北京邮电大学

《矩阵分析与应用》期末考试试题（A 卷）

2020 / 2021 学年第二学期（**2021 年 6 月 23 日**）

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分。

1. n 维线性空间 V 中的任意 n 个线性无关向量是否可以作为 V 的基？提供理由。（10 分）

2. 设 T 为 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：T 的值域和核的维数之和是 n。（10 分）

3. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，用待定系数法求 $\mathbf{A}^8$。（10 分）

4. 证明：如果线性变换 T 可逆，那么线性变换 T 是一一映射。（10 分）

5. 对任意矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，定义 $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}$，证明 $\|\mathbf{A}\|$ 是矩阵范数。（10 分）

6. $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，定义 $f(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|^2=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$，求 $\dfrac{df}{d\mathbf{A}}$。（10 分）

7. $\mathbf{H}_u=\mathbf{I}_n-2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 为 Householder 矩阵，请判断分块矩阵 $\begin{pmatrix}\mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times n}\\ \mathbf{0}_{n\times m} & \mathbf{H}_u\end{pmatrix}$ 是不是 Householder 矩阵？并详述理由。其中 $\mathbf{I}_m$ 是 m 阶单位阵，$\mathbf{0}_{m\times n}$ 及 $\mathbf{0}_{n\times m}$ 是零矩阵。

8. 利用 G-变换或者 H-变换法求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

9. $\mathbf{A}_{m\times n}\in C_r^{m\times n}(r\ge 1)$，$\mathbf{\Sigma}_r=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$，那么存在酉矩阵 $\mathbf{U}_{m\times m}$ 和 $\mathbf{V}_{n\times n}$，使得 $\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}_{m\times n}\triangleq\mathbf{D}$，那么 $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H$ 称为 A 的 SVD 分解（奇异值分解）。证明：U 矩阵的列向量为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 的特征向量。

10. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的 SVD 分解。