2022年-2023年第一学期
研究生《概率论与随机过程》期末考试选题

一、（10分）

设集合$R=(-\infty,+\infty)$，（1）写出定义在R上的包含集合类$\{(-\infty,0),(-\infty,1)\}$的最小$\sigma$代数；（2）若已知Borel域$\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{C})$，其中集合类$\mathcal{C}=\{(-\infty,x],x\in R\}$，证明区间$(0,1)\in\mathcal{B}$。

二、（15分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y}, & -\infty<x<+\infty, y>|x|,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$并证明X和Y不相互独立；

（2）条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；

（3）期望$E(Y)$，条件期望$E(Y|X)$以及$E[E(Y|X)]$.

三、（10分）

设随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$。记$\begin{cases}U=X+Y,\\ V=X-Y\end{cases}$。

(1) 试求(U,V)的联合概率密度函数；

(2) 问U与V是否独立？

四、（15分）

（1）设随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，请写出X的特征函数，并用特征函数法证明X的中心矩为

$$E(X^n)=\begin{cases}1\times3\times5\times\cdots\times(n-1)\sigma^n, & n\geq2\text{ 为偶数},\\ 0, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

（2）设二维随机变量(X_1,X_2)的分布律为

$P(X_1=1,X_2=1)=1/3,\quad P(X_1=1,X_2=-1)=1/3,$

$P(X_1=-1,X_2=1)=1/6,\ P(X_1=-1,X_2=-1)=1/6,$

求(X_1,X_2)的特征函数.

（3）设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，试求$\eta_1=\xi_1+\xi_2$，$\eta_2=\xi_1+\xi_3$的联合特征函数.

五、（15 分）

设某游乐场有两个入口 $i=1,2$，两个出口 $j=1,2$。对于 $t>0$，定义 $A_i(t)$ 为 $(0,t]$ 内从入口 i 到达该游乐场的顾客数，$D_i(t)$ 为 $(0,t]$ 内从出口 i 离开该游乐场的顾客数，并假设 $A_1(t),A_2(t),D_1(t),D_2(t)$ 相互独立。

（1）若 $A_i(t)$ 是参数为 $\lambda_i>0$ 的泊松过程，令总达到过程 $A(t)=A_1(t)+A_2(t)$，求

（1-1）概率 $P(A(t)=n)$；

（1-2）条件期望 $E[A_1(t)\,|\,A(t)=10]$，其中 $t>0$ 为一常数；

（1-3）问 $A(t)$ 是否均方连续。

（2）令 $D(t)=D_1(t)+D_2(t)$ 为总离去过程，并假设 $D(t)$ 是一个参数为 $\mu>0$ 的泊松过程。若每个顾客离开该游乐场时依概率 $p_j\in(0,1)$ 选择从第 j 个出口离开，$j=1,2$，并进一步假设顾客的行为相互独立。证明 $D_j(t)$ 是相互独立的，服从参数为 μp_j 的泊松过程，$j=1,2$。

（3）上面（1）若去掉假设：“$A_i(t)$ 是参数为 $\lambda_i>0$ 的泊松过程”，谈谈你对概率 $P(A(t)=n)$，条件期望 $E[A_1(t)\,|\,A(t)=10]$ 的想法。

六、（15 分）

设随机过程 $Z(t)=X\sin t+Y\cos t, t\ge 0$，其中 X,Y 是两个独立同分布的随机变量。

（1）若 X,Y 都以 2/3 和 1/3 的概率分别取值−1 和 2，证明 $Z(t)$ 为宽平稳过程；

（2）若 X,Y 都服从标准正态分布，证明 $Z(t)$ 为高斯过程，给出 $Z(t)$ 的二维概率密度；

（3）若 X,Y 都服从标准正态分布，判别 $Z(t)$ 是否为严平稳过程？并给出证明或者理由。

七、（20 分）设离散时间马氏链$\{X_n, n=0,1,\ldots\}$的状态空间$E=\{1,2,\ldots\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

（1）问马氏链是否可分，若可分，给出空间分解表示，并求各状态的周期；

（3）计算平稳分布$\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$，讨论该链的状态分类；

（4）若初始分布$q(0)=(0,1,0,0,\ldots)$，求$P\{X_1=1, X_3=2, X_4=4\}$；

（5）对于上述马氏链，讨论一下初始分布$q(0)$对于平稳分布的影响。