2019-2020学年(高数A(上)).

一.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = \underline{\dfrac{1}{e^2}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = \lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right]^{\frac{-2x}{x}} = \dfrac{1}{e^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^3}-1}{\ln(1+x)\arctan x^2} = \underline{\ln 2}$.

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2\cdot x^3}{x\cdot x^2} = \ln 2$

3. $f(x)$ 在 $x=0$ 可导. 且 $f(\frac{1}{n}) = \frac{2020}{n}$, 则 $f'(0) = \underline{2020}$.

解: $f(x) = 2020\cdot x$. $f'(0) = 2020$.

4. $y = \dfrac{x^3}{1+x}$, 当 $n\geq 3$ 时, $y^{(n)} = \underline{\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

解: $y = \dfrac{x^3+1-1}{1+x} = 1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}$. 故当 $n\geq 3$ 时.

$y^{(n)} = (1-\frac{1}{1+x})^{(n)} = (-1)\cdot\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{1+n}} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$

5. $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的麦克劳林公式中, x^5 的系数为 $\underline{\frac{2}{5}}$.

解: $y = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right]-\left[-x-\frac{x^2}{2}\cdots-\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right]$

6. $F(x) = \int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$ 是 x^n 的同阶无穷小量. 则 $n = \underline{4}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^n} \overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)\cdot 2x}{n\cdot x^{n-1}} \xlongequal[代换]{等价无穷小} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot 2x}{n\cdot x^{n-1}}$.

因为是同阶无穷小量. 所以 $n-1=3$ 得 $n=4$

7. $\int \frac{dx}{x(x^n+10)} = \underline{\frac{1}{10}(\ln|x| - \frac{1}{n}\ln|x^n+10|)+C}$.

解：原式 $= \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+10)}dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{x^n(x^n+10)}dx^n$

$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{10}\int(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n+10})dx^n = \frac{1}{10n}(\ln|x^n| - \ln|x^n+10|)+C$.

$= \frac{1}{10}(\ln|x| - \frac{1}{n}\ln|x^n+10|)+C$.

8. $\int_{-1}^{1}[x^2\sin x^5 + \ln(2+x)]dx = \underline{3\ln 3-2}$.

解：原式 $\xlongequal[\text{奇函数}]{x^2\sin x^5\text{是}} \int_{-1}^{1}\ln(2+x)dx = [\ln(2+x)\cdot(2+x)-x]\Big|_{-1}^{1} = 3\ln 3-2$

9. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}}$.

解：原式 $= \lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}dx$.

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}d\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_0^u$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to+\infty}(\arctan\frac{u+1}{2} - \arctan\frac{1}{2})$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$

10. $xy''+3y'=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1+\frac{C_2}{x^2}}$.

解：令 $p(x)=y'$. 则 $y''=p'(x)$. 即有 $x\frac{dp}{dx}+3p=0$. 得 $p=\frac{C}{x^3}$.

故 $y=\int\frac{C}{x^3}dx = C\cdot(\frac{1}{-3+1}\cdot\frac{1}{x^2}+C') = C\cdot(C'-\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x^2})$

$= C_1+\frac{C_2}{x^2}$

二. $f(x)$在$x=1$的某邻域内连续，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4$$

(1) 求$f(1)$及$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}$

(2) 求$f'(1)$. 若又设$f''(1)$存在，求$f''(1)$

解: (1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-x^2}-1)=0$. 而由已知极限存在. 可知.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x] \Rightarrow$ 易得 $f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x+1)+3\sin^2 x]=0$. 由等价无穷小代换.

$\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]\sim f(x+1)+3\sin^2 x$. $(x\to 0)$.

$\sqrt{1-x^2}-1\sim -\frac{1}{2}x^2$, $(x\to 0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)+3\sin^2 x}{-\frac{1}{2}x^2}=-4.$$

可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)+3\sin^2 x}{x^2}=2$. 易得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x^2}=3$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}=-1$.

(2) 由导数定义. $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)}{\Delta x^2}\cdot\Delta x=(-1)\cdot 0=0$

当$f''(1)$存在时，可知$f(x)$在$x=1$的某邻域内可导. 因此. 由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x+1)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)-f'(1)}{x}=\frac{1}{2}f''(1)=-1$$

故 $f''(1)=-2$.

三. $f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数. 且$f(0)\neq 0$. $f'(0)\neq 0$, 若$af(x)+bf(2x)-f(0)$在$x\to 0$时是比x高阶的无穷小量. 求a, b.

解: 由已知可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}[af(x)+bf(2x)-f(0)]=0$ 即 $a+b-1=0$.

由于 $f(x)$在$x=0$某邻域内具有一阶连续导数. 故可由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0}[af'(x)+2bf'(x)]=(a+2b)f'(0)=0$$

又$f'(0)\neq 0$. 故 $a+2b=0$. 联立 $\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}$ 得 $a=2$. $b=-1$.

四. 证明 $\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, 当$x\in(0,+\infty)$时成立.

证明: 令 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\ln(1+x)$. $x\geqslant 0$. 则 $f(0)=0$. 可得.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x>0.$$

可得$f(x)$在$[0,+\infty)$严格单增, 故 $f(x)>f(0)=0$. 即 $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

同理. 令 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$. $x\geqslant 0$. 则 $g(0)=0$.

$g'(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$, $\forall x>0$. 可得$g(x)$在$[0,+\infty)$严格单增.

故 $g(x)>g(0)=0$ 即 $\ln(1+x)>\dfrac{2x}{x+2}$.

综上. $\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. $\forall x\in(0,+\infty)$.

五. 计算不定积分.

(1) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$. (2) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$.

解: (1). 原式 $=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx$.

$=\int \frac{1}{x^2}\arctan x\,dx-\int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx$.

$=-\int \arctan x\cdot d\frac{1}{x}-\int \arctan x\,d\arctan x$

$=-\left(\frac{\arctan x}{x}-\int\frac{1}{x}d\arctan x\right)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$.

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$.

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$

(2) 原式 $=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)$

$=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)$

$=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$

补例 $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\int xe^x\,d\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{1+x}e^x+\int\frac{1}{1+x}d(xe^x)$

$=-\frac{x}{1+x}e^x+\int e^x dx=-\frac{x}{1+x}e^x+e^x+C=\frac{e^x}{1+x}+C$

六 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 (x_0,y_0) 处有公共切线. 求

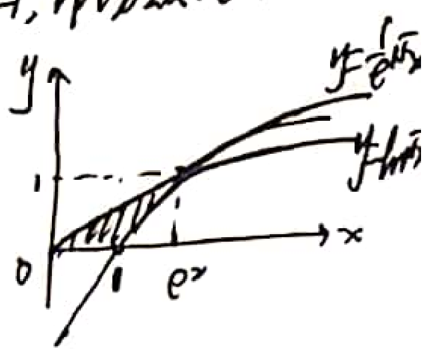
(1) 常数 a 与切点 (x_0,y_0)

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形 D 的面积

(3) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积.

解 (1) $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}$. $y'=\frac{1}{2x}$. 由于有公共切线. 故 $\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}$

且有. $a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0}$ 联立可得 $a=\frac{1}{e}$. $x_0=e^2$. $y_0=1$, 即切点 $(e^2,1)$



(2). $A=\int_0^{e^2}\frac{1}{e}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{1}{e}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{e^2}-\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\ln x\,dx$

$=\frac{2}{3}e^2-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}$

(3) $V=\pi\int_0^{e^2}(\frac{1}{e}\sqrt{x})^2dx-\pi\int_1^{e^2}(\ln\sqrt{x})^2dx$

$=\frac{\pi}{e^2}\int_0^{e^2}x\,dx-\frac{\pi}{4}\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx$

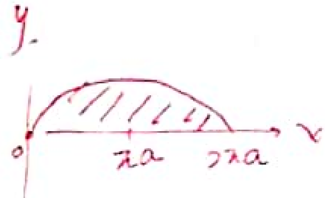
$=\frac{\pi}{e^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{e^2}-\frac{\pi}{4}\left[x\cdot(\ln x)^2\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\,d(\ln x)^2\right]$

$=\frac{\pi e^2}{2}-\frac{\pi}{4}\left[4e^2-\int_1^{e^2}x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\right]$

$=\frac{\pi e^2}{2}-\frac{\pi}{4}\left[4e^2-2\cdot(x\ln x-x)\Big|_1^{e^2}\right]$

$=\frac{\pi}{2}$

补例 $x=a(t-\sin t)$. $y=a(1-\cos t)$ 绕 x 轴一周



$V_1=\pi\int_0^{2\pi a}f^2(x)\,dx\ \overset{x=a(t-\sin t)}{=\!=\!=}\ \pi\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^2d[a(t-\sin t)]$

绕 y 轴一周 $V_2=\int_0^{2\pi a}2\pi x\cdot f(x)\cdot dx\ \overset{x=a(t-\sin t)}{=\!=\!=}\ \int_0^{2\pi}2\pi\,a(t-\sin t)\cdot a(1-\cos t)\,d[a(t-\sin t)]$

七. 求 $y''-2y'=e^{2x}+4x$ 的通解.

解: i) 求 $y''-2y'=0$ 的通解. 特征方程 $\lambda^2-2\lambda=0$. 得 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$.

故齐次通解. $y_{齐通}=C_1+C_2e^{2x}$.

ii). 分别求 $y''-2y'=e^{2x}$ 和 $y''-2y'=4x$ 的特解. y_1^* 和 y_2^*.

对于 $y''-2y'=e^{2x}$. 可设特解 $y_1^*=e^{2x}\cdot x^1\cdot a$. 代入方程得 $a=\frac{1}{2}$.

故 $y_1^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$.

对于 $y''-2y'=4x$, 可设特解 $y_2^*=e^{0\cdot x}\cdot x^1\cdot(bx+c)$. 代入方程得 $b=c=-1$.

故 $y_2^*=-x^2-x$

因此. $y''-2y'=e^{2x}+4x$ 的特解 $y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{2}xe^{2x}-x^2-x$.

iii). 原方程通解. 为 $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-x^2-x$.

八. 设 $0\le a<x<b$. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 内可导 证明.

$\exists\xi,\eta\in(a,b)$. 使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

证明: 首先对于. $\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\eta}$. 故令 $g(x)=x^2$.

由柯西中值定理. $\exists\eta\in(a,b)$. 有 $\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{1}{b+a}$.

再由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$. 有 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

故综上. 有 $\frac{f'(\eta)}{2\eta}=f(\xi)\cdot\frac{1}{b+a}$. 即 $f(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.