北京邮电大学 2017——2018 学年第 1 学期
《概率论与随机过程》期末考试试题

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号（概率一、二、……、五班）和选课单上的学号，班内序号！

一、（每小题 5 分，共 30 分）

1、设 $\mathcal{A}$ 是样本空间 Ω 上的 $\sigma-$ 代数，则下面错误的是____。

（1）如果 $A,B\in\mathcal{A}$，则 $A\bigcup B\in\mathcal{A}$。

（2）如果 $A,B\in\mathcal{A}$，则 $A\overline{B}\in\mathcal{A}$。

（3）如果 $A\in\mathcal{A},B\subset A$，则 $B\in\mathcal{A}$。

（4）如果 $A_n\in\mathcal{A},n=1,2,\ldots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\in\mathcal{A}$。

2、设概率测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，$A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{F},B\subset A$，

$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3}$，定义简单函数

$$f(\omega)=\chi_{AB}(\omega)+\chi_{A\overline{B}}(\omega)+\chi_{\overline{A}}(\omega),$$

则 $\int_{\Omega}f\mathrm{d}p=$____。

3、设随机变量 X 的特征函数为 $\phi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$，则期望 $E(X^4)=$____。

4、设随机过程 $\{X(t)\}$ 均方可导，导数为 $X'(t)$，相关函数

$R_X(s,t)=\frac{1}{12}\sigma^2t^2s^2$，则 $R_{X'}(s,t)=$____。

5、设随机过程 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，$W(0)=0$。令 $X(t)=-W(t)$，则相关函数 $R_X(1,2)=$____。

6、设 X_n 为一齐次离散时间马氏链，状态空间为 $E=\{1,2,3\}$，一

步转移概率矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，则概率 $f_{11}=$____。

二、（5 分）（1）设集合类 $\mathcal{G}=\{(-\infty,x]:x\text{为任意实数}\}$，令 $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{G})$，证明：单点集 $\{x\}\in\mathcal{A}$。

（2）设集合类 $\mathcal{H}=\{(-\infty,x):x\text{为任意实数}\}$，令 $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{H})$，证明：单点集 $\{x\}\in\mathcal{H}$。

三、（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从参数为 1 的指数分布，即密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 定义 $\begin{cases} U=X+Y, \\ V=X-Y. \end{cases}$（1）求 (U,V) 的联合概率密度；（2）问 U,V 是否独立，为什么。

四、（15 分）设 X,Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求（1）当 $y>0$ 时，条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）$E(X|Y=y), y>0$；（3）$D(X|Y)$。

五、（10 分）设 $X(t)=Yt+Z$，其中 Y,Z 独立同分布，均服从标准正态分布 $N(0,1)$。（1）求 $X(t)$ 的一维概率密度 $f(x;t)$；（2）证明 $X(t)=Yt+Z$ 是一正态过程。

六、（10 分） 设 $\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程，$f(\lambda)$ 是其谱密度函数。对于任意的 $h>0$，令 $Y(t)=X(t+h)-X(t)$。

（1）证明$Y(t)$是平稳过程；（2）求$Y(t)$的谱密度。

七、（15 分）设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$\{1,2,\ldots\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

（1）试判断该链是否可分，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布；（2）若初始分布$q(0)=(1,0,0,0,\ldots)$，求$P\{X_1=1, X_3=3, X_4=1\}$。

八、（5 分）若单位时间内某事件的发生数量X服从参数为λ的泊松分布，$\lambda>0$，即$X\sim\pi(\lambda)$，若各事件的发生相互独立，且任一发生的事件依概率p_i为第i型，$i=1,2$，证明$X_i\sim\pi(p_i\lambda)$，$i=1,2$，并相互独立，其中X_i为第i型事件发生的数量。