2022（秋）《矩阵理论和方法》期末考试试题（线上）

1. 设 A，B 为 n 阶方阵，满足 $AB = BA$，求证：

   $r(A+B) \le r(A) + r(B) - r(AB)$

2. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 A 的列空间 $C(A)$，行空间 $C(A^T)$，零空间 $N(A)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 的维数和基。

3. 设欧式空间 $R^{2\times2}$ 中的内积为

$$A = \left[a_{ij}\right]_{2\times2}, \quad B = \left[b_{ij}\right]_{2\times2}, \quad \left(A, B\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$$

对于 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 及实数 a,b,c,定义线性变换

$$T\left(X\right) = \begin{bmatrix} bx_2 + cx_3 + ax_4 & bx_1 - ax_3 + cx_4 \\ -cx_1 - ax_2 + bx_4 & ax_1 - cx_2 + bx_3 \end{bmatrix}$$

证明 $\left(A, B\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$ 是 $R^{2\times2}$ 矩阵空间的内积运算。

(1) 当 a,b,c 满足什么条件时，T 是对称变换?

(2) 当 a,b,c 满足什么条件时，T 是正交变换?

4. 设向量空间 R^2 按照某种内积（不一定是通常的）构成欧氏空间，它的两组基为 $\alpha_1 = (1,1)$，$\alpha_2 = (1,-1)$ 和 $\beta_1 = (0,2)$，$\beta_2 = (6,12)$，且 α_i 与 β_i 的内积为 $(\alpha_1, \beta_1) = 1$，$(\alpha_1, \beta_2) = 15$，$(\alpha_2, \beta_1) = -1$，$(\alpha_2, \beta_2) = 3$，则基 α_1，α_2 的度量矩阵为?

5. 设 A 为 n 阶方阵，且是正规矩阵，x 为 n 阶非零列向量，定义函数 $R(x) = \dfrac{x^H A^H A x}{x^H x}$，证明：函数 $R(x)$ 的最大值为 A 的谱半径的平方。

6. 证明：矩阵的 Frobenius 范数的平方等于矩阵奇异值的平方和。

7. 已知 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in R^N$，可逆对称矩阵 $A(\mathbf{x}) \in R^{N\times N}$ 的第 i 行，第 j 列元素

为函数$[A(\mathbf{x})]_{i,j}=f_{i,j}(\mathbf{x})$， $A(\mathbf{x})$的行列式为$|A(\mathbf{x})|$，证明

$$\frac{\partial \ln|A(\mathbf{x})|}{\partial x_k}=\mathrm{tr}\left(A^{-1}(\mathbf{x})\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right).$$

8. 已知$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$， $b(t)=e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，

（1） 求 e^{At}

（2） 用矩阵函数方法求解微分方程$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A\mathbf{x}(t)+b(t)$满足初始条件$\mathbf{x}(0)=[1,1,0]^T$的解。

9. 考虑超定矩阵方程$Ax=b$，其中$A\in R^{m\times n},b\in R^m$,并且$m>n$。求方程的最小二乘解$x\in R^n$，使得$\|Ax-b\|_2=\min$。

10. 已知$A=\begin{bmatrix}-6 & -8 & -3 & -4\\ 10 & 0 & 5 & 0\\ -4 & 2 & 8 & -4\\ -4 & 2 & 8 & -4\end{bmatrix}$，求$A$的SVD分解。