北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

《高等数学（上）》期末考试试题（1）

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上，写在试题纸上一律无效

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^x=$__________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x \cos t^2 dt}{\ln(1+x^5)}=$__________.

4. 曲线 $xy+e^y+x^2-e=0$ 上点 $(0,1)$ 处的切线方程为__________.

5. 曲线 $y=x^2e^{-x}$ 的上凸区间是__________.

6. 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge 2-x$ 所确定的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为__________.

7. $\int\dfrac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=$__________.

8. $\int_0^2(x+4)\sqrt{2x-x^2}\,dx=$__________.

9. $I=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=$__________.

10. $y'=(x+y+1)^2$ 的通解为__________.

二（10 分）. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x+bx^2}{x^2}=\dfrac{5}{2}$，求常数 a 与 b 的值.

三（10 分）. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}du, \end{cases}$ $(t>0)$

确定. 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 及 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

四（10 分）确定常数 A 的取值范围，使得函数 $f(x)=x^2+\dfrac{A}{x^4}\geq 6$ 对任何 $x\neq 0$ 均成立.

五（10 分）. 设常数 $a>0$，证明当 $x>0$ 时，下面的不等式成立:

$$e^{-x}(x^2-ax+1)<1$$

六（12 分）. (1) 设 $f(x)$ 为非负连续函数， 且满足

$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\ln(1+x)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

(2) 计算 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 n 为正整数.

七（12 分）. 求微分方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}+16x^2+8x$ 的通解.

八（8 分）. 设 $0<x_1<x_2$，证明，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

北京邮电大学 2018–2019 学年第一学期
《高等数学》（上）期末考试试题（1）
答案及参考评分标准

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 填： e^{-3}

2. 填： $\dfrac{1}{4}$

3. 填： $\dfrac{1}{10}$

4. 填： $y=-\dfrac{1}{e}x+1$

5. 填： $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

6. 填： $\dfrac{\pi}{3}$

7. 填： $\arcsin e^{x}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

8. 填： $\dfrac{5}{2}\pi$

9. 填： $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

10. 填： $\arctan(x+y+1)=x+c$

二（10 分）．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x+bx^2}{x^2}=\dfrac{5}{2}$，求常数 a 与 b 的值．

解　由假设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^2}=\dfrac{5}{2}-b$　　(1)

从而　$\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^2}=\dfrac{5}{2}-b+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$．

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+a\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{2}-b+\alpha(x)\right]x=0$$

由洛比达法则．得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+a\cos x}{1}=0\Rightarrow a=1 \qquad (2)$$

由(1)，得

$$\frac{5}{2}-b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-x)+(1-x)\cos x-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

于是$b=3$.

所以 $a=1,b=3$.

三(10 分)．设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}du, \end{cases}$ $(t>0)$

确定．求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$及$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

解 $\frac{dy}{dt}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-\frac{\cos t^2}{2t}2t=-2t^2\sin t^2$

$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$

所以 $\frac{dy}{dx}=t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot 1\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}(t)\ 1/(-2t\ \sin t^2)=\frac{1}{2t\sin t^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\left.\frac{1}{2t\sin t^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

四（10 分） 确定常数 A 的取值范围，使得函数 $f(x)=x^2+\frac{A}{x^4}\geq 6$ 对任何 $x\neq 0$ 均成立.

解 对任何 $x\neq 0$，

$$f(x)=x^2+\frac{A}{x^4}\geq 6 \Leftrightarrow \frac{x^6+A-6x^4}{x^4}\geq 0 \Leftrightarrow A\geq 6x^4-x^6$$

令 $g(x)=6x^4-x^6$．下面只要求出 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值即可.

$$g'(x)=24x^3-6x^5=6x^3(4-x^2)\begin{cases}>0, 0<x<2,\\ =0, \quad x=2\\ <0, 2<x<+\infty\end{cases}$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $g(2)=32$.

故当 $A\in[32,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2+\frac{A}{x^4}\geq 6$ 对任何 $x\neq 0$ 均成立.

五(10 分)．设常数 $a>0$，证明当 $x>0$ 时，下面的不等式成立:

$$e^{-x}(x^2-ax+1)<1$$

证明 注意不等式等价于

$$x^2-ax+1<e^x \Leftrightarrow e^x-x^2+ax-1>0$$

令 $f(x)=e^x-x^2+ax-1$．则当 $x\geq 0$ 时，$f(x)$ 任意阶可导.

$$f'(x)=e^x-2x+a,\quad f''(x)=e^x-2$$

由于 $f''(x)=e^x-2\begin{cases}<0, 0\leq x<\ln 2\\ =0, \quad x=\ln 2\\ >0, \ln 2<x<+\infty\end{cases}$，所以 $f'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 取得

最小值，最小值为

$$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+a=2(1-\ln 2)+a>a>0$$

故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，于是有

$$f(x)>f(0)=0,\ \forall x>0$$

从而要证明的不等式成立.

六(12 分).(1) 设 $f(x)$ 为非负连续函数， 且满足

$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\ln(1+x)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

(2) 计算 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 n 为正整数.

解 (1) $f(x)\int_0^x f(x-t)dt \xlongequal{u=x-t} f(x)\int_0^x f(u)du=f(x)\int_0^x f(t)dt$

于是 $$f(x)\int_0^x f(t)dt=\ln(1+x)$$

从而 $$\int_0^2\left[f(x)\int_0^x f(t)dt\right]dx=\int_0^2\ln(1+x)dx$$

得 $$\frac{1}{2}\left(\int_0^2 f(t)dt\right)^2=3\ln 3-2$$

所求平均值为 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{\sqrt{6\ln 3-4}}{2}$

(2) $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=\left(\int_0^{\pi}+\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right)x|\sin x|dx$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{x=u+(k-1)\pi} \int_0^{\pi}[u+(k-1)\pi]|\sin u|du$$

$$=\int_0^{\pi}u\sin u\,du+(k-1)\pi\int_0^{\pi}\sin u\,du$$

$$=\int_0^{\pi}u\sin u\,du+2(k-1)\pi$$

$$=-u\cos u\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos u\,du+2(k-1)\pi=(2k-1)\pi$$

所以 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=n^2\pi$

七(12 分). 求微分方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}+16x^2+8x$ 的通解.

解 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+8\lambda+16=0$,即

$(\lambda+4)^2=0\Rightarrow$特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-4$.

所以齐次方程 $y''+8y'+16y=0$ 的通解为

$$\overline{y}=(c_1+c_2x)e^{-4x}$$

(1) 对非齐次方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}$，因为$\alpha=-4$是 2 重特征值，所以可设其特解为$y_1^*=Ax^2e^{-4x}$，代入上述方程解得 $A=\frac{1}{2}$. 从而

$$y_1^*=\frac{1}{2}x^2e^{-4x}$$

(2) $y''+8y'+16y=16x^2+8x$，因为$\alpha=0$不是特征根，可设其特解为$y_2^*=ax^2+bx+c$，代入上述方程，解得 $a=1,b=-\frac{1}{2},c=\frac{1}{8}$. 于是

$$y_2^*=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

故原方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}+\frac{1}{2}x^2e^{-4x}+x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

八(8 分). 设$0<x_1<x_2$，证明，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

证 所欲证等式等价于

$$\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$

也等价于 $$\left(\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=(1-\xi)e^{\xi}. \qquad (1)$$

令 $f(x)=e^x/x$， $g(x)=1/x$．则 $f(x),g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $g'(x)=-1/x^2\neq 0,\forall x\in(x_1,x_2)$．

由柯西中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$=\left(\frac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}\right)\Big/\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=(1-\xi)e^{\xi}$$