facendo uso esplicito della definizione di probabilità condizionata.

Soluzione Siano $A = \{\text{primo lancio} = 3\}$ e $B = \{\text{somma almeno } 6\}$. Dalla definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Poiché il primo dado ha già mostrato un 3, ci sono 6 possibili risultati per il secondo dado:

$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$$

Quindi, la probabilità dell'evento A è:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

L'evento B si verifica quando la somma è almeno 6, cioè:

$$(3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$$

Questi sono 4 casi su 36, quindi:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Ora calcoliamo la probabilità condizionata:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{9} \cdot 6 = \frac{2}{3}$$

2.2 Esercizio 2

Due contenitori contengono rispettivamente il primo, 5 palline rosse e 7 nere, il secondo 8 palline rosse e 3 nere. Si sceglie a caso un contenitore e da esso si estraggono due palline, che risultano essere entrambe rosse. Qual è la probabilità che le palline siano state estratte dal primo contenitore?

Soluzione

$$P(\omega_0 = A \mid \{\omega_1, \omega_2\} = (r,r)) = \frac{P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r,r) \mid \omega_0 = A) P(\omega_0 = A)}{P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r,r))}$$

Per la regola della probabilità totale:

$$P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r)) = P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r) \mid \omega_0 = A)P(\omega_0 = A) + P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r) \mid \omega_0 = B)P(\omega_0 = B)$$

Se scegliamo il contenitore A:

$$P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r) \mid \omega_0 = A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{20}{132}$$

Se scegliamo il contenitore B:

$$P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r) \mid \omega_0 = B) = \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{8 \cdot 7}{11 \cdot 10} = \frac{56}{110}$$

Poiché i contenitori sono scelti con probabilità $\frac{1}{2}$:

$$P(\{\omega_1, \omega_2\} = (r, r)) = \left(\frac{20}{132} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{56}{110} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{20}{264} + \frac{56}{220}$$

Portiamo tutto allo stesso denominatore:

$$= \frac{20 \times 5}{1320} + \frac{56 \times 6}{1320} = \frac{100}{1320} + \frac{336}{1320} = \frac{436}{1320}$$

$$P(\omega_0 = A \mid \{\omega_1, \omega_2\} = (r, r)) = \frac{\frac{20}{264} \times \frac{1}{2}}{\frac{436}{1320}}$$

$$= \frac{20}{528} \times \frac{1320}{436} = \frac{20 \times 1320}{528 \times 436} = \frac{1}{1 + \frac{14}{5} \cdot \frac{6}{5}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{84}{25}} = \frac{1}{1 + 3.36} = \frac{1}{4.36} \approx 0.229$$

$$P(\omega_0 = A \mid \{\omega_1, \omega_2\} = (r, r)) \approx 0.229$$

2.3 Esercizio 3

Due dadi vengono tirati. Consideriamo i tre seguenti eventi: A = il primo dado dà un numero dispari, B = il secondo dado dà un numero pari, C = la somma dei due risultati è pari. (a) Dire se i tre eventi A, B, C sono indipendenti. (b) Dire se sono a due a due indipendenti.

Soluzione

2.4 Esercizio 4

Sappiamo che il 4% della popolazione èaffetto da una certa malattia. Abbiamo a disposizione un test con le seguenti caratteristiche: se la persona è malata, il test è positivo con probabilità pari a 0.95, se la persona è sana, il test è positivo con probabilità pari a 0.15. (a) Qual è la probabilità che una persona sia malata se è risultata positiva al test? (b) Qual è la probabilità che una persona sia sana se è risultata negativa al test?

Soluzione

2.5 Esercizio 5

Una coppia ha due figli. (a) Se almeno uno dei due è maschio, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi? (b) Si incontra per per caso uno dei due figli della coppia e si osserva che è maschio. Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

Soluzione

2.6 Esercizio 6

Siano A, B, C tre eventi. Consideriamo le due affermazioni:
H_1 : "A, B sono indipendenti" e
H_2 : "A, B sono indipendenti condizionatamente a C" (ovvero $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C)$).
(a) Vale l'implicazione $H_1 \Rightarrow H_2$?
(b) Vale l'implicazione $H_2 \Rightarrow H_1$?
(c) Sotto quali ipotesi su C vale $H_1 \iff H_2$?

Soluzione

2.7 Esercizio 7

Mostrare che, se A, B e C sono eventi indipendenti, allora $A \cap B$ e C sono eventi indipendenti. Mostrare che il viceversa non vale. Mostrare lo stesso per $A \cup B$ e C.

Soluzione

2.8 Esercizio 8

Un mago dice di possedere una moneta magica che alterna perfettamente tra lanci risultanti in testa e croce (se la volta precedente ha dato testa, la prossima volta darà croce e viceversa con probabilità 1). Uno scettico, prima di vedere l'esperimento, pensa che ci sia solo l'1% di probabilità che la moneta abbia questa proprietà, e chiede al mago di convincerlo del contrario. Quanti lanci alternati dovranno essere osservati dallo scettico perché (secondo lui) la probabilità che la moneta abbia la proprietà professata dal mago sia maggiore del 99%?

Soluzione

2.9 Esercizio 9

Ci sono n contenitori, numerati da 1 a n. Il contenitore k-esimo contiene k palline rosse e $n-k$ palline nere. Si sceglie a caso un contenitore e da questo si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa? Si eseguono due estrazioni, ognuna con la medesima modalità usata in precedenza. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano rosse, se dopo la prima estrazione la pallina estratta viene rimessa nel contenitore da cui era stata estratta? Qual è la probabilità se invece la pallina non viene rimessa?

Soluzione

2.10 Esercizio 10

(Monty Hall 2.0) Risolvere il problema 10 del foglio di esercizi 1 usando la formula di Bayes: Assumiamo che tu abbia scelto la porta 1 e che Monty abbia aperto la porta 3 rivelando una capra (i numeri delle porte scelta e aperta sono scelti senza perdita di generalità). Calcolare la probabilità

$$P(\text{premio è dietro porta 1} \mid \text{porta 3 è aperta e contiene capra})$$

assumendo che: (a) Monty sappia dietro che porta c'è il premio. Se il premio è dietro la porta 1 sceglie a caso che porta aprire, altrimenti apre l'unica porta non scelta e che contiene la capra. (b) Monty abbia dimenticato che porta contiene il premio (quindi apre una porta a caso).

Soluzione

2.11 Esercizio 11

Sia $s \in (1, \infty)$. La funzione zeta di Riemann è definita come segue

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Vogliamo dimostrare che

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_i (1 - p_i^{-s})}$$

dove $p_1 = 2,\ p_2 = 3\ p_3 = 5, ...$ sono i numeri primi (in ordine).
(a) Si consideri lo spazio di probabilità $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ dove

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

per ogni $A \in 2^{\mathbb{N}}$. Dimostrare che $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, P)$ è uno spazio di probabilità.
(b) Sia p un numero primo, e $N_p := \{n \in \mathbb{N} \mid n$ è diviso da $p\}$. Calcolare $P(N_p)$
(c) Dimostrare che gli eventi $\{N_{p_i}\}_{i \geq 1}$ sono mutualmente indipendenti.
(d) Calcolare $P(\cap_{i \geq 1} N_{p_i}^c)$ e dedurre il risultato desiderato.

Soluzione

2.12 Esercizio 12

Ci sono n candidati per un posto di lavoro. Si ammetta che i candidati possano essere ordinati dal migliore al peggiore. L'esaminatrice incontra sequenzialmente n candidati, uno dopo l'altro, in ordine casuale. L'esaminatrice deve scegliere se accettare o rifiutare ogni candidato alla fine del colloquio corrispondente, senza possibilità di tornare indietro e cambiare la propria decisione. La strategia utilizzata (chiamata strategia k) è la seguente: si intervistano e rifiutano automaticamente k candidati e dopodiché si assume il primo candidato che è "meglio" di tutti i precedenti (inclusi i primi k). Se non c'è un tale candidato, viene assunto l'ultimo candidato. Il parametro k è scelto e fissato prima dell'inizio dei colloqui.
(a) Per n fisso, calcolare la probabilità che la strategia k porti all'assunzione del miglior candidato per $k \in \{1, ..., n\}$,
(b) Per valori grandi di n sia k^* il valore di k che massimizza la probabilità di assumere il miglior candidato. Si esprima k^* come funzione di n.
(c) Si trovi il limite k^*/n per $n \to \infty$.

Soluzione

3 Foglio 3

3.1 Esercizio 1

In un contenitore ci sono 100 palline numerate da 1 a 100. Le estraiamo una dopo l'altra senza reinserimento.
(a) Qual è la probabilità di ottenere nelle prime 10 estrazioni solo numeri ≤ 75?
(b) Qual è la probabilità che le prime 15 palline estratte portino tutte un numero dispari?
(c) Qual è la probabilità che, tra le prime 5 palline estratte, ce ne siano esattamente 2 con numeri dispari?

Soluzione

3.2 Esercizio 2

Una moneta viene lanciata $2n$ volte. Sia t_n la probabilità che il numero di teste sia maggiore del numero di croci, e u_n la probabilità che il numero di teste sia pari al numero di croci.
(a) Calcolare il limite di u_n per $n \to +\infty$.
(b) Determinare il limite di t_n.

Soluzione

3.3 Esercizio 3

Il numero di telefonate X che arrivano ad una segreteria telefonica di un ufficio ogni 9 minuti è distribuito $X \sim \text{Pois}(6)$. Calcolare
(a) la probabilità che arrivino almeno 5 chiamate in 9 minuti;
(b) la probabilità che non arrivi nessuna chiamata tra le ore 9:00 e le ore 9:09

Soluzione

3.4 Esercizio 4

(Distribuzione multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, ..., p_k)$). Consideriamo un esperimento di n prove indipendenti ove ogni prova può avere uno solo tra k possibili risultati, ognuno dei quali ha probabilità rispettivamente $p_1, p_2, ..., p_k$ (e $p_1 + ... + p_k = 1$) di accadere. Calcolare la probabilità $p(n_1, n_2, ..., n_k)$ che si abbiano n_1 esiti del tipo 1, n_2 esiti del tipo $2, ..., n_k$ esiti del tipo k, al variare delle k-uple $(n_1, ..., n_k)$ per cui $n_1 + ... + n_k = n$.

Soluzione

3.5 Esercizio 5

Consideriamo un esperimento a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo p. Determinare la probabilità che
(a) il primo successo avvenga alla prova k;
(b) il primo successo avvenga dopo almeno k prove;
(c) il primo successo avvenga prima della $(k+1)$-esima prova;
(d) il primo successo avvenga in una prova dispari;
(e) il primo successo non avvenga mai.

Soluzione

3.6 Esercizio 6

Un generatore di numeri casuali produce una successione di terne (i, j, k), con $i, j, k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
Indichiamo con S l'evento "esce un tris" (ovvero una terna costituita da cifre tutte uguali). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(a) tra le prime 10 terne prodotte ci sono almeno due tris. (b) si devono produrre almeno 10 terne per ottenere due tris. (c) si devono produrre esattamente 40 terne per avere 3 tris (ovvero il terzo tris si ha esattamente alla 40-esima terna prodotta).

Soluzione

3.7 Esercizio 7

Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine (tutte diverse), tra le quali naturalmente ve ne possono essere alcune che egli già possiede. Qual è la probabilità che tra le figurine appena comprate ve ne siano almeno 20 che già possiede?

Soluzione

3.8 Esercizio 8

Siano dati due esperimenti a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo rispettivamente p_1 e p_2 che siano indipendenti tra loro.
(a) Qual è la probabilità che il primo successo del primo esperimento avvenga prima del primo successo del secondo?
(b) Assumiamo ora che vengano fatte 5 prove per esperimento. Calcolare la probabilità che il numero di successi nel primo gruppo sia maggiore o uguale al numero di successi nel secondo.

Soluzione

3.9 Esercizio 9

Consideriamo un'urna con N palline, di cui N_1 sono rosse, mentre $N-N_1$ sono di colore diverso dal rosso. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrazione senza rimpiazzo di $n \leq N$ palline, in cui il "successo" è l'estrazione di una pallina rossa. Sia W_n la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte tra le n. Determinare il range di W_n e la funzione di probabilità p_{W_n} associata.

Soluzione

3.10 Esercizio 10

Sia X una variabile aleatoria discreta a valori interi positivi; si dice che X gode della proprietà di perdita di memoria se:

$$\mathbb{P}(X > n + k \mid X > k) = \mathbb{P}(X > n) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$$

(a) Si mostri che se $X \sim \text{Geom}(p)$, ossia $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, ...$ allora X soddisfa la proprietà di perdita di memoria.
(b) Vale anche il viceversa, ovvero: se X è una variabile discreta a valori interi positivi che soddisfa la proprietà di perdita di memoria, allora $X \sim \text{Geom}(p)$per un qualche $p \in (0, 1)$.

Soluzione

3.11 Esercizio 11

(Urna di Polya) Si consideri un'urna che contiene inizialmente due palline, una rossa e una verde. Si estrare una pallina, quindi la si reimmette nell'urna, aggiungendone poi un'altra dello stesso colore di quella estratta. Si itera quindi questa procedura di estrazione/reimmissione. Sia X_n il numero di palline rosse presenti nell'urna dopo n iterazioni. Calcolare la legge di X_n (quindi la sua densità discreta $p(k) = \mathbb{P}(X = k)$ al variare di k) per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Soluzione

3.12 Esercizio 12

Ci sono sei tazzine da caffè con corrispondenti piattini. Due sono di colore bianco (b), due rosse (r) e due oro (o). Disponiamo i piattini in ordine sul tavolo nella sequenza *bbrroo*. Poi arriva una persona non vedente e dispone le tazzine a caso sui piattini. Sia M il numero di tazzine il cui colore corrisponde a quello del piattino sul quale sono state disposte.
(a) Calcolare $\mathbb{P}(M = 4)$.
(b) (Opzionale) Calcolare la distribuzione della variabile aleatoria M.

Soluzione