北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2010-2011学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、讨论$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$的矩阵组：

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_2}=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_3}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix};$$

的线性相关性；并在线性相关时，求其最大线性无关组。

二、设$\boldsymbol{R^{2\times 2}}$的两个子空间为

$$\boldsymbol{V_1}=\left\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$\boldsymbol{V_2}=\boldsymbol{L(B_1,B_2)}, \boldsymbol{B_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B_2}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*(1)*将$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$表示成生成子空间，并求$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$的基和维数；

*(2)*求$\boldsymbol{V_1}\cap\boldsymbol{V_2}$的基和维数。

三、设$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha$和$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$是$\boldsymbol{C^n}$上的两种范数，又$k_1,k_2$是正常数，证明下列函数是$\boldsymbol{C^n}$上的范数

(1) $\max(\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha, \left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta)$;　　(2)$k_1\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha+k_2, \left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$

四、设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C^{m\times n}}$，且对$\boldsymbol{C^{m\times n}}$的矩阵范数$\left\|\bullet\right\|$，满足$\left\|\boldsymbol{A}\right\|<1$，

证明：矩阵$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$非奇异，且有$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|\le\dfrac{\left\|\boldsymbol{I}\right\|}{1-\left\|\boldsymbol{A}\right\|}$

五、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求$e^{\boldsymbol{A}}, e^{t\boldsymbol{A}}(t\in\boldsymbol{R}), \cos\boldsymbol{A}$。

六、设$f(z)=\ln z$，求$f(\boldsymbol{A})$，这里$\boldsymbol{A}$为：

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

七、设$\boldsymbol{X}$为$n\times m$矩阵，若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$依次是$n\times n$和$m\times n$的常数矩阵，则：

(1)$\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{BX}))=\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{X^T B^T}))=\boldsymbol{B^T}$

(2)$\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{X^T A X}))=\boldsymbol{(A+A^T)X}$

八、$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$，分别用$\boldsymbol{G}-$矩阵和$\boldsymbol{H}-$矩阵方法求$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{Tx}=\left|\boldsymbol{x}\right|\boldsymbol{e_1}$

九、$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \cdots \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^+ & \vdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

十、证明$rank\boldsymbol{A}=rank(\boldsymbol{A^T A})=rank(\boldsymbol{AA^T})$，这里$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R_r^{m\times n}}$。