2022年-2023年第一学期
研究生《概率论与随机过程》期末考试选题

一、（10分）

设集合$R=(-\infty,+\infty)$，（1）写出定义在R上的包含集合类$\{(-\infty,0),(-\infty,1)\}$的最小$\sigma$代数；（2）若已知 Borel 域$\mathscr{B}=\sigma(\mathcal{C})$，其中集合类$\mathcal{C}=\{(-\infty,x],x\in R\}$，证明区间$(0,1)\in\mathscr{B}$。

解：（1）定义在$\Omega=(-\infty,+\infty)$上的包含集合类$\{(-\infty,0),(-\infty,1)\}$的最小$\sigma$代数是

$$\{\emptyset,\quad \Omega,\quad (-\infty,0),\quad (-\infty,1),\quad [0,+\infty),\quad [1,+\infty),\quad [0,1),\quad (-\infty,0)\cup[1,+\infty)\}。$$

它包含8个元素。

（5分）

（2）差运算可得$(0,x]\in\mathscr{B}$，所以

$$(0,1)=\bigcup_{n=2}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n}]\in\mathscr{B}$$

（10分）

二、（15分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & -\infty<x<+\infty, y>|x|,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求（1）边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$并证明X和Y不相互独立；

（2）条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；

（3）期望$E(Y)$，条件期望$E(Y|X)$以及$E[E(Y|X)]$.

解：（1）$f_X(x)=\int_{|x|}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-y}dy, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此X和Y不相互独立. （5分）

（2）当$-\infty<x<+\infty$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{|x|-y}, & y>|x|,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ （10 分）

（3） $E(Y)=2$;

对任意的x,

$$E(Y|X=x)=\int_{|x|}^{+\infty} ye^{|x|-y}dy=1+|x|,$$

$$E(Y|X)=1+|X|;$$

$$E[E(Y|X)]=E(Y)=2.$$

（15 分）

三、（10 分） 设随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$。记$\begin{cases}U=X+Y\\V=X-Y\end{cases}$。

(1) 试求(U,V)的联合概率密度函数;

(2) 问U与V是否独立?

解：(1) 由$\rho=0$可知随机变量X和Y独立同分布，均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。

由$X\sim N(\mu,\sigma^2)$知$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$，且$X$和$Y$同分布。

因为$\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$的反函数为$\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\y=\frac{u-v}{2}\end{cases}$，则$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$。

所以，(U,V)的联合概率密度函数为

$$h(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))|J|=f_X(\frac{u+v}{2})f_Y(\frac{u-v}{2})|-\frac{1}{2}|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{\left[(\frac{u+v}{2})-\mu\right]^2}{2\sigma^2}\right\}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{\left[(\frac{u-v}{2})-\mu\right]^2}{2\sigma^2}\right\}\times|-\frac{1}{2}|$$

$$=\frac{1}{4\pi\sigma^2}exp\left\{-\frac{(u-2\mu)^2+v^2}{4\sigma^2}\right\}$$

可见，$(U,V)\sim N(2\mu,0;2\sigma^2,2\sigma^2;0)$。

（8 分）

(2) 由二维正态分布(U,V)的第 5 个参数$\tilde{\rho}=0$可知，U与V相互独立。

（10 分）

四、（15 分）（1）设随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，请写出X的特征函数，并用特征函数法证明X的中心矩为

$$E(X^n)=\begin{cases}1\times3\times5\times\cdots\times(n-1)\sigma^n, & n\geq 2\text{ 的偶数},\\ 0, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

（2）设二维随机变量(X_1,X_2)的分布律为

$$P(X_1=1,X_2=1)=1/3,\quad P(X_1=1,X_2=-1)=1/3,$$

$$P(X_1=-1,X_2=1)=1/6,\ P(X_1=-1,X_2=-1)=1/6,$$

求(X_1,X_2)的特征函数.

（3）设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，试求$\eta_1=\xi_1+\xi_2$，$\eta_2=\xi_1+\xi_3$的联合特征函数.

解：（1）X的特征函数为 $\varphi(t)=e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，对该特征函数关于$t$进行各次微分，利用 $E(X^n)=(-i)^n\varphi^{(n)}(0)$，则可证得结论.

（5 分）

（2）(X_1,X_2)的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi(t_1,t_2)&=\frac{1}{3}e^{i(t_1+t_2)}+\frac{1}{3}e^{i(t_1-t_2)}+\frac{1}{6}e^{i(-t_1+t_2)}+\frac{1}{6}e^{i(-t_1-t_2)}\\&=\frac{1}{6}(e^{it_2}+e^{-it_2})\ (2e^{it_1}+e^{-it_1})\\&=\frac{1}{3}Cos\,t_2(3Cost_1+i\,sint_1).\end{aligned}$$

（10 分）

（3） $$\begin{aligned}\varphi_{(\eta_1,\eta_2)}(t_1,t_2)&=E[e^{i(\eta_1t_1+\eta_2t_2)}]=E[e^{i(\xi_1+\xi_2)t_1+i(\xi_1+\xi_3)t_2}]\\&=E[e^{i\xi_1(t_1+t_2)+i\xi_2t_2+i\xi_3t_2}]\\&=\varphi_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(t_1+t_2,t_1,t_2),\end{aligned}$$

由于随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，所以

$$\varphi_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(t_1+t_2,t_1,t_2)=\varphi_{\xi_1}(t_1+t_2)\varphi_{\xi_2}(t_1)\varphi_{\xi_3}(t_2),$$

故 $$\varphi_{(\eta_1,\eta_2)}(t_1,t_2)=e^{-(t_1^2+t_2^2+t_1t_2)}.$$

（15 分）

5、**（15 分）**设某游乐场有两个入口$i=1,2$，两个出口$j=1,2$。对于$t>0$，定义$A_i(t)$为$(0,t]$内从入口i到达该游乐场的顾客数，$D_i(t)$为$(0,t]$内从出口i离开该游乐场的顾客数，并假设$A_1(t),A_2(t),D_1(t),D_2(t)$相互独立。

（1）若$A_i(t)$是参数为$\lambda_i>0$的泊松过程，令总达到过程$A(t)=A_1(t)+A_2(t)$，求

（1-1）概率$P(A(t)=n)$，

（1-2）条件期望$E[A_1(t)|A(t)=10]$，其中$t>0$为一常数，

（1-3）问$A(t)$是否均方连续。

（2）令$D(t)=D_1(t)+D_2(t)$为总离去过程，并假设$D(t)$是一个参数为$\mu>0$的泊松过程。若每个顾客离开该游乐场时依概率$p_i\in(0,1)$选择从第i个出口离开，$i=1,2$，并进一步假设顾客的行为相互独立。证明$D_i(t)$是相互独立的，服从参数为μp_i的泊松过程，$i=1,2$。

（3）上面（1）若去掉假设："$A_i(t)$是参数为$\lambda_i>0$的泊松过程"，谈谈你对概率$P(A(t)=n)$，条件期望$E[A_1(t)|A(t)=10]$的想法。

解. （1）由题意$A(t)$是泊松过程，参数$\lambda_1+\lambda_2$，所以，

（1-1）$P(A(t)=n)=\frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},k=0,1,2,\dots$

（1-2）因为$A_1(t)|A(t)=10$服从$B(10,p),p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

$$E[A_1(t)|A(t)=10]=\frac{10\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

（1-3）均方连续，因为相关函数$R_A(s,t)=(s\wedge t)\lambda+st\lambda^2$关于$(\tau,\tau)$连续。

（5 分）

（2）

因为X服从参数为λ的泊松分布，所以

$$P\{D(t)=k\}=\frac{(\mu t)^k}{k}e^{-\mu t},k=0,1,\dots,$$

有

$$\begin{aligned}
&P\{D_1(t)=k_1,D_2(t)=k_2\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{D_1(t)=k_1,D_2(t)=k_2|D(t)=k\}P\{D(t)=k\}\\
&=P\{D_1(t)=k_1,D_2(t)=k_2|D(t)=k_1+k_2\}P\{D(t)=k_1+k_2\}\\
&=C_k^{k_1}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\frac{(\mu t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}e^{-\mu t}\\
&=\frac{(p_1\mu t)^{k_1}}{k_1!}e^{-p_1\mu t}\frac{(p_2\mu t)^{k_2}}{k_2!}e^{-p_2\mu t}
\end{aligned}$$

（10 分）

（3）若不是泊松过程，概率可以用全概率公式尝试，条件无法求解。

（15 分）

六、（15 分）设随机过程$Z(t)=X\sin t+Y\cos t$，其中X,Y是两个独立同分布的随

机变量.

（1）若X,Y都以 2/3 和 1/3 的概率分别取值-1 和 2，证明$Z(t)$为宽平稳过程;

（2）若X,Y都服从标准正态分布，证明$Z(t)$为高斯过程，给出$Z(t)$的二维概率密度。

（3）若X,Y都服从标准正态分布，判别$Z(t)$是否为严平稳过程？并给出证明或者理由。

（1）证明 $E[X]=0=E[Y],E[X^2]=E[Y^2]=2,E[XY]=EXEY=0$,

$E[Z(t)]=E[X]\sin t+E[Y]\cos t=0$,

$R_Z(t,s)=E[X^2]\sin t\sin s+E[XY](\sin t\cos s+\cos t\sin s)+E[Y^2]\cos t\cos s=2\cos(t-s)$所以，均值函数为常数，自相关函数只依赖于时间差，$Z(t)$为平稳随机过程。

（5 分）

（2）对于任意正整数n，取任意时间点$t_1,t_2,\cdots,t_n$,任意实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$,

$c_1Z(t_1)+c_2Z(t_2)+\cdots+c_nZ(t_n)=X\sum_{k=1}^{n}c_k\sin t_k+Y\sum_{k=1}^{n}c_k\cos t_k$，因为$X,Y$相互独立且服从正态分布，$X,Y$的线性组合仍然服从正态分布，所以

$c_1Z(t_1)+c_2Z(t_2)+\cdots+c_nZ(t_n)$服从一维正态分布。故$Z(t)$为高斯过程。

$(Z(s),Z(t))$的分布:

$$\begin{aligned}&E[Z(s)]=E[Z(t)]=0,\\&D(Z(s))=D(Z(t))=1\\&Cov(Z(s),Z(t))=R(Z(s),Z(t))=\cos(t-s)=\rho\end{aligned}$$

所以，二维概率密度:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-(\cos(s-t))^2}}exp\left\{\frac{-1}{21-(\cos(s-t))^2}[x^2-2\cos(s-t)xy+y^2]\right\},x,y\in(-\infty,+\infty)$$

（10 分）

（3）由（2）知道是高斯过程，要判别是否为严平稳，由于是正态过程，严宽等价，所以下面判别是否为宽平稳过程。

首先

$E[Z(t)]=0$，

$$\begin{aligned}R_Z(t,s)&=E[X^2]\sin t\sin s+E[XY](\sin t\cos s+\cos t\sin s)+E[Y^2]\cos t\cos s\\&=\cos(t-s)\end{aligned}$$

所以$Z(t)$是宽平稳过程，所以是严平稳过程。

（15 分）

七、（20 分）设离散时间马氏链$\{X_n,n=0,1,\ldots\}$的状态空间$E=\{1,2,\ldots\}$，一步转移概率矩

阵位

$$P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&\cdots\\ \frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&\cdots\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&\cdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&0&\cdots\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{4}&0&0&\frac{3}{4}&\cdots\\ 0&0&0&0&0&\frac{4}{5}&0&0&0&\ddots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$

问（1）马氏链是否可分，若可分，给出空间分解表示；各状态的周期，（3）计算平稳分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\dots)$，讨论该链的状态分类；(4) 若初始分布$q(0)=(0,1,0,0,\dots)$，求$P\{X_1=1,X_3=2,X_4=4\}$；（5）对于上述马氏链，讨论一下初始分布$q(0)$对于平稳分布的影响。

解。(1) 可分，$E=\{1,2,4\}\cup\{5\}\cup\{3,6,7,\dots\}$

$$d(i)=1,i=1,2,\dots$$

（5 分）

（3）设平稳分布为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\dots)$

考虑方程:

$$\begin{cases}\pi=\pi P,\\ \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i=1,\\ \pi_i\geq 0,i=1,2,\dots\end{cases}$$

得$\pi=(p,p,0,p,q,0,0,\dots)$,$3p+q=1,p\geq 0,q\geq 0$.

所以1,2,4,5正常返,由于$f_{33}<1$，3 非常返，$f_{ii}<1,i=6,7,\dots$,所以6,7, ...零常返.

（10 分）

（4）若初始分布$q(0)=(1,0,0,0,\dots)$，则可以考虑子链，状态空间$E=\{1,2,4\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\ \text{得}P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以$P\{X_1=1,X_3=2,X_4=4\}=\sum_i P\{X_0=i\}p_{i1}^{(1)}p_{12}^{(2)}p_{24}^{(1)}=p_{11}^{(1)}p_{12}^{(2)}p_{24}^{(1)}=0$。(15 分)

（5）$q(0)$的选取可能会影响平稳分布，比如（4）中$q(0)$的选取就会导致平稳分布只有一个，并且$q(1)+q(2)+q(4)=1$，但是如果$q_5(0)=1$，则平稳分布为$(0,0,0,0,1,0,\dots)$，如果是上述两个的凸组合，则有可能得出无穷多个平稳分布。

（20 分）

题目 3：随机变量序列的四种收敛性

令$(\Omega, F, P) = ([0,1], B[0,1], P)$为$[0,1]$上 Borel 概率测度。定义随机变量$X = 0$和随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$如下

$X_1 = I_{(0,1]}$，

$X_2 = \sqrt{2} I_{(0,1/2]}$，$X_3 = \sqrt{2} I_{(1/2,1]}$，

$X_4 = \sqrt{3} I_{(0,1/3]}$，$X_5 = \sqrt{3} I_{(1/3,2/3]}$，$X_6 = \sqrt{3} I_{(2/3,1]}$，

$X_7 = \sqrt{4} I_{(0,1/4]}$，$X_8 = \sqrt{4} I_{(1/4,2/4]}$，$\cdots$，$X_{10} = \sqrt{4} I_{(3/4,1]}$，$\cdots$

问：（1）$\{X_n, n \geq 1\}$是否依概率收敛到X？

（2）$\{X_n, n \geq 1\}$是否依分布收敛到X？

（3）$\{X_n, n \geq 1\}$是几乎处处收敛到X？

（4）$\{X_n, n \geq 1\}$是均方收敛到X？

解答：（1）对于$\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{n \to +\infty} P\{\omega\text{: } |X_n(\omega) - 0| < \varepsilon\} = 1$。

故$\{X_n, n \geq 1\}$依概率收敛到X。

（2）由于$\{X_n, n \geq 1\}$依概率收敛到X，故$\{X_n, n \geq 1\}$依分布收敛到X。

（3）对于$\forall \omega \in [0,1]$，序列$\{X_n(\omega), n \geq 1\}$中有无穷多个$X_n(\omega) = 1$，也有无穷多个$X_n(\omega) = 0$。于是$X_n(\omega)$对于$\forall \omega \in [0,1]$都不收敛。即$\{X_n, n \geq 1\}$不是几乎处处收敛到$X$。

（4）由于$E\left(\left|X_{\frac{n(n-1)}{2}+k}(\omega) - 0\right|^2\right) = (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = 1$，$1 \leq k \leq n$。故$\{X_n, n \geq 1\}$不是均方收敛到$X$。

说明：本例根据林元烈、梁宗霞《随机数学引论》第 210-211 页的反例改编。具体而言，从$I_{((k-1)/n,k/n]}$改为$\sqrt{n} I_{((k-1)/n,k/n]}$。往年考题可能没有涉及过这个知识点，是否超出考试范围？

题目 4：泊松过程、均方连续

设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，则

（1）对于$\forall s, t \geq 0$和$n = 0,1,2,\ldots$，给出概率$P\{N(t+s) - N(s) = n\}$；

（2）给出数字特征$\mu_N(t)$，$C_N(s,t)$和$R_N(s,t)$；

（3）证明$\{N(t)\}$对于$\forall t \geq 0$均方连续。

解答：（1）对于$\forall s, t \geq 0$和$n = 0,1,2,\ldots$，概率$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$。

（2）数字特征$\mu_N(t) = \lambda t$，$C_N(s,t) = \lambda\, min\{s,t\}$和$R_N(s,t) = \lambda\, min\{s,t\} + \lambda^2 st$。

（3）由于相关函数$R_N(s,t) = \lambda\, min\{s,t\} + \lambda^2 st = \lambda \frac{s+t-|s-t|}{2} + \lambda^2 st$，且$\frac{s+t}{2}$、

$\frac{|s-t|}{2}$、st都是s,t的连续函数。因此$\{N(t)\}$对于$\forall t \geq 0$均方连续。

说明： 本例根据北邮《概率论与随机过程》第 199 页例 8.4.1 改编。

1、（10 分）（1）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，

定义随机变量$U=\sqrt{X^2+Y^2}$和$V=\frac{X}{Y}$，试求(U,V)的概率密度$g(u,v)$.

（2）若设（1）中(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$，试求（1）中定义的$(U,V)$的概率密度，并证明$U,V$独立.

解：（1）由于$\begin{cases} U=\sqrt{X^2+Y^2}, \\ V=\frac{X}{Y}, \end{cases}$方程组$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+y^2}, \\ v=\frac{x}{y}, \end{cases}$

当$u>0$时有解

$$\begin{cases} x=\pm uv\sqrt{\frac{1}{1+v^2}}, \\ y=\pm u\sqrt{\frac{1}{1+v^2}}, \end{cases} \text{而且 } J=-\frac{u}{(1+v^2)},$$

于是得（U,V）的概率密度为

$$g(u,v)$$

$$=\begin{cases} \left(f\left(\frac{uv}{\sqrt{1+v^2}},\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right)+f\left(\frac{-uv}{\sqrt{1+v^2}},\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)\right)\frac{u}{(1+v^2)}, & -\infty<v<+\infty, u>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（5 分）

（2）若设（1）中(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

则（U,V）的概率密度为

$$f(u,v)=\begin{cases} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\frac{u}{\sigma^2\pi(1+v^2)}, & -\infty<v<+\infty, u>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求边缘概率密度得

$$f_U(u)=\begin{cases} \frac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}, & u>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)}, \quad -\infty<v<+\infty,$$

可见U,V相互独立. （10 分）

2、（10 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & -\infty<x<+\infty, y>|x|,\\ 0， & 其他.\end{cases}$$

求（1）边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$并证明X和Y不相互独立；

（2）条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；

（3）期望$E(Y)$，条件期望$E(Y|X)$以及$E[E(Y|X)]$.

解：（1） $f_X(x)=\int_{|x|}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}e^{-|x|}$， $-\infty<x<+\infty$,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-y}dy， & y>0,\\ 0， & 其他.\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}， & y>0,\\ 0， & 其他.\end{cases}$$

因此X和Y不相互独立. （3 分）

（2）当$-\infty<x<+\infty$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{|x|-y}, & y>|x|,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ （5 分）

（3） $E(Y)=2$;

对任意的x,

$$E(Y|X=x)=\int_{|x|}^{+\infty}ye^{|x|-y}dy=1+|x|,$$

$$E(Y|X)=1+|X|;$$

$$E[E(Y|X)]=E(Y)=2.$$ （10 分）

3、（12 分）（1）设随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，请写出X的特征函数，并用特征函数法证明X的中心矩为

$$E(X^n)=\begin{cases}1\times3\times5\times\cdots\times(n-1)\sigma^n, & n\geq2 \text{ 的偶数},\\ 0, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

（2）设二维随机变量(X_1,X_2)的分布律为

$P(X_1=1,X_2=1)=1/3$, $P(X_1=1,X_2=-1)=1/3$,

$P(X_1=-1,X_2=1)=1/6$, $P(X_1=-1,X_2=-1)=1/6$,

求(X_1,X_2)的特征函数.

（3）设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，试求$\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1+\xi_3$的联合特征函数.

解：（1）X的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$，对该特征函数关于$t$进行各次微分，利用

$E(X^n) = (-i)^n \varphi^{(n)}(0)$，则可证得结论.（4 分）

（2）(X_1, X_2)的特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2) = \frac{1}{3}e^{i(t_1+t_2)} + \frac{1}{3}e^{i(t_1-t_2)} + \frac{1}{6}e^{i(-t_1+t_2)} + \frac{1}{6}e^{i(-t_1-t_2)}$$

$$= \frac{1}{6}(e^{it_2} + e^{-it_2})\ (2e^{it_1} + e^{-it_1})$$

$$= \frac{1}{3}Cos\, t_2(3Cost_1 + i\, sint_1).$$（8 分）

（3）$$\varphi_{(\eta_1,\eta_2)}(t_1,t_2) = E[e^{i(\eta_1 t_1 + \eta_2 t_2)}] = E[e^{i(\xi_1+\xi_2)t_1 + i(\xi_1+\xi_3)t_2}]$$

$$= E[e^{i\xi_1(t_1+t_2) + i\xi_2 t_2 + i\xi_3 t_2}]$$

$$= \varphi_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(t_1+t_2, t_1, t_2),$$

由于随机变量ξ_1, ξ_2, ξ_3相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，所以

$$\varphi_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(t_1+t_2, t_1, t_2) = \varphi_{\xi_1}(t_1+t_2)\varphi_{\xi_2}(t_1)\varphi_{\xi_3}(t_2),$$

故 $\varphi_{(\eta_1,\eta_2)}(t_1,t_2) = e^{-(t_1^2+t_2^2+t_1t_2)}$.（14 分）