北京邮电大学

《矩阵分析与应用》期末考试试题（A 卷）

2008/2009 学年第一学期（2009 年 1 月 6 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}，E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}，E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}；$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}，F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}，F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在基 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 T，S 为线性变换，若 $TS-ST=T_e$，证明 $TS^k-ST^k=kT^{k-1},k>1$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}-j&2&3\\1&0&j\end{bmatrix}$ 的 $\|g\|_1$，$\|g\|_2$，$\|g\|_\infty$。

四、设矩阵 A 非奇异，l 是它任意一个特征值，证明 $|l|\ge\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$。

五、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求 e^A，$e^{tA}(t\in R)$，$\sin A$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解。

七、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

八、设矩阵 $F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$，证明 $rank(FG)=r$。

九、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。