北京邮电大学 2011——2012 学年第 1 学期

《概率论与随机过程试题》期末考试试题

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号！

一、 填空题：（每小题 3 分，共 30 分）

1．设集合 $\Omega=\{1,2,3\}$，则定义在 Ω 上的包含 $\{1\}$ 的最小σ-代数是_____.

2．设随机事件 $A_1,A_2,\ldots$ 两两不相容且满足 $P(A_n)=\dfrac{1}{3^n},n=1,2,\ldots.$ 记 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则概率 $P(A)=$_____.

3．若集函数 μ 为定义在 σ 代数 $\mathcal{G}$ 上的测度，则当_______时，μ 为定义在 σ 代数 $\mathcal{G}$ 上的概率测度.

4．若 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ 是Ω上的两个非空集合类，v_i 是 $\mathcal{A}_i\ (i=1,2)$ 上的测度，若满足：（1）_____；（2）_____，则称 v_2 是 v_1 在 $\mathcal{A}_2$ 上的扩张。

5．（1）设 $(\Omega,\mathcal{F}),(R,\mathcal{B})$ 为二可测空间， f 是从 Ω 到 R 上的映射。若对 $\forall B\in\mathcal{B}$，有_____，则称 f 是从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(R,\mathcal{B})$ 上的可测映射；（2）设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，X 是从 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 到 $(R,\mathcal{B})$ 上的取有限值的实函数，若对任意实数 x，有_____，则称 X 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量。

6． 设 X 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量，则数学期望 EX 用可测函数的积分表示形式为_____；若 X 的分布函数为 $F(x)$，则数学期望 EX 的 L-S 积分形式为_____.

7．设随机过程 $X(t)=Y\cos t+Z\sin t, t>0$，其中随机变量 Y,Z 独立同分布于标准正态分布 $N(0,1)$，则 $X(t)$ 的一维概率密度函数 $f(x;t)=$_____.

8．设随机过程 $\{X(t)\}$ 均方可导，导过程为 $X'(t)$，相关函数 $R_X(s,t)=\frac{1}{6}s^2(2t-1)$，则 $R_{X'}(s,t)=$_____.

9．设 $N(t)$ 为参数为1的泊松过程，$N(0)=0$，则条件概率 $P(N(2)=2\,|\,N(1)=1)=$_____.

10．设 $W(t)$ 为参数为 σ^2 的维纳过程，$W(0)=0$，则二维随机变量 $\left(W(1),W(2)\right)$ 的协方差矩阵为_____.

二.（4 分）设 $\mathscr{A}$ 是集代数，也是单调类，证明 $\mathscr{A}$ 是σ-代数.

三.（10 分）设随机变量 R 和 Θ 相互独立，且 Θ ~U(0,2π)，R 具有概率密度

$$f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r>0\\ 0 & r\le 0\end{cases}$$

令 $X=R\cos\Theta$，$Y=R\sin\Theta$，求 (X,Y) 的概率密度.

四.（10 分）设 X 与 Y 均服从参数为 1 的指数分布，且相互独立，求条件数学期望 $E[(X+Y)\,|\,(X-Y)]$.

五.（10 分）设随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$$

（1）求随机变量 X 的特征函数 $\phi_X(t)$；

（2）求 $E\left(2X+1\right)^2$.

六.（10 分）设 $X(t),Y(t)$ 是两个相互独立的平稳过程，均值函数分别为 m_X, m_Y，

谱密度函数分别为 $f(\omega), g(\omega)$,相关函数分别为 $R_X(\tau), R_Y(\tau)$.

（1）证明过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 为平稳过程;

（2）求平稳过程 $Z(t)$ 的功率谱函数 $h(\omega)$.

七.（10 分）3 个人(分别称为第 1,2,3 人)相互传球, 每次传球时, 传球者等可能地把球传给其余 2 人中的任何一人. 对 $n=0,1,2,\ldots$, X_n 表示经过 n 次传递后球的状态（若经过 n 次传递后,球在第 i 人手中,则 $X_n=i(i=1,2,3)$）, 令 $X_0=1$.

（1）证明 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为齐次马氏链，并写出一步转移概率矩阵；

（2）求经过 2 次和 4 次传递后，球都回到第 1 人手中的概率 $P\{X_2=1, X_4=1\}$.

八.（10 分）设马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布.

九.（6 分）设 $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ 是齐次有限马氏链, 证明

（1）所有非常返态不构成闭集;

（2）状态空间中无零常返态.