



Date de publication :
10 mai 2019

Approximation de modèles dynamiques linéaires de grande dimension

Cet article est issu de : **Automatique - Robotique | Automatique et ingénierie système**

par **Charles POUSSOT-VASSAL, Pierre VUILLEMIN**

Mots-clés

réduction de modèle |
approximation de modèle |
modèles dynamiques de
grande dimension

Résumé L'approximation de modèles dynamiques vise à s'affranchir des problématiques de calcul inhérentes aux modèles complexes de grande dimension en construisant une représentation plus simple mais toujours représentative. Dès lors, ce modèle de substitution peut être utilisé efficacement pour de la simulation, du contrôle, de l'optimisation, etc. Cet article traite plus particulièrement de méthodes dédiées à l'approximation de modèles dynamiques linéaires. Deux cas sont abordés : l'approximation d'un modèle décrit par une équation différentielle ordinaire linéaire de grande dimension par un modèle de même nature d'une part et l'interpolation de données fréquentielles d'autre part.

Keywords

model reduction | model
approximation | large-scale
dynamical models

Abstract Dynamical model approximation aims at alleviating numerical issues induced by large-scale complex models by building a simpler but still representative model. Such a surrogate model can then be used efficiently for simulation, control, optimisation, etc. This article deals with methods dedicated to the approximation of linear dynamical models. Two cases are addressed : the approximation of a model described by a large-scale linear ordinary differential equation by a model of the same nature and the interpolation of frequency-domain data.

Pour toute question :

Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **30/11/2021**

Pour le compte : **7200034962 - onera / dist cid // 134.212.178.10**

Approximation de modèles dynamiques linéaires de grande dimension

par **Charles POUSSOT-VASSAL**

Chercheur

ONERA, département Traitement de l'information et systèmes, Toulouse, France

et **Pierre VUILLEMIN**

Chercheur

ONERA, département Traitement de l'information et systèmes, Toulouse, France

1. Contexte mathématique et exemples introductifs	S 7 107 - 2
1.1 Cadre de la réduction de modèles dynamiques linéaires	— 2
1.1.1 Réduction basée modèle.....	— 2
1.1.2 Approximation basée données	— 3
1.1.3 Autres problématiques.....	— 3
1.2 Outils mathématiques pour la réduction	— 4
1.2.1 Norme 2 et espaces de fonctions associés	— 4
1.2.2 Norme infinie et espaces de fonctions associés	— 4
1.2.3 Intérêt des normes fréquentielles pour la réduction	— 5
1.3 Quelques exemples introductifs	— 5
2. Méthodes d'approximation	— 6
2.1 Cadre général de la projection	— 7
2.2 Méthodes classiques	— 7
2.2.1 Approximation par troncature	— 7
2.2.2 Troncature modale	— 8
2.2.3 Troncature équilibrée	— 9
2.3 Approximation optimale et interpolation	— 10
2.3.1 Cadre de l'interpolation et lien avec la projection	— 10
2.3.2 Conditions d'optimalité en norme 2	— 12
2.4 Approximation basée données.....	— 13
2.4.1 Construction d'un interpolant par l'approche de Loewner	— 13
2.4.2 Minimalité de l'interpolant et approximation	— 14
3. Boîte à outils MOR	— 15
3.1 Description générale de MOR	— 15
3.2 Cas d'étude avancés	— 15
4. Conclusion	— 16
Pour en savoir plus	Doc. S 7 107

L'utilisation de modèles mathématiques pour représenter des phénomènes ou systèmes physiques s'est imposée comme une norme en ingénierie. En effet, les opportunités offertes par de tels modèles pour la simulation, le contrôle, l'optimisation et l'analyse semblent inépuisables. Cette tendance s'accompagne d'un besoin sans cesse croissant d'avoir des modèles de plus en plus complets et précis, permettant de représenter la réalité avec une très grande fidélité. Cela est accentué par l'évolution des technologies informatiques qui permettent, au travers de logiciels de calcul dédiés, de générer des modèles d'une très grande précision.

Toutefois, une telle précision s'accompagne généralement d'une grande complexité. Dans le cas des systèmes dynamiques, cette complexité se traduit soit par un nombre d'états très important et on parle alors de modèles de grande dimension, soit par des modèles ayant une structure mathématique inappropriée. Dès lors, les tâches rendues possibles par des modèles mathématiques telles que la simulation sont largement complexifiées, voire rendues impossibles à mener du fait de contraintes technologiques des ordinateurs en termes de mémoire et de capacité de calcul.

C'est dans ce contexte que l'approximation ou la réduction de modèle intervient. Il s'agit de simplifier un modèle dynamique de grande dimension tout en préservant, au mieux, son comportement et ses caractéristiques principales. Cet article se focalise sur le cas des modèles dynamiques linéaires. Les outils mathématiques utiles pour la compréhension du problème et un panel varié de méthodes existantes pour le traiter sont détaillés.

1. Contexte mathématique et exemples introductifs

L'approximation, ou la réduction, de modèles dynamiques de grande dimension est un sujet très vaste qui regroupe en réalité des problématiques très diverses. En particulier, selon la nature des modèles considérés (linéaires, du second ordre, etc.), les concepts et les méthodes peuvent être très différents. Cet article se concentre sur l'approximation de modèles dynamiques linéaires. Cela peut sembler restrictif, mais ces modèles sont très répandus dans l'industrie car d'une part ils sont souvent suffisamment riches pour pouvoir représenter fidèlement le comportement de nombreux systèmes physiques autour d'un point de fonctionnement, et d'autre part ils sont simples à utiliser pour de la simulation ou du contrôle. Par ailleurs, avec cette classe de modèles, des outils mathématiques très puissants peuvent être utilisés pour évaluer les erreurs introduites lors de l'approximation.

Les formulations mathématiques des problèmes considérés sont énoncées dans la section 1.1. Certains concepts et outils mathématiques utiles pour la réduction sont rappelés dans la section 1.2. Deux exemples qui seront utilisés dans le reste de l'article sont introduits dans la section 1.3.

Par soucis de simplicité, seuls des modèles continus sont considérés dans cet article, mais l'ensemble des concepts et méthodes d'approximation présentés ont un pendant en temps discret.

1.1 Cadre de la réduction de modèles dynamiques linéaires

Comme évoqué ci-dessus, cet article se concentre sur la réduction de modèles dynamiques linéaires. Toutefois, même pour cette classe de modèles, différentes formulations se distinguent en fonction de la nature du modèle de grande dimension et de celle du modèle réduit recherché. En effet, le modèle de grande dimension peut être une équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ou second ordre, une équation aux dérivées partielles (EDP), etc. De la même façon, le modèle réduit peut également être de l'une ou l'autre de ces formes.

Deux cadres sont considérés dans cet article :

- l'approximation d'un modèle représenté par une EDO linéaire du premier ordre par un modèle réduit de même nature (section 1.1.1) ;
- l'approximation de données fréquentielles par une EDO linéaire du premier ordre (section 1.1.2).

D'autres problématiques d'intérêt sont également évoquées dans la section 1.1.3.

1.1.1 Réduction basée modèle

Soit H un modèle dynamique continu linéaire et invariant dans le temps (*linear time invariant* en anglais, ou LTI) à n_u entrées, n_y sorties de dimension $n \gg 1$ asymptotiquement stable, décrit par une représentation d'état telle que :

$$H : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ et où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont des vecteurs contenant respectivement les états, les entrées et les sorties du modèle. Pour ne pas alourdir les notations, on ne distinguera pas la représentation d'état (1) du modèle de sa fonction de transfert associée, définie comme :

$$H : \mathbb{C} \setminus \rho(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u} \\ s \rightarrow H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2)$$

où $\rho(\mathbf{A}) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0\} \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .

L'objectif de la réduction (ou approximation) est alors de trouver \hat{H} , un modèle continu LTI, stable également, ayant le même nombre d'entrée n_u et de sorties n_y que H mais un nombre d'états $r \ll n$, c'est-à-dire :

$$\hat{H} : \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3)$$

où $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{r \times n_u}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n_y \times r}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ tel que \hat{H} reproduise fidèlement le comportement entrée-sortie du modèle de grande dimension H . En particulier, l'objectif est que pour un ensemble de signaux d'entrée $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ à détailler, l'erreur de sortie $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|$ soit faible. Plutôt que l'utilisation de normes sur les signaux temporels, la section 1.2 met en évidence l'intérêt de considérer des normes fréquentielles de mesure de distance entre les modèles H et \hat{H} et comment cela peut mener à la formulation de problèmes d'approximation optimale.

■ Cas des modèles instables

Si le modèle initial est instable, alors sa partie instable doit être préservée lors de la réduction. Dans le cas contraire, l'erreur d'approximation ne serait pas bornée. Ainsi, en considérant la décomposition du modèle H en une partie stable H_s et une partie instable H_i , c'est-à-dire :

$$H(s) = H_s(s) + H_i(s) \quad (4)$$

alors la réduction ne doit concerner que la partie stable H_s et le modèle réduit \hat{H} est donné tel que :

$$\hat{H}(s) = \hat{H}_s(s) + H_i(s) \quad (5)$$

1.1.2 Approximation basée données

Soit un modèle dynamique H représenté par sa fonction de transfert $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ qui n'est pas nécessairement une fonction rationnelle telle que (2) mais peut comprendre des fonctions irrationnelles telles que des retards en $e^{-\tau s}$, etc.

Supposons en plus que ce modèle ne soit connu qu'au travers d'un certain nombre d'échantillons fréquentiels $H(s_i)$, $s_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$.

Alors, l'objectif est de trouver un modèle réduit rationnel \hat{H} décrit par (3) tel que $\|H(s_i) - \hat{H}(s_i)\|$, $i = 1, \dots, N$ soit faible dans un certain sens. Pour un nombre N de points d'échantillons suffisamment grand et si ces derniers sont placés le long de l'axe imaginaire, alors un tel objectif assurerait de la proximité des réponses fréquentielles.

On peut imaginer chercher un modèle réduit interpolant exactement les données, c'est-à-dire tel que $H(s_i) = \hat{H}(s_i)$, $i = 1, \dots, N$ et on parle alors de **problème d'interpolation rationnelle**. Toutefois, pour des modèles avec un nombre important n_u d'entrées et n_y de sorties, ce problème est trop restrictif et sa résolution est problématique. À la place, on considère plutôt le cadre plus général de l'**interpolation tangentielle** qui assure l'interpolation du modèle initial dans certaines directions spécifiques, appelées **directions tangentielles**. En particulier, supposons que l'ensemble des points d'interpolation soit scindé en deux sous-ensembles, $\{s_i\}_{i=1}^N = \{\mu_j\}_{j=1}^q \cup \{\lambda_i\}_{i=1}^k$ et que ces derniers soient complétés par des ensembles de directions tangentielles $\{\mathbf{l}_j\}_{j=1}^q \subset \mathbb{C}^{n_y}$ et $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{C}^{n_u}$. Alors, l'objectif est de trouver un modèle \hat{H} , tel que les conditions d'interpolation tangentielles suivantes soient satisfaites :

$$\left\{ \mathbf{l}_j^H \hat{H}(\mu_j) = \mathbf{l}_j^H H(\mu_j) \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \hat{H}(\lambda_i) \mathbf{r}_i = H(\lambda_i) \mathbf{r}_i \right\} \quad (6)$$

pour $j = 1, \dots, q$ et $i = 1, \dots, k$

Les ensembles $\{\mu_j, \mathbf{l}_j\}_{j=1}^q$ et $\{\lambda_i, \mathbf{r}_i\}_{i=1}^k$ sont appelés respectivement données d'interpolation tangentielle à gauche et à droite. Comme cela est mis en évidence dans la section 2.4, le problème d'interpolation tangentielle est notamment lié au problème d'approximation optimale en norme \mathcal{H}_2 . Le cadre d'approximation basée données présenté ici est très général car il ne fait pas d'hypothèse sur la structure du modèle qui a permis de générer les données fréquentielles hormis sa linéarité. Cela rend donc les approches associées applicables à une plus grande classe de modèles que ceux décrits par (1).

Ce problème peut également s'interpréter comme un problème d'identification boîte-noire. Toutefois ici, aucune considération de bruit n'est prise en compte.

■ À propos de la stabilité

La question de la stabilité du modèle réduit \hat{H} se pose ici en d'autres termes que dans le cadre du problème d'approximation basé modèle énoncé dans la section 1.1.1. En effet, juger de la stabilité du processus sous-jacent à des données fréquentielles n'est pas un problème aisé et fait l'objet de recherches actives [1]. Le problème est donc abordé de manière plus pragmatique dans cet article. En particulier, si le modèle \hat{H} obtenu est instable alors qu'un modèle stable était attendu, d'après des considérations physiques sur le système sous-jacent, alors on va projeter \hat{H} sur un modèle \hat{H}_s stable de sorte que $\|\hat{H} - \hat{H}_s\|_{\mathcal{L}_\infty}$ soit minimal. Ce pro-

blème est connu comme le problème de Nehari et a été résolu [2] [3]. Lors de cette projection, les conditions d'interpolation peuvent toutefois être perturbées.

1.1.3 Autres problématiques

Comme cela a déjà été évoqué, les deux problématiques énoncées précédemment ne sont pas les seules et de nombreuses autres existent. Les différences se situent au niveau de la structure des modèles ou des critères considérés. Cette section a pour but d'esquisser quelques unes de ces variantes et d'en souligner les éléments principaux, ainsi que de donner des références pour pouvoir aller plus loin.

■ Modèle linéaire algébraico-différentiel

Ici, le modèle initial est décrit par une équation algébraico-différentielle (differential algebraic equation en anglais, ou DAE) telle que :

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (7)$$

où $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice qui peut être singulière. Si elle l'est, cela signifie que l'état $\mathbf{x}(t)$ est soumis à des contraintes algébriques. La simulation temporelle d'un tel modèle est délicate et requiert d'avoir recours à des techniques spécifiques.

Pour la réduction, si $\det(E) \neq 0$, alors la plupart des méthodes d'approximation évoquées dans cet article ont une extension directe à ce cas et permettent de préserver la structure de DAE pour le modèle réduit. Si la conservation de la structure n'est pas importante, alors il est possible de transformer (7) en une simple EDO (1) par inversion de la matrice E à gauche. Une telle approche annulerait toutefois toute structure creuse des matrices et n'est donc à privilégier que pour des dimensions n modérées.

Dans le cas où $\det(E) = 0$, alors cela implique que la fonction de transfert associée à (7) peut se décomposer comme suit :

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D = H_r(s) + P(s) \quad (8)$$

où H_r est une fonction rationnelle telle que (2) et P est un polynôme dont l'ordre est lié à l'index de la DAE. Sur l'axe imaginaire, une telle structure se traduit par un comportement divergent pour de très hautes fréquences. Dans ce cas, la réduction ne doit s'appliquer que sur la partie rationnelle de la décomposition (8). Le modèle réduit est alors obtenu en ajoutant la partie polynomiale P au modèle rationnel réduit obtenu. Le calcul de la décomposition (8) n'est toutefois pas trivial, surtout en grande dimension (voir par exemple [4] et les références qu'il contient).

■ Modèle linéaire du second ordre

Dans ce cas la dynamique du modèle initial est décrite par une EDO linéaire du second ordre :

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + L\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

où $M, L, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ont souvent un sens physique et sont appelées respectivement **matrice de masse**, **d'amortissement** et de **raideur**. Du fait de ce sens physique inhérent à cette structure, il peut être intéressant de la conserver dans le modèle réduit. Ici encore, la plupart des méthodes décrites dans cet article ont une extension plus ou moins directe pour cela.

Dans le cas où préserver la structure n'est pas nécessaire, l'EDO du second ordre (9) peut se mettre sous la forme d'une EDO du premier ordre telle que (1) en considérant l'état augmenté :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (10)$$

La dimension du modèle à réduire est alors doublée (voir par exemple [5] pour une illustration).

■ Modèle linéaire paramétrique

L'une ou l'autre des structures précédentes peut être enrichie par l'ajout d'une dépendance paramétrique des matrices d'état. Ainsi, dans le cas d'une EDO linéaire du premier ordre telle que (1), le modèle initial devient :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\theta)\mathbf{x}(t) + B(\theta)\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{y}(t) = C(\theta)\mathbf{x}(t) + D(\theta)\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de paramètres. Deux cas sont alors à distinguer. Si le paramètre est variant dans le temps, alors le modèle (11) est un modèle linéaire variant dans le temps (*linear parameter varying* en anglais, ou LPV) et un cadre dédié relativement différent de ce qui est présenté dans cet article doit être considéré aussi bien pour l'analyse que pour la réduction [6].

Dans le cas contraire où θ est invariant dans le temps, alors le cadre de l'article reste valide et les outils fréquentiels peuvent toujours être utilisés. La réduction d'un tel modèle reste toutefois un réel défi et un domaine de recherche très actif. En effet, la dépendance paramétrique fait exploser la dimension du problème. Les méthodes présentées dans cet article ont des extensions pour le cas paramétrique, mais les garanties sont généralement moins fortes et leur mise en œuvre reste pour le moins délicate (voir [7] et [8] et leurs références pour plus de détails).

■ Vers des modèles non linéaires

De nombreuses recherches visent par ailleurs à étendre les techniques d'approximation à des structures de modèles de plus en plus complexes et non linéaires. Cela dépasse le cadre de cet article, mais des références en ce sens sont données en conclusion.

1.2 Outils mathématiques pour la réduction

Cette section a pour objectif d'introduire, succinctement, certains outils théoriques associés à la réduction et à la théorie des systèmes linéaires en général. Bien entendu, elle n'a pas vocation à être une description détaillée (pour cela, voir par exemple [9] ou [10]) mais plutôt à souligner certaines notions spécifiques qui ont un intérêt particulier pour la réduction. En particulier, les métriques associées aux systèmes linéaires permettent de quantifier les erreurs induites par la réduction de manière globale. Ces concepts sont par ailleurs utiles pour appréhender certaines des références citées dans cet article.

1.2.1 Norme 2 et espaces de fonctions associés

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}_2(\mathcal{I})$ l'ensemble des fonctions $h(t)$ (scalaires, vectorielles ou encore matricielles) de carré intégrables, telles que :

$$\|h\|_{\mathcal{L}_2} \triangleq \left(\int_{\mathcal{I}} \text{trace}(h(t)^T h(t)) dt \right)^{1/2} < \infty \quad (12)$$

Si l'intégrale (12) est finie, autrement dit $h \in \mathcal{L}_2(\mathcal{I})$, alors $\|h\|_{\mathcal{L}_2}$ (parfois notée simplement $\|h\|_2$) est appelée norme \mathcal{L}_2 de la fonction h et peut s'interpréter comme l'énergie associée à la fonction sur \mathcal{I} (par exemple si $h(t)$ représente un signal temporel). Parmi les cas particuliers pour \mathcal{I} , on notera notamment $\mathcal{L}_2([0, \infty[)$ qui contient l'ensemble des fonctions causales (nulle pour $t < 0$) d'énergie finie.

De manière similaire, on peut définir l'espace $\mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions complexes $H(s)$ telles que :

$$\|H\|_{\mathcal{L}_2} \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(H(i\omega)^H H(i\omega)) d\omega \right)^{1/2} < \infty \quad (13)$$

Ainsi, toute fonction de transfert $H(s)$ telle que (2) n'ayant pas de pôle sur l'axe imaginaire et n'ayant pas de transfert direct, i.e. $D=0$, appartient à $\mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$. Parmi cet ensemble, on distingue encore le sous-espace $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$ qui ne contient que les fonctions de transfert analytiques dans le demi-plan complexe droit, c'est-à-dire, des fonctions de transfert qui correspondent à des

modèles asymptotiquement stables. Pour de tels modèles, leur norme \mathcal{L}_2 coïncide avec leur norme \mathcal{H}_2 , notée $\|H\|_{\mathcal{H}_2}$.

L'espace réel $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ peut être vu comme un espace de fonctions dans le domaine temporel alors que $\mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$ comme un espace de fonctions dans le domaine fréquentiel. Les deux espaces sont liés par la transformée de Laplace au travers du théorème de Parseval. Ainsi, si $h(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Laplace $H(s) \in \mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$, alors :

$$\|h\|_{\mathcal{L}_2} = \|H\|_{\mathcal{L}_2} \quad (14)$$

Cette relation reste valable pour le sous-espace des signaux temporels causaux $\mathcal{L}_2([0, \infty[)$ qui est lié à l'espace des fonctions de transfert stables \mathcal{H}_2 . Dès lors, pour un modèle strictement propre et asymptotiquement stable H , i.e. $H \in \mathcal{H}_2$, sa norme \mathcal{H}_2 correspond à l'énergie de sa réponse fréquentielle, ou de manière équivalente dans le domaine temporel, à l'énergie de sa réponse impulsionnelle $h(t) = Ce^{tA}B = \mathcal{L}^{-1}(H)(t)$.

■ Calcul de la norme \mathcal{H}_2

Pour un modèle LTI, le calcul de la norme \mathcal{H}_2 peut se faire à l'aide des gramiens du modèle ou à partir des pôles et des résidus de la fonction de transfert associée. En particulier, les gramiens \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$A\mathcal{P} + \mathcal{P}A^T + BB^T = 0 \quad \text{et} \quad A^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q}A + C^T C = 0 \quad (15)$$

et on a :

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \text{trace}(C\mathcal{P}C^T)^{1/2} = \text{trace}(B^T \mathcal{Q}B)^{1/2}. \quad (16)$$

Par ailleurs, en supposant que la matrice A de (1) soit diagonalisable, alors la fonction de transfert (2) du modèle peut se décomposer en éléments simples comme $H(s) = D + \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{s - \lambda_i}$ où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $\phi_i \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ sont les pôles et résidus associés. Si en plus, le modèle n'a pas de transfert direct, i.e. $D=0$, alors, la norme \mathcal{H}_2 est donnée par :

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\sum_{i=1}^n \text{trace}(\phi_i H(-\lambda_i)^T) \right)^{1/2} \quad (17)$$

Pour une présentation plus détaillée de ces espaces et des concepts associés ainsi que des méthodes de calcul des normes, les lecteurs peuvent se référer au chapitre 2 de [9] ou au chapitre 4 de [10] et aux références qu'ils contiennent.

1.2.2 Norme infinie et espaces de fonctions associés

Un autre espace d'intérêt particulier pour les signaux et les systèmes est $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{I})$. Contrairement aux espaces \mathcal{L}_2 , ici, il n'y a pas d'équivalence entre le domaine temporel et fréquentiel et il convient donc de bien distinguer les deux.

Dans le domaine temporel, c'est-à-dire pour $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{I})$ est l'ensemble des fonctions réelles $h(t)$ définies sur \mathcal{I} et qui y sont bornées, telles que :

$$\|h\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \text{ess sup}_{t \in \mathcal{I}} \|h(t)\|_\infty < \infty \quad (18)$$

où $\|h(t)\|_\infty$ est le maximum des valeurs absolues des éléments de $h(t)$ et ess sup est le supremum essentiel. Ce dernier coïncide avec le supremum pour un signal continu ou plus simplement avec le maximum du signal quand celui-ci existe.

Dans le domaine fréquentiel, $\mathcal{L}_\infty(i\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions complexes $H(s)$ qui sont bornées sur l'axe imaginaire, telles que :

$$\|H\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(H(i\omega)) < \infty \quad (19)$$

où $\bar{\sigma}(H(i\omega))$ est la valeur singulière maximale de $H(i\omega)$. Ainsi toute fonction de transfert $H(s)$ telle que (2) n'ayant pas de pôle sur l'axe imaginaire appartient à $\mathcal{L}_\infty(i\mathbb{R})$. Cet espace englobe $\mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$ car il contient également les fonctions de transfert ayant

un transfert direct D non nul. De la même façon que précédemment, on note \mathcal{H}_∞ le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{L}_\infty(i\mathbb{R})$ qui sont analytiques et bornées dans le demi-plan complexe droit, c'est-à-dire les fonctions de transfert qui correspondent à des modèles asymptotiquement stables.

Dans le plan complexe, la norme \mathcal{H}_∞ s'interprète comme la distance maximale entre l'origine et le point le plus éloigné du diagramme de Nyquist et est appelé **gain du système**. Dans le cas d'un modèle monoentrée monosortie, cela correspond au gain maximal de la réponse fréquentielle sur le diagramme de Bode.

■ Calcul de la norme \mathcal{H}_∞

Contrairement à la norme \mathcal{H}_2 , la norme \mathcal{H}_∞ se calcule au travers d'une procédure itérative de bisection qui vise à isoler la fréquence ω_∞ pour laquelle la valeur singulière maximale est atteinte. Pour voir les détails de la méthode de calcul, voir par exemple le chapitre 2 de [9] ou le chapitre 4 de [10].

1.2.3 Intérêt des normes fréquentielles pour la réduction

Les normes fréquentielles présentées ci-dessus permettent de quantifier l'erreur d'approximation entre un modèle de grande dimension H et un modèle réduit \hat{H} de manière très générale. En effet, plus l'écart $\|H - \hat{H}\|$ est faible, selon la norme \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 , plus le comportement entrée-sortie des deux modèles sera proche, et ce, pour une très large classe de signaux de commande $\mathbf{u}(t)$. Pour s'en convaincre, on considère le signal de commande causal et d'énergie finie $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_2([0, \infty[)$, qui, appliqué aux modèles stables H et \hat{H} conduit respectivement aux signaux de sortie $\mathbf{y}(t)$ et $\hat{\mathbf{y}}(t)$.

Alors [9], la norme \mathcal{H}_2 de l'erreur d'approximation permet de borner l'écart maximal entre les deux signaux de sortie tel que :

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_2} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2} \quad (20)$$

et la norme \mathcal{H}_∞ de permet de borner l'écart énergétique :

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2} \quad (21)$$

La force des normes fréquentielles réside dans le fait que les relations (20) et (21) sont valables pour tout signal de commande d'énergie finie. Dès lors, dans le cadre de l'approximation basée modèle énoncée dans la section 1.1.1, ces observations suggèrent de considérer le problème d'approximation comme le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{H} = \arg \min_{\substack{G \in \mathcal{H}_p \\ \dim(G) \leq r}} \|H - G\|_{\mathcal{H}_p} \quad (22)$$

où p est égal à 2 ou ∞ . C'est précisément ce qui est fait dans la section 2.3 avec la norme \mathcal{H}_2 . Cette dernière est privilégiée car le problème d'optimisation associé est différentiable, ce qui n'est pas le cas quand la norme \mathcal{H}_∞ est considérée.

À noter que d'autres normes peuvent être considérées dans le problème (22). Par exemple, il est possible de considérer la restriction de la norme \mathcal{H}_2 sur un intervalle fréquentiel borné. Dans ce cas, le problème vise à créer un modèle réduit davantage précis pour certaines bandes de fréquences que pour d'autre [11].

1.3 Quelques exemples introductifs

Dans cette section, deux exemples sont présentés et les codes MATLAB associés sont mis à disposition. À noter que la boîte à outils MOR, présentée dans la section 3.1, est nécessaire pour générer les modèles réduits de ces exemples.

L'exemple 1 illustre le problème de réduction basé modèle tel qu'énoncé dans la section 1.1.1 où le modèle de grande dimension représente le comportement d'une poutre encastrée, représentatif du comportement de structures flexibles. Cet exemple permet par ailleurs de mettre en évidence l'intérêt de générer un modèle réduit à partir d'un modèle aux éléments finis précis plutôt que de réduire le nombre de nœuds dans la méthode aux éléments finis.

L'exemple 2 illustre quant à lui le cadre d'approximation basé données énoncé dans la section 1.1.2. Pour cela, des données fréquentielles sont générées à partir de la fonction de transfert irrationnelle associée à une équation aux dérivées partielles linéaires soulignant ainsi la généralité de cette formulation.

Les deux exemples diffèrent donc dans la nature du modèle de départ, mais l'objectif de construire un modèle rationnel (3) tel que le comportement entrée-sortie du modèle initial soit reproduit reste commun.

Exemple 1 : modèle de poutre encastrée

Le comportement dynamique d'une poutre encastrée peut être décrit par une équation d'état obtenue par approximation par éléments finis de la dimension spatiale (ce modèle est détaillé dans [12]). L'« exemple 1 » mis à disposition dans le fichier http://pierre-vuillemin.fr/resources/TL_reduction_exemples.zip, permet de le générer pour un ordre N de discrétisation donné. Le modèle de la poutre est un modèle d'état (1). Pour un ordre de discrétisation $N = 75$, le modèle H_{900} est construit. Ce dernier a une dimension $n = 900$, $n_u = 1$ (accélération verticale à l'extrémité de la poutre), $n_y = 150$ (déplacements verticaux le long de la poutre). Puis, pour $N = 2$, le modèle H_{24} est obtenu, menant cette fois à un modèle ayant une dimension de $n = 24$, $n_u = 1$, $n_y = 4$. Enfin, le modèle précis H_{900} est réduit avec un ordre $r = 24$, correspondant à l'ordre de l'approximation grossière H_{24} , $n_u = 1$, $n_y = 150$, utilisant une méthode de réduction optimale décrite en section 2.3 (implémentée dans la boîte à outils MOR), menant au modèle \hat{H}_{24} . La figure 1 illustre les résultats de simulation obtenus.

Il apparaît clairement que les résultats de simulation sont bien meilleurs en construisant un modèle précis H_{900} puis en l'approximant par \hat{H}_{24} que en construisant directement un modèle approximé \hat{H}_{24} . En effet, de manière quantitative, le calcul de l'intégrale de l'erreur sur une seconde pour $\|H_{900} - H_{24}\|$ puis $\|H_{900} - \hat{H}_{24}\|$ en réponse à une impulsion en bout de poutre, mène respectivement à 5,2 et 0,01. De plus, le temps de simulation est de 0,2967 s pour H_{900} et de 0,0015 s (200 fois plus rapide) pour H_{24} et \hat{H}_{24} . Ce simple exemple montre bien l'intérêt de l'approximation à des fins de simulation.

Dans les applications liées à l'ingénierie des systèmes dynamiques, il est fréquent de ne considérer que des fonctions de transfert rationnelles. Celles-ci peuvent alors être facilement mises sous forme de représentation d'état *via* des EDO, comme c'est le cas dans l'exemple 1. Toutefois, dans certaines situations, les fonctions de transferts caractérisant le comportement entrée-sortie peuvent être irrationnelles. C'est le cas de certains phénomènes physiques représentés par des équations aux dérivées partielles linéaires, et dont la solution résulte en une fonction de transfert irrationnelle. On parle également de système de dimension infinie car ces derniers peuvent avoir une infinité de singularités, qu'il peut être compliqué de manipuler. Dans ce cas, il peut être pertinent d'approximer cette fonction irrationnelle par une fonction rationnelle équipée d'une représentation d'état (3), plus

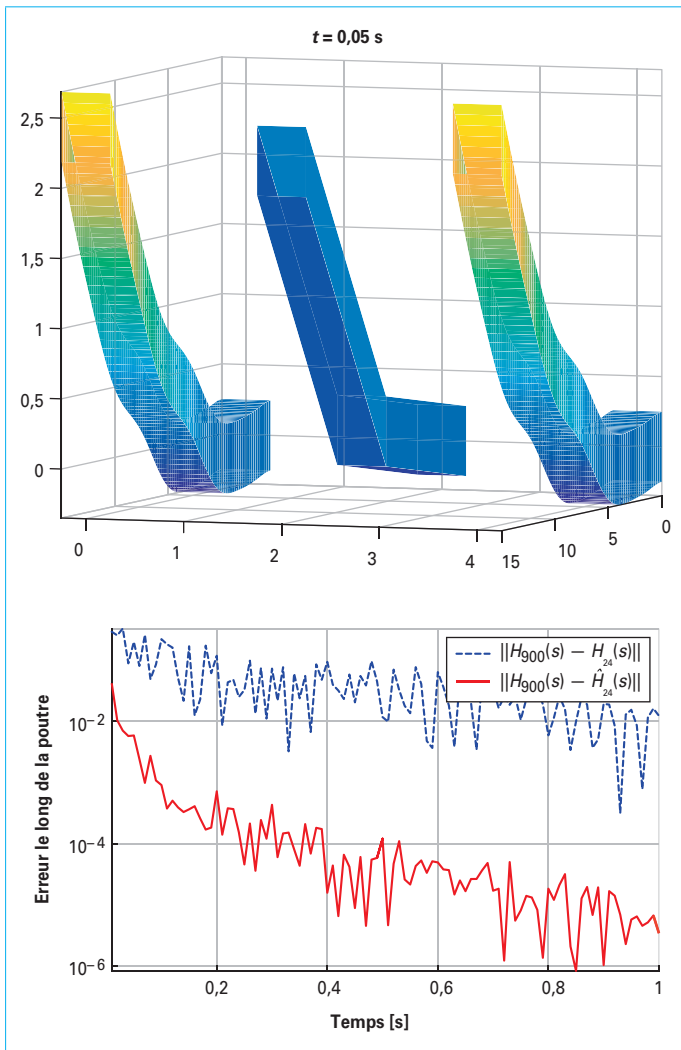


Figure 1 - Haut : capture de la position de la poutre suite à une impulsion pour les modèles H_{900} , H_{24} et \hat{H}_{24} (de gauche à droite) à l'instant $t = 0,05$. Bas : erreur le long de la poutre en fonction du temps entre H_{900} et H_{24} (bleu pointillé) puis H_{900} et \hat{H}_{24} (rouge plein).

adaptée aux outils des ingénieurs. L'exemple 2 présente un cas d'approximation d'une EDP.

Exemple 2 : simulation d'une équation d'onde

Dans cet exemple, nous considérons une équation d'onde à une dimension, le long de l'axe x , contrôlée en une extrémité, décrite par les équations aux dérivées partielles et ordinaire suivantes (les notations \mathbf{u} et $\tilde{\mathbf{y}}$ dénotent des signaux temporels et \mathbf{u} et \mathbf{y} des signaux dans le domaine de Laplace, aussi appelés signaux fréquentiels) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}(x, t)}{\partial x} + 2x \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}(x, t)}{\partial t} &= 0 \\ \tilde{\mathbf{y}}(x, 0) &= 0 \\ \tilde{\mathbf{y}}(0, t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} * \tilde{\mathbf{u}}_f(0, t) \\ \frac{\omega_0^2}{s^2 + m\omega_0 s + \omega_0^2} \mathbf{u}(0, s) &= \mathbf{u}_f(0, s), \end{aligned} \quad (23)$$

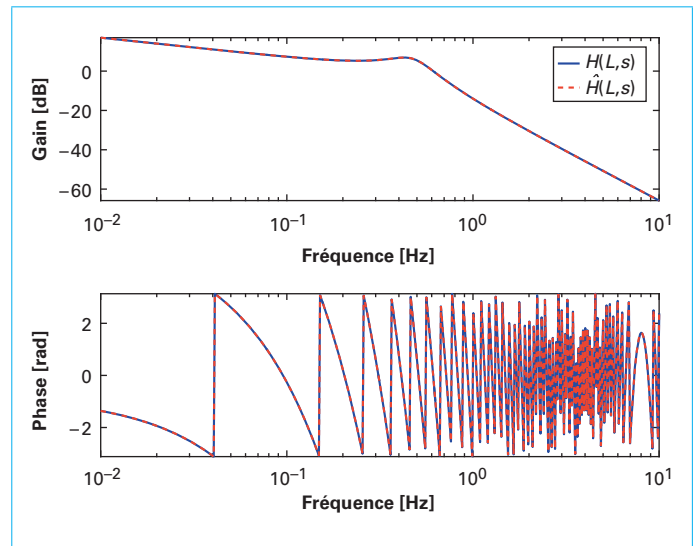


Figure 2 - Réponse fréquentielle de $H(L, s)$ (bleu) et de son approximation rationnelle $\hat{H}(L, s)$ d'ordre $r = 128$ (rouge plein)

où $x \in [0, L]$ ($L = 3$) désigne la variable d'espace, $\omega_0 = 3$ et $m = 0,5$ sont les constantes d'un filtre d'entrée et $*$ dénote le produit de convolution. L'entrée considérée de ce système est le scalaire $\tilde{\mathbf{u}}(0, t)$ (ou $\mathbf{u}(0, s)$), représentant la force appliquée à la gauche de l'onde (i.e. $x = 0$). Il est simple de montrer que l'équation ((23)) a pour solution

$$\mathbf{y}(x, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} e^{-x^2 s} \frac{\omega_0^2}{s^2 + m\omega_0 s + \omega_0^2} \mathbf{u}(s) = H(x, s) \mathbf{u}(s). \quad (24)$$

Dès lors, l'équation ((24)) qui lie l'entrée de contrôle $\mathbf{u}(s)$ en chaque point x de la sortie $\mathbf{y}(x, s)$ est alors une fonction de transfert irrationnelle, décrite comme (2). La figure 2 illustre la réponse fréquentielle $H(L, s)$ de ((24)) au point $x = L$, ainsi que son approximation $\hat{H}(L, s)$, obtenue via la boîte à outils MOR, par interpolation rationnelle depuis des données entrées-sorties, comme présenté dans la section 2.4.

On note que l'approximation rationnelle $\hat{H}(L, s)$ reproduit très précisément la réponse fréquentielle de $\hat{H}(L, s)$. L'intérêt immédiat d'utiliser $\hat{H}(L, s)$ au lieu de $H(L, s)$ réside dans une plus grande simplicité de simulation, d'analyse et de synthèse de loi de contrôle. En effet, la solution temporelle à une simulation peut être désormais obtenue par intégration numérique de $\hat{H}(L, s)$ plutôt qu'en résolvant (E2.1). À noter que dans l'exemple choisi, cette solution, avant filtre du second ordre, s'écrit simplement $\tilde{\mathbf{y}}(x, t) = \tilde{\mathbf{u}}_f^{t-x^2} / \sqrt{t}$, mais dans de nombreux cas, la solution analytique est bien trop compliquée à trouver. Le fichier téléchargeable à l'adresse http://pierre-vuillemin.fr/resources/Ti_reduction_exemples.zip « Exemple2 » fourni la simulation graphique de l'onde.

2. Méthodes d'approximation

La réduction de modèles dynamiques linéaires de grande dimension n'est pas un sujet nouveau et de nombreuses techniques ont été développées pour répondre à la problématique. Cette section a pour objectif de présenter certaines de ces approches. Il ne s'agit pas d'en dresser une liste exhaustive, qui serait trop longue, mais plutôt de mettre en avant les approches

qui, d'après les auteurs, sont les plus intéressantes, soit du fait de leur popularité, soit du fait des possibilités qu'elles offrent. Par ailleurs, pour préserver le caractère didactique voulu pour cet article, l'accent est mis sur les grands principes sous-jacents aux différentes méthodes plutôt qu'aux démonstrations mathématiques et aux détails techniques que les lecteurs pourront retrouver dans les références mentionnées.

Considérant le problème d'approximation basé modèle énoncé dans la section 1.1.1, plusieurs méthodes d'approximation peuvent être interprétées au travers d'un cadre commun de projection, présenté dans la section 2.1. Dans la section 2.2, des méthodes que l'on peut retrouver dans les livres classiques d'automatique sont présentées. Ensuite, le formalisme associé à des approches plus récentes pour la recherche d'un modèle réduit optimal en terme de la norme \mathcal{H}_2 est détaillé dans la section 2.3.

Enfin, la section 2.4 élargit le cadre du problème d'approximation considéré jusqu'alors au travers d'une méthode d'interpolation de données entrée-sortie et permet de répondre à la problématique énoncée dans la section 1.1.2.

2.1 Cadre général de la projection

Considérons le modèle linéaire H donné par sa représentation d'état (1). L'état $\mathbf{x}(t)$ n'est pas contraint et peut *a priori* évoluer dans tout \mathbb{R}^n . Cependant, dans de nombreux cas, ses trajectoires n'évoluent que dans un sous-espace $\mathcal{V}_r \subset \mathbb{R}^n$ de dimension $r < n$, tel que $\forall t > 0$:

$$\mathbf{x}(t) \approx V_r \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (25)$$

avec $V_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ une base de \mathcal{V}_r et $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^r$ un état réduit. Avec cette approximation de l'état, l'équation dynamique dans (1) devient :

$$V_r \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A V_r \hat{\mathbf{x}}(t) + B u(t) + \mathbf{e}(t) \quad (26)$$

où $\mathbf{e}(t)$ est le résidu non nul qui provient de l'erreur induite par la projection (25). Pour obtenir un modèle réduit linéaire décrit par une représentation d'état telle que (3), il est nécessaire de s'assurer que l'erreur commise lors de l'approximation est orthogonale à un autre sous-espace $\mathcal{W}_r \subset \mathbb{R}^n$ (qui peut être \mathcal{V}_r), c'est-à-dire que $\forall t > 0$:

$$W_r^T \mathbf{e}(t) = 0 \quad (27)$$

où $W_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est une base de \mathcal{W}_r . Alors, l'équation (26) devient :

$$W_r^T V_r \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = W_r^T A V_r \hat{\mathbf{x}}(t) + W_r^T B u(t) + \underbrace{W_r^T \mathbf{e}(t)}_{=0} \quad (28)$$

Si les bases sont choisies telles que $W_r^T V_r = I_r$, alors les matrices de l'équation dynamique du modèle réduit (3) sont données par :

$$\hat{A} = W_r^T A V_r \quad \text{et} \quad \hat{B} = W_r^T B \quad (29)$$

Les matrices \hat{C} et \hat{D} s'obtiennent quant à elles directement en utilisant la projection de l'état (25) dans l'équation de sortie de (1) comme suit :

$$\hat{C} = C V_r \quad \text{et} \quad \hat{D} = D \quad (30)$$

Ce cadre de projection est communément appelé **conditions de Petrov-Garlerkin** quand $\mathcal{V}_r \neq \mathcal{W}_r$ ou juste de Garlerkin quand $\mathcal{V}_r = \mathcal{W}_r$ et se retrouve dans de nombreuses techniques pour la résolution de systèmes linéaires, le calcul de valeurs propres, etc. Pour davantage de détails sur le sujet, les lecteurs peuvent se référer au chapitre 5 de [13].

Sur la base de ce cadre de projection, il reste ensuite à choisir des sous-espaces \mathcal{V}_r et \mathcal{W}_r pertinents pour que le comportement

du modèle réduit (3) obtenu par projection *via* (29) et (30) soit proche du modèle initial (1).

Sans davantage de précision sur les sous-espaces considérés, la seule certitude sur le modèle réduit est qu'il préserve le comportement du modèle initial en l'infini. En effet, comme le terme de transfert direct D n'est pas affecté par la projection :

$$H(\infty) = \hat{H}(\infty) \quad (31)$$

Mais comme cela est illustré dans le reste de l'article, il est possible d'obtenir des propriétés bien plus intéressantes en choisissant des espaces \mathcal{V}_r et \mathcal{W}_r particuliers.

2.2 Méthodes classiques

Cette section contient des rappels sur les approches de troncature modale et équilibrée, qui sont les techniques les plus classiques pour la réduction de modèles LTI et qui serviront de référence de comparaison pour les méthodes plus récentes. Les connexions avec d'autres approches comme l'approximation par perturbation singulière sont également évoquées.

Bien qu'étant également très classique, l'approximation optimale en norme de Hankel est omise ici car, de l'expérience des auteurs, ses performances sont limitées au regard de la complexité de sa mise en œuvre, notamment face à la troncature équilibrée. Les lecteurs peuvent se référer à [2] ou au chapitre 8 de [14] pour plus de détails à son sujet.

2.2.1 Approximation par troncature

Considérons le modèle dynamique linéaire (1) de réalisation (A, B, C, D) dans une base \mathcal{B}_0 . Considérons la matrice de changement de base $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} telle que : $\mathbf{x}(t) = P \xi(t)$ et telle que : l'état $\xi(t)$ soit alors partitionné comme :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

où $\xi_1(t) \in \mathbb{R}^r$ et $\xi_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, $0 < r < n$, représentent respectivement les états à conserver et ceux à rejeter. La réalisation (A_B, B_B, C_B, D) du modèle dans la base \mathcal{B} peut être partitionnée de manière correspondante comme :

$$\begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \quad (33)$$

Un modèle réduit \hat{H} d'ordre r peut alors être obtenu en ne conservant que les dynamiques relatives à $\xi_1(t)$, c'est-à-dire, $\hat{H} = (A_{11}, B_1, C_1, D)$. La troncature a un intérêt quand les états ont un certain sens physique ou quand le modèle est exprimé dans une base \mathcal{B} spécifique telle que la base modale ou équilibrée comme cela est détaillé dans les sections 2.2.2 et 2.2.3.

Le processus de troncature peut s'interpréter directement comme une projection en considérant les r premières colonnes de P pour la projection à droite et celles de P^{-T} pour celle à gauche :

$$V_r = P \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \text{et} \quad W_r = P^{-T} \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (34)$$

■ Lien avec la méthode de perturbation singulière

En tant que méthode de projection, la troncature préserve le comportement du modèle initial en l'infini. Pour avoir une correspondance en basse fréquence, il convient d'utiliser une approche appelée **perturbation singulière** ou encore **résidualisation**. Cette approche consiste à supposer que les dynamiques associées à

$\xi_2(t)$ sont très rapides, c'est-à-dire que $\xi_2(t) = 0$. Alors, si A_{22} est inversible, le modèle réduit est donné par :

$$\hat{H}_{res} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} & D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

et dans ce cas, le gain statique du modèle initial est préservé :

$$H(0) = \hat{H}_{res}(0) \quad (36)$$

Comme cela est montré dans [15], l'approximation par perturbation singulière est en fait une troncature appliquée sur la réalisation de la fonction de transfert obtenue par la transformation bilinéaire s^{-1} .

2.2.2 Troncature modale

En supposant que la matrice dynamique A de la réalisation du modèle H soit diagonalisable, le passage dans la base modale mène à une matrice $A_B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale contenant les valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) du modèle :

$$A_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

Dans cette base, la fonction de transfert associée se décompose en éléments simples et devient :

$$H(s) = D + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i}{s - \lambda_i} \quad (38)$$

où $\Phi_i \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ sont les résidus associés aux pôles du modèle, donnés par $\Phi_i = C_B e_i e_i^T B_B$ avec e_i le i -ème vecteur canonique de \mathbb{R}^n . Le modèle réduit est alors obtenu en ne retenant que certains modes de la décomposition (38) en prenant soin de conserver les paires de pôles complexes conjugués afin de pouvoir retrouver, *a posteriori*, une réalisation réelle pour H .

Avec cette approche, la norme \mathcal{H}_∞ de l'erreur d'approximation peut être bornée. En effet, en supposant que les r premiers pôles de (38) soient conservés pour former \hat{H} , alors :

$$\|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \sum_{i=r+1}^n \frac{\|\Phi_i\|_2}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} = \bar{e}_{r,\infty} \quad (39)$$

Par ailleurs, en utilisant sa formulation pôles-résidus (17), la norme \mathcal{H}_2 de l'erreur s'obtient simplement à partir des modes négligés :

$$\|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_2}^2 = - \sum_{i,k=r+1}^n \frac{\operatorname{trace}(\Phi_i \Phi_k^T)}{\lambda_i + \lambda_k} \quad (40)$$

Une bonne connaissance physique du modèle permet de choisir les pôles à retenir selon leur signification physique, mais des critères plus systématiques peuvent également être considérés. Ainsi, pour préserver au mieux le comportement fréquentiel du modèle initial, on peut conserver les r pôles dominants, c'est-à-dire ceux pour lesquels le ratio :

$$\frac{\|\Phi_i\|_2}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} \quad (41)$$

est le plus grand. Un tel choix minimise la borne supérieure de l'inégalité (39). À noter que les équations (39) ou (40) peuvent servir à déterminer l'ordre de réduction r adéquat pour atteindre une certaine erreur.

La troncature modale est attrayante par sa simplicité et elle peut s'avérer efficace pour des modèles dont le comportement est fortement dominé par certains modes seulement comme c'est le cas dans l'exemple 3. Toutefois, elle reste généralement moins performante que d'autres méthodes pour conserver le comportement entrée-sortie du modèle initial. Naturellement, cette approche conserve la stabilité du modèle initial.

Par ailleurs, la méthode peut échouer si le modèle contient des valeurs propres multiples ou très proches. En effet, dans ce cas, la décomposition (37) n'est plus valable et il faut utiliser sa généralisation : la décomposition en blocs de Jordan. Or cette dernière est très difficile à calculer en pratique du fait de sa sensibilité (chapitre 10 de [14]) ce qui rend l'approche moins intéressante. On peut alors se tourner vers une diagonalisation par bloc qui préserve les grappes de pôles très proches, mais dans ce cas le tri des modes et la borne évoqués plus haut doivent être adaptés.

D'un point de vue de la complexité numérique, cette approche requière le calcul de l'ensemble des valeurs propres et vecteurs propres associés de la matrice dynamique A . Selon la dimension n de cette dernière, cela n'est pas forcément possible. En particulier, même si la matrice A est creuse, les vecteurs propres ne le seront pas et nécessiteront donc énormément de mémoire. Dans ce cas, des méthodes itératives spécifiques ne nécessitant pas de diagonaliser entièrement A peuvent être envisagées [16] mais elles sont plus délicates à mettre en œuvre et ne permettent pas de calculer des erreurs ou bornes aussi simplement.

Exemple 3 : mise en place de l'approximation modale avec MATLAB

La troncature modale est simple à mettre en œuvre ; son algorithme est décrit ici au travers d'instructions MATLAB. Les étapes sont les suivantes :

1. Changement de la base de la réalisation $H = (A, B, C, D)$ pour sa base modale complexe :

```
[P, Ab] = eig(A);
Bb      = P \ B;
Cb      = C * P;
Db      = D;
Hb      = ss(Ab, Bb, Cb, Db);
```

Cette étape peut également être réalisée avec la routine canon qui met une réalisation sous une forme diagonale par bloc réelle. Selon la taille des blocs, les étapes suivantes doivent alors être adaptées.

2. Calcul et tri des ratios (41) :

```
lambda = diag(Ab);
for i = 1:n
    ratio(i) = norm(Cb(:,i) * Bb(i,:), 2) / abs(real(lambda(i)));
end
[ratio, ind] = sort(ratio, 'descend');
```

3. Troncature de la réalisation à l'ordre $r = 10$:

```
r = 10;
x1l = ind(1:r);
Hrc = ss(Ab(x1l, x1l), Bb(x1l,:), Cb(:,x1l), Db);
```

À ce stade, la réalisation de Hrc est complexe mais correspond à une fonction de transfert ayant des coefficients réels car les pôles retenus l'ont été par paires complexes conjuguées. Une réalisation réelle peut être obtenue par simple changement de base.

4. (facultatif) Calcul de la borne (39) sur la norme \mathcal{H}_∞ et de l'erreur en norme \mathcal{H}_2 donnée par (40).

Cette procédure est appliquée à la dernière (150-ème) sortie du modèle H_{900} décrit dans l'exemple 1. Les gains des réponses fréquentielles correspondantes sont présentées sur la figure 3 et les pôles des deux modèles sont représentés, en échelle logarithmique, sur la figure 4.

On peut voir que les deux réponses fréquentielles sont très proches en basses fréquences, des différences apparaissent sur les résonances plus hautes fréquences qui sont moins importantes d'un point de vue énergétique. Cela est cohérent avec les pôles retenus dans le modèle réduit, qui se situent davantage en basses fréquences. Toutefois, on voit que la prise en compte des résidus dans (41) enrichit le critère seul de la fréquence propre des modes et assure une meilleure représentativité fréquentielle.

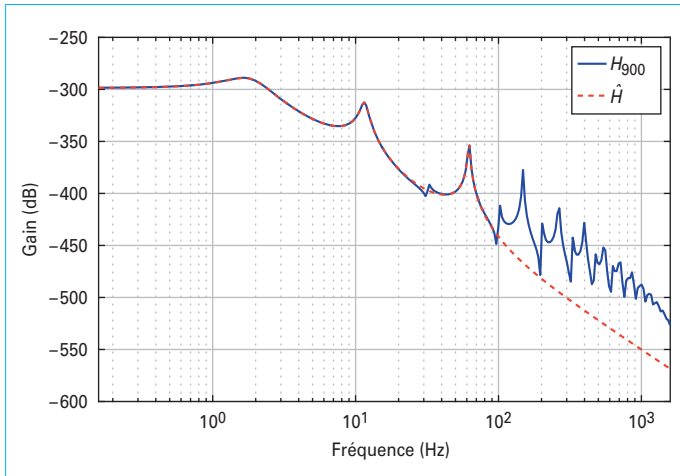


Figure 3 – Gain des réponses fréquentielles du modèle initial H_{900} et du modèle réduit H d'ordre $r = 10$ par troncature modale

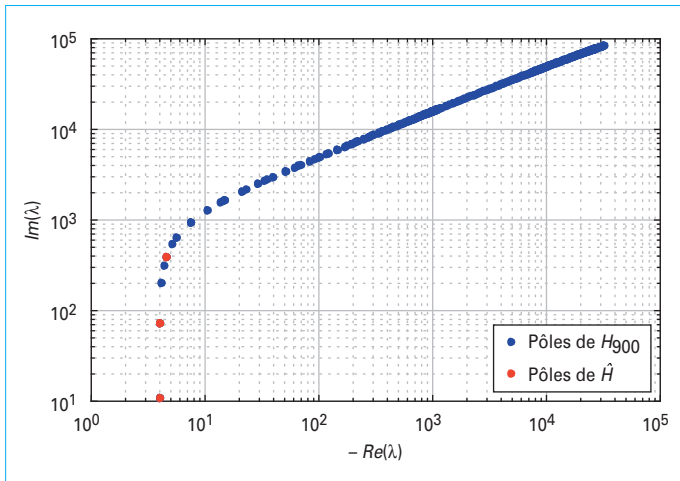


Figure 4 – Pôles du modèle initial H_{900} et réduit H d'ordre $r = 10$ par troncature modale, en échelle logarithmique

D'un point de vue plus quantitatif, l'erreur relative en norme \mathcal{H}_∞ et la borne $\bar{\epsilon}_{r,\infty}$ sont :

$$\|H_{900} - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} / \|H_{900}\|_{\mathcal{H}_\infty} = 1,21\% \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}_{r,\infty} / \|H_{900}\|_{\mathcal{H}_\infty} = 6,62\% \quad (42)$$

De même, l'erreur relative en norme \mathcal{H}_2 est de 1,90 %. Ces erreurs sont faibles et illustrent que la troncature modale peut être une méthode pertinente pour la réduction. En particulier, cette approche est généralement pertinente dans le cas de modèles ayant des pôles faiblement amortis qui sont très largement dominants, comme c'est le cas ici. Toutefois, comme illustré plus loin, d'autres approches mènent généralement à des erreurs encore plus faibles.

2.2.3 Troncature équilibrée

Pour un modèle LTI tel que (1), les gramiens de commandabilité $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et d'observabilité $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques (semi) définies positives définies dans le domaine temporel comme :

$$\mathcal{P} \triangleq \int_0^\infty e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} \triangleq \int_0^\infty e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \quad (43)$$

ou dans le domaine fréquentiel comme :

$$\mathcal{P} \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty T(v)^H B B^T T(v) dv \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty T(v)^H C^T C T(v) dv \quad (44)$$

avec $T(v) = (vI_n - A)^{-1}$. Ce sont des quantités qui jouent un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques. En effet, ces matrices sont liées aux concepts d'atteignabilité et d'observabilité [10] et donnent des informations sur les transferts d'énergie internes au modèle. En particulier, l'énergie minimale $\epsilon_r(x)$ requise pour déplacer l'état du modèle de 0 à un état x est donnée par :

$$\epsilon_r(x) = x^T \mathcal{P}^{-1} x \quad (45)$$

et l'énergie d'observation $\epsilon_o(x)$ obtenue quand le modèle est lâché d'un état initial x sans autre excitation en entrée ($u = 0$) est donnée par :

$$\epsilon_o(x) = x^T \mathcal{Q} x \quad (46)$$

Plus $\epsilon_r(x)$ est grand, plus l'état x est dit difficile à atteindre et inversement, plus $\epsilon_o(x)$ est faible, plus l'état x est dit difficile à observer. Ces critères énergétiques vont servir de base au partitionnement de l'état (32).

Toutefois, comme le suggère les définitions (43) ou (44), les gramiens dépendent de la base dans laquelle la réalisation du modèle est exprimée. Ainsi les énergies $\epsilon_r(x)$ et $\epsilon_o(x)$ dépendent également de cette base. Or dans une certaine base, un état x peut être difficile à atteindre mais facile à observer ou inversement. Il convient donc d'exprimer le modèle dans une base dans laquelle ces notions coïncident. Il s'agit de la **base équilibrée**. Pour une vue détaillée des notions de réalisation équilibrée, les lecteurs peuvent se référer à [17] [18]. Dans la suite, le principal intérêt de cette base \mathcal{B} réside dans le fait que les gramiens sont égaux et diagonaux :

$$\mathcal{P}_\mathcal{B} = \mathcal{Q}_\mathcal{B} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

Les éléments diagonaux de Σ sont appelées les **valeurs singulières de Hankel**. Contrairement aux gramiens, ces quantités sont indépendantes de la base dans laquelle est exprimée la réalisation du modèle et ils correspondent au carré des valeurs propres du produit des gramiens :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{P}\mathcal{Q})} = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{P}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B})}, \quad i = 1, \dots, n \quad (48)$$

Dans la base équilibrée, on peut remarquer que $\forall i = 1, \dots, n$, si e_i est i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n , alors :

$$\epsilon_r(e_i) = \sigma_i^{-1} = \epsilon_o(e_i)^{-1} \quad (49)$$

ainsi les états pour lesquels σ_i est faible sont à la fois difficiles à commander et difficiles à observer et peuvent donc être tronqués. La partition (32) correspond donc au tri des états dans la réalisation équilibrée par valeur singulière décroissante. Une décroissance rapide des valeurs singulières de Hankel est représentatif d'un modèle propice à la réduction et donne une indication sur la dimension r de l'espace \mathcal{V}_r .

Le modèle réduit \hat{H} obtenu par troncature équilibrée préserve la stabilité du modèle initial et se trouve être lui-même équilibré. De plus, la somme des valeurs singulières négligées permet d'obtenir une borne sur la norme \mathcal{H}_∞ de l'erreur. En effet :

$$\|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = \bar{\epsilon}_{r,\infty} \quad (50)$$

Cette borne donne une indication sur l'ordre réduit r nécessaire pour atteindre une bonne approximation. À noter que contraire-

ment à la troncature modale, la troncature équilibrée ne préserve pas les pôles du modèle initial.

D'un point de vue numérique, la troncature équilibrée requiert le calcul des deux gramiens qui sont solutions des équations de Lyapunov (15). La complexité numérique des algorithmes [19] [20] pour la résolution de ces équations rend l'approche adaptée à des modèles de dimension n modérée. Pour des modèles de très grande dimension où la réalisation (1) est creuse, il faut alors se tourner vers des méthodes de résolution approchées basées sur le fait que les gramiens associés sont souvent de rang faible [21]. Ces approches ne permettent toutefois plus nécessairement de garantir la stabilité du modèle réduit ni d'assurer la borne sur l'erreur d'approximation (50).

Calculer la matrice de passage dans la base équilibrée revient à diagonaliser simultanément deux matrices (semi) définies positives. Différentes techniques existent avec différentes propriétés numériques (voir par exemple [22] ou chapitre 7 de [14]).

Exemple 4 : mise en place de l'approximation équilibrée avec MATLAB

La troncature équilibrée est disponible au travers de la routine `balancmr` de la Robust Control Toolbox de MATLAB. Toutefois, comme la troncature modale, elle est relativement simple à mettre en œuvre, d'autant que les étapes les plus techniques sont déjà intégrées dans la Control Toolbox de MATLAB. Les étapes principales sont les suivantes :

1. Changement de la base de la réalisation $H = (A, B, C, D)$ pour la base équilibrée. Ce changement de base peut être réalisé au travers de la routine `balreal` de MATLAB,

```
[Hb, sigma] = balreal(H);
```

Les valeurs singulières de Hankel sont données dans `sigma` et peuvent être tracées pour avoir une idée de grandeur pour r . C'est dans cette étape que les gramiens du modèle sont calculés et diagonalisés.

À ce stade, on peut calculer les gramiens de `Hb` avec la routine `gram` et constater qu'ils sont égaux et diagonaux.

2. La routine `balreal` trie directement les états par σ_i décroissant, aussi, il reste simplement à tronquer la réalisation `Hb`, à l'ordre $r = 10$ par exemple :

```
r=10;
xi1=1:r;
Hr=ss(Hb.A(xi1, xi1), Hb.B(xi1,:), Hb.C(:,xi1), Hb.D);
```

3. (facultatif) Calcul de la borne (50) sur la norme \mathcal{H}_∞ de l'erreur.

Cette procédure est appliquée à la dernière (150-ème) sortie du modèle H_{900} de l'exemple 1 qui est réduit à l'ordre $r = 10$. Les valeurs singulières de Hankel normalisées du modèle sont tracées sur la figure 5 avec le ratio de la borne (50) sur la norme \mathcal{H}_∞ du modèle. Les gains des réponses fréquentielles de H_{900} et du modèle \hat{H} sont tracés sur la figure 6.

On peut observer que les valeurs singulières de Hankel décroissent très rapidement et que la plupart d'entre elles (pour $i > 100$) sont négligeables. Un certain nombre d'états peuvent d'ailleurs être éliminés avec la routine `minreal` qui cherche à éliminer les états non observables et non contrôlables d'un modèle. Une telle décroissance des valeurs singulières de Hankel est représentatif d'un modèle très propice à la réduction. Même parmi les 100 premières valeurs singulières, les ordres de grandeurs varient beaucoup et tronquer après la première chute ($r \approx 10$, où la droite verticale noire se situe) devrait être suffisant pour préserver un bon comportement entrée-sortie comme le suggère par ailleurs le ratio de la borne $\bar{e}_{r,\infty}$ sur la norme \mathcal{H}_∞ qui nous assure d'une erreur relative d'approximation faible.

Sur la figure 6, on peut observer que les réponses fréquentielles des deux modèles sont très proches, en particulier en basse fréquence où la majeure partie de l'énergie de la fonction de transfert se situe. Cette proximité se vérifie au travers des normes

des erreurs. En effet, pour la norme \mathcal{H}_∞ , on observe les erreurs suivantes :

$$\|H_{900} - \hat{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} / \|H_{900}\|_{\mathcal{H}_\infty} = 0,31 \% \quad \text{et} \quad \bar{e}_{r,\infty} / \|H_{900}\|_{\mathcal{H}_\infty} = 1,88 \% \quad (51)$$

et l'erreur relative en norme \mathcal{H}_2 est de 0,99 %. Ces erreurs sont plus faibles que celles observées avec la troncature modale dans l'exemple 3.

■ Variantes de l'approche

D'autres quantités d'intérêt peuvent être utilisées à la place des gramiens infinis définis par (43) et (44) dans ce processus d'équilibrage et de troncature et mènent à des alternatives à la troncature équilibrée avec des propriétés différentes. Pour une liste détaillée, les lecteurs peuvent se référer à [23], mais on notera notamment la troncature pondérée [24] ou limitée [25] en fréquence qui permet de reproduire le comportement du modèle de grande dimension dans une bande de fréquence définie et la troncature positive réelle qui permet de préserver la propriété de passivité d'un modèle lors de la réduction.

■ Lien avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres

La décomposition orthogonale aux valeurs propres (proper orthogonal decomposition en anglais, ou POD) est une méthode de réduction par projection très répandue du fait de sa simplicité et de son applicabilité aux modèles non linéaires (voir par exemple [26] et les références qu'il contient). Très succinctement, l'idée est de trouver la base V_r dans l'équation (25) de l'espace de faible dimension

\mathcal{V}_r à partir d'échantillons temporels $\{\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^N$ obtenus par simulation du modèle initial de grande dimension pour certaines entrées de commande $\mathbf{u}(t)$. Pour ce faire, les échantillons sont concaténés dans une matrice $X = [\mathbf{x}(t_1) \dots \mathbf{x}(t_N)] \in \mathbb{R}^{n \times N}$ et la décomposition en valeurs singulières (singular value decomposition en anglais, ou SVD) de cette matrice est calculée, $X = U\Sigma V^H$. Les valeurs singulières de X présentes sur la diagonale de Σ jouent un rôle semblable aux valeurs singulières de Hankel pour la troncature équilibrée et donnent une indication sur la dimension r de l'espace \mathcal{V}_r .

Ainsi, supposons que seuls les r premières valeurs singulières soient significatives, alors une base de \mathcal{V}_r est donnée par les r premières colonnes de U . Il se trouve que ce choix de base minimise l'erreur en norme 2 sur la matrice d'autocorrélation des données.

Comme cela est souligné dans [27] ou le chapitre 9 de [14], la troncature équilibrée peut s'interpréter comme le couplage d'une POD avec une projection de Petrov-Garlerkin sur des échantillons correspondants à la réponse impulsionnelle du modèle de grande dimension et de son adjoint.

Pour davantage de détails sur la POD et ses extensions, les lecteurs peuvent se référer à [26], [27].

2.3 Approximation optimale et interpolation

L'interpolation est une manière d'attaquer le problème de réduction et d'approximation de modèle. Bien que la thématique soit ancienne, son lien avec la réduction de modèle est relativement récente.

2.3.1 Cadre de l'interpolation et lien avec la projection

Pour rappel, le problème d'approximation basée données énoncé dans la section 1.1.2 consiste à construire un modèle \hat{H} tel que (3) de faible dimension qui satisfait les conditions d'interpolation tangentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H}(\mu_j) = \mathbb{I}_j^H H(\mu_j) \\ \text{pour } j = 1, \dots, q \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{H}(\lambda_i) \mathbf{r}_i = H(\lambda_i) \mathbf{r}_i \\ \text{pour } i = 1, \dots, k \end{array} \right. \quad (52)$$

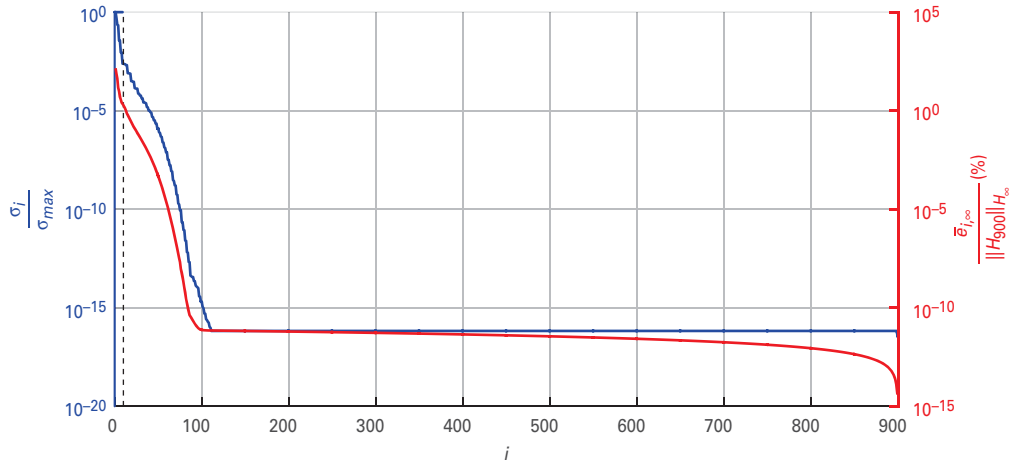


Figure 5 – Valeurs singulières de Hankel normalisées du modèle H_{900} et ratio de la borne $\bar{e}_{i,\infty}$ sur la norme \mathcal{H}_∞ du modèle

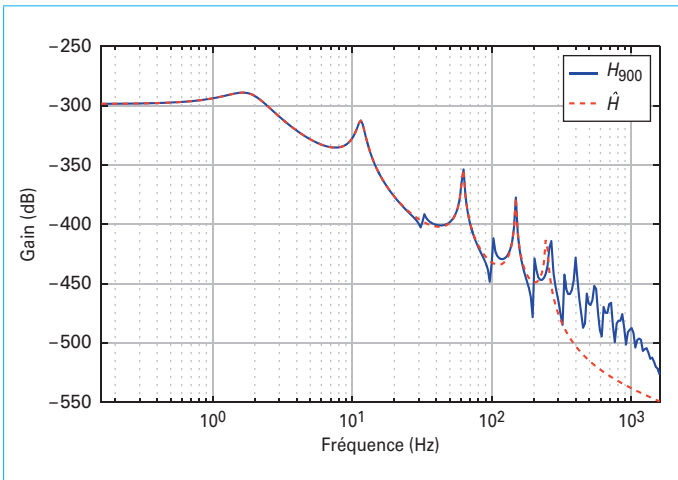


Figure 6 – Gain des réponses fréquentielles du modèle initial H_{900} et du modèle réduit H d'ordre $r = 10$ obtenu par troncature équilibrée

où $\{\mu_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}$ et $\{\mathbf{l}_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}^{n_v}$ sont les points et directions tangentielles à gauche et $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}$ et $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}^{n_u}$ sont les points et directions tangentielles à droite (dans (52) nous considérons μ_j et λ_i comme distincts). Ce problème d'interpolation présente un cadre simple et efficace pour approcher n'importe quelle fonction complexe H par une autre fonction plus simple \hat{H} . Au vu de la formulation de ce problème, il est évident que la qualité de l'approximation dépend directement du choix des points (μ_j et λ_i) et directions tangentielles (\mathbf{l}_j et \mathbf{r}_i). Ce choix a été étudié de différentes façons et dans des communautés diverses. Avant de présenter une méthode efficace dans le contexte de l'approximation de modèle, le lien entre ce problème d'interpolation (52) et le cadre de la projection présenté dans la section 2.1 est décrit ci-après dans le cas où H et \hat{H} sont respectivement décrits par des équations d'état, ou EDO, comme (1) et (3).

Étant donné un modèle H équipé de la réalisation (1) ainsi qu'une famille de points d'interpolation $\{\mu_j\}_{j=1}^q, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}$ tels que $(sI - A)$ et $(sI - \hat{A})$ soient inversibles pour $s = \mu_j, \lambda_i$, ainsi que $\{\mathbf{l}_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}^{n_v}$ et $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}^{n_u}$ comme des vecteurs non-triviaux, alors :

- 1/ si $(\lambda_i I - A)^{-1} B \mathbf{r}_i \in \text{span}(V_k)$, alors $H(\lambda_i) \mathbf{r}_i = \hat{H}(\lambda_i) \mathbf{r}_i$,
 - 2/ si $(\mathbf{l}_j^H C (\mu_j I - A)^{-1})^H \in \text{span}(W_q)$, alors $\mathbf{l}_j^H H(\mu_j) = \mathbf{l}_j^H \hat{H}(\mu_j)$,
 - 3/ si 1/ et 2/ validés, $r = q = k$ alors $\mathbf{l}_j^H H'(\sigma_l) \mathbf{r}_i = \mathbf{l}_j^H \hat{H}'(\sigma_l) \mathbf{r}_i$,
- $$\{\sigma_l\}_{l=1}^r = \{\lambda_i\}_{i=1}^k = \{\mu_j\}_{j=1}^q \quad (53)$$

où $V, W \in \mathbb{C}^{n \times r}$ sont des vecteurs de rang plein. Ce résultat est présenté de manière détaillée et didactique, et accompagné de nombreux commentaires et références bibliographiques dans [28].

Ce qui apparaît des items 1/ et 2/ de (53), est que les conditions d'interpolation (52), pour des points et directions tangentielles donnés, peuvent être atteintes par projection en utilisant les projecteurs V_k et W_q , de la même manière que dans la section 2.1. De plus, suivant l'item 3/, si ces points d'interpolation sont identiques, le modèle réduit et projeté via V_r et W_r interpole également tangentiellement les dérivées des modèles. Dans ce cas, l'interpolation tangentielle devient une interpolation Hermittienne bi-tangentielles, et est également connue comme de l'interpolation multimoments d'ordre un (on pourra également se référer à la thèse de [29] pour davantage de détails).

Exemple 5 : mise en place de l'approximation par interpolation avec MATLAB

L'approximation par interpolation via le cadre de la projection peut être réalisée de manière simple avec MATLAB et quelques manipulations algébriques. Dans cet exemple, la Control Toolbox de MATLAB est utilisée pour des raisons de simplicité (mais cette dernière n'est pas indispensable). L'interpolation pour deux points peut être obtenue avec les étapes suivantes :

1. Ici, nous utilisons le modèle d'ordre $n = 900$ de la poutre encastree utilisée dans l'exemple. À des fins didactique, nous ne considérons qu'une seule sortie du modèle de la poutre encastree H_{900} (le transfert force accélération en bout de poutre) :

```
H = H(150,1);
[A, B, C, D] = ssdata(H);
In = eye(4);
```

2. Choix des points et directions d'interpolation. Ici nous choisissons deux paires complexes conjuguées de pôles imaginaires purs, représentant des fréquences où la réponse fréquentielle présente des pics énergétiques (ici, nous prenons arbitrairement 1,723 Hz et 148,5 Hz) :

```
la = 2*pi*148.5*[1 -1]*i;
mu = 2*pi*1.723*[1 -1]*i;
r = [1 -1]*i;
l = [1 -1]*i;
```

3. À partir du modèle d'état et des points/directions d'interpolation, nous construisons les projecteurs V_k et W_q , ainsi que le modèle réduit H_r (ici $k = q = 2$) :

```
Vk = [(la(1)*In-A)\(B*r(1)) (la(2)*In-A)\(B*r(2))];
Wq = [(l(1)*C)\((mu(1)*In-A)\In)';
      (l(2)*C)\((mu(2)*In-A)\In)'];
Wq = Wq*(Wq'*Vk)\eye(2));
```

```
Hr = ss(Wq'*A*Vk, Wq'*B, C*Vk, D);
```

4. À présent, nous pouvons vérifier les conditions d'interpolation. En calculant les erreurs relatives des conditions associées aux items 1/ à 3/ de (53), on obtient alors :

```
1/ pour  $\lambda_1$ , 1.0238e-11
1/ pour  $\lambda_2$ , 1.0151e-11
2/ pour  $\mu_1$ , 2.9691e-10
2/ pour  $\mu_2$ , 3.0040e-10
3/ pour  $\lambda_1$ , 9.9978e-01
3/ pour  $\mu_1$ , 1.2538e+00
```

L'évaluation des expressions ci-dessus produit des nombres proches de la précision machine pour les items 1/ et 2/ mais plutôt élevés pour 3/, signifiant que les conditions d'interpolation sont bien atteintes en les points, et non en leur dérivée d'ordre un. Si maintenant nous comparons les réponses fréquentielles du modèle initial et réduit, d'ordre 2, on obtient la figure 7, sur laquelle on note bien que \hat{H} interpole H en les points λ_i et μ_j (des points imaginaires purs, situés sur l'axe des fréquences).

5. À présent, si nous effectuons la même interpolation mais pour $\mu = \lambda$, c'est-à-dire pour le même choix des conditions d'interpolation à gauche et à droite, on obtient :

```
1/ pour  $\lambda_1$  1.0397e-12
1/ pour  $\lambda_2$  9.4650e-13
2/ pour  $\mu_1$  1.0397e-12
2/ pour  $\mu_2$  9.4650e-13
3/ pour  $\lambda_1$  6.6893e-09
3/ pour  $\mu_1$  6.6893e-09
```

Dans ce cas, nous avons égalisation des fonctions H et \hat{H} , mais également de leur dérivées aux points d'interpolation, qui se trouve être la fréquence 148,5 Hz. Il est intéressant de noter qu'à présent, les réponses fréquentielles restituent parfaitement ce pic, comme illustré en figure 8.

Comme énoncé précédemment et illustré *via* l'exemple 5, le choix des points d'interpolation ainsi que les directions tangentielles sont d'une importance primordiale pour obtenir un bon modèle approché. Par la suite, nous considérerons que les points d'interpolation sont les mêmes, et qu'ils sont donnés en paires complexes conjuguées. Cette contrainte permet notamment de

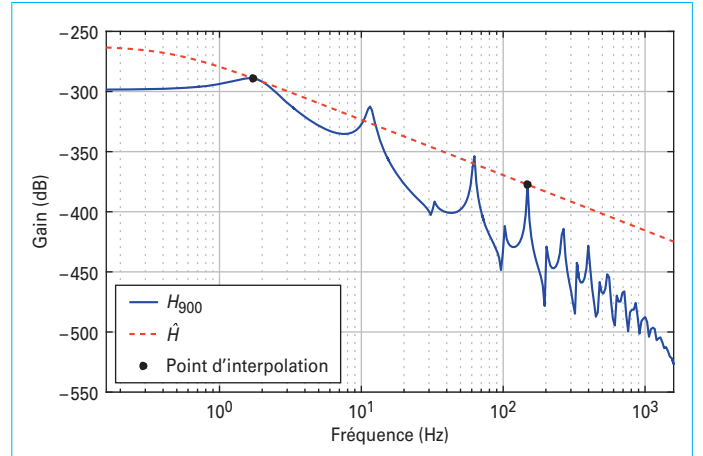


Figure 7 – Approximation de H_{900} par interpolation avec un modèle \hat{H} d'ordre $r = 2$. Avec $2\pi \cdot 1.723 \cdot [1 -1]^* i = \mu_j \neq \lambda_i = 2\pi \cdot 148.5 \cdot [1 -1]^* i$, comme donné à l'item 2

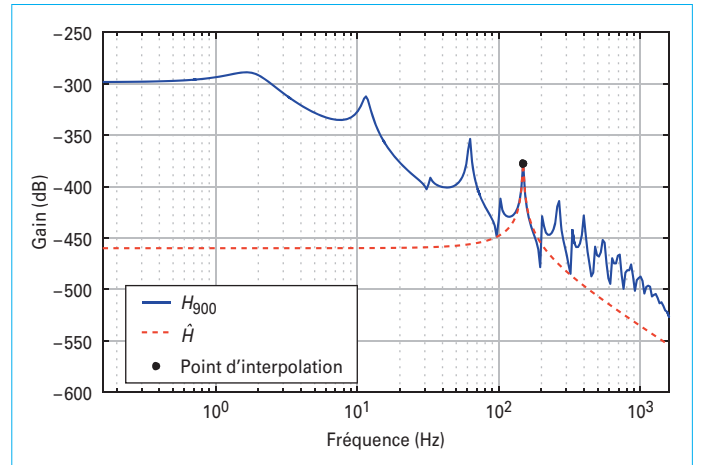


Figure 8 – Approximation de H_{900} par interpolation (Hermitienne) avec un modèle \hat{H} d'ordre $r = 2$. Avec cette fois $\mu_j = \lambda_i = 2\pi \cdot 148.5 \cdot [1 -1]^* i$

n'obtenir que des réalisations réelles, plus simples et applicables aux méthodes classiques. Toutefois, le lecteur constatera que le cadre de travail est bien plus large et que des réalisations complexes, rectangulaires, etc. peuvent être considérées.

2.3.2 Conditions d'optimalité en norme 2

Comme énoncé dans l'introduction, dans la section 1.2, un bon modèle approché peut être caractérisé au moyen d'une norme appropriée. La norme de système \mathcal{H}_2 se trouve être une bonne candidate car elle permet de mesurer des écarts entre modèles dynamiques et offre une interprétation physique intéressante. À partir de ce critère, le problème d'interpolation peut être vu comme un problème d'optimisation dans lequel les paramètres sont les points et directions d'interpolation. L'approximation au sens de la norme \mathcal{H}_2 a été considérée dans de nombreux articles [30]. Mathématiquement, étant donné le modèle H , le problème d'approximation \mathcal{H}_2 consiste donc à chercher un modèle \hat{H} tel que :

$$\hat{H} = \arg \min_{\substack{G \in \mathcal{H}_2 \\ \dim(G) = r \ll n}} \|H - G\|_{\mathcal{H}_2} \quad (54)$$

Dans le domaine fréquentiel, cela revient à minimiser l'écart moyen du modèle de l'erreur. Si une telle erreur est faible, alors cela permet de borner l'erreur maximale de sortie par rapport au modèle de grande dimension d'après (20).

Le problème (54) ainsi qu'une première solution sont formulés dans l'article [31]. La méthode proposée implique les grammiens, solutions des équations de Lyapunov (15), et des projecteurs V et W de dimension $n \times n$. Plus récemment, une solution extrêmement efficace numériquement est donnée dans les travaux de [32], suivis de [33] [30]. En effet, l'idée est de reformuler le problème (54) comme un problème d'interpolation, similaire à celui (53), mais impliquant cette fois des projecteurs de dimension $n \times r$. Étant donné H décrit comme (1) ou plus généralement comme (2), si \hat{H} , défini comme (3) est la solution du problème d'approximation (54), alors les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} H(-\lambda_l) \hat{\mathbf{b}}_l &= \hat{H}(-\lambda_l) \hat{\mathbf{b}}_l \\ \hat{\mathbf{c}}_l^H H(-\lambda_l) &= \hat{\mathbf{c}}_l^H \hat{H}(-\lambda_l) \\ \hat{\mathbf{c}}_l^H H'(-\lambda_l) \hat{\mathbf{b}}_l &= \hat{\mathbf{c}}_l^H \hat{H}'(-\lambda_l) \hat{\mathbf{b}}_l \end{aligned} \quad (55)$$

où $[\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_r]^H = R\hat{B}$ et $[\hat{\mathbf{c}}_1, \dots, \hat{\mathbf{c}}_r] = \hat{C}L$ et où L et R sont les vecteurs propres à gauche et à droite associés à $\hat{\lambda}_l$, les valeurs propres de \hat{A} .

À ce stade, il est intéressant de noter alors que les conditions d'optimalité \mathcal{H}_2 sont en réalité des conditions d'interpolation Hermitienne bitangentielle, similaire à (53), où les points et directions d'interpolation sont directement liés aux valeurs et vecteurs propres de la matrice \hat{A} du modèle réduit. Or, il est évident que nous ne connaissons pas les valeurs propres du modèle réduit \hat{H} *a priori*, c'est pourquoi les auteurs de [30] ont développé un algorithme itératif, appelé **IRKA** pour *iterative rational Krylov algorithm*, qui permet de déterminer les points et directions tangentielles permettant d'atteindre les conditions d'optimalité \mathcal{H}_2 du premier ordre (55), ainsi que les projecteurs associés (V_r et W_r).

Exemple 6 : mise en place de l'approximation optimale \mathcal{H}_2 par interpolation avec MATLAB et la boîte à outils MOR

Dans cet exemple, nous reprenons le modèle H_{900} (une entrée-sortie) de la poutre encastrée et appliquons une méthode d'approximation tangentielle \mathcal{H}_2 optimale pour obtenir \hat{H} . Pour cela, nous utilisons la boîte à outils MOR, dont les fonctionnalités sont décrites en section 3.1. Ce modèle est obtenu par les fonctions suivantes :

```
H = H(150,1);
r = 10;
opt.extraInfo = true;
[Hr, info] = mor.lti(H, r, opt);
```

On remarque sur la figure 9 que le modèle est bien restitué. De plus, on note que les points d'interpolation optimaux, matérialisés par les points noirs (qui sont les fréquences associées aux points d'interpolation), sont localisés aux pics de la fonction de transfert, là où l'énergie est la plus importante. Cette propriété est intéressante, car elle signifie bien que l'algorithme IRKA, qui se comporte comme un algorithme du point fixe, choisit naturellement les points d'interpolation proche des fréquences significatives du modèle. D'un point de vue quantitatif, l'erreur relative en norme \mathcal{H}_∞ et en norme \mathcal{H}_2 sont respectivement de 0,32 % et 0,80 %. Il est à noter que dans le cas de la réduction par troncature équilibrée, nous avons obtenu respectivement 0,31 % et 0,99 %. L'erreur en norme \mathcal{H}_2 est donc bien meilleure avec cette méthode d'interpolation tangentielle. Nous rappelons que les méthodes par troncature ne sont pas destinées à réduire une quelconque norme. Il n'est donc pas surprenant de trouver un meilleur résultat en norme \mathcal{H}_2 par l'approche d'interpolation que par troncature.

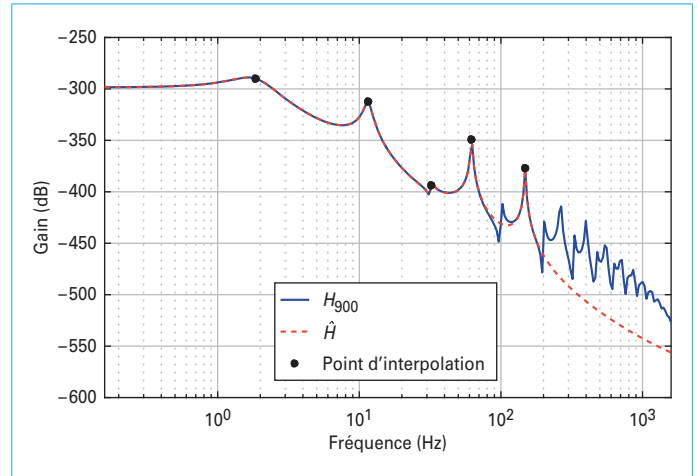


Figure 9 – Approximation de H_{900} par interpolation optimale \mathcal{H}_2 avec un modèle \hat{H} d'ordre $r = 10$

La littérature sur les méthodes d'interpolation est de plus en plus importante car ces dernières montrent de très bonnes performances en termes d'approximation, mais également car elles sont plus adaptables à la très grande dimension. En effet, alors que les approches par troncature requièrent une transformation via un projecteur de dimension $n \times n$, puis une troncature, les approches par interpolation font intervenir des projecteurs de dimension réduite $n \times r$, ce qui les rend plus attractives dans le cadre de réduction de modèles de très grande taille, comme ceux que l'on peut rencontrer en physique (structure, mécanique des fluides...).

2.4 Approximation basée données

À présent, il apparaît clairement que le cadre de l'interpolation tangentielle offre un confort considérable pour approcher le comportement d'une fonction de transfert. Si nous revenons au problème décrit en (52), et que l'on note $\mathbf{w}_i = H(\lambda_i) \mathbf{r}_i$, nous avons $e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i$ qui est exactement la réponse du modèle H à une entrée $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i$. Dans ce cas, les conditions d'interpolation tangentielles qui caractérisent \hat{H} peuvent en principe être obtenues directement à partir des mesures du système initial. À titre d'exemple, si $\lambda_i = i\omega_0$, la mesure de observée en \mathbf{w}_i est un sinus à une pulsation pure à ω_0 . Le problème alternatif à (52) que nous considérons à présent est donc basé exclusivement sur les réponses entrées-sorties et où aucune connaissance *a priori* du modèle n'est nécessaire.

2.4.1 Construction d'un interpolant par l'approche de Loewner

Étant données les fréquences d'interpolation $\{\mu_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}$ et directions tangentielles $\{\mathbf{l}_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}^{n_y}$ à gauche, produisant les réponses à gauche $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}^{n_u}$ ainsi que les fréquences d'interpolation interpolation $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}$ et directions tangentielles $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}^{n_u}$ à droite, produisant les réponses à droite $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{C}^{n_y}$ (avec $q + k = N$), on cherche à trouver un modèle \hat{H} ayant une représentation comme (3) qui approche tangentiellement les don-

nées, *i.e.* qui satisfait les conditions tangentielles à gauche et à droite suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_j^H \hat{H}(\mu_j) = \mathbf{v}_j^H \\ \text{pour } j = 1, \dots, q \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \hat{H}(\lambda_i) \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i \\ \text{pour } i = 1, \dots, k \end{array} \right. \quad (56)$$

Bien que ce problème se rapproche fortement du domaine de l'identification (boîte noire) de modèle, ici nous parlerons bien d'approximation de modèle basée données, car nous ne disposons que de réponses fréquentielles. La singularité de l'approche utilisée réside dans l'utilisation de méthode d'interpolation au travers du cadre des matrices de Loewner. Cette approche est énoncée clairement dans [34]. Cette famille de matrices est l'ingrédient principal des méthodes d'interpolation basées données, car elle permet d'en déduire immédiatement la réalisation de l'interpolant exact et optimal.

Nota : le terme optimal n'est en aucun cas lié à une norme de système mais bien aux conditions d'interpolations. En effet, il est mathématiquement impossible de parler d'erreur en norme de système dans la mesure où nous ne disposons que de données discrètes.

Nous noterons :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{C}^{q \times q} \\ L^H = [\mathbf{l}_1 \dots \mathbf{l}_q] \in \mathbb{C}^{n_y \times q} \\ V^H = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_q] \in \mathbb{C}^{n_u \times q} \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k \times k} \\ R = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k] \in \mathbb{C}^{n_u \times k} \\ W = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_k] \in \mathbb{C}^{n_y \times k} \end{array} \right. \quad (57)$$

En suivant les notations présentées en (56), nous définissons alors les matrices de Loewner et *shifted Loewner* comme suit, pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, q$:

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}]_{j,i} &= \frac{\mathbf{v}_j^H \mathbf{r}_i - \mathbf{l}_j^H \mathbf{w}_i}{\mu_j - \lambda_i} = \frac{\mathbf{l}_j^H (H(\mu_j) - H(\lambda_i)) \mathbf{r}_i}{\mu_j - \lambda_i} \\ [\mathbb{L}_\sigma]_{j,i} &= \frac{\mu_j \mathbf{v}_j^H \mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{l}_j^H \mathbf{w}_i}{\mu_j - \lambda_i} = \frac{\mathbf{l}_j^H (\mu_j H(\mu_j) - \lambda_i H(\lambda_i)) \mathbf{r}_i}{\mu_j - \lambda_i} \end{aligned} \quad (58)$$

Sur la base des définitions (57) et (58), les auteurs de [34] ont démontrés que, pour $k = q$, le modèle $\hat{H} : (\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, 0)$ défini par le modèle descripteur :

$$\hat{H} : \begin{cases} \hat{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{A} \mathbf{x}(t) + \hat{B} \mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (59)$$

avec

$$\hat{E} = -\mathbb{L}, \hat{A} = -\mathbb{L}_\sigma, \hat{B} = V \text{ et } \hat{C} = W \quad (60)$$

satisfaisait les conditions d'interpolation (56). De plus, et c'est une propriété extrêmement importante des systèmes linéaires, le modèle obtenu défini par :

$$\hat{H}(s) = W(\mathbb{L}_\sigma - s\mathbb{L})^{-1}V \quad (61)$$

est une réalisation d'ordre minimale qui interpole les données et satisfait les conditions (57). Le lecteur notera que le modèle \hat{H} décrit ci-dessus présente une matrice \hat{E} . Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette matrice, mais il convient de noter que si le rang de cette dernière est plein, ce système peut être mis sous la forme classique comme celle donnée en (3) simplement en inversant \hat{E} .

De fait, si les données sont générées à partir d'un modèle linéaire de dimension n , et que le nombre de données $N = 2n$ alors le modèle obtenu est exactement celui d'ordre n .

2.4.2 Minimalité de l'interpolant et approximation

Si l'on considère à présent que plus de données que nécessaire sont fournies, *i.e.* $N > 2n$, ce qui est réaliste dans bien des cas

applicatif, il est possible de retrouver l'ordre minimal de l'interpolant. En effet, si :

$$\text{rank}(\alpha\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma) = \text{rank}[\mathbb{L} \ \mathbb{L}_\sigma] = \text{rank}[\mathbb{L}^T \ \mathbb{L}_\sigma^T]^T = n^* \leq n \quad (62)$$

pour tout $\alpha \in \{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$, alors, une réalisation minimale du modèle interpolant ces données est obtenue comme suit :

$$\hat{H} : \begin{cases} -Y^T \mathbb{L} \mathbf{x}(t) = -Y^T \mathbb{L}_\sigma \mathbf{x}(t) + Y^T V \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = W \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (63)$$

où $X \in \mathbb{C}^{k \times n^*}$ et $Y \in \mathbb{C}^{q \times n^*}$ sont les matrices orthogonales de la décomposition en valeurs singulières (avec $\Sigma \in \mathbb{C}^{n^* \times n^*}$) :

$$\alpha\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma = Y \Sigma X^T \quad (64)$$

En bref, nous pouvons dire que les matrices de Loewner encodent le degré minimal McMillian d'une réalisation. À ce stade, il est alors intéressant de noter que l'application d'une SVD :

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} \quad (65)$$

où $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ et Y_1, Y_2, X_1, X_2 sont de dimensions appropriées permet de construire une réalisation pour le modèle réduit \hat{H} comme :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= (\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, 0) \\ &= (-Y_1^T \mathbb{L} X_1, -Y_1^T \mathbb{L}_\sigma X_1, Y_1^T V, W X_1, 0) \end{aligned} \quad (66)$$

Cette démarche permet de résoudre le problème d'approximation basée données énoncé dans la section 1.1.2 et fournit un moyen de gérer l'erreur d'interpolation [35].

Exemple 7 : mise en place de l'approximation de données par interpolation avec MATLAB et la boîte à outils MOR

Dans cet exemple, nous reprenons le modèle H_{900} de la poutre encastree pour générer des données afin d'appliquer la méthode d'approximation tangentielle basée sur les matrices de Loewner, pour obtenir \hat{H} . Pour cela, nous utilisons la boîte à outils MOR. Ce modèle est obtenu par les fonctions suivantes :

```
H = H(150,1);
W = logspace(0,4,300);
FR = freqresp(H, W);
r = [];
[Hr, info] = mor.lti(H, r);
```

À présent, nous réalisons la même approximation mais en cherchant un modèle \hat{H} d'ordre $r = 10$.

```
r = 10;
[Hr, info] = mor.lti(H, r);
```

D'un point de vue quantitatif, l'erreur relative en norme \mathcal{H}_∞ et en norme \mathcal{H}_2 sont respectivement de 0,32 % de 0,81 %. Dans le cas de l'interpolation \mathcal{H}_2 nous avons obtenu respectivement 0,32 % de 0,80 %, ce qui est très proche. Toutefois, il est à noter que ce n'est pas toujours le cas dans la mesure où l'interpolation basée données ne cherche aucunement à minimiser une norme de système, comme c'est le cas dans l'interpolation optimale \mathcal{H}_2 , qui utilise un modèle en entrée.

En résumé, les méthodes d'interpolation basées données permettent d'approximer un modèle uniquement à partir de la réponse fréquentielle entrée-sortie, sans connaissance *a priori* du modèle. De plus, l'approche présentée, basée sur les matrices de Loewner, permet de trouver le degré minimal de la réalisation permettant de garantir les conditions d'interpolation tangentielles. Enfin, au travers d'une factorisation matricielle, cette dernière méthode permet également de construire des modèles approchés.

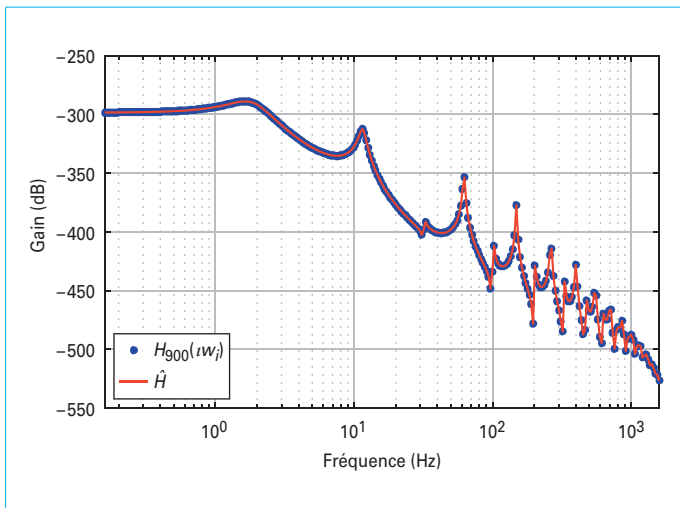


Figure 10 – Approximation de H_{900} par interpolation Hermittienne exacte avec un modèle H d'ordre $r = 60$

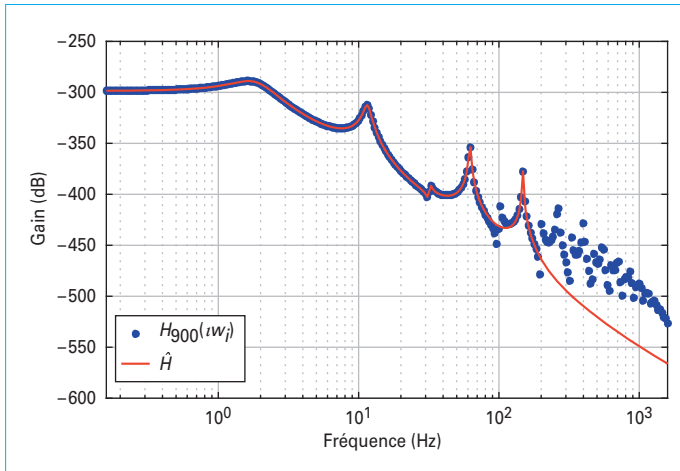


Figure 11 – Approximation de H_{900} par interpolation Hermittienne avec un modèle H d'ordre $r = 10$

De fait, bien que l'approche soit similaire à l'identification de modèle, elle est considérée comme une méthode d'approximation plutôt que méthode d'identification.

3. Boîte à outils MOR

Comme cela a été mentionné dans les exemples précédents, des outils pour l'approximation de modèles de grande dimension sont disponibles dans MATLAB. D'autres codes existent et le wiki sur la réduction de modèle MOR Wiki en liste un certain nombre.

Parmi ces codes, la boîte à outils MOR est développée par les auteurs dans le cadre d'une démarche de valorisation et de transfert de technologies vers l'industrie (voir le site de MOR DIGITAL SYSTEMS). L'objectif de cette section est de présenter cet outil. Plus particulièrement, ses fonctionnalités sont esquissées dans la section 3.1 et des cas d'utilisation plus avancés sont présentés dans la section 3.2.

3.1 Description générale de MOR

MOR est une boîte à outils basée sur MATLAB qui vise à réunir des méthodes pour l'approximation de modèles dynamiques de grande dimension. En particulier, elle contient diverses approches pour traiter les deux problèmes abordés dans cet article, à savoir :

- 1/ le problème de réduction de modèles dynamiques LTI énoncé dans la section 1.1.1 ;
- 2/ le problème d'interpolation de données fréquentielles entrées/sorties énoncé dans la section 1.1.2.

Les algorithmes de la boîte à outils MOR cherchent à générer un modèle d'état tel que (3) dont le comportement entrée-sortie est proche de celui du modèle initial. Par ailleurs, la boîte à outils se complète de divers outils d'analyse pour évaluer la pertinence du modèle réduit.

Comme cela a déjà été illustré dans les exemples de l'article, l'appel aux méthodes s'effectue au travers d'une interface unifiée comme suit :

```
[Hr, info] = mor.lti(H, r, opt)
```

où H est le modèle de grande dimension, donné soit par sa représentation d'état (1) soit par un jeu de données fréquentielles, r est la dimension du modèle réduit désiré, opt est une structure contenant les options, Hr est le modèle réduit, $info$ est une structure donnant des informations sur le processus de réduction comme les erreurs d'approximation si celles-ci sont disponibles à moindre coût.

Les méthodes disponibles sont des variantes ou des versions avancées des techniques de base présentées dans cet article. En particulier, diverses options permettent d'ajuster au mieux le processus de réduction au modèle considéré. Ces options varient en fonction de la méthode utilisée, mais on notera la possibilité : de préciser une bande de fréquences sur laquelle le modèle réduit doit être particulièrement précis, de forcer la stabilité du modèle réduit, de préserver le gain statique ou certaines valeurs propres.

De plus, certaines des méthodes exploitent la nature creuse des modèles et peuvent ainsi être appliquées à des modèles de très grande dimension ayant plusieurs centaines de milliers d'états que l'on peut rencontrer en physique des structures, des fluides, systèmes biologiques, phénomènes transport de chaleur, etc.

3.2 Cas d'étude avancés

Cette section a pour objectif d'évoquer des cas d'études plus avancés dans lesquels l'approximation s'est révélée être un outil important pour la finalité de l'application. Ces cas d'études ont fait l'objet de publications spécifiques et le but ici n'est pas d'en rappeler tous les détails mais au contraire d'en tracer les grandes lignes, par thématique.

■ Réduction pour le contrôle en aéronautique

Afin de relever les défis associés à la réduction de leur impact environnemental, les avions civils doivent être optimisés au mieux.

Cela passe, entre autres choses, par l'utilisation de méthodes de contrôles actifs qui visent à augmenter les performances dynamiques des avions. En effet, la masse est l'un des principaux leviers pour réduire la consommation. Or, les ingénieurs aéronautiques font face ici à des injonctions contradictoires. En effet, si réduire la masse de l'avion, notamment au travers de l'allègement de sa structure, permet de diminuer la consommation, cela rend également l'avion plus flexible. Or, cette flexibilité complexifie d'autant la satisfaction des contraintes de certifications, notamment en ce qui concerne les charges dynamiques maximales qui doivent être supportables par l'avion. L'ajout de systèmes de contrôle actif est une solution à cette problématique.

Dans ce contexte, la réduction de modèles est un outil indispensable à la synthèse de contrôleurs. En effet, la flexibilité des avions civils modernes induit une superposition fréquentielles des dynamiques dites rigides aux dynamiques flexibles. Dès lors, les modèles doivent représenter ces interactions afin que l'action des différentes lois de contrôle ne s'opposent pas. Ces modèles, dits aéroélastiques, sont obtenus en partie par des méthodes aux éléments finis et sont donc de grande dimension. De fait, les outils de contrôle modernes ne sont pas adaptés à de telles dimensions et une étape de réduction est une façon de contourner le problème.

La boîte à outils MOR a été utilisée dans ce contexte pour différents cas d'études :

- Dans l'objectif de la conception d'une loi de contrôle visant à diminuer les vibrations subies par un avion d'affaire, une méthode d'approximation basée modèle limitée en fréquence a été utilisée et a permis de représenter fidèlement le comportement du modèle initial sur la bande de fréquence d'intérêt pour le contrôle [36]. Ce modèle d'ordre 18 (à la place de ~ 600) a pu ensuite être utilisé efficacement pour la synthèse d'un contrôleur robuste [37]. La technique d'approximation basée données présentée dans la section 2.4 a alors été utilisée pour générer des modèles à partir de données issues d'essais vibration au sol sur un avion réel pour s'assurer que les performances attendues étaient en effet atteintes en pratique [38]. Des essais en vols ont par la suite été réalisés et ont confirmé la pertinence de la loi synthétisée par ce processus.

- De manière similaire, dans le cadre de l'étude de systèmes de contrôle pour l'allègement de charges dynamiques, une méthode basée données a été utilisée pour générer des modèles exploitables par les outils de synthèse robustes. En particulier, une telle approche a permis de générer un modèle rationnel de faible dimension à partir d'une fonction de transfert irrationnelle d'une part [39] ou de données fréquentielles issues d'un simulateur numérique d'autre part [40].

- Plus généralement, des méthodes d'approximation basées modèles ou données ont été utilisés pour générer des modèles aéroélastiques paramétriques en fonction par exemple du cas de masse de l'avion [41]. De tels modèles ont par la suite été exploités dans la conception de lois de contrôle robuste à cette variation paramétrique.

■ Réduction pour la modélisation et le contrôle d'écoulements

La dynamique des fluides est un sujet bien évidemment central en aéronautique, mais pas uniquement. Les équations de Navier-Stokes et ses dérivées sont en effet le socle commun pour la modélisation d'écoulements très variés allant de celui entourant l'aile d'un avion à celui présent dans des canaux hydroélectriques. Sous des objectifs pouvant être très divers, la problématique du contrôle actif des écoulements est centrale et se heurte à la complexité des modèles considérés. Sans même parler des équations de Navier-Stokes directement, leur discrétisation spatiale et linéarisation mène généralement à des modèles de grande, voire très grande dimension avec plusieurs centaines de milliers ou plusieurs millions d'états. Pour de telles dimensions, les outils de synthèse de lois sont totalement inadaptés, tout comme de nombreux outils de simulation et d'analyse.

Dans ce contexte également, les outils d'approximation ont permis d'apporter une solution à ces problématiques. Ainsi, une méthode d'approximation basée données a été utilisée pour générer un modèle rationnel et paramétrique simple à partir d'une fonction de transfert irrationnelle, elle aussi paramétrique, représentant le comportement fréquentiel d'un canal hydroélectrique en fonction d'un débit moyen [42].

Dans le cadre d'un problème de contrôle d'écoulement visant à diminuer les instabilités dans une cavité surplombée par un flux d'air, des techniques d'approximation basées modèles ont permis de représenter fidèlement différents modèles ayant $\sim 680\,000$ états, correspondant chacun à un cas de nombre de Reynolds, avec des modèles d'ordre ~ 20 . Ces derniers ont alors pu être interpolés pour former un modèle paramétrique de faible dimension [43]. Cette démarche a ensuite été étendue au travers d'un code haute fidélité générant des données fréquentielles entrée-sortie qui ont été interpolées avec une approche de Loewner [44].

4. Conclusion

L'approximation de modèles linéaires est considérée par certains comme un sujet clos, et, s'il est vrai que les fondements des techniques développées ne changeront probablement plus beaucoup, un effort considérable reste à fournir pour surmonter les problèmes numériques qui peuvent surgir dans ce cas simple. En particulier, le calcul des normes des erreurs reste très délicat quand des modèles à plusieurs dizaines de milliers d'états sont impliqués et certains algorithmes restent numériquement très sensibles quand ils sont utilisés sur des modèles mal conditionnés.

De plus, des indicateurs accessibles et fiables d'analyse de la qualité d'un modèle réduit restent largement sous-développés, notamment pour juger de la pertinence d'un modèle réduit pour certaines tâches spécifiques comme la synthèse de contrôleur. En effet, les techniques présentées dans cet article sont des techniques qui visent à reproduire le comportement en boucle ouverte d'un modèle, mais peu de garanties existent pour préjuger de la similitude des comportement en boucle fermée. Au-delà des modèles linéaires tels que considérés dans cet article, la problématique d'approximation de modèles de grande dimension reste un domaine de recherche très actif. La tendance vise à étendre les méthodes qui ont été présentées ici à des structures de modèles plus riches : linéaire paramétrique, hybride, bilinéaire, linéaire variant dans le temps ou encore directement non linéaire. Toutefois, du fait de la complexité de ces structures et des concepts théoriques associés, les garanties offertes par les méthodes sont souvent assez restreintes et rendent le processus d'approximation relativement heuristique et délicat pour le moment.

Parmi les structures de modèle évoquées, l'approximation de modèles linéaires paramétriques nous semble être la prochaine étape la plus intéressante et accessible. En effet, une telle structure est à la fois bien plus générale qu'un simple modèle linéaire et de nombreux outils théoriques d'analyse restent disponibles pour évaluer la qualité du modèle réduit. Cela ouvre par ailleurs la voie à la création de modèles dynamiques efficaces dans des processus d'optimisation multidisciplinaires.

La possibilité de pouvoir réduire de manière générique un modèle non linéaire quelconque reste encore très éloignée, et ce, malgré l'engouement que pourraient générer certaines techniques à la mode, aux fondements par ailleurs déjà connus en identification [45], [46], [47], comme l'apprentissage. En effet, un modèle non linéaire boîte noire requiert de travailler dans le domaine temporel sur des trajectoires. Or, s'il est de grande dimension, la génération de telles trajectoires est en soit un problème. De plus, analyser la pertinence du modèle de manière globale s'avère très délicat. Dans de tels cas, des méthodes de projections basées sur des bases réduites [26] conservent un intérêt particulier et s'accompagnent d'outils d'analyse [48].

5. Sigles, notations et symboles

Symbole	Description
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
i	Variable complexe telle que $i^2 = -1$
$Re(z)$	Partie réelle de $z \in \mathbb{C}$
$Im(z)$	Partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
$span(A)$	Espace engendré par les colonnes de la matrice A
$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	Matrice diagonale contenant les éléments λ_i
$trace(A)$	Trace de la matrice A
$det(A)$	Déterminant de la matrice A
$rank(A)$	Rang de la matrice A

Symbole	Description
$\ A\ _F$	Norme de Frobenius de la matrice A
$\bar{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A
A^H	Transposée conjuguée de la matrice A
$\mathcal{L}_2(\mathcal{I})$	Espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur \mathcal{I}
\mathcal{H}_2	Sous-espace de $\mathcal{L}_2(i\mathbb{R})$ des fonctions complexes analytiques dans la demi-plan complexe droit
$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{I})$	Espace de Lebesgue des fonctions bornées sur \mathcal{I}
\mathcal{H}_∞	Sous-espace de $\mathcal{L}_\infty(i\mathbb{R})$ des fonctions complexes analytiques et bornées dans le demi-plan complexe droit
$\mathcal{L}^{-1}(H)(t)$	Transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert $H(s)$

Approximation de modèles dynamiques linéaires de grande dimension

par **Charles POUSSOT-VASSAL**

Chercheur

ONERA, département Traitement de l'information et systèmes, Toulouse, France

et **Pierre VUILLEMIN**

Chercheur

ONERA, département Traitement de l'information et systèmes, Toulouse, France

Sources bibliographiques

- [1] COOMAN (A.) et al. – *Model-free closed-loop stability analysis : A linear functional approach*. In : IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 66.1, p. 73-80 (2018).
- [2] GLOVER (K.). – *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds*. In : International Journal of Control 39.6, p. 1115-1193 (1984).
- [3] MARI (J.). – *Modifications of rational transfer matrices to achieve positive realness*. In : Signal Processing 80.4, p. 615-635 (2000).
- [4] BENNER (P.) et STYKEL (T.). – *Surveys in Differential-Algebraic Equations IV. Differential-Algebraic Equations Forum*. In : Springer. A. Ilchmann et T. Reis Eds., Chap. Model order reduction for differential-algebraic equations : a survey (2016).
- [5] TOMLIJANOVIC (Z.), BEATTIE (C.A.) et GUGERCIN (S.). – *Damping optimization of parameter dependent mechanical systems by rational interpolation*. In : Advances in Computational Mathematics (2018).
- [6] BALAS (G.J.), BOKOR (J.) et SZABO (Z.). – *Invariant Subspaces for LPV Systems and their Application*. In : IEEE Transactions on Automatic Control 48, p. 2065-2069 (2003).
- [7] EID (R.), LOHMANN (B.) et PANZER (H.). – *Interpolation-based Parametric Model Reduction using Krylov Subspaces*. In : Presented at the Autumn School on Future Developments in Model Order Reduction. Terschelling, The Netherlands (2009).
- [8] IONITA (A.C.) et ANTOULAS (A.C.). – *Data-Driven Parametrized Model Reduction in the Loewner Framework*. In : SIAM Journal on Scientific Computing 36.3, A984-A1007 (2014).
- [9] DOYLE (J.), FRANCIS (B.) et TANNENBAUM (A.). – *Feedback Control Theory* (1990).
- [10] ZHOU (K.), DOYLE (J.C.) et GLOVER (K.). – *Robust and optimal control*. Pentice Hall (1995).
- [11] VUILLEMIN (P.). – *Frequency-limited approximation of large-scale LTI dynamical models*. Thèse de doct. Université de Toulouse (2014).
- [12] PANZER (H.) et al. – *Generating a Parametric Finite Element Model of a 3D Cantilever Timoshenko Beam Using Matlab (Vol. TRAC-4)*. Rapp. tech. on Automatic Control (2009).
- [13] SAAD (Y.). – *Iterative methods for sparse linear systems*. 2nd Edition. SIAM (2003).
- [14] ANTOULAS (A.C.). – *Approximation of large-scale dynamical systems*. Advances in Design and Control. SIAM (2005).
- [15] LIU (Y.) et ANDERSON (B.D.O.). – *Singular perturbation approximation of balanced systems*. In : International Journal of Control 50.4, p. 1379-1405 (1989).
- [16] ROMMES (J.) et MARTINS (N.). – *Efficient computation of multivariable transfer function dominant poles using subspace acceleration*. In : IEEE Transactions on Power Systems 21, p. 1471-1483 (2006).
- [17] MOORE (B.). – *Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction*. In : IEEE Transactions on Automatic Control 26.1, p. 17-32 (1981).
- [18] PERNEBO (L.) et SILVERMAN (L.). – *Model reduction via balanced state space representations*. In : IEEE Transactions on Automatic Control 27.2, p. 382-387 (1982).
- [19] BARTELS (R.H.) et STEWART (G.W.). – *Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$* . In : Commun. ACM 15, p. 820-826 (1972).
- [20] HAMMARLING (S.J.). – *Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation*. In : IMA Journal of Numerical Analysis 2.3, p. 303-323 (1982).
- [21] LI (J.R.) et WHITE (J.). – *Low rank solution of Lyapunov equations*. In : SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 24.1, p. 260-280 (2002).
- [22] LAUB (A.J.) et al. – *Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms*. In : IEEE Transactions on Automatic Control 32.2, p. 115-122 (1987).
- [23] GUGERCIN (S.) et ANTOULAS (A.C.). – *A survey of model reduction by balanced truncation and some new results*. In : International Journal of Control 77.8 (2004), p. 748-766.
- [24] ENNS (D.F.). – *Model reduction with balanced realizations : An error bound and a frequency weighted generalization*. In : Proceedings of the Conference on Decision and Control, p. 127-132 (1984).
- [25] GAWRONSKI (W.) et JUANG (J.). – *Model reduction in limited time and frequency intervals*. In : International Journal of Systems Science 21.2, p. 349-376 (1990).
- [26] CHATURANTABUT (S.) et SORESENSEN (D.C.). – *Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation*. In : SIAM Journal on Scientific Computing 32.5, p. 2737-2764 (2010).
- [27] WILLCOX (K.) et PERAIRE (J.). – *Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition*. In : AIAA Journal 40.11, p. 2323-2330 (2002).
- [28] ANTOULAS (A.C.), BEATTIE (C.A.) et GUGERCIN (S.). – *Efficient Modeling and Control of LargeScale Systems*. In : Robotics. Springer-Verlag. Chap. 1 – Interpolatory model reduction of large-scale dynamical systems, p. 3-58 (2010).
- [29] GRIMME (E.J.). – *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Thèse de doct. University of Illinois (1997).
- [30] GUGERCIN (S.), ANTOULAS (A.C.) et BEATTIE (C.A.). – *\mathcal{H}_2 Model Reduction for Large Scale Linear Dynamical Systems*. In : SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 30.2, p. 609-638 (2008).
- [31] WILSON (D.A.). – *Model reduction for multivariable systems*. In : International Journal of Control 20.1, p. 57-64 (1974).
- [32] GALLIVAN (K.A.), VANDEROPE (A.) et VAN DOOREN (P.). – *Model reduction of MIMO systems via tangential interpolation*. In : SIAM Journal of Matrix Analysis and Application 26.2, p. 328-349 (2004).
- [33] VAN DOOREN (P.), GALLIVAN (K.A.) et ABSIL (P.A.). – *\mathcal{H}_2 -optimal model reduction of MIMO systems*. In : Applied Mathematics Letters 21.12, p. 53-62 (2008).
- [34] MAYO (A.J.) et ANTOULAS (A.C.). – *A framework for the solution of the generalized*

- realization problem*. In : Linear Algebra and its Applications 425.2, p. 634-662 (2007).
- [35] ANTOULAS (A.C.), LEFTERIU (S.) et IONITA (A.C.). – *Model reduction and approximation theory and algorithms*. In : SIAM, Philadelphia. P. Benner, A. Cohen, M. Ohlberger et K. Willcox Eds. Chap. A tutorial introduction to the Loewner framework for model reduction (2016).
- [36] VUILLEMIN (P.), POUSSOT-VASSAL (C.) et ALAZARD (D.). – \mathcal{H}_2 optimal and frequency limited approximation methods for large-scale LTI dynamical systems. In : Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Systems Structure and Control. p. 719-724 (2013).
- [37] POUSSOT-VASSAL (C.) et al. – *Business Jet Large-Scale Model Approximation and Vibration Control*. In : Proceedings of the 11th IFAC ALCOSP, p. 199-204 (2013).
- [38] MEYER (C.) et al. – *Demonstration of innovative vibration control on a Falcon Business Jet*. In : Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (2017).
- [39] OSSMANN (D.) et POUSSOT-VASSAL (C.). – *Minimal order disturbance estimator design for aircraft load alleviation control*. In : Proceedings of the IEEE Conference on Control Theory and Application (2018).
- [40] QUERO (D.), VUILLEMIN (P.) et POUSSOT-VASSAL (C.). – *A Generalized State-Space Aeroservoelastic Model based on Tangential Interpolation*. In : Aerospace (2019).
- [41] POUSSOT-VASSAL (C.) et al. – *Control-oriented modelling and identification : theory and practice*. In : The Institution of Engineering et Technology (M. Lovera eds.), Chap. 11 – Control-oriented Aeroelastic Biz-Jet Low-order LFT modeling, p. 241-268 (2015).
- [42] DALMAS (V.) et al. – *From infinite dimensional modelling to parametric reduced order approximation : Application to open-channel flow for hydroelectricity*. In : Proceedings of the 15th European Control Conference, p. 1982-1987 (2016).
- [43] POUSSOT-VASSAL (C.) et SIPP (D.). – *Parametric reduced order dynamical model construction of a fluid flow control problem*. In : Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, p. 133-138 (2015).
- [44] POUSSOT-VASSAL (C.), LECLERCQ (C.) et SIPP (D.). – *Structured linear fractional parametric controller \mathcal{H}_∞ design and its applications*. In : Proceedings of the European Control Conference (2018).
- [45] SJOBERG (J.) et al. – *Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview*. In : Automatica 31.12, p. 1691-1724 (1995).
- [46] BILLINGS (S.A.). – *Nonlinear system identification : NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*. John Wiley & Sons (2013).
- [47] NELLES (O.). – *Nonlinear system identification : from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer Science & Business Media (2013).
- [48] CHATURANTABUT (S.) et SORENSEN (D.C.). – *A state space error estimate for POD-DEIM non-linear model reduction*. In : SIAM Journal on numerical analysis 50.1, p. 46-63 (2012).

Outils logiciels

MOR DIGITAL SYSTEMS (2019). MOR Toolbox (version MATLAB)
Sur <http://mordigitalsystems.fr/>

THE MATHWORKS.MATLAB.
Sur <http://www.mathworks.com>

Sites Internet

MOR DIGITAL SYSTEMS
<http://mordigitalsystems.fr/>
(page consultée le 22 janvier 2019)

MOR Wiki
<https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/>
(page consultée le 22 janvier 2019)

GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE
SUR TOUS SUPPORTS
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- ☐ Automatique - Robotique
- ☐ Biomédical - Pharma
- ☐ Construction et travaux publics
- ☐ Électronique - Photonique
- ☐ Énergies
- ☐ Environnement - Sécurité
- ☐ Génie industriel
- ☐ Ingénierie des transports
- ☐ Innovation
- ☐ Matériaux
- ☐ Mécanique
- ☐ Mesures - Analyses
- ☐ Procédés chimie - Bio - Agro
- ☐ Sciences fondamentales
- ☐ Technologies de l'information

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com

LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS



Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE



www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com