2013-2014

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号！

一、　填空题：（每空 3 分，共 30 分）

1．给定集合 $A\subset\Omega$，则定义在 Ω 上的包含 A 的最小σ-代数是　. $\{\Omega,\Phi,A,\overline{A}\}$

2．若 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 是 Ω 上的两个非空集合类，v_i 是 $\mathscr{A}_i\,(i=1,2)$ 上的测度，若满足：（1）　；

（2）$\forall A\in\mathscr{A}_1$,有 $v_1(A)=v_2(A)$，则称 v_2 是 v_1 在 $\mathscr{A}_2$ 上的扩张。

$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2$

3．某集代数包含了所有的左开右闭区间（实数集上的）. 该集代数上有一个测度 P，对于任意可测集 $(a,b]$，其中 $a<b$，均有 $P\left((a,b]\right)=b-a$.将该测度扩张到某σ-代数上记为 μ.对单点集 $\{1\}$，$\mu\left(\{1\}\right)=$　.

0

4．设概率测度空间 (Ω,F,P)，$A\in F,B\in F,AB=\Phi$，$P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{1}{3}$，两个简单函数 $f(\omega)=\chi_A(\omega)+2\chi_{\overline{A}}(\omega)$，$g(\omega)=\chi_B(\omega)+2\chi_{\overline{B}}(\omega)$，则 $E[f]=$　　，$E[fg]=$　　.

$\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{3}$

5．设 X 为定义某概率空间上的随机变量，若 X 的分布函数为 $F(x)$，则数学期望 EX 的 L-S 积分形式为　.

$\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)$

6．设三维随机变量 (X,Y,Z) 服从正态分布 $N(a,B)$，其中 $a=(1,2,3)$，

$$B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}，则 E[E[X\mid YZ]]=$$

1

7．设随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为平稳二阶矩过程，且均方连续.设该过程的均值函数为 $\mu=1$，相关函数 $R(s,t)=2e^{-|t-s|}$，均方积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}X^2(t)dt$ 记为随机变量 ξ. 则 $E(\xi)=$　.

π

8．设 $N(t)$ 为泊松过程,则条件概率 $P(N(2)=2\mid N(3)=3)=$　.

$\dfrac{4}{9}$

9. 设$W(t)$为参数为σ^2的维纳过程,$W(0)=0$,则$\text{cov}\left(W(1),W(2)\right)=$ ____.

σ^2

二.（8分）设A是λ系，证明A是单调类；若A也是π系，证明A是σ-代数。

证明：由A是λ系，若$A_n\in$A，n=1，2，…，且$A_n\uparrow$，则$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\in$A.

若$B_n\downarrow$，$B_n\in$A，n=1，2，…，由A是λ系，$\overline{B_n}\in$A且$\overline{B_n}\uparrow$，则$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overline{B_n}\in$A.

所以$\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overline{B_n}}\in$A.即$\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\in$ A，所以A是单调类。 4分

A是λ系，A对余集运算封闭且$\Omega\in$A，若A也是π系，A对交集运算封闭，所以A是集代数。因为A是单调类，所以A是σ-代数。 4分

三.（16分）设随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\frac{1}{x}e^{-(x+\frac{y}{x})},x>0,y>0$

（1） 求边缘密度$f_X(x)$；

（2） 求$x>0$时条件密度$f_{Y|X}(y\,|\,x)$；

（3） 求$E(Y\,|\,X),E[(Y-EY)^2\,|\,X],E[X-Y\,|\,X]$.

解（1） $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-(x+\frac{y}{x})}dy=e^{-x}$， $x>0$. 4分

（2）当$x>0$时，$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{1}{x}e^{-\frac{y}{x}},y>0$. 4分

（3）由（2）知

$E(Y\,|\,X=x)=x$，所以$E(Y\,|\,X)=X$. $E(Y)=1$

$E[Y^2\,|\,X]=2X^2$，所以$E[(Y-EY)^2\,|\,X]=2X^2-2X+1$.

$E[X-Y\,|\,X]=X-E[Y\,|\,X]=0$. 8分

四.（14分）设随机变量X的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots$$

（1） 求随机变量X的特征函数$\phi_X(t)$;

（2）求$P\{X为偶数\}$.

解 （1） $\phi_X(t)=E\left(e^{itX}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda e^{ik})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$. ……8分

（2）易知$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k)!},e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{(k)!}$，所以

$P\{X为偶数\}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}e^{-\lambda}=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$. ……6分

五.（14 分）设随机过程 $Z(t) = X\sin t + Y\cos t$，其中 X,Y 是两个独立同分布的随机变量.

（1）若 X,Y 都以 2/3 和 1/3 的概率取值-1 和 2，证明 $Z(t)$ 为平稳过程;

（2）若 X,Y 都服从标准正态分布，证明 $Z(t)$ 为高斯过程.

（1）证明 $E[X]=0=E[Y], E[X^2]=E[Y^2]=2, E[XY]=EXEY=0$，

$E[Z(t)]=E[X]\sin t+E[Y]\cos t=0$，

$R_Z(t,s)=E[X^2]\sin t\sin s+E[XY](\sin t\cos s+\cos t\sin s)+E[Y^2]\cos t\cos s=2\cos(t-s)$ 所以，均值函数为常数，自相关函数只依赖于时间差，$Z(t)$ 为平稳随机过程。7 分

（2）对于任意正整数 n，取任意时间点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，任意实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，

$c_1Z(t_1)+c_2Z(t_2)+\cdots+c_nZ(t_n)=X\sum_{k=1}^{n}c_k\sin t_k+Y\sum_{k=1}^{n}c_k\cos t_k$，因为 X,Y 相互独立且服从正态分布，X,Y 的线性组合仍然服从正态分布，所以

$c_1Z(t_1)+c_2Z(t_2)+\cdots+c_nZ(t_n)$ 服从一维正态分布。故 $Z(t)$ 为高斯过程。7 分

七.（18 分）设马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1)确定该链的状态分类；(2)各状态的周期；(3)求平稳分布；

(4) 求 $\lim_{n\to\infty}p_{33}^{(n)}$，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{11}^{(n)}$.

解.（1）链可分, $\{3\}\{2,6\}$是不可分闭集, 状态空间 $E=\{3\}\cup\{2,6\}\cup\{1,4,5\}$,3,2,6 正返态,1,4,5 为非常返. 6 分

（2） 周期 $d(1)=2, d(5)=2, d(i)=1, i=1,2,...,6$. 3 分

（3） 设平稳分布为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_6)$,则

$$\begin{cases} \pi=\pi P, \\ \pi_1+\cdots+\pi_6=1, \\ \pi_i\ge 0, i=1,2,\cdots,6. \end{cases}$$

解之得 $\pi=(0,p,q,0,0,p)$,其中 $p\ge 0, q\ge 0, 2p+q=1$. 5 分

（4） $p_{33}^{(n)}=P\{X_n=3\mid X_0=3\}=\sum_{i=1}^{6}P\{X_n=3\mid X_1=i\}p_{3i}^{(1)}=p_{33}^{(n-1)}p_{33}^{(1)}=1$.

$\lim_{n\to\infty}p_{33}^{(n)}=1$.

$\sum_{n=0}^{\infty}p_{11}^{(n)}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{4}{3}$ 4分