矩阵分析与应用（2008 年 1 月 8 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在基 F_{11}，F_{12}，

F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 x_1，x_2 是线性空间 V^2 的基，T_1 与 T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1x_1=y_1$，$T_1x_2=y_2$，且

$T_2(x_1+x_2)=y_1+y_2$，$T_2(x_1-x_2)=y_1-y_2$，试证明 $T_1=T_2$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的 $\|\mathbf{g}\|_1$，$\|\mathbf{g}\|_2$，$\|\mathbf{g}\|_\infty$，$\|\mathbf{g}\|_{m1}$，$\|\mathbf{g}\|_{m2}$，$\|\mathbf{g}\|_{m\infty}$ 范数。

四、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$x=(x_1,\ldots,x_n)^T$，证明 $\|A\|=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_\infty$ 相容。

五、$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$f(z)=\sqrt{z}$，$g(z)=\dfrac{1}{z}$，求 $f(A)$，$g(A)$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条

件 $x(0)$ 的解。

七、试用 Schmidt 正交化方法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

八、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$。

九、已知函数矩阵 $A(x)=\begin{bmatrix}1,&1-x,&0\\x,&x+1,&0\\0,&0,&x^2\end{bmatrix}$，试计算

(1) $\dfrac{d}{dx}A(x)$，$\dfrac{d^2}{dx^2}A(x)$，$\dfrac{d^3}{dx^3}A(x)$；(2) $\dfrac{d}{dx}|A(x)|$；(3) $\dfrac{d}{dx}A^{-1}(x)$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。