2017~2018 (期末考试试卷)

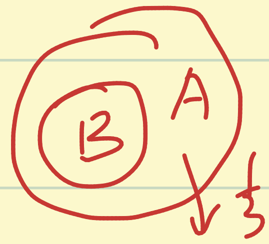
一.(5分,共30分)

1.设$\mathcal{A}$是样本空间Ω上的σ代数,则下面错误的是(　　)

(1) 如果 $A,B\in\mathcal{A}$,则$A\cup B\in\mathcal{A}$ ✓

(2) 如果 $A,B\in\mathcal{A}$,则 $A\bar{B}\in\mathcal{A}$ ✓

(3) 如果 $A\in\mathcal{A}$, $B\subset A$,则 $B\in\mathcal{A}$



(4) 如果 $A_n\in\mathcal{A}$, $n=1,2,\cdots$,则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$ ✓

2.设概率测度空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$, $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$, $B\subset A$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$,定义简单函数

$f(\omega)=\chi_{AB}(\omega)+\chi_{A\bar{B}}(\omega)+\chi_{A}(\omega)$,则 $\int_\Omega f\,dP=$ ______

3.设随机变量X的特征函数为$\phi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$,则期望$E[X^4]=$ ______

4.设随机过程$\{X(t)\}$均方可导,导数为$X'(t)$,相关函数

$R_X(s,t)=\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 t^2$,则 $R_{X'}(s,t)=$ $\frac{1}{3}st\sigma^2$

5.设随机过程$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程,$W(0)=0$.令

$X(t)=-W(t)$,则相关函数 $R_X(1,2)=$ $2\sigma^2$

6.设X_n为一齐次离散时间马氏链,状态空间$E=\{1,2,3\}$,一步转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 则概率 $f_{11}=$ $\frac{1}{3}$

$R_X(1,2)=E[X(1)X(2)]$

$=E[-W(1)\cdot -W(2)]$

$=R_W(-1,-2)\ -2\sigma^2$

二.(15分) (1) 设集合类 $\mathcal{G}=\{(-\infty,x]:x$ 为任意实数$\}$，令 $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{G})$，证明：单点集 $\{x\}\in\mathcal{A}$.

(2) 设集合类 $H=\{(-\infty,x):x$ 为任意实数$\}$，令 $B=\sigma(H)$，证明：单点集 $\{x\}\in B$

三.(10分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从参数为1的指数分布，即密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 定义 $\begin{cases}U=X+Y\\ V=X-Y\end{cases}$

(1) (U,V) 的联合概率密度；

(2) 问 U. V 是否独立，为什么

四.(15分) 设 X，Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 当 $y>0$ 时，条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；

(2) $E(X|Y=y)$，$y>0$

(3) $D(X|Y)$

五.(10分) 设$X(t)=Yt+Z$,其中Y,Z独立同分布均服从标准正态分布$N(0,1)$.

(1)求$X(t)$的一维概率密度$f(x;t)$;

(2)证明$X(t)=Y(t)+Z$为一正态过程

六.设$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$是平稳过程,$f(\lambda)$为谱密度函数,对任意的$h>0$,令$Y(t)=X(t+h)-X(t)$

(1)证明$Y(t)$是平稳过程

(2)求$Y(t)$的谱密度.

七.设齐次马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间为$\{1,2,\cdots\}$,转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

(1) 试判断该链是否可分，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布；

(2) 若初始分布 $q(0)=(1,0,0,0,\cdots)$ 求 $P\{X_1=1, X_3=3, X_4=1\}$

八.(15分)

若单位时间内某事件的发生数量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$\lambda>0$，即 $X\sim \pi(\lambda)$. 若各事件的发生相互独立且任一发生的事件依概率 p_i 为第 i 型，$i=1,2$，证明：

$X_i\sim \pi(p_i\lambda)$，$i=1,2$，并相互独立，其中 X_i 为第 i 型事件发生的数量.

$P\{Y_{t+s}-Y_s=k\}=P\{[s,t+s)$ 内有 k 个顾客购买$\}$

$=P\{[s,t+s)$ 内有 k 个顾客购买, 有 n 个人到达, $n\geq 0\}$

$=\sum_{n=k}^{\infty} P\{N(t+s)-N(s)=n$, 此 n 个人有 k 个顾客购买的结局$\}$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{l+k}}{k!\,l!}p^k(1-p)^{n-k}\quad (l=n-k)$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda p t)^k}{k!}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^l}{l!}$$

$$=e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^k}{k!}$$

$P\{X_1=m\} = P\{X(t)=n\}\, P(X_1=m \mid X(t)=n)$

$X_1+X_2=n$

$P\{X_2=k\} = P\{X(t)=n\}\, P(X_2=k \mid X(t)=n)$

$C_n^m P_1^m P_2^{n-m}$

$P(X_1=m, X(t)=n)$

$\checkmark$