1．证明：对于线性子空间V_1和V_2，V_1+V_2是直和的充要条件是零向量的分解式唯一。

直和判断定理：V_1+V_2是直和的充要条件是零向量的分解式唯一

证明：上述定理即：V_1+V_2是直和的充要条件是等式：

$$\alpha_1+\alpha_2=0, \alpha_i \in V_i (i=1,2)$$

只有在α_i全为零向量时成立。

“$\Rightarrow$”，即已知V_1+V_2是直和，有零向量的分解式唯一

因为有$0=0+0, 0=\alpha_1+\alpha_2$，故$\alpha_1=\alpha_2=0$

“$\Leftarrow$”，用反证法

假设$\alpha \in V_1+V_2$，且它有两个分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\ \alpha_i, \beta_i \in V_i (i=1,2)$$

于是，$(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)=0$，其中$\alpha_i-\beta_i \in V_i (i=1,2)$

因为零向量的分解式唯一，故$\alpha_i-\beta_i=0 (i=1,2)$

所以α的分解式唯一，所以证明直和

2. $\mathbf{A}\in K^{n\times n}$，其特征多项式为$\varphi(\lambda)$，证明：$\varphi(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。

Hamilton—Caylay定理 设 $A\in K^{n\times n}$ 其特征多项式

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则 $\varphi(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0.$

证明:A的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，即

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

必然存在可逆矩阵 $P_{n\times n}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\varphi(P^{-1}AP)=(P^{-1}AP-\lambda_1I)(P^{-1}AP-\lambda_2I)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_nI)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & * & \cdots & * \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_2\end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_nI)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_3 & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_3 & * & \cdots & * \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_2-\lambda_3\end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_nI)$$

$$=0$$

即 $P^{-1}\varphi(A)P=0 \quad \Rightarrow \varphi(A)=0$

3. 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}^{101}$。

解 因为 A 的特征多项式为 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-4)$，所以两个特征值为 1 和 4，它们对应的特征向量为$(-1,1)^T$ 和$(1,2)^T$.

从而化 A 为对角阵的非奇异矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

应用式(5.2.25)可得

$$\begin{aligned}A^{101}&=C\begin{pmatrix}\lambda_1^{101} & \\ & \lambda_2^{101}\end{pmatrix}C^{-1}\\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^{101}+2 & 4^{101}-1\\ 2(4^{101}-1) & 2\times 4^{101}+1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. 证明：任意矩阵 $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$， $\mathbf{A}$ 的谱半径大小不会超过 $\mathbf{A}$ 的任何一种范数。（注：矩阵的谱半径是其最大的特征值绝对值）

定理9: $\forall A \in C^{n\times n}, \forall \|\bullet\|_M$，有 $\rho(A) \le \|A\|_M$

证明：对矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ ，存在向量范数 $\|\bullet\|_V$ ，使得 $\|Ax\|_V \le \|A\|_M \bullet \|x\|_V$

设 $Ax_i = \lambda_i x_i \quad (x_i \ne \theta)$ ，则有

$$|\lambda_i| \bullet \|x_i\|_V = \|\lambda_i x_i\|_V = \|Ax_i\|_V \le \|A\|_M \bullet \|x_i\|_V$$

$$|\lambda_i| \le \|A\|_M \qquad \Rightarrow \rho(A) \le \|A\|_M$$

5. 证明：对于向量 $\mathbf{x} \in K^n$ 的范数 $\|\mathbf{x}\|_2$，矩阵 $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ 的从属范数为 $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$，其中 λ_1 为 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的最大特征值。

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，且由

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 \geqslant 0$$

知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是半正定的，从而它的特征值都是非负实数，设为

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$$

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，因此它具有 n 个互相正交的且 l_2 范数为 1 的特征向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，并设它们依次属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 于是，任何一个范数 $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ 的向量 $\boldsymbol{x}$，可以用这些特征向量线性表示，即有

$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1 + \xi_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{x}_n$$

由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\xi_i\boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\boldsymbol{x}_i$$

因此有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\boldsymbol{x}_i\right) =$$
$$\lambda_1|\xi_1|^2 + \lambda_2|\xi_2|^2 + \cdots + \lambda_n|\xi_n|^2 \leqslant$$

$$\lambda_1(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2) = \lambda_1$$

从而有

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{\lambda_1}$$

另一方面，由于 $\|\boldsymbol{x}_1\|_2 = 1$，而且

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1\|_2^2 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_1\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1$$

所以

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \geqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

因此式(2.2.8)成立.

6．已知 4 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\pi,-\pi,0,0$ ，求 $\sin\mathbf{A}$ 。

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)\lambda^2=\lambda^4-\pi^2\lambda^2=0,$$

由凯莱-哈密顿定理(见定理 2.2.4)知，有

$$\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2.$$

从而得

$$\begin{aligned}
\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\frac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7+\frac{1}{9!}\boldsymbol{A}^9-\cdots\\
&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\pi^2\boldsymbol{A}^3-\frac{1}{7!}\pi^4\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{9!}\pi^6\boldsymbol{A}^3-\cdots\\
&=\boldsymbol{A}+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\pi^2-\frac{1}{7!}\pi^4+\frac{1}{9!}\pi^6-\cdots\right)\boldsymbol{A}^3\\
&=\boldsymbol{A}+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}-\pi^{-2}\boldsymbol{A}^3,
\end{aligned}$$

7. 矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且行列式 $\det(\mathbf{A})\neq 0$，令 $f(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A})$，证明

$$\frac{df}{d\mathbf{A}}=\det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T$$ 。

答案:

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，将 $\det(A)$ 按照第 i 行展开，有

$$\det(A)=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}$$ （5 分）

于是 $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}=A_{ij}$ （2 分）

于是 $\dfrac{df}{dA}=(A_{ij})_{n\times n}=(adjA)^T=(\det(A)A^{-1})^T=\det(A)(A^{-1})^T$ （3 分）

8. 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\end{bmatrix}$的 LDU 分解。

解 因为$\Delta_1=2,\Delta_2=5,\Delta_3=0$，所以$\boldsymbol{A}$有惟一的$\boldsymbol{LDU}$分解.下面我们仿照高斯消元过程的计算步骤来得到$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{LDU}$分解.由式(3.1.2)有消元阵

$$\boldsymbol{L}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-\frac{1}{2} & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{L}^{(1)})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\\frac{1}{2} & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以得

$$\boldsymbol{L}^{(1)}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 5 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{(2)}.$$

再由$\boldsymbol{A}^{(2)}$计算消元阵

$$\boldsymbol{L}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{L}^{(2)})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{L}^{(2)}\boldsymbol{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \frac{5}{2} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\0 & 1 & -\frac{1}{5}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{(3)},$$

即

$$\boldsymbol{L}^{(2)}\boldsymbol{L}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(3)}.$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{L}^{(1)})^{-1}(\boldsymbol{L}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{A}^{(3)}\\&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\\frac{1}{2} & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \frac{5}{2} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\0 & 1 & -\frac{1}{5}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\\frac{1}{2} & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \frac{5}{2} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\0 & 1 & -\frac{1}{5}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{LDU}.\end{aligned}$$

9．求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}12 & -20 & 41\\ 9 & -15 & -63\\ 20 & 50 & 35\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

解　第一步：以 $\boldsymbol{R}_{12}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，消去第 2 行第 1 列处的元素.

$$a'_{11}=15,\quad c=\frac{12}{15}=\frac{4}{5},\quad s=\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$

故

$$\boldsymbol{R}_{12}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}15 & -25 & -5\\ 0 & 0 & -75\\ 20 & 50 & 35\end{bmatrix},$$

同理，有

$$a'_{21}=(15^2+20^2)^{\frac{1}{2}}=25,$$

$$s=\frac{20}{25}=\frac{4}{5},\qquad c=\frac{15}{25}=\frac{3}{5},$$

$$\boldsymbol{R}_{13}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}25 & 25 & 25\\ 0 & 0 & -75\\ 0 & 50 & 25\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{A}.$$

第二步：根据 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 中的元素算出 $a'_{22}=50, c=0, s=1$. 由此确定

$$\boldsymbol{R}_{23}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)}=\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}25&25&25\\0&50&25\\0&0&75\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{12}\begin{pmatrix}12&-20&41\\9&-15&-63\\20&50&35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&25&25\\0&50&25\\0&0&75\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{12})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{12}{25}&\frac{9}{25}&\frac{20}{25}\\-\frac{16}{25}&-\frac{12}{25}&\frac{15}{25}\\\frac{15}{25}&-\frac{20}{25}&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{12}{25}&\frac{9}{25}&\frac{20}{25}\\-\frac{16}{25}&-\frac{12}{25}&\frac{15}{25}\\\frac{15}{25}&-\frac{20}{25}&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{12}{25}&-\frac{16}{25}&\frac{15}{25}\\\frac{9}{25}&-\frac{12}{25}&-\frac{20}{25}\\\frac{20}{25}&\frac{15}{25}&0\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{12}{25}&-\frac{16}{25}&\frac{15}{25}\\\frac{9}{25}&-\frac{12}{25}&-\frac{20}{25}\\\frac{20}{25}&\frac{15}{25}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25&25&25\\0&50&25\\0&0&75\end{pmatrix}=\boldsymbol{QR}.$$

从上面论述可见，吉文斯方法需要作$\frac{n(n-1)}{2}$个初等旋转矩阵的连乘积，当 n 较大时，计算工作量较大，因此，常利用镜像变换来进行 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

10. 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$的 SVD 分解。

解 由例 3.4.1 已知 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $\sigma_1=\sqrt{5}$，则 $\boldsymbol{\Delta}=(\sqrt{5})$，且由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=0$，对应的特征向量可分别取为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{I}_3$，其中 $\boldsymbol{U}_1=(\boldsymbol{x}_1)$，$\boldsymbol{U}_2=(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，而

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{\Delta}^{-1})^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}},$$

故可取

$$\boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

于是得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$