第一章 习题

1.1 给定 f(t) = rect(t+2) + rect(t-2), 画出下列函数的图形。

(1) f(t)

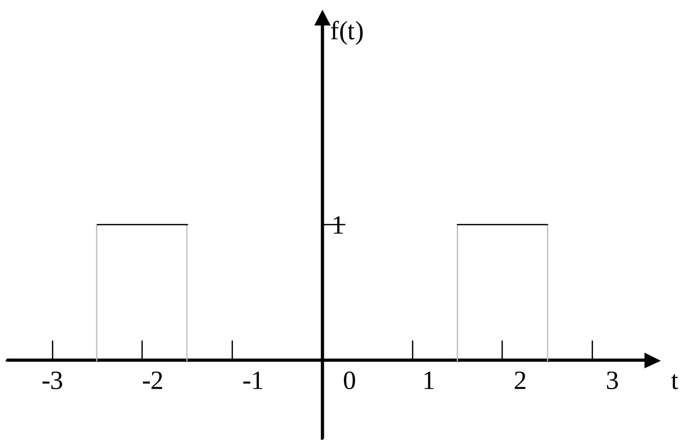
(2) g(t) = f(t-1)

(3) h(t) = f(t)u(t)

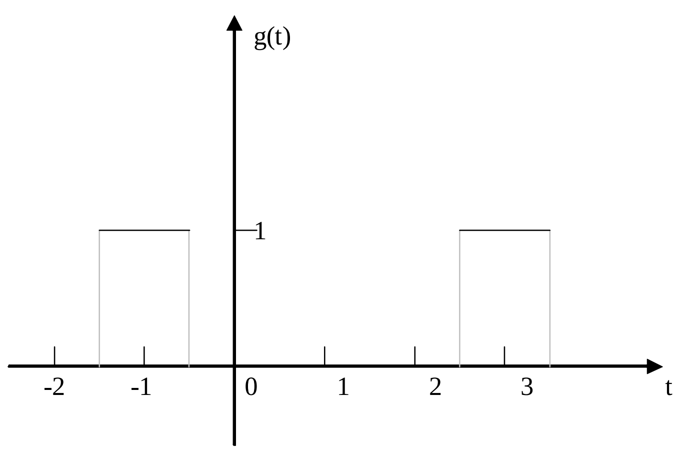
(4) f(t/2)

解：

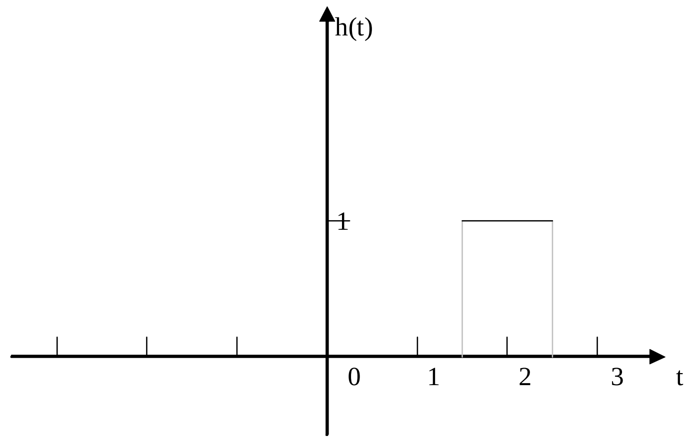
（1） $f(t)$



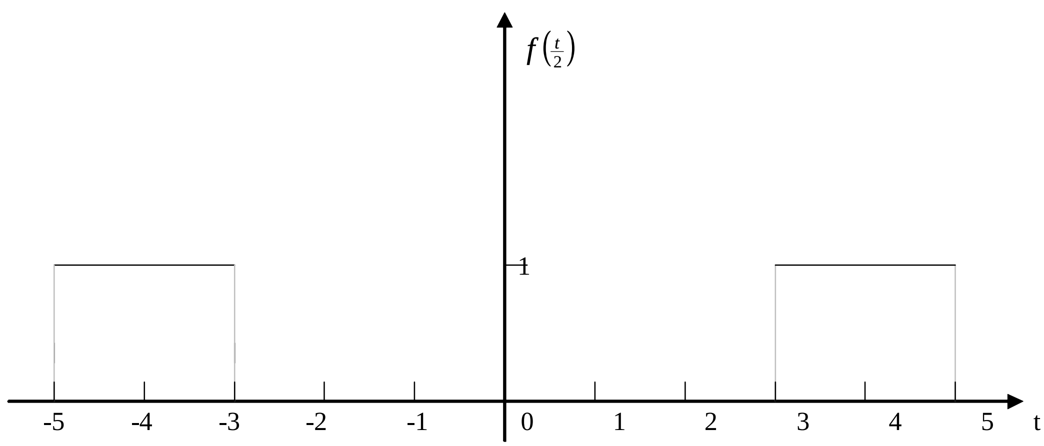
（2） $g(t)=f(t-1)$



（3） $h(t)=f(t)u(t)$



（4） $f\left(\frac{t}{2}\right)$



1.2 设 f(t) 是某一函数，a, t_0, T 为实常数，证明：

$$(1)\quad f(t)\delta\left(\frac{t-\tau_0}{a}\right)=|a|\,f(\tau_0)\delta(t-\tau_0)$$

$$(2)\quad f(t)\delta(at-\tau_0)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{\tau_0}{a}\right)\delta\left(t-\frac{\tau_0}{a}\right)$$

$$(3)\quad f(t)comb\left(\frac{t-\tau_0}{T}\right)=|T|\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(\tau_0=nT)\delta(t-\tau_0-nT)$$

解：

（1）

$$f(t)\delta\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=f(t)|a|\delta(t-t_0)=|a|\,f(t)\delta(t-t_0)=|a|\,f(t_0)\delta(t-t_0)$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(t)d(at-t_0) &= f(t)\tfrac{1}{|a|}d\left(t-\tfrac{t_0}{a}\right)\\
&= \tfrac{1}{|a|}f(t)d\left(t-\tfrac{t_0}{a}\right)\\
&= \tfrac{1}{|a|}f\left(\tfrac{t_0}{a}\right)d\left(t-\tfrac{t_0}{a}\right)
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
f(t)comb\left(\tfrac{t-t_0}{T}\right) &= f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}d\left(\tfrac{t-t_0}{T}-n\right) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}d\left(\tfrac{t-t_0-nT}{T}\right)\\
&= |T|\,f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}d(t-t_0-nT)\\
&= |T|\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)d(t-t_0-nT) = |T|\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t_0+nT)d(t-t_0-nT)
\end{aligned}
$$

1.3

(1) 如 f(t) $\longleftrightarrow$ F(Ω)，证明：

$$F(\Omega)*e^{-j\Omega t}=\int_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{-j(\Omega-y)t}dy=2pf(t)e^{-j\Omega t}$$

(2) 用 （a） 的结果，证明频域卷积定理

$$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2p}F_1(\Omega)*F_2(\Omega)$$

证明：

（1）

$$
\begin{aligned}
F(\Omega)*e^{-j\Omega t} &= \int_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{-j(\Omega-y)t}dy = \int_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{-j\Omega t}e^{jyt}dy\\
&= e^{-j\Omega t}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{jyt}dy = 2p\,f(t)e^{-j\Omega t}
\end{aligned}
$$

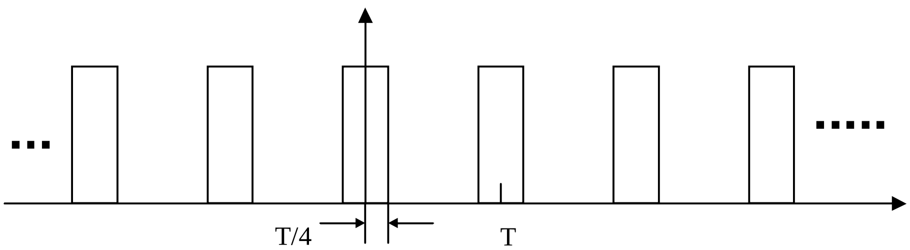
（2）

$$
\begin{aligned}
F\left[f_1(t)f_2(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-j\Omega t}dt = \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}2p\,f_1(t)e^{-j\Omega t}\cdot f_2(t)dt\\
&= \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\Omega)*e^{-j\Omega t}\cdot f_2(t)dt\\
&= \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(y)\cdot e^{-j(\Omega-y)t}dy\right)\cdot f_2(t)dt\\
&= \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(y)e^{-j(\Omega-y)t}\cdot f_2(t)dydt\\
&= \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-j(\Omega-y)t}dt\right)F_1(y)dy\\
&= \tfrac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\Omega-y)\cdot F_1(y)dy\\
&= \tfrac{1}{2p}F_1(\Omega)*F_2(\Omega)
\end{aligned}
$$

所以

$$f_1(t)\,f_2(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{2\pi} F_1(\Omega) * F_2(\Omega)$$

1.4 求下图中 f(t) 脉冲的傅氏变换。



解：

令 $t=\dfrac{T}{2}$，脉冲幅度为 1，截取 f(t) 的一个周期 $f_0(t)$。

则 $f_0(t)$ 的傅立叶变换为：

$$F_0(\omega)=F\left[f_0(t)\right]=\tfrac{T}{2}\cdot Sa\left(\tfrac{\omega t}{2}\right)=\tfrac{T}{2}\cdot Sa\left(\tfrac{\omega T}{4}\right)$$

得

$$F_n=\tfrac{1}{T}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\tfrac{1}{2}Sa\left(\tfrac{n\omega_1 T}{4}\right),\omega_1=\tfrac{2\pi}{T}$$

所以

$$F\left[f(t)\right]=F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\tfrac{n\omega_1 T}{4}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$

注：如果用 sinc 函数表示，结果：

$$F(\omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin c\left(\tfrac{n\omega_1 T}{4\pi}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$

1.5 证明

(1) $\boldsymbol{H(\Omega)*\delta(\Omega)=H(\Omega-a)}$

(2) $\boldsymbol{H(\Omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega+n\Omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(\Omega+n\Omega_0)}$

证明：

(1)

$$\text{左边}=\int_{-\infty}^{\infty}H(a)\cdot\delta(\Omega-a)\,da=\int_{-\infty}^{\infty}H(\Omega)\delta(\Omega-a)\,da=H(\Omega-a)$$

(2)

$$H(\Omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega+n\Omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}H(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-t+n\Omega_0)dt$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(t)\delta(\Omega-t+n\Omega_0)dt$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(\Omega+n\Omega_0)$$

1.6 设 $f(t)=e^{-a|t|}$，证明脉冲序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$ 的傅氏变换等于

$$\frac{1-e^{-2aT}}{1-2e^{-aT}\cos\Omega T+e^{-2aT}}$$

证明：

设 $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$

则：

$$F[g(t)]=F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-jnT\Omega}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-a|nT|}e^{-jnT\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{0}e^{anT}e^{-jnT\Omega}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-anT}e^{-jnT\Omega}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-anT}e^{jnT\Omega}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-anT}e^{-jnT\Omega}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nT(a-j\Omega)}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nT(a+j\Omega)}$$
$$=\frac{1}{1-e^{-T(a-j\Omega)}}+\frac{e^{-T(a+j\Omega)}}{1-e^{-T(a+j\Omega)}}$$
$$=\frac{1-e^{-2aT}}{1-2e^{-aT}\cos\Omega T+e^{-2aT}}$$

1.7

(1) 证明

$$\frac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnT\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega+n\Omega_0),\quad \Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

(2) 若 f(t)$\longleftrightarrow$ F(Ω)，证明

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-jnT\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\Omega+n\Omega_0)$$

证明：

(1)

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\Omega} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(t-nT\right)$$

$$\therefore \tfrac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\Omega} \leftrightarrow \tfrac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(t-nT\right)$$

令 $f\left(t\right)=\tfrac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(t-nT\right)$

f(t) 为周期冲激序列，截取 f(t) 中一个周期 $f_0\left(t\right)=\tfrac{1}{\Omega}d\left(t\right)$，其傅立叶变换为：

$$F\left[f_0\left(t\right)\right]=F_0\left(\Omega\right)=\tfrac{1}{\Omega_0}\cdot 1=\tfrac{1}{\Omega_0}$$

所以

$$F_n=\tfrac{1}{T}F_0\left(\Omega\right)\Big|_{\Omega=\Omega_0}=\frac{1}{T\Omega_0}$$

则

$$F\left[f\left(t\right)\right]=F\left(\Omega\right)=2p\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n d\left(\Omega-n\Omega_0\right)=2p\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{T\Omega_0}d\left(\Omega+n\Omega_0\right)$$

$$=\tfrac{2p}{T\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(\Omega+n\Omega_0\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(\Omega+n\Omega_0\right)$$

所以

$$\tfrac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(\Omega+n\Omega_0\right)$$

(2)

右边：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\Omega+n\Omega_0\right)$，傅氏变换：

$$F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\Omega+n\Omega_0\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t\right)e^{-jn\Omega_0 t}=f\left(t\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\left(t+nT\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf\left(nT\right)d\left(t-nT\right)$$

左边：傅氏反变换：

$$F^{-1}\left[T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nT\right)e^{-jnT\Omega}\right]=T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nT\right)\cdot d\left(t-nT\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf\left(nT\right)\cdot d\left(t-nT\right)$$

所以两者相等，原式成立。

第二章 习题

2.1 若离散时间信号为2cos(2πn/3)，抽样率为2000Hz,写出所对应的模拟信号的表达式。

解：

设对应的模拟信号为： $x(t)=2\cos 2\pi ft$

由取样率为 **2000Hz** 得取样周期为 **1/2000** 秒

故

$$x(n)=f(t)|_{t=nT_s}=2\cos(2\pi fnT_s),\qquad T_s=1/2000$$

所以

$$1/3=fT_s \quad 解出 \quad f=2000/3$$

因此

$$x(t)=2\cos(4000\pi t/3)$$

2.2 以抽样频率 f_s=200Hz 对模拟正弦信号 $x_a(t)$ 进行抽样

$$x_a(t)=6\cos(60\pi t)+3\sin(300\pi t)+2\cos(340\pi t)+4\cos(500\pi t)+10\sin(660\pi t)$$

试确定抽样后的离散信号表达式。

解：

$$T_s=1/f_s=1/200$$

$$x_a(n)=x_a(t)|_{t=nT_s}=6\cos(0.3\pi n)+3\sin(1.5\pi n)+2\cos(1.7\pi n)+4\cos(2.5\pi n)+10\sin(3.3\pi n)$$

2.3 下列系统中，y(n) 表示输出，x(n) 表示输入，试确定输入输出关系是否线性？是否非移变？

(1) y(n) = 2x(n) +3

(2) y(n) = x^2(n)

(3) $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

解：

(1) 设输入为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，对应输出为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$

则输出为：

$$y_1(n)=2x_1(n)+3,\quad y_2(n)=2x_2(n)+3$$

$$\begin{aligned}y(n)&=2[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]+3\\&\neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)\\&=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)+3(a_1+a_2)\end{aligned}$$

故为非线性。
设输入为：

$$x^{'}(n) = x(n - n_0)$$

则输出为：

$$y^{'}(n) = 2x(n-n_0) + 3 = y(n-n_0)$$

故是非移变系统。

(2) 设输入为 **$x_1(n)$** 和 **$x_2(n)$**，对应输出为 **$y_1(n)$** 和 **$y_2(n)$**
则输出为：

$$y_1(n) = x_1^{\ 2}(n)\text{，}\quad y_2(n) = x_2^{\ 2}(n)$$

$$y^{'}(n) = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 \neq a_1y_1^{\ 2}(n) + a_2y_2^{\ 2}(n) = a_1x_1^{\ 2}(n) + a_2x_2^{\ 2}(n)$$

故为非线性。
设输入为：

$$x^{'}(n) = x(n-n_0)$$

则输出为：

$$y^{'}(n) = x^2(n-n_0)$$

而

$$y(n-n_0) = x^2(n-n_0) = y^{'}(n)$$

故是非移变系统。

(3) 设输入为 **$x_1(n)$** 和 **$x_2(n)$**，对应输出为 **$y_1(n)$** 和 **$y_2(n)$**
则输出为：

$$y_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x_1(m)\text{，}\quad y_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x_{1\,2}(m)$$

$$\begin{aligned} y^{'}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{n} [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n} a_1x_1(n) + \sum_{m=-\infty}^{n} a_2x_2(n) \\ &= a_1\sum_{m=-\infty}^{n} x_1(n) + a_2\sum_{m=-\infty}^{n} x_2(n)] \end{aligned}$$

故为线性。
设输入为：

$$x^{'}(n) = x(n - n_0)$$

则输出为：

$$y^{'}(n)=y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n+n_0}x(m-n_0)$$

而

$$y(n-n_0)=\sum_{m=-\infty}^{n+n_0}x(m-n_0)=y^{'}(n)$$

故是非移变系统。

2.4 确定下列系统是否因果的？是否稳定的？

(1) y(n) = g(n) x(n), g(n) 有界

(2) $y(n)=\sum_{k=-n_0}^{n}x(k)$ n > n0

(3) y(n) = x(n-n_0)

(4) x(n) = a^nu(n), h(n) = u(n)

(5) x(n) = a^nu(n), h(n) = $(1/2)^n$u(n)

解：(**1**) 令$|g(n)|\le M$**，** 若 $|x(n)|\le M$

$|y(n)|=|g(n)x(n)|\le M|x(n)|<\infty$，故稳定。

设当$n\le k$时，$x_1(n)=x_2(n)$

$y_1(n)=x_1(n)g(n)$，$y_2(n)=x_2(n)g(n)$， $y_1(n)=y_2(n)$ 故因果。

(2) 若$|x(n)|\le M$，$|y(n)|=|\sum_{k=-n_0}^{n}x(k)|$，当$n\to\infty$时，$|y(n)|$有可能趋于$\infty$，故非稳定。

设当$n\le k$时，$x_1(n)=x_2(n)$

$y_1(n)=\sum_{k=-n_0}^{n}x_1(k)$，$y_2(n)=\sum_{k=-n_0}^{n}x_2(k)$， $y_1(n)=y_2(n)$ 故因果。

(3) 若$|x(n)|\le M$，$|y(n)|=|x(n-n_0)|\le M<\infty$，故稳定。

显然，对于$y(n)=x(n-n_0)$，当$n<0$时非因果，$n\ge 0$是非因果。

(4) 对于$h(n)=u(n)$，当$n<0$时$h(n)=0$，因果。

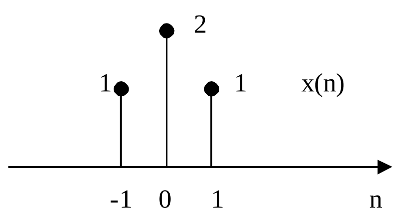
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)=\infty \quad 故不稳定$$

(5) 对于$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$，当$n<0$时$h(n)=0$，因果。

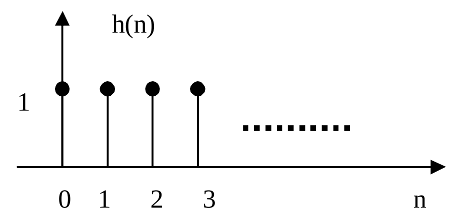
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n<\infty$$ 故稳定

2.5 x(n) 为输入序列， h(n) 为系统的单位取样响应序列，确定输出序列 y(n)，
(1) 如图 p 2.1 (a) 所示
(2) 如图 p 2.1 (b) 所示
(3) 如图 p 2.1 (c) 所示

解：

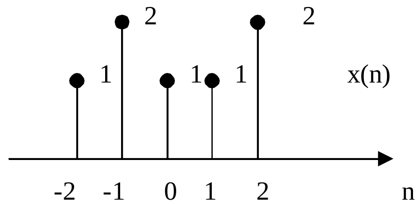


(a)

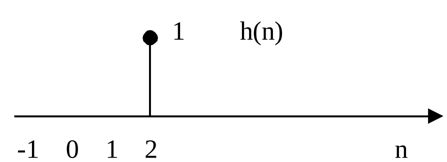


$x(n)=d(n-1)+2d(n)+d(n+1)$ **$h(n)=u(n)$**

$y(n)=x(n)*h(n)=u(n-1)+2u(n)+u(n+1)$

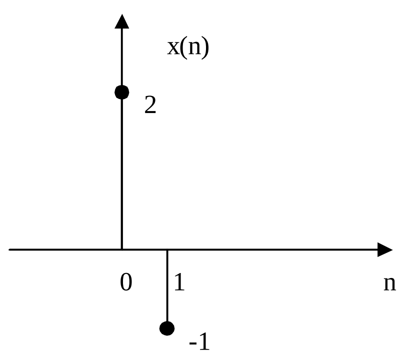


(b)

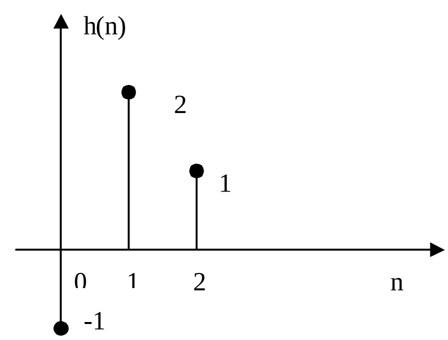


$x(n)=2d(n-2)+d(n-1)+d(n)+2d(n+1)+d(n+2)$ **$h(n)=d(n-2)$**

$y(n)=x(n)*h(n)=2d(n-4)+d(n-3)+d(n-2)+2d(n-1)+d(n)$



(c)



$x(n)=-d(n-1)+2d(n)$ **$h(n)=d(n-2)+2d(n-1)-d(n)$**

$y(n)=x(n)*h(n)=-d(n-3)+5d(n-1)-2d(n)$

2.6 直接计算卷积和，求序列

$$h(n)=\begin{cases} a^n & 0\leqslant n<N \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases} b^{n-n_0} & 0\leqslant n<N \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

的卷积 y(n) = x(n) * h(n) ，并用公式表示它。

解：

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n)*h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} b^{k-n_0}a^{n-k} \qquad 其中 \begin{cases} n-N<k\le n \\ 0\le k<N \end{cases} \\ &= a^n b^{-n_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{b}{a})^k \end{aligned}$$

当 $n<0$ 时，**k**无可取值区间，

$$y(n)=0$$

当 $0\le n<N$ 时，$0\le k<n$，

$$y(n)=a^n b^{-n_0}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{b}{a})^k=\begin{cases} a^n b^{-n_0} n & a=b \\ a^n b^{-n_0}\dfrac{1-(b/a)^n}{1-(b/a)} & a\ne b \end{cases}$$

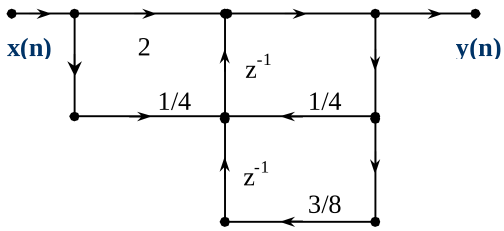
当 $N\le n<2N$ 时，$n-N\le k<N$，

$$y(n)=a^n b^{-n_0}\sum_{k=n-N}^{N-1}(\frac{b}{a})^k=\begin{cases} a^n b^{-n_0} n & a=b \\ a^n b^{-n_0}\dfrac{(b/a)^{n-N}[1-(b/a)^n]}{1-(b/a)} & a\ne b \end{cases}$$

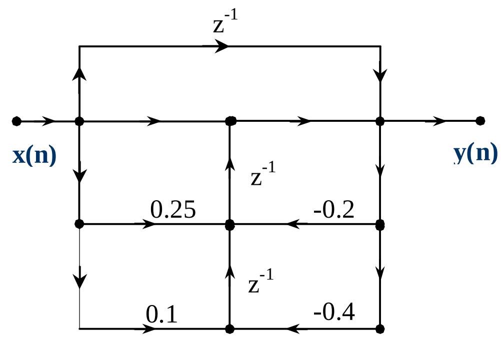
当 $n\ge 2N$ 时，**k**无可取值区间，

$$y(n)=0$$

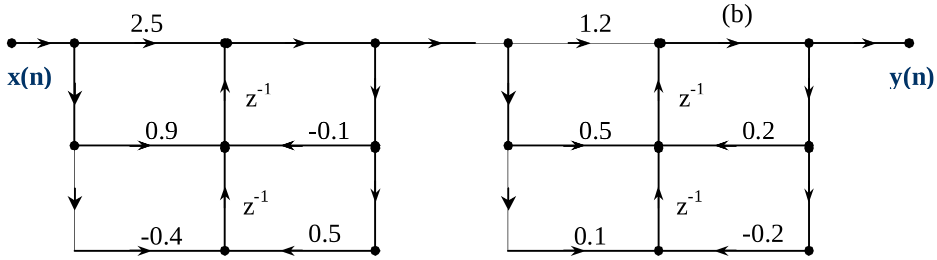
2.7 求图示结构的传输函数及差分方程。



(a)



(b)



(c)

解：（**1**） $y(n)=2x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)+\frac{1}{4}y(n-1)+\frac{3}{8}y(n-2)$

等式两端 **Z** 变换：

$$Y(z)=2X(n)+\frac{1}{4}X(z)z^{-1}+\frac{1}{4}Y(z)z^{-1}+\frac{3}{8}Y(z)z^{-2}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{16z^2+2z}{8z^2-2z-3}$$

（**2**） $y(n)=x(n)+\frac{5}{4}x(n-1)-0.2y(n-1)+0.1x(n-2)+0.4y(n-2)$

等式两端 **Z** 变换：

$$Y(z)=X(n)+\frac{5}{4}X(z)z^{-1}+0.1X(z)z^{-2}-0.2Y(z)z^{-1}-0.4Y(z)z^{-2}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{5}{4}z^{-1}+0.1z^{-2}}{1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}}=\frac{20z^2+25z+2}{20z^2+4z+8}$$

（**3**）设中间点信号为 $y'(n)$：

$$y'(n)=2.5x(n)+0.9x(n-1)-0.1y'(n-1)-0.4x(n-2)+0.5y'(n-2)$$

等式两端 **Z** 变换：

$$Y'(z)=2.5X(n)+0.9X(z)z^{-1}-0.4X(z)z^{-2}-0.1Y'(z)z^{-1}+0.5Y'(z)z^{-2}$$

$$H^{'}(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2.5+0.9z^{-1}-0.4z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.5z^{-2}}=\frac{25z^{2}+9z-4}{10z^{2}+1z-5}$$

$$y(n)=1.2y^{'}(n)+0.5x(n-1)+0.2y(n-1)+0.1x(n-2)-0.2y(n-2)$$

$$Y(z)=1.2y^{'}(n)+0.5X(z)z^{-1}+0.1X(z)z^{-2}+0.2Y(z)z^{-1}-0.2Y(z)z^{-2}$$

$$H^{''}(z)=\frac{Y(z)}{Y^{'}(z)}=\frac{1.2+0.5z^{-1}+0.1z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.2z^{-2}}=\frac{12z^{2}+5z+1}{10z^{2}-2z+2}$$

$$H(z)=H^{'}(z)H^{''}(z)=\frac{25z^{2}+9z-4}{10z^{2}+1z-5}\cdot\frac{12z^{2}+5z+1}{10z^{2}-2z+2}$$

$$=\frac{300z^{4}+213z^{3}+22z^{2}-11z-4}{100z^{4}-10z^{3}-32z^{2}-8z-10}$$

$$=\frac{3+2.13z^{-1}+0.22z^{-2}-0.11z^{-3}-0.04z^{-4}}{1-0.1z^{-1}-0.32z^{-2}-0.08z^{-3}-0.1z^{-4}}$$

故差分方程为：

$$\begin{aligned}y(n)&=3x(n)+2.13x(n-1)+0.22x(n-2)-0.11x(n-3)-0.04x(n-4)\\&\quad+0.1y(n-1)+0.32y(n-2)+0.08y(n-3)+0.1y(n-4)\end{aligned}$$

2.8 试确定下列序列的傅氏变换。

(1) $x(n)=0.5d(n+1)+0.5d(n-1)$

解： $X(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}=\frac{1}{2}e^{jw}+\frac{1}{2}e^{-jw}=\cos w$

(2) $x(n)=a^{n}u(n),\quad 0<a<1$

解： $X(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}a^{n}u(n)e^{-jwn}=\sum_{0}^{\infty}a^{n}e^{-jwn}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$

(3) $x(n)=u(n+3)-u(n-4)$

解：

$$X(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}[u(n+3)-u(n-4)]e^{-jwn}=\sum_{n=-3}^{3}e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-jwn}+\sum_{n=1}^{3}e^{jwn}$$

2.9 令 $x(n)$ 和 $X(e^{jw})$ 表示一个序列及其变换，又假设 $x(n)$ 为实函数和 n<0 时，$x(n)=0$，利用 $X(e^{jw})$ 求下面各序列的变换。

(1) $kx(n)$ k 为任意常数

解：$kX(e^{jw})$

(2) $x(n-n_0)$ n_0 为实整数

解：$e^{-jn_0 w}X(e^{jw})$

(3) $g(n)=x(2n)$

解：

$$FT[x(2n)]=\sum_{n'\text{取偶数}} x(n')e^{-jwn'/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2}[x(n)+(-1)^n x(n)]e^{-jwn/2}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn/2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jpn}x(n)e^{-jwn/2}]=\tfrac{1}{2}[X(e^{j\frac{1}{2}w})+X(e^{j(\frac{1}{2}w-p)})]$$

(4) $g(n)=x^2(n)$

解：$FT[x^2(n)]=\dfrac{1}{2p}X(e^{jw})*X(e^{jw})=\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X(e^{jw'})X(e^{j(w-w')})dw'$

2.10 试确定 LSI 系统的频率响应 $H(e^{jw})$ 及此系统函数倒数 $\dfrac{1}{H(e^{jw})}$ 的单位取样响应 $h'(n)$，若此系统的单位取样响应

$$h(n)=(1/2)^n u(n)$$

并证明 $h(n)*h'(n)=d(n)$。

解：$H(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}h(n)e^{-jnw}=\dfrac{1}{1-0.5e^{-jw}}$

$$h'(n)=F^{-1}[\frac{1}{H(e^{jw})}]=F^{-1}[1-0.5e^{-jw}]=d(n)-0.5d(n-1)$$

$$h(n)*h'(n)=0.5^n u(n)*[d(n)-0.5d(n-1)]=0.5^n u(n)-0.5^n u(n-1)$$

$$=1+0.5^{n-1}u(n-1)-0.5^n u(n-1)=1$$ 得证

2.11 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，已知其傅立叶变换的实部为

$$H_R(e^{jw}) = \frac{1 - a\cos w}{1 + a^2 - 2a\cos w}$$

求 $h(n)$ 及其傅立叶变换 $H(e^{jw})$。

解：

$$H_R(e^{jw}) = \frac{1 - a\cos w}{1 + a^2 - 2a\cos w} = \frac{1 - 0.5a(e^{jw} + e^{-jw})}{1 + a^2 - a(e^{jw} + e^{-jw})}$$

$$H_R(z) = \frac{1 - 0.5a(z + z^{-1})}{1 + a^2 - a(z + z^{-1})} = \frac{1 - 0.5a(z + z^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - az)}$$

对上式作Z反变换，得到序列 $h(n)$ 的共轭对称序列 $h_e(n)$：

$$h_e(n) = \frac{1}{2pj}\oint_c H_R(z) z^{n-1} dz$$

$$F(z) = H_R(z) z^{n-1} = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^{n-1}$$

因为 $h(n)$ 是因果序列，$h_e(n)$ 必定是双边序列，收敛域取：$a < |z < a^{-1}|$

$n \ge 1$ 时，c内有极点a，

$$h_e(n) = \mathrm{Re}\,s[F(z), a] = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a^{-1})(z-a)} z^{n-1}(z-a)\Big|_{z=a} = \frac{1}{2}a^n$$

$n = 0$ 时，c内有极点a和0，

$$h_e(n) = \mathrm{Re}\,s[F(z), a] + \mathrm{Re}\,s[F(z), a] = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a^{-1})(z-a)} z^{n-1}(z-a)\Big|_{z=a} = \frac{1}{2}a^n$$

又因为

$$h_e(n) = h_e(-n)$$

所以

$$h_e(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0.5a^n & n > 0 \\ 0.5a^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h_e(n) & n = 0 \\ 2h_e(n) & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a^n & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = a^n u(n)$$

$$H(e^{jw})=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-jwn}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

2.12 设序列 $x(n)$ 的傅立叶变换为 $X(e^{jw})$，证明

$$\underset{n=-¥}{\overset{¥}{\text{å}}}\left|x(n)\right|^{2}=\frac{1}{2p}\overset{p}{\underset{-p}{\text{ò}}}\left|X(e^{jw})\right|^{2}dw$$

证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{x(n)}\cdot x(n)$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{x(n)}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p}X(e^{jw})e^{jnw}\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}X(e^{jw})\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{x(n)e^{iwt}}\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}X(e^{jw})\overline{X(e^{jv})}\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|X(e^{jw})\right|^{2}dw \qquad \text{证毕}$$

2.13 求以下序列的 z 变换及其收敛域。

(1) $d(n)$ (2) $(\frac{1}{2})^{n}u(n)$ (3) $d(n-1)$ (4) $\frac{1}{n}$

(5) $-(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)$ (6) $(\frac{1}{2})^{n}[u(n)-u(n-10)]$ (7) $(\frac{1}{2})^{n}u(n)+(\frac{1}{3})^{n}u(n)$

解：

（1）1

（2）$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\quad |z|>\frac{1}{2}$

（3）z^{-1} $\quad z\neq 0$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{-n}=\int\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}z^{-n})'dz=\int\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}dz=\int\frac{1}{1-z^{-1}}dz=z+\ln|z-1|$ $\quad z<0\text{或}z\geq 2$

(5) $\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}}$ $\quad |z|<\frac{1}{2}$

(6) $\frac{1-2^{-10}z^{-10}}{1-2^{-1}z^{-1}}$ $\quad 0<|z|\leq\infty$

(7) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z|>\frac{1}{2}$

2.14 分别用长除法、留数法、部分分式法求下列z反变换。

(1) $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z|<\dfrac{1}{4}$

长除法：

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=8+28z+112z^2+\cdots=\sum_{-\infty}^{0}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=8d(n)+7(\frac{1}{4})^n u(-n-1)$$

部分分式法：

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=8-\frac{7z}{z-\frac{1}{4}} \quad |z|<\frac{1}{4}$$

$$x(n)=8d(n)+7(\frac{1}{4})^n u(-n-1)$$

留数法：

$$x(n)=\frac{1}{2pj}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=d(n)+Res[\frac{-\frac{7}{4}}{z-\frac{1}{4}}z^{n-1}\text{在}z=\tfrac{1}{4}\text{处}]=d(n)-\tfrac{7}{4}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$

(2) $X(z)=\dfrac{z-a}{1-az}, \quad |z|>\left|\dfrac{1}{a}\right|$

部分分式法：

$$X(z)=\frac{z-a}{1-az}=\frac{a}{az-1}-\frac{z}{az-1}=\frac{1}{z-\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}\frac{z}{z-\frac{1}{a}}$$

$$x(n)=(\tfrac{1}{a})^{n-1}u(n-1)-\tfrac{1}{a}(\tfrac{1}{a})^n u(n)$$

长除法：

$$X(z)=\frac{z-a}{1-az}=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})z^{-1}+(\frac{1}{a})^2(a-\frac{1}{a})z^{-2}+\cdots \quad |z|>\left|\frac{1}{a}\right|$$

$$=\sum_{0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=-ad(n)+(a-\frac{1}{a})(\frac{1}{a})^n u(n)$$

留数法：

$$x(n)=\frac{1}{2p\,j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2p\,j}\oint_c \frac{1-a^2}{a}\frac{z^n}{z-\frac{1}{a}}dz-ad(n)$$

$$=Res[\oint_c \frac{1-a^2}{a}\frac{z^n}{z-\frac{1}{a}}\quad \text{at } z=\tfrac{1}{a}]$$

$$=-ad(n)+(a-\frac{1}{a})(\frac{1}{a})^n u(n)$$

2.15 求下列 z 变换的所有可能收敛区间的反变换。

$$\boldsymbol{X(z)=\frac{3}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-2z^{-1}}}$$

解：

由原式得极点为： **Z=0.5，Z=2**

故该**Z**变换可能的收敛区为：

(a) $|z|>2$，此时对应的**x(n)**是右边序列

(b) $|z|<1$，此时对应的**x(n)**是左边序列

(c) $1<|z|<2$，此时对应的**x(n)**是双边序列

下面根据收敛域的不同用留数法求**x(n)：**

(1) 当$|z|>2$时， $n<0$时，**x(n)=0;**

$n\geq 0$时，围线**C**内有两个极点：**0.5**和**2**

$$\therefore x(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=0.5}]+\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=2}]$$

$$=3\cdot(\frac{1}{2})^n+2\cdot 2^n$$

$$\therefore x(n)=[3\cdot(\frac{1}{2})^n+2\cdot 2^n]u(n)$$

(2) $|z|<1$，有$n\geq 0$时，**x(n)=0;**

$n<0$时，围线**C**外有两个极点：**0.5**和**2**

$$\therefore x(n)=-\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=0.5}]-\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=2}]$$

$$=-3\cdot(\frac{1}{2})^n-2\cdot 2^n$$

$$\therefore x(n)=[-3\cdot(\frac{1}{2})^n-2\cdot 2^n]u(-n-1)$$

(3) $1<|z|<2$，此时对应的**x(n)**是双边序列

$n \geq 0$ 时，围线C内有1个极点：0.5

$$\therefore x(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=0.5}]=3\cdot(\frac{1}{2})^n$$

$n<0$ 时，围线C外有1个极点：2

$$\therefore x(n)=-\mathrm{Re}\,s[F(z)|_{z=2}]=-2\cdot 2^n$$

故

$$x(n)=(-2\cdot 2^n)u(-n-1)+(3\cdot(\frac{1}{2})^n)u(n)$$

综上所述，得：

$$x(n)=\begin{cases}[3\cdot(\frac{1}{2})^n+2\cdot 2^n]u(n),|z|>2\\ x(n)=(-2\cdot 2^n)u(-n-1)+(3\cdot(\frac{1}{2})^n)u(n),0.5\leq|z|\leq 2\\ [-3\cdot(\frac{1}{2})^n-2\cdot 2^n]u(-n-1),|z|<0.5\end{cases}$$

2.16 有一离散系统如图 P2.3 所示，若

$$X(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n\\ (\frac{1}{2})^{-n}\end{cases}\qquad\qquad h(n)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

求 $y(n)$。

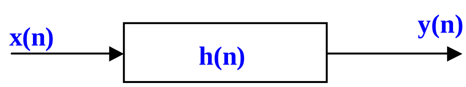


图 P2.3

解：

$$\begin{aligned}X(z)&=\sum_{n=-1}^{-\infty}(\frac{1}{2})^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n z^{-n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}z)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3}z^{-1})^n\\&=\frac{3z}{3z-1}-\frac{z}{z-2}\end{aligned}$$

$$H(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}=\frac{2z}{2z-1}$$

所以

$$\begin{aligned}Y(z) &= X(z)\cdot H(z)\\ &= \frac{-10z^2}{(z-2)(3z-1)(2z-1)}\\ &= \frac{-10z^2}{(z-2)(3z-1)(2z-1)}\end{aligned}$$

令

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{Az}{z-2} + \frac{Bz}{3z-1} + \frac{Cz}{2z-1}$$

对比两式可解出

$$A = -\frac{4}{3};\quad B = -6;\quad C = \frac{20}{3};$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(z) &= -\frac{4z}{3(z-2)} - \frac{6z}{3z-1} + \frac{20z}{3(2z-1)}\\ &= -\frac{4z}{3(z-2)} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{10z}{3\left(z-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$y(n) = \frac{4}{3}2^n u(-n-1) - 2(\frac{1}{3})^n u(n) + \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^n u(n)$$

2.17 用 z 变换法求解下列差分方程：

（1） $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n),\ y(n) = 0,\ n \le -1$

解：

$$Y(z) - 0.9Y(z)z^{-1} = 0.05\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$F(z) = Y(z)z^{n-1} = \frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}z^{n-1} = \frac{0.05}{(z-0.9)(z-1)}z^{n+1}$$

当 n≥0 时，

$$\begin{aligned}y(n) &= \mathrm{Re}\,s[F(z),0.9] + \mathrm{Re}\,s[F(z),1]\\ &= \frac{0.05}{-0.1}0.9^{n+1} + \frac{0.05}{0.1} = -0.5*0.9^{n+1} + 0.5\end{aligned}$$

当 **n≤0** 时，

$$y(n) = 0$$

最后得：

$$y(n)=(-0.5*0.9^{n+1}+0.5)u(n)$$

（2） $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n), y(-1)=1, y(n)=0, n<-1$

$$Y(z)-0.9z^{-1}[Y(z)+y(-1)z]=0.05\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)-0.9Y(z)z^{-1}-0.9=0.05\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{0.95-0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$F(z)=Y(z)z^{n-1}=\frac{0.95-0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})\left(1-z^{-1}\right)}z^{n-1}=\frac{0.95z-0.9}{(z-0.9)\left(z-1\right)}z^{n}$$

$n\geq 0,$

$$y(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z),0.9]+\mathrm{Re}\,s[F(z),1]=(0.45*0.9^{n}+0.5)u(n)$$

最后得：

$$(0.45*0.9^{n}+0.5)u(n)+s\,(n+1)$$

2.18 若 $x_1(n)$、 $x_2(n)$ 是因果稳定序列，求证

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})X_2(e^{jw})dw=\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})dw\}\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})dw\}$$

证明：

由于 $X_1(e^{jw})$和$X_2(e^{jw})$分别表示$x_1(n)$和$x_2(n)$的傅氏变换，故

$$x_1(n)*x_2(n)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})X_2(e^{jw})e^{jwn}dw$$

令 **n=0**，得：

$$[x_1(n)*x_2(n)]_{n=0}=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})X_2(e^{jw})dw \qquad \textbf{(1)}$$

由于 $x_1(n)$和$x_2(n)$ 是实稳定因果序列，故：

$$[x_1(n)*x_2(n)]_{n=0}=\sum_{m=0}^{n}x_1(m)x_2(n-m)\,|_{n=0}=x_1(0)x_2(0) \qquad \textbf{(2)}$$

又：

$$x_1(0)=x_1(n)\,|_{n=0}=[\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})e^{jnw}dw]_{n=0}=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})dw \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_2(0)=x_2(n)|_{n=0}=[\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_2(e^{jw})e^{jnw}dw]_{n=0}=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_2(e^{jw})dw \qquad \textbf{(4)}$$

联合**(2)(3)(4)**代入**(1)**式，得：

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})X_2(e^{jw})dw=[x_1(n)*x_2(n)]_{n=0}$$

$$=x_1(0)\cdot x_2(0)$$

$$=\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})dw\}\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}X_1(e^{jw})dw\}$$

证毕。

2.19 求下列序列的频谱 $X(e^{jw})$。

（1） $d(n-n_0)$

$$X(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}d(n-n_0)e^{-jwn}=e^{-jn_0w}$$

（2） $e^{-an}u(n)$

$$X(e^{jw})=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-an}u(n)e^{-jwn}=\sum_{0}^{\infty}e^{-an}e^{-jwn}=\frac{1}{1-e^{-a-jw}}$$

（3） $e^{-an}u(n)\cos(w_0n)$

原式$=0.5e^{-an}u(n)e^{-jw_0n}+0.5e^{-an}u(n)e^{-jw_0n}$

$$X(e^{jw})=\frac{0.5}{1-e^{-a-j(w_0+w)}}+\frac{0.5}{1-e^{-a+j(w_0-w)}}$$

2.20 令 $x(n)$ 是一因果序列，又设 $x(n)$ ¹ 0，试证明在 $z=$ ¥ 处 X(z) 没有极点和零点。

证明：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\,z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n} \quad （当n<0时\mathrm{x(n)}=0）$$

$$=x(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

由题意：当 **n≥0**时，**x(0)≠0**，即 **X(0)≠0**
所以 **X(z)** 在 **z=∞** 时无零点
假设 **X(z)** 在 **z=∞** 时有极点，即

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0) = \infty$$

所以

$$x(n) = d(n)$$

与已知当 **n≥0** 时，**x(n)≥0** 相矛盾，故假设不成立。
所以 **X(z)** 在 **z=∞** 时无极点

2.21 研究一线性非移变系统，该系统的输入和输出满足差分方程

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-1)$$

从下列各项中选取二个满足上系统的单位取样函数。

(1) $(-\frac{1}{2})^n u(n)$　**(2)** $2^n u(n)$　**(3)** $n^{1/2}u(n)$

(4) $(\frac{1}{2})^{-n} u(n)$　**(5)** $(\frac{1}{2})^n u(n-1)$　**(6)** $(-2)^n u(-n-1)$

(7) $(\frac{1}{2})^n u(n)$　**(8)** $(-\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

(9) $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1} u(-n-1)$　**(10)** $2(-2)^{n-1} u(-n-1)$

解：

对差分方程 $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-1)$ 两边进行**Z**变换得**:**

$$y(z) = X(z) - \frac{1}{2}y(z)z^{-1}$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+1/2\,z^{-1}} = \frac{z}{z+1/2}$$

当收敛域为：

$$|z| > \frac{1}{2}$$

得到的系统函数为一右边序列：

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

当收敛域为：

$$|z| < \frac{1}{2}$$

得到的系统函数为一左边序列：

$$h(n) = -(-\frac{1}{2})^n u(-n-1) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1} u(-n-1)$$

因此，满足该系统要求的单位取样函数为**(a)**和**(i)**。

2.22 试利用 $x(n)$ 的 z 变换求 $n^2x(n)$ 的 z 变换。

解：

由于

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

所以

$$Z[n^2x(n)] = Z\{n[nx(n)]\} = -z\frac{d[-z\frac{dX(z)}{dz}]}{dz}$$

$$= -z[-\frac{dX(z)}{dz} - z\frac{d^2X(z)}{dz^2}]$$

$$= z^2\frac{d^2X(z)}{dz^2} + z\frac{dX(z)}{dz}$$

2.23 已知用下列差分方程描述一个线性时不变因果系统

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(1) 求这个系统的系统函数，画出系统函数的零极点图并指出其收敛域；
(2) 求系统的单位冲激响应；
(3) 判断系统的稳定性，如果不稳定，试找出一个满足上述差分方程的稳定的（非因果）系统的单位抽样响应。

解：（**1**） $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1$

将上式进行 **Z** 变换，得到

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + Y(z)z^{-2} + X(z)z^{-1}$$

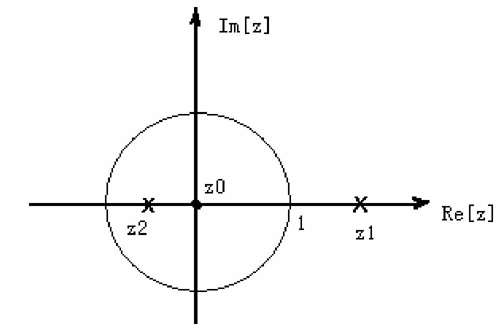
因此， $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z}{z^2-z-1}$

零点： $z_0 = 0$

令 $z^2 - z - 1 = 0$, 求出极点：

$$z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

极零点分布图如图：



由于限定系统是因果的，收敛域需选包含∞点在内的收敛域，即$|z|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

（2）

$$h(n)=IZT[H(z)]=\frac{1}{2p\ j}\oint_c H(z)z^{n-1}dz$$

式中

$$z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

令

$$F(z)=H(z)z^{n-1}=\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

当 **n≥0** 时，

$$h(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z),z_1]+\mathrm{Re}\,s[F(z),z_2]$$

$$=\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1)\Big|_{z=z_1}+\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_2)\Big|_{z=z_2}$$

$$=\frac{z_1{}^n}{(z_1-z_2)}+\frac{z_2{}^n}{(z_2-z_1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

因为 **h(n)**是因果序列，$n<0, h(n)=0.$

$$h(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]u(n)$$

（3）

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]\right| = \infty$$

$\therefore$ 系统不稳定

如果要求系统稳定，收敛域需选包含单位圆在内的收敛域，即

$$|z_2| < |z| < |z_1|,$$

$$F(z) = H(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

n≥0 时，**c** 内只有极点 **z_2**，只需求 **z_2** 点的留数，

$$h(n) = \mathrm{Re}\,s[F(z), z_2] = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

n<0 时，**c** 内只有两个极点，**z_2** 和 **z=0**，因为 **z=0** 是一个 **n** 阶极点，改成求圆外极点留数，圆外极点只有一个，即 **z_1**，那么，

$$h(n) = -\mathrm{Re}\,s[F(z), z_1] = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

最后得到

$$h(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n u(n) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n u(-n-1)$$

2.24 设线性时不变系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$ **，a 为实数**

(1) 求证 $|H(e^{jw})|$ = 常数；

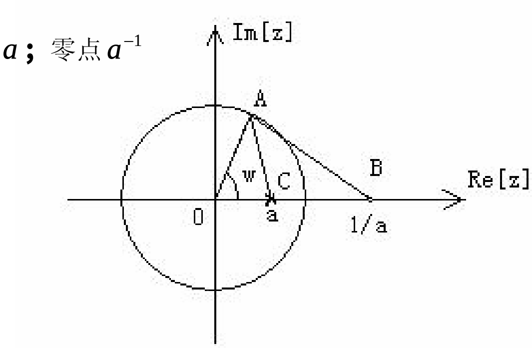
(2) 参数 a 如何取值，才能试系统因果稳定？画出零极点分布图及收敛域。

解：

(1)

$$H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{z-a^{-1}}{z-z}$$ **，**极点：a**；**零点 a^{-1}

设 **a=0.6**，则可以画出极零点分布图如下：



由图可知：

$$\left|H(e^{jw})\right| = \left|H(z)\right|_{z=e^{jw}} = \left|\frac{z-a^{-1}}{z-z}\right|_{z=e^{jw}} = \frac{AB}{AC}$$

因为

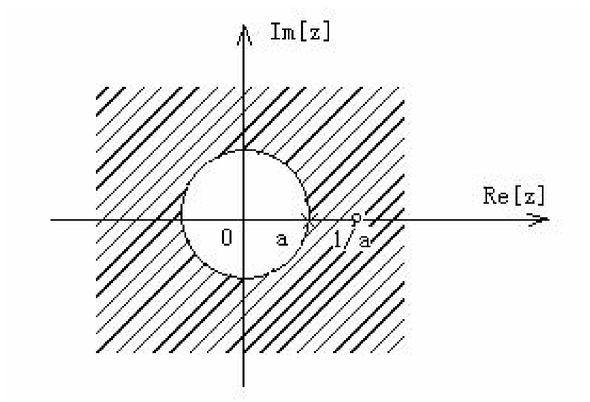
$$角w公用,\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{a}$$

所以

$$三角形AOB相似于三角形AOC,\frac{AB}{AC}=\frac{1}{a}$$

$\left|H(e^{jw})\right| = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{a} =$ 常数，得证。

(2) 由 **a** 为极点，故只有当 $|a|<1$ 时系统因果稳定。设 **a=0.6**，则极零点分布和收敛域图如下：



2.25 研究如图 P2.4 所示方框图组成的系统，其中 $g(x)=e^{jrax^2}$ 称为线性调频信号，试证明：输出是输入函数的傅氏变换（标尺有变化），当输入为门函数时，输出是 $\sin c$ 函数。

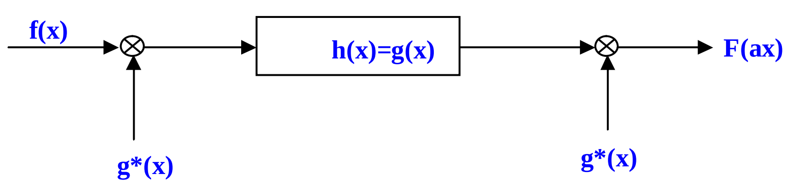


图 P2.4

解：

由题目框图得输出信号为：

$$F(x) = \{[f(x)\cdot g^*(x)]*g(x)\}\cdot g^*(x)$$

$$=\{[f(x)\cdot e^{-jrax^2}]*e^{jrax^2}\}\cdot e^{-jrax^2}$$

$$= [\int_{-\infty}^{+\infty} f(l)\cdot e^{-jral^2} e^{jra(l-x)^2} d]\cdot e^{-jrax^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(l)\cdot e^{-jra(l^2+x^2)} e^{jra(l-x)^2} dl$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(l) e^{-2jralx} dl \qquad \text{令 } 2bax = w \text{ 则 } x = w/2ba$$

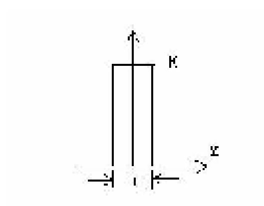
所以

$$F(\frac{w}{2ba}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(l) e^{-jwl} dl$$

显然输出是输入函数的傅氏变换

当输入为门函数时，由以上结论有输出是其傅氏变换 $F(x) = Et \cdot Sinc(xt/2)$

显然得证。



第三章　习题

3.1 求如下周期序列的DFS：

(1) $\tilde{x}(n)$ 的周期为4，且有 $\tilde{x}(n)R_4(n)=\{2,3,4,5\}$

(2) $\tilde{x}(n)$ 的周期为6，且有 $\tilde{x}(n)R_6(n)=\{2,3,4,5,2,9\}$

(3) $\tilde{x}(n)$ 的周期为8，且有 $\tilde{x}(n)R_4(n)=\{2,3,4,5,2,3,4,5\}$

解：

(1) $\widetilde{X}(k)R_4(k)=\{14,-2+2j,-2,-2-2j\}$;

(2) $\widetilde{X}(k)R_6(k)=\{25,3.4641j,-2+6.9282j,-9,-2-6.9282j,-3.4641j\}$

(3) $\widetilde{X}(k)R_8(k)=\{28,0,-4+4j,0,-4,0,-4-4j,0\}$

3.2 已知 $\tilde{x}(n)$ 的周期为4且有 $\tilde{x}(n)R_4(n)=\{1,2,3,4\}$，另 $\tilde{x}_1(n)=\tilde{x}(n+4)$，求：

(1) $DFS\{\tilde{x}(n)\}$

(2) $DFS\{\tilde{x}_1(n)\}$

解：

(1) $\widetilde{X}(k)R_4(k)=\{10,-2+2j,-2,-2-2j\}$

(2)

$\because \tilde{x}_1(n)=\tilde{x}(n+4)$

$\therefore \tilde{X}_1(k)=W_4^{-4k}\tilde{X}(k)=\tilde{X}(k)$

3.3 已知 $\tilde{x}(n)$ 的周期为N，且 $\widetilde{X}(k)=DFS\{\tilde{x}(n)\}$。现令 $\widetilde{X}_1(k)=\widetilde{X}(k+l)$，求证：

$\tilde{x}_1(n)=IDFS\{\widetilde{X}_1(k)\}=W_N^{nl}\tilde{x}(n)$。

解：

$$\tilde{x}_1(n)=IDFS\{\widetilde{X}_1(k)\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)W_N^{-nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k+l)W_N^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=l}^{N-1+l}\widetilde{X}(k)W_N^{-n(k-l)}=\frac{W_N^{nl}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$=W_N^{nl}\tilde{x}(n)$$

3.4 若 $\tilde{x}(n)$ 的DFS为 $\tilde{X}(k)$，求证：

(1) $jI_m[\tilde{X}(k)]=DFS\{\tilde{x}_o(n)\}$

(2) 如果 $\tilde{x}(n)$ 为实序列，则 $\tilde{X}(k)=\tilde{X}^*(-k)$

解：

(1)

$$\because \tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]$$

$$\therefore DFS\{\tilde{x}_o(n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]W_N^{nk}=\frac{\tilde{X}(k)-\tilde{X}^*(k)}{2}=jI_m[\tilde{X}(k)]$$

(2)

$\because \tilde{x}(n)$为实序列

$$\therefore \tilde{x}^*(n)=\tilde{x}(n)$$

$$\tilde{X}^*(-k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}^*(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\tilde{X}(k)$$

3.5 若 $\tilde{x}_1(n)=IDFS\{\tilde{X}_1(k)\}$，$\tilde{x}_2(n)=IDFS\{\tilde{X}_2(k)\}$，且 $\tilde{X}_3(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$，求证：$\tilde{x}_3(n)=IDFS\{\tilde{X}_3(k)\}=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

解：

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3(n)=IDFS\{\tilde{X}_3(k)\}&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_3(k)W_N^{-nk}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)W_N^{-nk}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k-l)W_N^{-nk}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)W_N^{-nl}\tilde{x}_2(n)\\
&=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)
\end{aligned}$$

3.6 若 $\tilde{x}(n)$ 的周期为N，其DFS为 $\tilde{X}(k)$，现令该序列通过一线性移不变系统，系统的传递函数为$H(z)$，输出为 $y(n)$，求证：

(1) $y(n)$ 为周期序列且周期为N

(2) $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(W_N^{-k})\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$

解：

$$\because y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)\tilde{x}(n-m)$$

$$\therefore y(n+N)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)\tilde{x}(n+N-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)\tilde{x}(n-m)=y(n)$$

$$\because \tilde{Y}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)\tilde{x}(n-m)\right)W_N^{nk}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n-m)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)W_N^{km}\tilde{X}(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)(W_N^{-k})^{-m}\tilde{X}(k)=H(W_N^{-k})\tilde{X}(k)$$

$$\therefore y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(W_N^{-k})\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

3.7 已知 $\tilde{x}(n)$ 的周期为N，其DFS为 $\tilde{X}(k)$。 现令：

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}, \quad 0\le k\le(2N-1)$$

试利用 $\tilde{X}(k)$ 表示 $\tilde{X}_1(k)$。

解：

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}$$

$$=[1+(-1)^k]\left[x(0)+x(1)W_{2N}^{k}+x(2)W_{2N}^{2k}+\cdots+x(N-1)W_{2N}^{N-1}\right]$$

$$=[1+(-1)^k]\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}$$

当 k 为偶数时，

$$\tilde{X}_1(k)=[1+(-1)^k]\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}=2\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{n\frac{k}{2}}=2\tilde{X}(\frac{k}{2})$$

当 k 为奇数时，

$$\tilde{X}_1(k)=0$$

3.8 已知 $\tilde{x}(n)$ 的周期为N，其DFS为 $\tilde{X}(k)$。 现令：

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}, \quad 0\le k\le(MN-1)\text{，}M\text{为正整数且不为零}$$

试利用 $\tilde{X}(k)$ 表示 $\tilde{X}_1(k)$。

解：

$$\widetilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}+\cdots+\sum_{n=(M-1)N}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}$$
$$=\tilde{x}(0)\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{nNk}+\tilde{x}(1)\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{(nN+1)k}+\cdots+\tilde{x}(N-1)\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{(nN+N-1)k}$$
$$=\tilde{x}(0)\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{nNk}+\tilde{x}(1)W_{MN}^{k}\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{nNk}+\cdots+\tilde{x}(N-1)W_{MN}^{(N-1)k}\sum_{n=0}^{M-1}W_{MN}^{nNk}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}\cdot\sum_{n=0}^{M-1}W_{M}^{nk}$$

当 k=lM（其中 l 为正整数）时，

$$\sum_{n=0}^{M-1}W_{M}^{nk}=M$$

$$\therefore\widetilde{X}_1(k)=M\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{N}^{n\frac{k}{M}}=M\widetilde{X}(\frac{k}{M})$$

当$k\neq lM$(其中l为正整数)时

$$\sum_{n=0}^{M-1}W_{M}^{nk}=0$$

$$\therefore\widetilde{X}_1(k)=0$$

3.9 求如下有限长序列的N点DFT:

(1) x(n) = δ(n)

(2) x(n)= δ(n-n_0)　　0 < n_0 < N

(3) x(n) = a^n　　n=0，1，…，（N-1）

解：

(1) $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}d(n)W_N^{nk}=1;(0\le k\le N-1)$$

(2) $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}d(n-n_0)W_N^{nk}=W_N^{n_0k};(0\le k\le N-1)$$

(3)

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}(aW_N^k)^n$$
$$=\frac{1-(aW_N^k)^N}{1-aW_N^k}=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k};(0\le k\le N-1)$$

3.10 有限长序列$x(n)$的波形由图P3.1给出，试画出有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$的波形，其中：

$x_1(n)=x((n-2))_4$

$x_2(n)=x((2-n))_4$

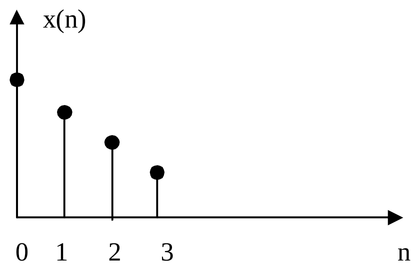
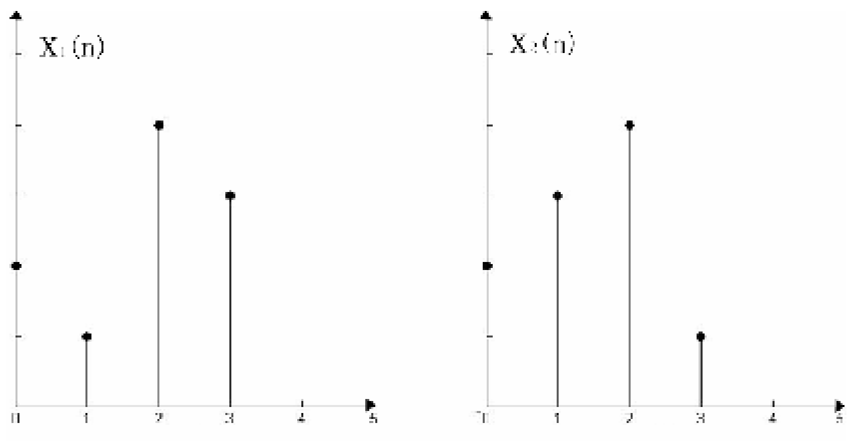


图 P3.1

解：



3.11 图P3.2具体给出了的两个有限长序列的波形，求其6点循环卷积结果。

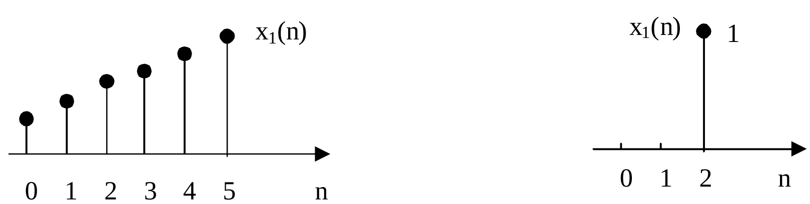


图 P3.2

解：

$$x_1(n)\otimes x_2(n)=\{5,6,1,2,3,4\}$$

3.12 若$x(n)$的长度为N，且$X(k)=DFT\{x(n)\}$，求证：

(1) $X_o(k) = DFT\{jI_m[x(n)]\}$；

(2) 如果 $x(n)$ 为实序列，则 $X(k) = X^*((-k))_N$。

解：

(1) $\because x_o(n) = \frac{1}{2}\left[x((n))_N - x^*((-n))_N\right]$

$$\therefore DFT\{x_o(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[x((n))_N - x^*((-n))_N\right]W_N^{nk} = \frac{X(k) - X^*(k)}{2} = jI_m[X(k)]$$

(2) 因为 x(n) 为实数，所以

$$x^*(n) = x(n)$$

$$X^*((-k))_N = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \tilde{X}(k)$$

3.13 已知 $x(n)$ 的长度为N，且 $X(k) = DFT\{x(n)\}$，求证：

(1) 若 $x(n) = -x(N-1-n)$，则 $X(0) = 0$；

(2) 若N为偶数且 $x(n) = x(N-1-n)$，则 $X(\frac{N}{2}) = 0$；

解：

(1) 因为 $x(n) = -x(N-1-n)$

当 N 为偶数时，令 N =2M，则：

$$x(0) = -x(N-1); x(1) = -x(N-2); \cdots; x(M-1) = -x(M)$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^0$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = x(0) + x(1) + \cdots x(M-1) + x(M) + \cdots + x(N-1) = 0$$

当 N 为奇数时，令 N =2M-1，则：

$$x(0) = -x(N-1); x(1) = -x(N-2); \cdots; x(M-2) = -x(M); x(M-1) = 0$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^0$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = x(0) + x(1) + \cdots + x(M-2) + x(M-1) + x(M) + \cdots + x(N-1) = 0$$

(2) 因为 $x(n) = x(N-1-n)$，且 N 为偶数，所以

$$x(0)=x(N-1);x(1)=x(N-2);\cdots;x(\frac{N}{2}-1)=x(\frac{N}{2})$$

$$X(\frac{N}{2})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{nN}{2}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jnp}$$

$$=x(0)+x(N-1)e^{-j(N-1)p}+x(1)e^{-jp}+x(N-2)e^{-j(N-2)p}+\cdots x(\frac{N}{2}-1)e^{-j(\frac{N}{2}-1)p}+x(\frac{N}{2})e^{-j\frac{N}{2}p}$$

$$=0$$

3.14 若 $x(n)$ 的长度为N，且 $X(k)=DFT\{x(n)\}$，求证：

$$X_1(k)=DFT\left\{X(n)\right\}=Nx((-k))_N,\quad 0\le k\le(N-1)$$

解：

$$\because X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\therefore X_1(k)=DFT\{X(n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}(\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mn})W_N^{nk}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(m+k)n}$$

当 k=0 时，

$$X_1(0)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{mn}=Nx(0)$$

当 0<k≤(N-1) 时，

如果 n≠N-k，则

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(m+k)n}=\frac{1-W_N^{(m+k)N}}{1-W_N^{m+k}}=0$$

如果 n=N-k，则

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(m+k)n}=N$$

所以，

$$X_1(k)=Nx(N-k)$$

总上得：

$$X_1(k)=Nx((-k))_N,0\le k\le(N-1)$$

3.15 已知序列 $x(n)=a^nu(n),\quad 0<a<1$，现令：

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-K}}\qquad 0\le k\le(N-1),$$

求有限长序列 *IDFT{X(k)}*。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}=\frac{z}{z-a}$$

$$X(k)=\frac{W_N^{-k}}{W_N^{-k}-a}$$

$$\begin{aligned}IDFT\{X(k)\}&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{W_N^{-k}}{W_N^{-k}-a}\cdot W_N^{-nk}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{1-aW_N^{k}}\cdot W_N^{-nk}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-a^{N}W_N^{Nk}}{1-aW_N^{k}}\cdot W_N^{-nk}+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a^{N}W_N^{Nk}}{1-aW_N^{k}}\cdot W_N^{-nk}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}a^{m}W_N^{mk}\cdot W_N^{-nk}+a^{N}IDFT\{X(k)\}\\&=IDFT\left\{DFT\left\{a^{n}R_N(n)\right\}\right\}+a^{N}IDFT\{X(k)\}\\&=a^{n}R_N(n)+a^{N}IDFT\{X(k)\}\end{aligned}$$

所以

$$IDFT\{X(k)\}=\frac{a^{n}R_N(n)}{1-a^{N}}$$

3.16 已知 $x(n)$ 的长度为N，且 $X(k)=DFT\{x(n)\}$，现令：

$$y(n)=x((n))_N,\quad 0\le n\le(2N-1)$$

求$y(n)$的$2N$点DFT。

解：

$$\begin{aligned}Y(k)&=DFT\{y(n)\}=\sum_{n=0}^{2N-1}y(n)W_{2N}^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{2N-1}x((n))_N W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x((n))_N W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}x((n))_N W_{2N}^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{(n+N)k}=\left[1+(-1)^{k}\right]\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{nk}\end{aligned}$$

所以，

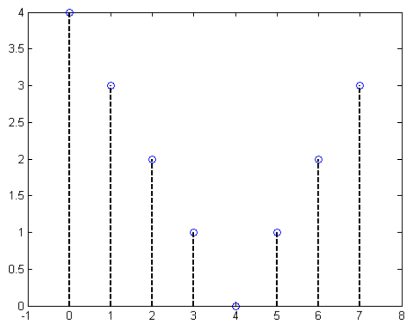
$$Y(k)=\begin{cases}2X(\frac{k}{2}),\text{k为偶数}\\0,\ \text{k为奇数}\end{cases}\qquad 0\le k\le(2N-1)$$

3.17 已知序列 $x(n)$ 的长度为8，其8点DFT结果如图P3.3(a)所示。就下述各序列而言，分别确定在图P3.3(b)至图P3.3(f)中，哪张图能反映其16点DFT结果：

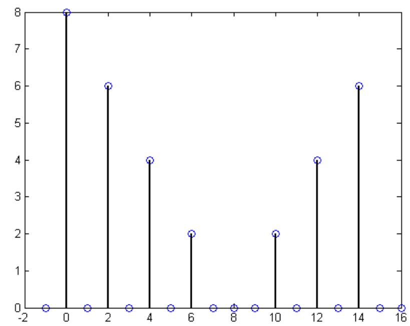
(1) $y(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2}) & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases},\quad 0\le n\le 15$

(2) $y(n)=x((n))_8,\quad 0\le n\le 15$；

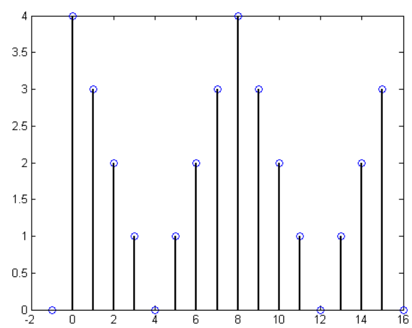
(3) $y(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2})W_{16}^{4n} & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases},\quad 0\le n\le 15$



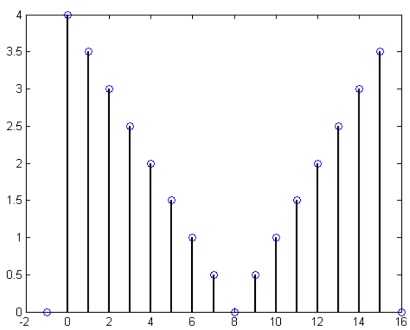
图P3.3(a)



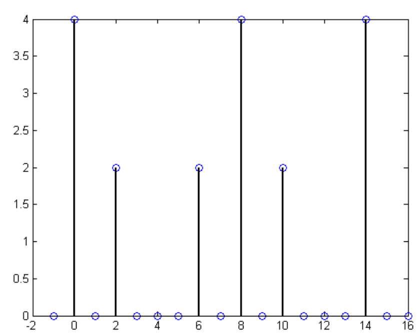
图P3.3(b)



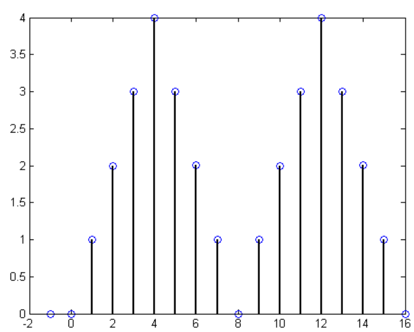
图P3.3(c)



图P3.3(d)



图P3.3(e)



图P3.3(f)

解：

(1) $Y(k)=DFT\{y(n)\}=\sum_{n=0}^{15}y(n)W_{16}^{nk}=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_{8}^{nk}=X((k))_8$，故选图 P3.3(c)

(2) 根据题 3-16 解，有

$$Y(k)=\begin{cases}2X(\frac{k}{2}),\text{k为偶数}\\ 0,\text{ 其它}\end{cases},0\le k\le(2N-1)$$

故选图 P3.3(b)。

(3)

$$y(n)=\begin{cases}x(\frac{n}{2})W_{16}^{4n} & n\text{ 为偶数}\\ 0 & n\text{ 为奇数}\end{cases},\quad 0\le n\le 15$$

$$Y(k)=DFT\{y(n)\}=\sum_{n=0}^{15}y(n)W_{16}^{nk}=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{4n}W_8^{nk}=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{(k+4)n}=X((k+4))_8$$

故选图 P3.3(f)

3.18 现有一序列 $x(n)$，$N_1\le n\le N_2$ （$-\infty<N_1<N_2<+\infty$），其Z 变换为 $X(z)$；又有一有限长序列 $x_1(n)$，$0\le n\le(N-1)$，且其 N 点DFT为 $X_1(k)$。若存在：

$$X_1(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

求序列 $x_1(n)$ 同 $x(n)$ 之间的关系。

解：

$$x_1(n)=IDFT[X_1(k)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X_1(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(z)W_N^{-kn}\Big|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=N_1}^{N_2}x(m)z^{-m}W_N^{-kn}\Big|_{Z=W_N^{-k}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=N_1}^{N_2}x(m)\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-kn}W_N^{km}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=N_1}^{N_2}x(m)\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} N, m-n=lN\,(l\text{为整数}) \\ 0\text{，其它} \end{cases}$$

所以

$$x_1(n) = \sum_l \frac{1}{N} \cdot N \cdot x(n+lN) = \sum_l x(n+lN),$$

$$(0 \le n \le (N-1) \wedge N_1 \le n + lN \le N_2)$$

3.19 现存在两个有限长序列 $x(n)$（0 £ n £ 7）和 $h(n)$（0 £ n £ 19），其20点循环卷积结果为 $y_c(n)$，而其线性卷积结果为 $y_L(n)$，问：

(1) $y_c(n)$ 中哪些点与 $y_L(n)$ 相同；

(2) 需要进行多少点循环卷积才能保证 $y_c(n)$ 和 $y_L(n)$ 完全相同。

解：

(1) 7~19 点（从 0 点开始）

(2) 27 个点（详见本章 3.5节）

3.20 存在一FIR滤波器，其 $h(n)$ 的长度为50。现要求利用重叠保留法来实现这种滤波器，并约定：（1）相邻的各段输入重叠 v 个点；（2）每一段输出的长度为 M。若各段输入的长度为100，循环卷积的点数为128，求：

(1) v；

(2) M；

(3) 所输出的 M 个点在 128 点循环卷积结果中的位置。

解：

(1) $u = 50 - 1 = 49$

(2) 各段长度为 100，所以 M=100-49=51

(3) 输出的 51 个点在卷积结果的 49~99 之间（从 0 点算起）

3.21 已知某 FIR 滤波器的单位冲激响应为 h(n) 且 h(n)={2,1,3,7}，另输入序列为 x(n) 且 $x(n) = \{4, 9, -2, 8, 0, 0, 8, 1, 2, 2, 7, 5, -2, 3\}$，试用重叠相加法计算滤波器的输出。要求每段输入的长度为 5。

解：

因为 N=5，故可将 x(n) 分为 3 段：

$$x_1(n) = \{4, 9, -2, 8, 0\}$$

$$x_2(n)=\{0,8,1,2,2\}$$
$$x_3(n)=\{7,5,-2,3,0\}$$

$$y_1(n)=x_1(n)*h(n)=\{8,22,17,69,65,10,56,0\}$$
$$y_2(n)=x_2(n)*h(n)=\{0,16,10,29,65,15,20,14\}$$
$$y_3(n)=x_3(n)*h(n)=\{14,17,22,68,32,\ \text{-}5,21,0\}$$

所以

$$y(n)=\{8,22,17,69,65,10,72,10,29,65,29,37,36,68,32,\text{-}5,21,0\}$$

3.22 已知同（21）题，试用重叠保留法计算滤波器的输出。要求每段输出的长度为 5。

解：

因为 N=5，且 M=4，故可将 x(n) 分为 4 段：

$$x_1(n)=\{0,0,0,4,9,-2,8,0\}$$
$$x_2(n)=\{-2,8,0,0,8,1,2,2\}$$
$$x_3(n)=\{1,2,2,7,5,-2,3,0\}$$
$$x_4(n)=\{-2,3,0,0,0,0,0,0\}$$
$$y_1(n)=x_1(n)\otimes h(n)=\{10,56,0,8,22,17,69,65\}$$
$$y_2(n)=x_2(n)\otimes h(n)=\{11,34,16,10,72,10,29,65\}$$
$$y_3(n)=x_3(n)\otimes h(n)=\{\text{-}3,26,9,29,37,36,68,32\}$$
$$y_4(n)=x_4(n)\otimes h(n)=\{\text{-}4,4,\text{-}3,\text{-}5,21,0,0,0\}$$

所以

$$y(n)=\{8,22,17,69,65,10,72,10,29,65,29,37,36,68,32,\text{-}5,21,0\}$$

3.23 已知某信号的最高频率不大于 2kHz，现利用DFT分析其频谱，要求：1）DFT点数为2的整数次幂；2）频率分辨率不大于 8Hz。求：

(1) 最大的采样间隔；

(2) 窗函数的最小长度；

(3) DFT点数。

解：

(1)

根据抽样定理$f_s \ge 2f_c$

$$\therefore T \le \frac{1}{2f_c}$$

又$f_c = 2KHz$

$$\therefore T \le 0.25ms$$

即最大采样间隔为$0.25ms$

(2)

窗函数的长度$l=\dfrac{1}{\Delta f}\ge 0.125s$

(3)

$$\because \Delta f = \frac{1}{NT}$$

$$\therefore N = \frac{f_s}{\Delta f} = 500$$

又N是2的整数次幂 故取DFT的点数为512

3.24 若完成一次复乘需100us，完成一次复加需 20us，现直接计算1024点的DFT需要多少时间？利用基2 DIT-FFT需要多少时间？利用基4 DIT-FFT需要多少时间？

解：

直接计算，复乘N^2次；复加$N(N-1)$次

$$\therefore T_1 = 100 \times N^2 + 20 \times N(N-1) = 125.8s$$

用基2DIT-FFT计算，复乘$\frac{N}{2}\log_2 N$次，复加$N\log_2 N$

$$\therefore T_2 = 100 \times \frac{N}{2}\log_2 N + 20 \times N\log_2 N \approx 0.72s$$

用基4DIT-FFT计算，复乘$\frac{3N\log_4(N)}{4}$次，复加$3N\log_4 N$

$$\therefore T_2 = 100 \times \frac{3N\log_4(N)}{4} + 20 \times 3N\log_4 N \approx 0.69s$$

3.25 已知一有限长序列为{4，3，2，1，5，6，7，8}，直接计算其 8 点 DFT。

解：

$$X(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{nk}$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{7} x(n) = 36, X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{n} = 1.8284 + 12.0711j$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{2n} = 0, X(3) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{3n} = -3.8284 + 2.0711j$$

$$X(4) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{4n} = 0, X(5) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{5n} = -3.8284 + 2.0711j$$

$$X(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{6n} = 0, X(7) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_7^{7n} = 1.8284 - 12.0711j$$

3.26 已知条件（25）题，按 DIT-FFT 计算序列的 DFT。

解：

令

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},V_{2T}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$V_{4T}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&W_8^2&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&W_8^6&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&W_8^2\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&W_8^6\end{bmatrix},V_{8T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&W_8^1&0&0\\0&0&1&0&0&0&W_8^2&0\\0&0&0&1&0&0&0&W_8^3\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&W_8^5&0&0\\0&0&1&0&0&0&W_8^6&0\\0&0&0&1&0&0&0&W_8^7\end{bmatrix}$$

$$x=\{4,3,2,1,5,6,7,8\}$$

采用 DIT-FFT 算法，有：

$$X=V_{8T}V_{4T}V_{2T}Ex=\{36.0000,1.8284+12.0711j,0,-3.8284+2.0711j,0,$$
$$-3.8284-2.0711j,0,1.8284-12.0711j\}$$

3.27 已知条件（25）题，按 DIF-FFT 计算序列的 DFT。

解：

采用 DIF-FFT 算法，有：

$$X=EV_{8F}V_{4F}V_{2F}x=\{36.0000,1.8284+12.0711j,0,-3.8284+2.0711j,0,$$
$$-3.8284-2.0711j,0,1.8284-12.0711j\}$$

其中，E、V_{2T}、V_{4T}、V_{8T} 和 x 同上。

3.28 已知两个实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(x)$，长度均为 N，其 N 点 DFT 分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，问如何通过一次 N 点 FFT 同时求出 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$。

解：

首先将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别当作一复序列的实部和虚部，即令

$$x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

通过 FFT 运算可获得 x(n) 的 DFT 值，即

$$X(k)=DFT\{x_1(n)+jx_2(n)\}$$

所以

$$X_1(k)=X_e(k)=\frac{1}{2}\left[X((k))_N+X^*((-k))_N\right]$$

$$X_2(k)=-jX_o(k)=-\frac{j}{2}\left[X((k))_N-X^*((-k))_N\right]$$

3.29 已知一长度为 2*N* 的实序列 x(n)，其 2*N* 点 DFT为 X(k)，问如何通过一次 *N* 点 FFT 同时求出 X(k)。

解：

令

$$x_1(n)=x(2n),\quad x_2(n)=x(2n+1),\ x_3(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

其中，$n=0,1,\cdots,N-1$

然后按着上题中的算法，即可求出：

$$X_1(k)=\frac{1}{2}\left[X_3((k))_N+X_3^*((-k))_N\right]$$

$$X_2(k)=-\frac{j}{2}\left[X_3((k))_N-X_3^*((-k))_N\right]$$

又有：

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)W_{2N}^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(2n)W_{2N}^{2nk}+\sum_{n=0}^{N-1}x(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(2n)W_N^{nk}+W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1}x(2n+1)W_N^{nk}\\&=X_1((k))_N+W_{2N}^{k}X_2((k))_N\qquad 0\le k\le(2N-1)\end{aligned}$$

3.30 若 x(n) 为一有限长序列，$0\le n\le(M-1)$，其 *Z* 变换为 X(z)，现令：

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

那么：

(1) 当 $N>M$ 时，如何利用*N* 点 FFT 求出 X(k);

(2) 当 $N\le M$ 时，如何利用 *N* 点 FFT 求出 X(k);

解：

(1) 令

$$x_1(n)=\begin{cases}x(n),0\le n\le N-1\\0,M\le n\le N-1\end{cases}$$

则

$$X(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_N^{nk}$$

从而只需得出 $x_1(n)$ 的 N 点 FFT 即可求出 X(k)。

(2) 设 M = lN + r (其中 **r**、**l** 为正整数，**0≤r<N)**

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)W_N^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(n)W_N^{nk}+\cdots+\sum_{n=(l-1)N}^{lN-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=lN}^{lN+r-1}x(n)W_N^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n+N)W_N^{nk}+\cdots+\sum_{n=0}^{N-1}x(n+(l-1)N)W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n+lN)W_N^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{l}x(n+mN)\right)W_N^{nk}\end{aligned}$$

3.31 已知有限长序列 x(n) 的 Z 变换为X(z)，问：

(1) 能否利用 CZT $X(z_k)$，其中 $z_k=a^k$， $k=0,1,\cdots,(N-1)$， a Î R Ù a ¹ ±1；

(2) 能否利用 CZT 求 $X(z_k)$，其中 $z_k=ak$， $k=0,1,\cdots,(N-1)$， a Î R Ù a ¹ 0。

解：

1）因为

$$z_k=A_0e^{jq_0}\bullet W_0^{-k}\bullet e^{jkj_0}$$

又令

$$A_0=1,q_0=0,j_0=0,W_0=\frac{1}{a}$$

则

$$z_k=a^k$$

所以可用 CZT 求 $X(z_k)$

2） 不可。

第四章 习题

4.1 根据给定的模拟滤波器的幅度响应平方，确定模拟滤波器的系统函数 H(s)。

(1) $|H(j\mathrm{W})|^2=\dfrac{1}{1+64\mathrm{W}^6}$

(2) $|H(j\mathrm{W})|^2=\dfrac{16(25-\mathrm{W}^2)^2}{(49+\mathrm{W}^2)(36+\mathrm{W}^2)}$

解：（1）由于 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2$ 是非负有理函数，它在 $j\Omega$ 轴上的零点是偶次的，所以满足幅度平方函数的条件，先求

$$H_a(s)H_a(-s)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2\Big|_{\Omega^2=-s^2}=\frac{1}{1-64(s^2)^3}$$

其极点为 $s=\pm\dfrac{1}{2}$，

我们选出左半平面极点 $s=-\dfrac{1}{2}$ 为 $H_a(s)$ 的极点，并设增益常数为 K_0，则得 $H_a(s)$ 为：

$$H_a(s)=\frac{K_0}{(s+\frac{1}{2})^3}$$

按着 $H_a(s)$ 和 $H_a(j\Omega)$ 的低频特性或高频特性的对比可以确定增益常数。在这里我们采用低频特性，即由 $H_a(s)|_{s=0}=H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}$ 的条件可得增益常数 K_0 为：

$$K_0=\frac{1}{8}$$

最后得到 $H_a(s)$ 为：

$$H_a(s)=\frac{\frac{1}{8}}{(s+\frac{1}{2})^3}$$

（2）由于 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2$ 是非负有理函数，它在 $j\Omega$ 轴上的零点是偶次的，所以满足幅度平方函数的条件，先求

$$H_a(s)H_a(-s)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2\Big|_{\Omega^2=-s^2}=\frac{16(25+s^2)}{(49-s^2)(36-s^2)}$$

其极点为：

$$s=\pm 7,s=\pm 6$$

其零点为：

$s=\pm j5$（皆为二阶，位于虚轴上）

如果没有特殊要求，可以选择取 $H_a(s)H_a(-s)$ 以虚轴为对称轴的对称零点的任意一半（应是共轭对）作为 $H_a(s)$ 的零点。但如果要求是最小相位延时滤波器，则应取左半平面零点作为 $H_a(s)$ 的零点。

$j\Omega$ 虚轴上的零点或极点一定是二阶的，其中一半（应为共轭对）属于 $H_a(s)$。

我们选出左半平面极点 $s=-6, s=-7$ 及一对虚轴零点 $s=\pm j5$ 为 $H_a(s)$ 的零、极点，并设增益常数为 K_0，则得 $H_a(s)$ 为：

$$H_a(s)=\frac{K_0(s^2+25)}{(s+7)(s+6)}$$

按着 $H_a(s)$ 和 $H_a(j\Omega)$ 的低频特性或高频特性的对比可以确定增益常数。在这里我们采用低频特性，即由 $H_a(s)|_{s=0}=H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}$ 的条件可得增益常数 K_0 为：

$$K_0=4$$

最后得到 $H_a(s)$ 为：

$$H_a(s)=\frac{4(s^2+25)}{(s+7)(s+6)}=\frac{4s^2+100}{s^2+13s+42}$$

4.2 设计一个模拟巴特沃斯低通滤波器。给定的技术要求为：
通带最高频率 $f_p=500$Hz，通带衰减要不大于 3dB。
阻带起始频率 $f_s=1$kHz，阻带内衰减要不小于 40dB

解：

$$\Omega_p=2p\,f_p=1000p$$
$$\Omega_s=2p\,f_s=2000p$$

由给定的参数可以得到此滤波器的频率相应形式为：

$$\left|H(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+e^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}=\frac{1}{1+e^2(\Omega/1000p)^{2N}}$$

由式（4.8）得 ε 为

$$e=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}=\sqrt{10^{0.1\times3}-1}=1$$

由式 (4.9) 得滤波器得阶数为：

$$N \geq \frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = \frac{\lg(10^{0.1\times 40}-1)}{2\lg 2} = 6.64$$

取整后，得 N=7。

由式（4.13）得 H(p)H(-p) 的极点为：

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[N]{e}}\, e^{j\frac{p}{2}} e^{j\frac{p}{2}\frac{(2k+1)}{N}} \qquad \text{k=0,1,....,6}$$

$$p_0 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{p}{14})}, p_1 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{3p}{14})}, p_2 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{5p}{14})}, p_3 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{7p}{14})}, p_4 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{9p}{14})},$$
$$p_5 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{11p}{14})}, p_6 = e^{j(\frac{p}{2}+\frac{13p}{14})}$$

所以，(此步也可以通过表 4.2 查表获得)

$$H(p) = \frac{1}{(p-e^{j4p/7})(p-e^{j5p/7})(p+1)(p-e^{j6p/7})(p-e^{j8p/7})(p-e^{j9p/7})(p-e^{j10p/7})}$$
$$= \frac{1}{(p+1)(p^2+0.445p+1)(p^2+1.247p+1)(p^2+1.802p+1)}$$

最后

$$H(s) = H(p)\big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$$
$$= \frac{1}{(\frac{s}{1000p}+1)[(\frac{s}{1000p})^2+0.445\frac{s}{1000p}+1][(\frac{s}{1000p})^2+1.247\frac{s}{1000p}+1][(\frac{s}{1000p})^2+1.802\frac{s}{1000p}+1]}$$
$$= \frac{(1000p)^7}{(s+1000p)(s^2+445p\,s+10^6p^2)(s^2+1247p\,s+10^6p^2)(s^2+1802p\,s+10^6p^2)}$$
$$= \frac{3.02\times 10^{24}}{(s+3141.59)(s^2+1398.009s+9.87\times 10^6)(s^2+3917.566s+9.87\times 10^6)(s^2+5661.150s+9.87\times 10^6)}$$

4.3 设计一个模拟切比雪夫低通滤波器，给定的技术要求为：

通带最高频率 f_p = 500Hz，通带衰减要不大于 1dB。

阻带起始频率 f_s = 1kHz，阻带内衰减要不小于 40dB。

解：

$$\Omega_p = 2p\, f_p = 1000p$$
$$\Omega_s = 2p\, f_s = 2000p$$

由式（4.18）得切比雪夫滤波器的参数 ε 为：

$$e = \sqrt{10^{0.1A_p}-1} = \sqrt{10^{0.1}-1} = 0.5088$$

而由式（4.19）得滤波器阶数 N 为：

$$N=\frac{ch^{-1}\left[\frac{\sqrt{10^{0.1A_s}-1}}{e}\right]}{ch^{-1}[\Omega_s/\Omega_p]}=\frac{ch^{-1}[\frac{\sqrt{10^4-1}}{e}]}{ch^{-1}2}=\frac{ch^{-1}196.53}{ch^{-1}2}=4.54$$，取整数 N＝5。

由式（4.21）和（4.22），求得归一化的传输函数 H(p)：

$$H(p)=\frac{1}{0.5088\cdot 2^{(5-1)}\prod_{k=1}^{5}(p-p_k)}$$

其中

$$p_k=-shf_2\sin\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)p\right]+jchf_2\cos\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)p\right],\qquad k=0,1,2\cdots N-1$$

$$f_2=\frac{1}{N}sh^{-1}\frac{1}{e}=0.2933$$

于是得，(此步也可以通过表 4.4 查表获得)

$$H(p)=\frac{1}{8.1408(p+0.2975)(p^2+0.1838p+0.9931)(p^2+0.4814p+0.4341)}$$

最后，实际的传输函数 H(s) 为：

$$H(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_P}}$$

$$=\frac{3.759\times10^{16}}{(s+934.624)(s^2+577.425s+9801504.131)(s^2+1512.363s+4284395.271)}$$

4.4 分别用巴特沃思、切比雪夫逼近设计一个带通滤波器满足下面的条件：

$$\begin{cases} A_p=1.0dB \\ A_s=40dB \\ W_{s_1}=1394p\ \ \mathrm{rad/s} \\ W_{p_1}=1510p\ \ \mathrm{rad/s} \\ W_{p_2}=1570p\ \ \mathrm{rad/s} \\ W_{s_2}=1704p\ \ \mathrm{rad/s} \end{cases}$$

解：因为 $\Omega_{p1}\Omega_{p2}\neq\Omega_{s1}\Omega_{s2}$，所以第一步是确定几何对称的带通滤波器，这样得到

$$\Omega_{s2}=\overline{\Omega}_{s2}=\frac{\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}}{\Omega_{s1}}=1700.6456p\,rad/s$$

将已知条件中的带通技术要求转化为相应的归一化低通技术要求，有

$$l_p=1$$

$$l_s = \frac{\overline{\Omega}_{s2} - \Omega_{s1}}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = 5.1108$$

（1）巴特沃思逼近：

根据上面的技术要求，可以由 $e = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$ 求得 e，有了 e，可以由 $n \ge \frac{\lg(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{e^2})}{2\lg l_s}$ 确定最小的滤波器阶数。计算得：

$$e = 0.5088$$
$$n = 4$$

当 n＝4 时，计算出归一化巴特沃思多项式的零点

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[k]{e}} e^{j\frac{p}{2}} e^{j\frac{p}{2}\cdot\frac{2k+1}{N}} \qquad k = 0,1,2,3,$$

$$p_0 = e^{j\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{8}\right)} \qquad\qquad p_1 = \frac{1}{0.5088} e^{j\left(\frac{p}{2}+\frac{3p}{8}\right)}$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{0.5088}} e^{j\left(\frac{p}{2}+\frac{5p}{8}\right)} \qquad\qquad p_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{0.5088}} e^{j\left(\frac{p}{2}+\frac{7p}{8}\right)}$$

因此，低通滤波器的归一化传输函数 $H_{LP}(p)$ 为：

$$\begin{aligned} H_{LP}(p) &= \frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \\ &= \frac{1}{(p^2+0.76536686p+1)(p^2+1.84775907p+1)} \end{aligned}$$

把归一化低通滤波器变成所要求的带通滤波器的传输函数 $H_{BP}(s)$：

$$H_{BP}(s) = H_{LP}(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{s(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})}} = H_{LP}(p)\Big|_{p=\frac{s^2+1510*1570p^2}{s*60p}}$$

（2）切比雪夫逼近：

根据上前面的技术要求，分别用 $e = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$ 和 $n \ge \frac{ch^{-1}\sqrt{\frac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}}}{ch^{-1} l_s}$ 计算 e 和 n 的值，得到：

$$e = 0.5088$$
$$n = 3$$

查表 4.4 的 c 栏，得 $H(p)$ 的分母多项式，然后获得低通滤波器的归一化传输函数 $H_{LP}(p)$：

$$H_{LP}(p)=\frac{1}{0.5088\times 2^{(3\text{-}1)}(p^2+0.49417060\text{p}+0.99420459)(p+0.49417060)}$$
$$=\frac{0.4913}{(p^2+0.49417060\text{p}+0.99420459)(p+0.49417060)}$$

把归一化低通滤波器变换成带通滤波器，相应的带通滤波器的传输函数为：

$$H_{BP}(s)=H_{LP}(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_{P1}\Omega_{P2}}{s(\Omega_{P2}-\Omega_{P1})}}=H_{LP}(p)\Big|_{p=\frac{s^2+1510*1570p^2}{s*60p}}$$

4.5 一个采样数字处理低通滤波器如图 P4.1 所示。H(z) 的截止频率为 w_c = 0.2 π，整个系统相当于一个模拟低通滤波器，今取样频率为 f_s = 1kHz，问等效模拟低通滤波器的截止频率 f_c 为多少？

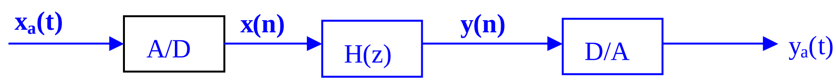


图 P4.1

若取样频率分别该为 fs = 5kHz，200Hz，而 H(z) 不变，问这时等效低通滤波器的截止频率又为多少？

解：

$$\because \Omega_c=2p\ f_c=w_c\cdot f_s$$
$$\therefore f_c=\frac{w_c\cdot f_s}{2p}=\frac{0.2p\cdot 1kHz}{2p}=100Hz$$

$$\because \Omega_c=2p\ f_c=w_c\cdot f_s$$
$$\therefore f_c=\frac{w_c\cdot f_s}{2p}=\frac{0.2p\cdot 5kHz}{2p}=500Hz$$

$$\because \Omega_c=2p\ f_c=w_c\cdot f_s$$
$$\therefore f_c=\frac{w_c\cdot f_s}{2p}=\frac{0.2p\cdot 200kHz}{2p}=20kHz$$

4.6 用冲激不变法将以下 H(s) 转换为 H(z)，采样周期为 T_0。

（1） $H(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

（2） $H(s)=\dfrac{A}{(s-s_0)^2}$

（3） $H(s)=\dfrac{A}{(s-s_0)^m}$　　**m 为任意正整数。**

解：（1）极点

$$s_1 = -a + jb, s_2 = -a - jb$$

待定系数法，部分分式展开：

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} = \frac{(A_1 + A_2)s - A_1 s_2 - A_2 s_1}{(s+a)^2 + b^2}$$

比较各项系数得：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -A_1 s_2 - A_2 s_1 = a \end{cases}$$

得

$$A_1 = 1/2, A_2 = 1/2$$

所以

$$H_a(s) = \frac{1/2}{s-(-a+jb)} + \frac{1/2}{s-(-a-jb)}$$

根据冲激响应不变准则，得：

$$H(z) = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k T_0}{1-e^{s_k T_0} z^{-1}} = \frac{1/2\, T_0}{1-e^{(-a+jb)T_0} z^{-1}} + \frac{1/2\, T_0}{1-e^{(-a-jb)T_0} z^{-1}}$$

或 $$= T_0 \frac{1 - z^{-1} e^{-aT_0} \cos(bT_0)}{1 - 2e^{-aT_0} \cos(bT_0) z^{-1} + e^{-2aT_0} z^{-2}}$$

（2）解：

$$H_a(s) = \frac{A}{(s-s_0)^2}$$

$$h_a(t) = Ate^{s_0 t} u(t)$$

$$h(n) = T_0 h_a(nT_0) = AT_0 (nT_0) e^{s_0 n T_0} u(nT_0)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} AT_0 (nT_0) e^{s_0 n T_0} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A{T_0}^2 n(e^{s_0 T_0} z^{-1})^n = \frac{A{T_0}^2 e^{s_0 T_0} z^{-1}}{(1-e^{s_0 T_0} z^{-1})^2}$$

（3）解：

$$H_a(s) = \frac{A}{(s-s_0)^m}$$

$$h_a(t) = \frac{A}{(m-1)!} t^{m-1} e^{s_0 t} u(t)$$

$$h(n)=T_0h_a(nT_0)=\frac{AT_0}{(m-1)!}(nT_0)^{m-1}e^{s_0nT_0}u(nT_0)$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)\cdot z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{AT_0}{(m-1)!}(nT_0)^{m-1}e^{s_0nT_0}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{AT_0{}^m}{(m-1)!}n^{m-1}(e^{s_0T_0}z^{-1})^n$$

4.7 用冲激响应不变法及双线性交换法将下面模拟系统函数变为数字系统函数 H(z)，采样周期为 T = 0.5。

（1） $\boldsymbol{H(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+3}}$

（2） $\boldsymbol{H(s)=\dfrac{3s+2}{2s^2+3s+1}}$

（3） $\boldsymbol{H(s)=\dfrac{1}{(s^2+0.76722s+1.33863)(s+0.76722)}}$

解：（1） 利用冲激响应不变法

$$H(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

直接利用 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$ 式可以得到数字滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{T}{1-z^{-1}e^{-T}}-\frac{T}{1-z^{-1}e^{-3T}}=\frac{Tz^{-1}(e^{-T}-e^{-3T})}{1-(e^{-T}+e^{-3T})+z^{-2}e^{-4T}}$$

因为 T=0.5，于是有：

$$H(z)=\frac{0.1917z^{-1}}{1-0.82966z^{-1}+0.135335z^{-2}}$$

利用双线性变换法 $H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 有：

$$H(z)=\frac{2(z^{-1}+1)^2}{3z^{-2}-26z^{-1}+35}$$

(2) 利用冲激响应不变法

$$H(s)=\frac{3s+2}{2s^2+3s+1}=\frac{3s+2}{(2s+1)(s+1)}=\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{s+1}$$

直接利用 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$ 式可以得到数字滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{0.5T}{1-e^{-0.5}z^{-1}}+\frac{T}{1-e^{-1}z^{-1}}=\frac{1.5T-Tz^{-1}(0.5e^{-1}+e^{-0.5})}{1-z^{-1}(e^{-1}+e^{-0.5})+z^{-2}e^{-1.5}}$$

因为 T=0.5，于是有：

$$H(z)=\frac{0.75-0.395235z^{-1}}{1-0.97441z^{-1}+0.22313z^{-2}}$$

利用双线性变换法 $H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 有：

$$H(z)=\frac{-10z^{-2}+4z^{-1}+14}{21z^{-2}-62z^{-1}+45}$$

(3) 利用冲激响应不变法

设

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{As+B}{s^2+0.76722s+1.33863}+\frac{C}{s+0.76722}\\&=\frac{(A+C)s^2+(0.76722A+0.76722C+B)s+1.33863C}{(s^2+0.76722s+1.33863)(s+0.76722)}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases}A=-0.747\\B=0\\C=0.747\end{cases},$$

于是

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{-0.747s}{s^2+0.76722s+1.33863}+\frac{0.747}{s+0.76722}\\&=\frac{x}{s-(-0.38361+j1.091546)}+\frac{y}{s-(-0.38361-j1.091546)}+\frac{0.747}{s+0.76722}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x+y=-0.747\\x=\dfrac{(-0.38361+j1.091546)}{(-0.38361-j1.091546)}y\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-0.3735-j0.1313\\y=-0.3735+j0.1313\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{-0.3735-j0.1313}{s-(-0.38361+j1.091546)}+\frac{-0.3735+j0.1313}{s-(-0.38361-j1.091546)}+\frac{0.747}{s+0.76722}$$

利用双线性变换法 $H(z)=H(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 有：

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})^3}{(14.2698z^{-2}-29.3227z^{-1}+20.4075)(-3.2328z^{-1}+4.7672)}$$
$$=\frac{(z^{-1}+1)^3}{-46.1314z^{-3}+162.8217z^{-2}-205.7611z^{-1}+97.2870}$$

4.8 用冲激响应不变法把冲激响应为 $h(t)=e^{-2t}u(t)$ 的模拟滤波器转换为对应的数字滤波器。

(1) 分别对 T=1.0 秒和 T=0.5 秒两种取样间隔，求数字滤波器幅度响应 $|H(e^{jw})|$ 的表达式；

(2) 画出上述数字滤波器的幅度响应，并与模拟滤波器幅度响应进行比较。模拟滤波器幅度响应为 $|H(j\Omega)|=1/\sqrt{4+\Omega^2}$，范围为从 0 到 4Hz，两个滤波器定标直流增益为 1。

解：(1) $h(t)=e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$H(s)=\frac{1}{s+2}$$

利用 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$ 式可以得到数字滤波器的系统函数。

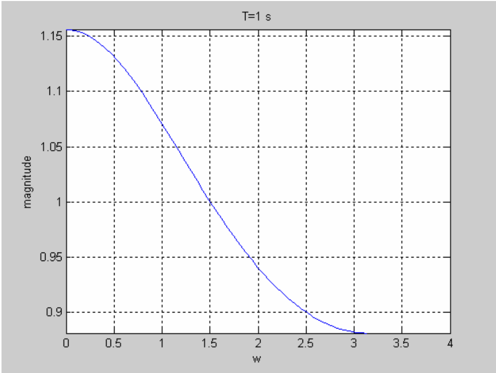
当 T=1.0 时

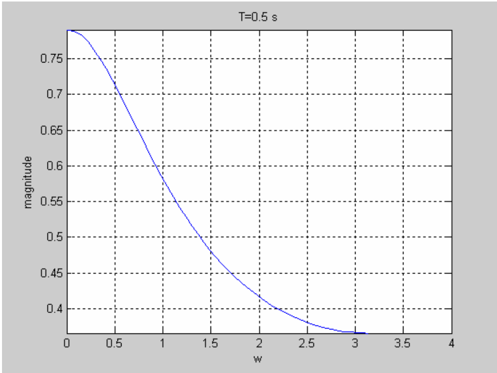
$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-2}}$$
$$H(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw-2}}$$
$$\left|H(e^{jw})\right|=\frac{1}{\sqrt{1-2e^{-2}\cos w+e^{-4}}}$$

当 T=0.5 时

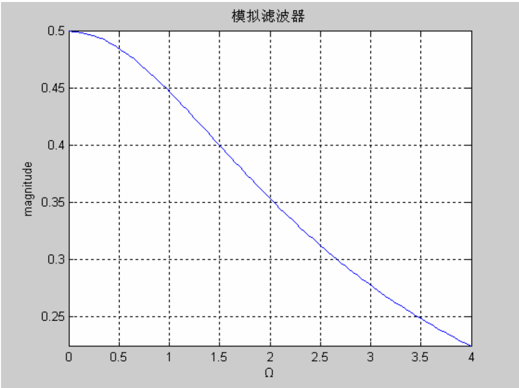
$$H(z)=\frac{0.5}{1-z^{-1}e^{-1}}$$
$$H(e^{jw})=\frac{0.5}{1-e^{-jw-1}}$$
$$\left|H(e^{jw})\right|=\frac{1}{2\sqrt{1-2e^{-1}\cos w+e^{-2}}}$$

数字滤波器的幅度响应





模拟滤波器的幅度响应



4.9 把下面模拟低通滤波器的传输函数 H(s)，用冲激响应不变法变换为数字滤波器的传输函数，取样频率为 $f_s = 1.6Hz$，写出模拟滤波器和数字滤波器的幅度响应。

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

解：

模拟滤波器的系统函数展开为：

$$H(s) = \frac{1}{j\sqrt{3}}\left[\frac{1}{s + \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{s + \frac{1 + j\sqrt{3}}{2}}\right]$$

模拟滤波器的频率响应为：

$$H_a(j\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2 + j\Omega + 1}$$

则模拟滤波器的幅度响应特性为：

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\left[(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2\right]}$$

用冲激响应不变法，取样频率为 $f_s = 1.6Hz$ 得到的数字滤波器传输函数为：

$$H(z) = \frac{0.625}{j\sqrt{3}}\left[\frac{1}{1-z^{-1}e^{\frac{-5+j5\sqrt{3}}{16}}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{\frac{-5-j5\sqrt{3}}{16}}}\right]$$

数字滤波器的频率响应为：

$$H(e^{jw}) = \frac{0.625}{j\sqrt{3}}\left[\frac{1}{1-e^{-jw}e^{\frac{-5+j5\sqrt{3}}{16}}} - \frac{1}{1-e^{-jw}e^{\frac{-5-j5\sqrt{3}}{16}}}\right]$$

幅度响应特性为：

$$\left|H(e^{jw})\right| = \frac{2e^{-\frac{5}{16}}\cos\frac{5\sqrt{3}}{16}}{\sqrt{1+e^{-\frac{5}{4}}+2e^{-\frac{5}{8}}\cos(2w)+4e^{-\frac{5}{8}}\cos\frac{5\sqrt{3}}{16}(\cos\frac{5\sqrt{3}}{16}-e^{\frac{5}{16}}\cos w - e^{-\frac{5}{16}}\cos w)}}$$

4.10 设取样频率为 10kHz，用冲激响应不变法设计一个数字低通巴特沃思滤波器，要求通带边缘频率为 1kHz，通带衰减不大于 1dB，阻带边缘频率为 1.5kHz，阻带衰减不小于 15dB。

解：冲激响应不变法，模拟频率与数字频率之间是线性关系，

$f_p = 1kHz$ 对应于 $\Omega_p = 1000\times 2p = 2000p$， $A_p = 1dB$

$$w_p = \Omega_p T = 2000p/(10\times 10^3) = 0.2p$$

$f_s = 1.5kHz$ 对应于 $\Omega_s = 1500\times 2p = 3000p$， $A_s = 15dB$

$w_s = \Omega_s T = 3000p\times 10^3/(10\times 10^3) = 0.3p$， $A_s = 15dB$

$$e = \sqrt{10^{0.1A_p}-1} = \sqrt{10^{0.1\times 1}-1} = 0.5088$$

$$N \ge \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1\times 15}-1}{0.5088^2}\right)}{2\lg\left(\frac{3000p}{2000p}\right)} = 5.8860$$，取整得 N=6

所以归一化频率的参考频率 $\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[N]{e}} = \frac{2000p}{\sqrt[6]{0.5088}} = 7.0322\times 10^3$

查巴特沃思多项式系数表，当 $N=6$ 时，归一化原型模拟低通巴特沃思滤波器的频率响应为：

$$H_a(p) = \frac{1}{p^6+3.8637033p^5+7.464101p^4+9.1416202p^3+7.464101p^2+3.8637033p+1}$$

将 p 用 $\frac{s}{\Omega_c}=\frac{s}{7.0322\times10^3}$ 代入可得到截至频率为 Ω_c 的模拟低通滤波器 $H_a(s)$，把 $H_a(s)$

展开成部分分式，利用冲激响应不变法 $H(z)=T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$ 可得到：

$$H(z)=\frac{0.0016z^{-5}+0.0621z^{-4}+0.2444z^{-3}+0.1529z^{-2}+0.0096z^{-1}}{z^{-6}-8.6365z^{-5}+31.8830z^{-4}-64.7144z^{-3}+76.7103z^{-2}-50.9073z^{-1}+15.1354}$$

4.11 用双线性变换法设计一个数字低通巴特沃思滤波器，取样频率为 $f_s=25kHz$，-3dB 频率为 1kHz，在 12kHz 处阻带衰减为 -30dB。求其差分方程，并画出滤波器的幅度响应。

解：

模拟边缘频率为：

$$f_{p1}=1000Hz，\quad f_{s1}=12000Hz\ \ A_p=3dB，\quad A_s=30dB$$

数字边缘频率为：

$$w_{p1}=2p\frac{f_{p1}}{f_S}=2p\frac{1000}{25000}=0.08p\ 弧度$$

$$w_{s1}=2p\frac{f_{s1}}{f_S}=2p\frac{12000}{25000}=0.96p\ 弧度$$

预畸变模拟边缘频率为：

$$\Omega_{p1}=2f_S\tan\frac{w_{p1}}{2}=6316.5\ 弧度/秒$$

$$\Omega_{s1}=2f_S\tan\frac{w_{s1}}{2}=794727.2\ 弧度/秒$$

求得 e，

$$e=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}=\sqrt{10^{0.1\times3}-1}=1$$

所需滤波器的阶数为：

$$N\geq\frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\frac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}\right)}=\frac{\lg\left(10^{0.1\times30}-1\right)}{2\lg\left(\frac{794727.2}{6316.5}\right)}=0.7143$$

因此，一阶巴特沃思滤波器就足以满足要求。一阶巴特沃思滤波器的传输函数为：

$$H(s)=\frac{\Omega_{p1}}{s+\Omega_{p1}}=\frac{6316.5}{s+6316.5}$$

用 $s \Leftrightarrow 2f_S\dfrac{z-1}{z+1}$ 定义的双线性变换得到数字滤波器的传输函数为：

$$H(z)=\frac{6316.5}{50000\dfrac{z-1}{z+1}+6316.5}=\frac{6316.5(z+1)}{50000(z-1)+6316.5(z+1)}=\frac{0.1122(1+z^{-1})}{1-0.7757z^{-1}}$$

因此，差分方程为：

$$y[n]=0.7757y[n-1]+0.1122x[n]+0.1122x[n-1]$$

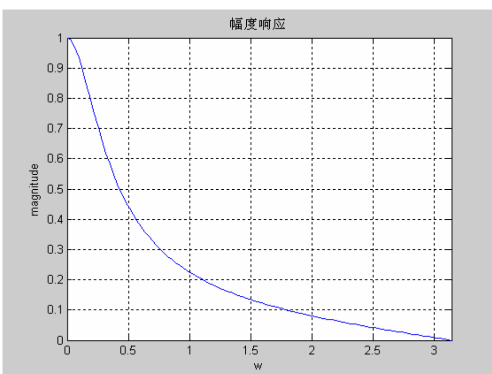
将 H(z) 中的 z 用 e^{jw} 代替，可得频率响应为：

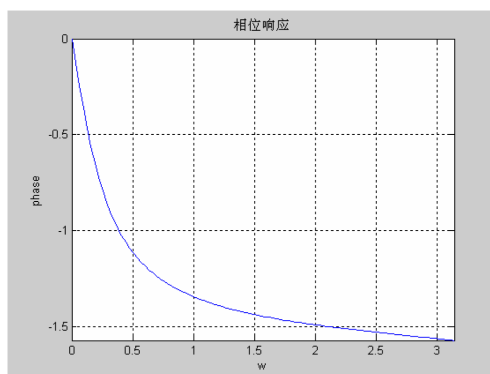
$$H(jw)=\frac{0.1122(1+e^{-jw})}{1-0.7757e^{-jw}}$$

由上式，可计算任意 w 值的幅度和相位。幅度和相位响应见下面的图。注意滤波器通带（增益大于 0.707）内的相位响应是非线性的。

$$\left|H(e^{jw})\right|=\frac{0.1122\sqrt{2+2\cos w}}{\sqrt{1.6017-1.5514\cos w}}$$

$$\arg(H(e^{jw}))=\tan^{-1}\left(-\frac{1.7757\sin w}{0.2243+0.2243\cos w}\right)$$





4.12 具有 -3dB 频率 Ω_p 的二阶模拟低通巴特沃思滤波器的传输函数为：

$$H(s)=\frac{W_p^{\,2}}{s^2+\sqrt{2}W_p s+W_p^{\,2}}$$

用双线性变换法设计数字低通巴特沃思滤波器，取样频率为 f_s = 4kHz，截止频率为 f_c = 500Hz。

解：对于低通滤波器，带宽与-3dB 频率是一致的，即 500Hz.对应的数字频率为：

$$w_p=2p\frac{f_c}{f_S}=2p\frac{500}{4000}=0.25p \text{ 弧度}$$

双线性变换做预畸变为：

$$\Omega_p = 2f_S \tan\frac{w_p}{2} 3313.7 \text{ 弧度/秒}$$

将该值带入模拟滤波器的传输函数得：

$$H(s) = \frac{10980607.7}{s^2 + 4686.3s + 10980607.7}$$

在此，双线性变换为 s=8000(z-1)/(z+1)，变换后，数字传输函数 H(z)为：

$$H(z) = \frac{0.09763 + 0.19526z^{-1} + 0.09763z^{-2}}{1 - 0.9428z^{-1} + 0.3333z^{-2}}$$

4.13 用双线性变换法设计一个切比雪夫数字低通滤波器，取样频率为 f_s = 20kHz，通带边缘频率为 5kHz，其增益为 -1dB，阻带边缘频率为 7.5kHz，其增益为 -32dB。

解：

模拟边缘频率为：

$$f_p = 5000Hz$$
$$f_s = 7500Hz$$

数字边缘频率为：

$$w_p = 2p\frac{f_p}{f_S} = 2p\frac{5000}{20000} = 0.5p \text{ 弧度}$$

$$w_s = 2p\frac{f_s}{f_S} = 2p\frac{7500}{20000} = 0.75p \text{ 弧度}$$

预畸变的模拟边缘频率为：

$$\Omega_p = 2f_S \tan\frac{w_p}{2} = 40000 \text{ 弧度/秒}$$

$$\Omega_s = 2f_S \tan\frac{w_s}{2} = 96568.5 \text{ 弧度/秒}$$

由已知 $A_p = 1dB$， $A_s = 32dB$，所求原型滤波器需要满足：

$$e = \sqrt{10^{A^p/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0.5088$$

$$N \geq \frac{ch^{-1}\left[\frac{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}}{e}\right]}{ch^{-1}\left[\Omega_s/\Omega_p\right]} = \frac{ch^{-1}\left[\frac{\sqrt{10^{3.2} - 1}}{0.5088}\right]}{ch^{-1}\left[96568.5/40000\right]} = 3.31$$

为满足滤波器要求，阶数选 4。

用查表法得原型模拟低通切比雪夫滤波器的传函为：

$$H_a(p)=\frac{0.24565}{\mathrm{p}^4+0.95281\mathrm{p}^3+1.4539\mathrm{p}^2+0.74262\mathrm{p}+0.27563}$$

去归一化后为：

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{6.2887\times10^{17}}{\mathrm{s}^4+3.8112\times10^4\mathrm{s}^3+2.3263\times10^9\mathrm{s}^2+4.7528\times10^{13}\mathrm{s}+7.0561\times10^{17}}$$

由双线性变换法求 $H(z)$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0555(1+z^{-1})^4}{(1-0.7379z^{-1}+0.3101z^{-2})(1-0.0119z^{-1}+0.7536z^{-2})}$$

4.14 用双线性变换法设计一个六阶数字带通巴特沃思滤波器，取样频率为 $\mathrm{f_s}$ = 720Hz，上下边带截止频率分别为 $\mathrm{f_1}$ = 60Hz，$\mathrm{f_2}$ = 300Hz。

解：

数字带通滤波器数字技术指标为：

上截止频率

$$w_{p2}=\Omega_{p2}T=2p\ f_{p2}\cdot\frac{1}{f_s}=2p\cdot300\cdot\frac{1}{720}=\frac{5}{6}p$$

下截止频率

$$w_{p1}=\Omega_{p1}T=2p\ f_{p1}\cdot\frac{1}{f_s}=2p\cdot60\cdot\frac{1}{720}=\frac{1}{6}p$$

模拟带通滤波器技术指标为

$$\Omega_{p2}=\frac{2}{T}tg\frac{1}{2}w_{p2}=2f_s tg\frac{1}{2}w_{p2}=2\times720tg\frac{5}{12}p=374.153\,rad/s$$

$$\Omega_{p1}=\frac{2}{T}tg\frac{1}{2}w_{p1}=2f_s tg\frac{1}{2}w_{p1}=2\times720tg\frac{1}{12}p=385.847\,rad/s$$

$$\Omega_0=\sqrt{\Omega_{p2}\Omega_{p1}}=1440\,rad/s\quad\text{(通带中心频率)}$$

设计模拟低通滤波器为三阶 N=3，查表得其归一化低通传输函数为：

$$H(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

归一化模拟低通转换为模拟带通滤波器：

$$H_a(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_0^2}{s(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})}}$$

通过双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换为数字带通滤波器

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=1440\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$p=\left.\frac{s^2+\Omega_0{}^2}{s\left(\Omega_{p2}-\Omega_{p1}\right)}\right|_{s=1440\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\left.\frac{s^2+1440^2}{s\left(5374.153-385.847\right)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}1440}=0.577\frac{1+z^{-2}}{1-z^{-2}}$$

将 p 带入 H(p)中，得：

$$H(z)=\frac{1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6}}{3.012-2.912z^{-2}+1.756z^{-4}+0.32z^{-6}}$$

4.15 用双线性变换法设计设计一个满足下面指标要求的数字高通巴特沃思滤波器:通带 2～4kHz、通带波动 3dB、阻带 0～500Hz、阻带衰减 20dB，取样频率为 8kHz。请分别用模拟滤波器频率变换和数字滤波器频率变换实现本设计。

解：

（1）模拟滤波器的频率变换法

模拟边缘频率为：

$$f_{p1}=2000Hz\quad f_{p2}=4000Hz$$

$$f_{s1}=500Hz$$

数字边缘频率为：

$$w_{p1}=2p\,\frac{f_{p1}}{f_S}=2p\,\frac{2000}{8000}=0.5p \text{ 弧度}$$

$$w_{s1}=2p\,\frac{f_{s1}}{f_S}=2p\,\frac{500}{8000}=0.125p \text{ 弧度}$$

预畸变的模拟边缘频率为：

$$\Omega_{p1}=2f_S\tan\frac{w_{p1}}{2}=16000 \text{ 弧度/秒}$$

$$\Omega_{s1}=2f_S\tan\frac{w_{s1}}{2}=3182.6 \text{ 弧度/秒}$$

$$l_p=1,\quad l_s=\frac{\Omega_{p1}}{\Omega_{s1}}=5.0273$$

由已知 $A_p=3dB$， $A_s=20dB$，所求原型滤波器需要满足：

$$e=\sqrt{10^{A^p/10}-1}=\sqrt{10^{3/10}-1}=0.9976$$

$$N \ge \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\frac{l_s}{l_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1\times 20}-1}{0.9976^2}\right)}{2\lg\left(\frac{5.0273}{1}\right)} = 1.424$$

为满足滤波器的要求，取 N＝2。

用查表法得原型模拟低通巴特沃斯滤波器的归一化传输函数为：

$$H_a(p) = \frac{1}{\mathrm{p}^2+1.41421356\mathrm{p}+1}$$

把归一化低通滤波器的传输函数 $H_a(p)$ 转换为高通滤波器的传输函数 $H_{HP}(s)$：

$$H_{HP}(s) = H_a(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_p}{s}} = \frac{s^2}{s^2+2.2627\times 10^4 s+2.5600\times 10^8}$$

由双线性变换法求 $H(z)$

$$H(z) = H_{HP}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.2929(1-z^{-1})^2}{1+0.1716z^{-2}}$$

（2）数字滤波器的频率变换法

首先实现归一化低通向一般低通的转变

$$H_a(s) = H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{2.5600\times 10^8}{\mathrm{s}^2+2.2627\times 10^4\mathrm{s}+2.5600\times 10^8}$$

其中 $\Omega_c = \Omega_{p1} = 16000$ 弧度/秒

其次将模拟低通转换为数字低通

$$H_{LP}(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.2929(1+z^{-1})^2}{1+0.1716z^{-1}}$$

再将数字低通转换为数字高通

$$a = -\cos\left(\frac{w_p+w_r}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{w_p-w_r}{2}\right) = -0.1503$$

$$H_{HP}(z) = H_{LP}(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{z^{-1}+a}{1+a z^{-1}}} = \frac{0.2929\left(1-z^{-1}\right)^2}{1+0.1716z^{-2}}$$

4.16 用双线性变换法设计设计一个满足下面指标要求的数字带通巴特沃思滤波器：通带上下边缘频率各为 200Hz 和 300Hz，通带波动 3dB，阻带上下边缘频率分别为 50Hz 和 450Hz，阻带衰减 20dB，取样频率为 1kHz。请分别用模拟滤波器频率变换和数字滤波器频率变换实现本设计。

解：

（1）模拟滤波器的频率变换法

模拟边缘频率为：

$$f_{p1}=200Hz,\ f_{p2}=300Hz$$
$$f_{s1}=50Hz,\ f_{s2}=450Hz$$

数字边缘频率为：

$$w_{p1}=2p\frac{f_{p1}}{f_S}=2p\frac{200}{1000}=0.4p\ \text{弧度}\qquad w_{p2}=2p\frac{f_{p2}}{f_S}=2p\frac{300}{1000}=0.6p$$

$$w_{s1}=2p\frac{f_{s1}}{f_S}=2p\frac{50}{1000}=0.1p\ \text{弧度}\qquad w_{s1}=2p\frac{f_{s1}}{f_S}=2p\frac{450}{1000}=0.9p$$

带通滤波器的预畸变截止频率：

$$\Omega_{p1}=2f_S\tan\frac{w_{p1}}{2}=1453.1\,\text{弧度/秒}\qquad \Omega_{p2}=2f_S\tan\frac{w_{p2}}{2}=2752.8\,\text{弧度/秒}$$

$$\Omega_{s1}=2f_S\tan\frac{w_{s1}}{2}=316.8\,\text{弧度/秒}\qquad \Omega_{s2}=2f_S\tan\frac{w_{s2}}{2}=12627.6\,\text{弧度/秒}$$

$$B=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}=1299.7\ \text{弧度/秒}$$

因为$\Omega_{p1}\Omega_{p2}=\Omega_{s1}\Omega_{s2}$，所以此带通滤波器是几何对称的。

模拟低通的归一化截止频率 l_p、 l_s：

$$l_p=1;\quad l_s=\frac{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}=9.4720$$

由已知$A_p=3dB$， $A_s=20dB$，所求原型滤波器需要满足：

$$e=\sqrt{10^{A^p/10}-1}=\sqrt{10^{3/10}-1}=0.9976$$

$$N\ge\frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\dfrac{l_s}{l_p}\right)}=\frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1\times20}-1}{0.9976^2}\right)}{2\lg\left(\dfrac{9.4720}{1}\right)}=1.024$$

N 必须是一个实数，取 N＝2。

用查表法得原型模拟低通巴特沃斯滤波器的归一化传输函数为：

$$H(p)=\frac{1}{p^2+1.41421356p+1}$$

归一化低通滤波器的传输函数到带通滤波器的传输函数：

$$H_{BP}(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_0^2}{sB}}=\frac{1.6892\times10^6 s^2}{s^4+1.8381\times10^3 s^3+9.6892\times10^6 s^2+7.3522\times10^9 s+1.6000\times10^{13}}$$

由双线性变换法求 $H(z)$

$$H(z)=H_{BP}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0675(1-z^{-2})^2}{(1+0.3769z^{-1}+0.6425z^{-2})(1-0.3769z^{-1}+0.6425z^{-2})}$$

（2）数字滤波器的频率变换法

首先实现归一化低通向一般低通的转变：

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

这里 $\Omega_c=B/2$ 为反归一化后的低通模拟滤波器的通带截止频率

其次将模拟低通转换为数字低通：

$$H_{LP}(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

再将数字低通转换为数字带通：

$$a=\cos\left(\frac{w_{p1}+w_{p2}}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)=0$$

$$k=ctg\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)tg\left(\frac{w_p}{2}\right)=0.4873$$

其中 $w_p=0.1p$ 弧度，是低通数字滤波器的通带截至频率

$$H_{BP}(z)=H_{LP}(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2ak}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2a}{k+1}z^{-1}+1}}=\frac{0.0675(1-z^{-2})^2}{(1+0.3769z^{-1}+0.6425z^{-2})(1-0.3769z^{-1}+0.6425z^{-2})}$$

4.17 用双线性变换法设计一个满足下面指标要求的数字带阻巴特沃思滤波器：通带上下边带各为 0~50Hz 和 450~500Hz，通带波动 3dB，阻带为 200Hz～300Hz，阻带衰减 20dB，取样频率为 1kHz。请分别用模拟滤波器频率变换和数字滤波器频率变换实现本设计。

解：

（1）模拟滤波器的频率变换法

模拟边缘频率为：

$$f_{s1}=200Hz,\ f_{s2}=300Hz$$
$$f_{p1}=50Hz,\ f_{p2}=450Hz$$

数字边缘频率为：

$$w_{s1}=2p\,\frac{f_{s1}}{f_S}=2p\,\frac{200}{1000}=0.4p\ \text{弧度} \qquad w_{s2}=2p\,\frac{f_{s2}}{f_S}=2p\,\frac{300}{1000}=0.6p$$

$$w_{p1}=2p\,\frac{f_{p1}}{f_S}=2p\,\frac{50}{1000}=0.1p\ \text{弧度} \qquad w_{p2}=2p\,\frac{f_{p2}}{f_S}=2p\,\frac{450}{1000}=0.9p$$

低通滤波器的预畸变截止频率：

$$\Omega_{s1}=2f_S\tan\frac{w_{s1}}{2}=1453.1\text{弧度/秒} \qquad \Omega_{s2}=2f_S\tan\frac{w_{s2}}{2}=2752.8\text{弧度/秒}$$

$$\Omega_{p1}=2f_S\tan\frac{w_{p1}}{2}=316.8\ \text{弧度/秒} \qquad \Omega_{p2}=2f_S\tan\frac{w_{p2}}{2}=12627.6\text{弧度/秒}$$

$$B=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}=12310.8\text{弧度/秒} \qquad \Omega_0=\sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}=2000\text{弧度/秒}$$

因为$\Omega_{p1}\Omega_{p2}=\Omega_{s1}\Omega_{s2}$，所以此带通滤波器是几何对称的。

模拟低通的归一化截止频率 l_p、 l_s：

$$l_p=1;\quad l_s=\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}=9.4720$$

由已知$A_p=3dB$， $A_s=20dB$，所求原型滤波器需要满足：

$$e=\sqrt{10^{A^p/10}-1}=\sqrt{10^{3/10}-1}=0.9976$$

$$N\geq\frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{e^2}\right)}{2\lg\left(\dfrac{l_s}{l_p}\right)}=\frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1\times20}-1}{0.9976^2}\right)}{2\lg\left(\dfrac{9.4720}{1}\right)}=1.024$$

N 必须是一个实数，取 N＝2。

用查表法得原型模拟低通巴特沃斯滤波器的归一化传输函数为：

$$H(p)=\frac{1}{p^2+1.41421356p+1}$$

归一化低通滤波器的传输函数到带阻滤波器的传输函数：

$$H_{BS}(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{sB}{s^2+\Omega_0^2}}=\frac{1.6000\times10^{13}}{s^4+1.7410\times10^3s^3+1.5956\times10^8s^2+6.9640\times10^{10}s+1.6000\times10^{13}}$$

由双线性变换法求$H(z)$

$$H(z)=H_{BS}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0675(1+z^{-2})^2}{(1+1.5582z^{-1}+0.6425z^{-2})(1-1.5582z^{-1}+0.6425z^{-2})}$$

（2）数字滤波器的频率变换法

首先实现归一化低通向一般低通的转变：

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

这里 $\Omega_c=B/2$

其次将模拟低通转换为数字低通：

$$H_{LP}(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

再将数字低通转换为数字带阻：

$$a=\cos(\frac{w_{p1}+w_{p2}}{2})\Big/\cos(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2})=0$$

$$k=ctg(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2})tg(\frac{w_p}{2})=0.4873$$

其中 $w_p=0.1p$ 弧度，是低通数字滤波器的通带截至频率

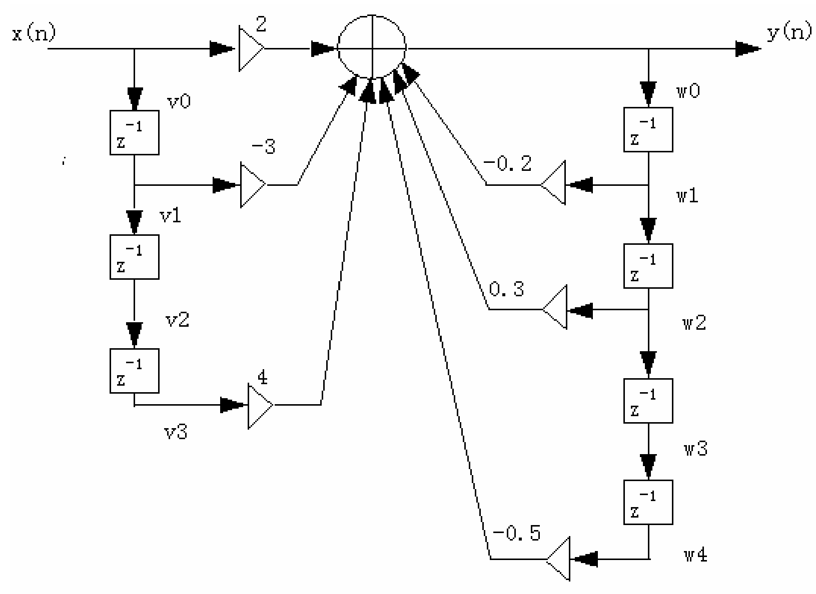
$$H_{BS}(z)=H_{LP}(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2ak}{k+1}z^{-1}+\frac{1-k}{k+1}}{\frac{1-k}{k+1}z^{-2}-\frac{2a}{1-k}z^{-1}+1}}=\frac{0.0675(1+z^{-2})^2}{(1+1.5582z^{-1}+0.6425z^{-2})(1-1.5582z^{-1}+0.6425z^{-2})}$$

4.18 用直接型及正准型结构实现下面的滤波器，并分别写出相应的差分方程。

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}-0.3z^{-2}+0.5z^{-4}}$$

解：差分方程为：

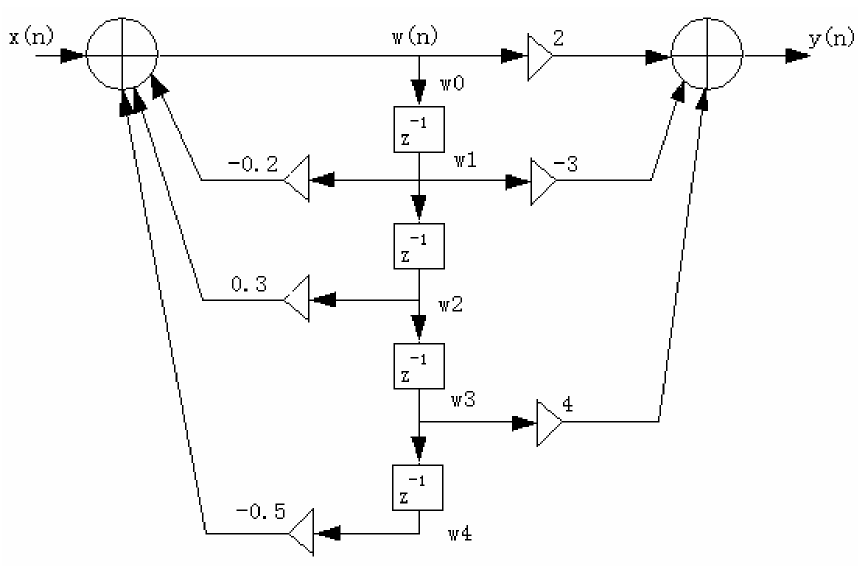
$$y(n)=-0.2y(n-1)+0.3y(n-2)-0.5y(n-4)+2x(n)-3x(n-1)+4x(n-3)$$



直接型

（2）差分方程式为：$w(n)=x(n)-0.2w(n-1)+0.3w(n-2)-0.5w(n-4)$

$$y(n)=2w(n)-3w(n-1)+4w(n-3)$$



正准型

4.19 用直接型以及正准型结构实现以下传输函数：

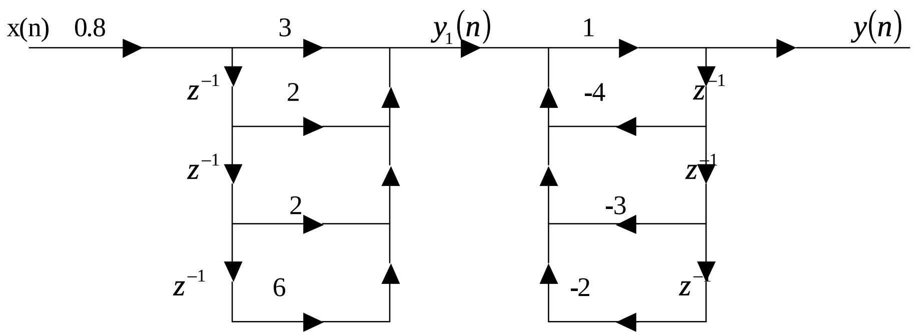
（1） $$H(z)=0.8\frac{3z^3+2z^2+2z+6}{z^3+4z^2+3z+2}$$

（2） $$H(z)=\frac{-5+2z^{-1}-0.5z^{-2}}{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}$$

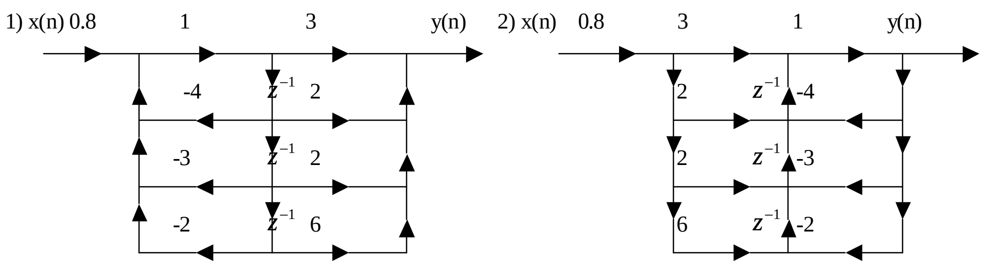
（3） $H(z)=\dfrac{-z+2}{8z^2-2z-3}$

解：（1） $H(z)=0.8\dfrac{3+2z^{-1}+2z^{-2}+6z^{-3}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}}$

直接型

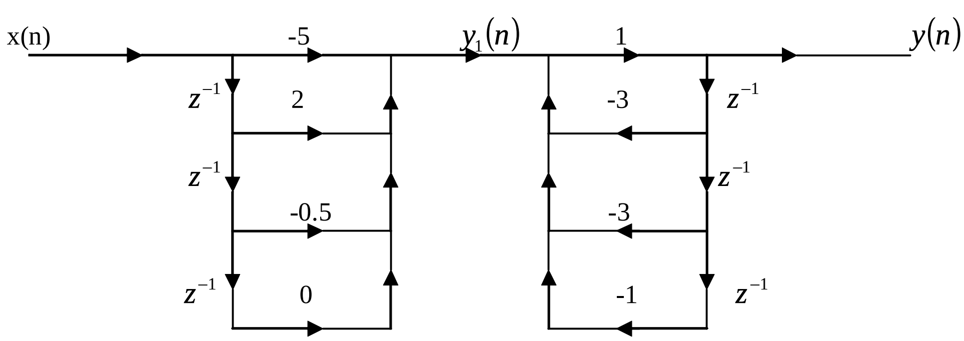


正准型

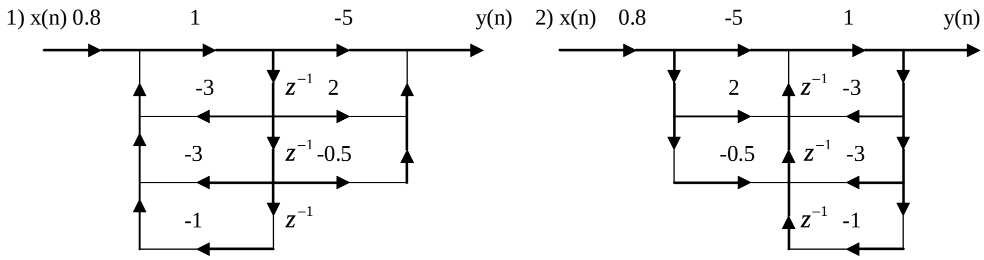


（2） $H(z)=\dfrac{-5+2z^{-1}-0.5z^{-2}}{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}$

直接型

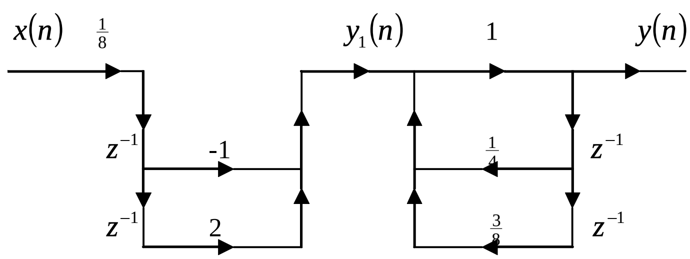


正准型

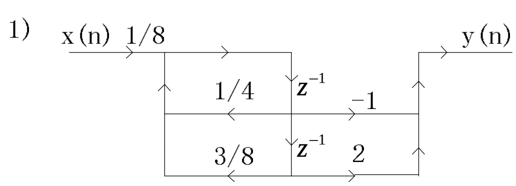


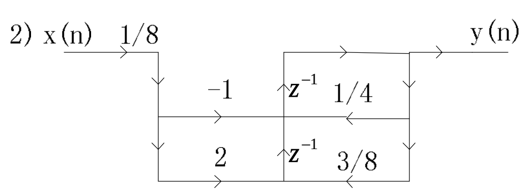
（3）$H(z)=\dfrac{-z^{-1}+2z^{-2}}{8-2z^{-1}-3z^{-2}}=\dfrac{1}{8}\dfrac{-z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}$

直接型



正准型





4.20 用级联型实现以下传输函数：

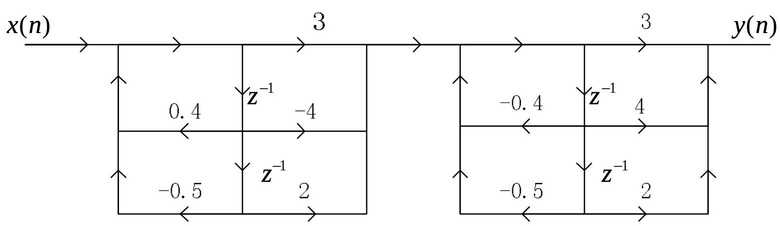
(1) $H(z)=\dfrac{9-4z^{-2}+4z^{-4}}{1+0.84z^{-2}+0.25z^{-4}}$

(2) $H(z)=\dfrac{1-1.5z^{-1}+0.48z^{-2}-0.33z^{-3}+0.9376z^{-4}-0.5328z^{-5}}{1+2.2z^{-1}+1.77z^{-2}+0.52z^{-3}}$

(3) $H(z)=\dfrac{1+z^{-8}}{1-0.0625z^{-8}}$

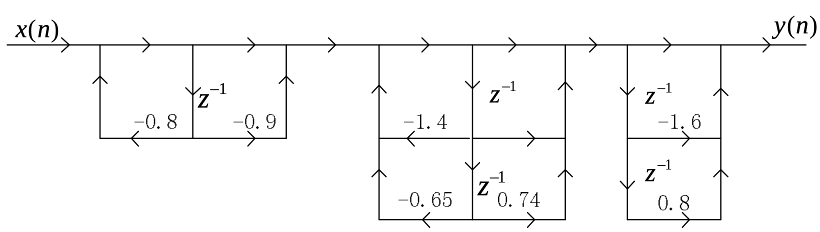
解：(1)级联型

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}+2z^{-2}}{1-0.4z^{-1}+0.5z^{-2}}\cdot\frac{3+4z^{-1}+z^{-2}}{1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}}$$



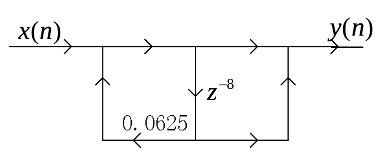
（2）级联型

$$H(z)=\frac{1-0.9z^{-1}}{1+0.8z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}+0.74z^{-2}}{1+1.4z^{-1}+0.65z^{-2}}\cdot(1-1.6z^{-1}+0.8z^{-2})$$



（3）级联型

$$H(z)=\frac{1+z^{-8}}{1-0.0625z^{-8}}$$



4.21 用级联型及并联型实现以下传输函数：

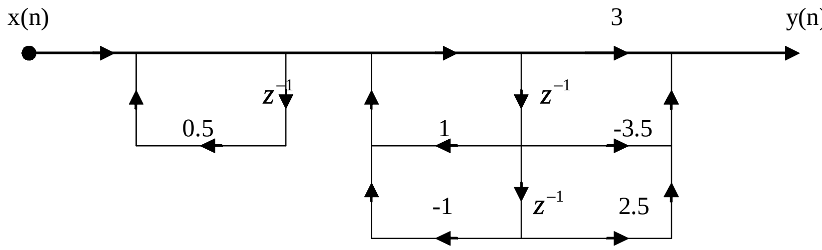
（1） $$H(z)=\frac{3z^3-3.5z^2+2.5z}{(z^2-z+1)(z-0.5)}$$

（2） $$H(z)=\frac{4z^3-2.8284z^2+z}{(z^2-1.4142z+1)(z+0.7071)}$$

（3） $$H(z)=\frac{0.1432(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{1-0.1801z^{-1}+0.3419z^{-2}-0.0165z^{-3}}$$

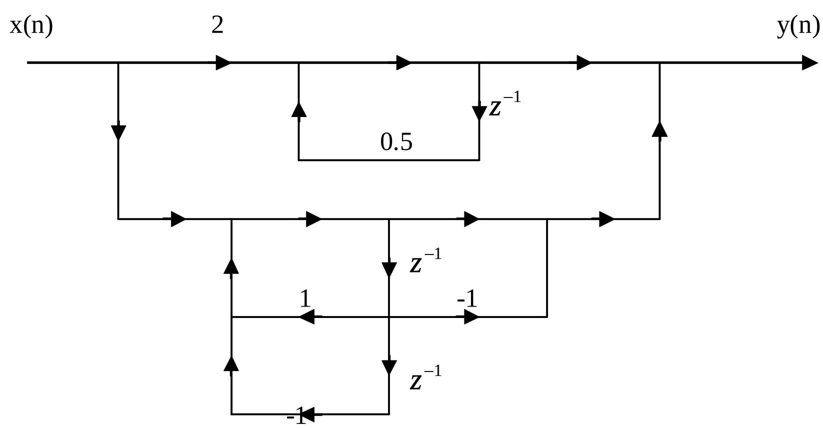
解：（1）级联型

$$H(Z)=(1-0.5z^{-1})\cdot\frac{3-3.5z^{-1}+2.5z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$



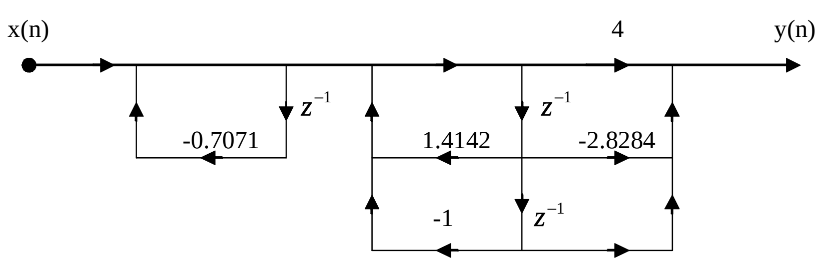
并联型

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}+\frac{2}{1-0.5z^{-1}}$$

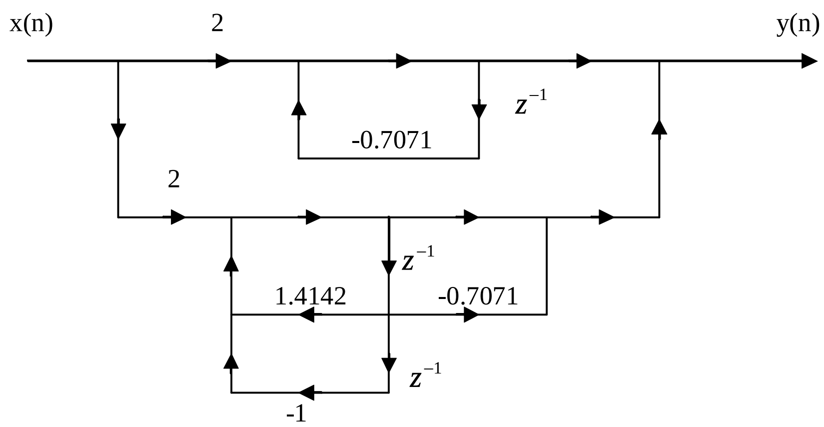


（2）级联型

$$H(z)=\left(1+0.7071z^{-1}\right)\cdot\frac{4-2.8284z^{-1}+z^{-2}}{1-1.4142z^{-1}+z^{-2}}$$

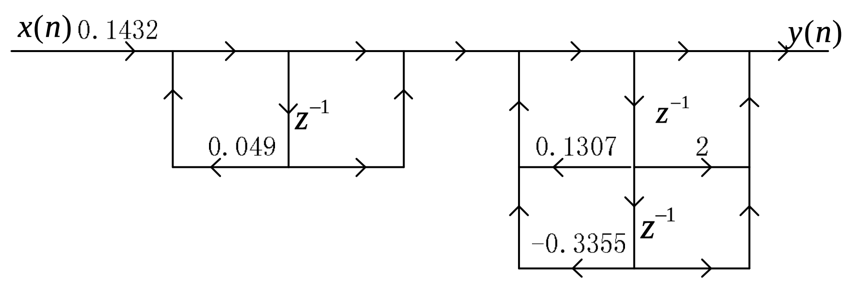


并联型 $H(z)=\dfrac{2}{1+0.7071z^{-1}}+\dfrac{2\left(1-0.7071z^{-1}\right)}{1-1.4142z^{-1}+z^{-2}}$



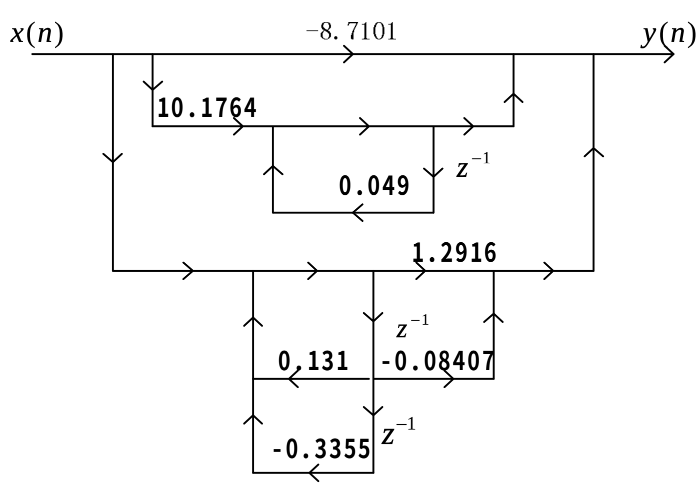
（3）级联型

$$H(z)=0.1432\frac{1+z^{-1}}{1-0.0490z^{-1}}\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.1307z^{-1}+0.3355z^{-2}}$$



并联型

$$H(z)=\frac{1.2916-0.08407z^{-1}}{1-0.131z^{-1}+0.3355z^{-2}}+\frac{10.1764}{1-0.049z^{-1}}-8.7101$$



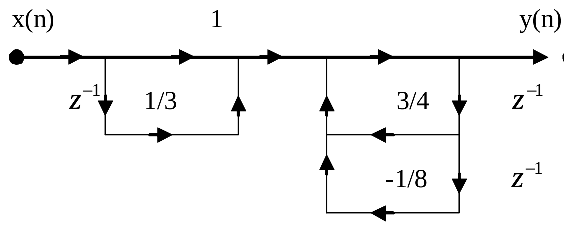
4.22 设滤波器的差分方程为

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

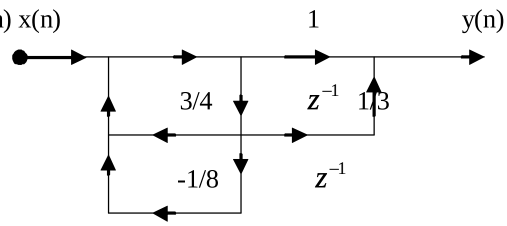
试用直接型、正准型及全部一阶节的级联型、并联型结构实现。

解：

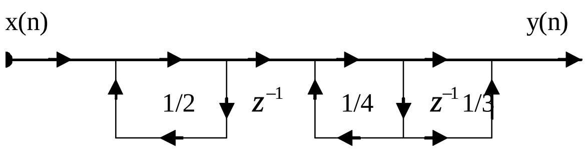
直接型



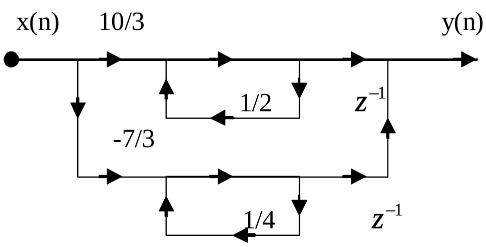
正准型



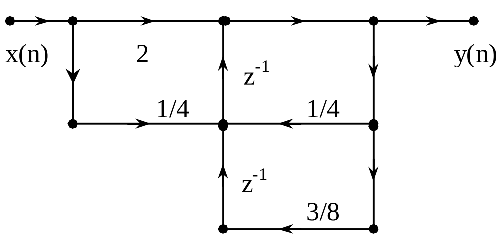
全部一阶级联型



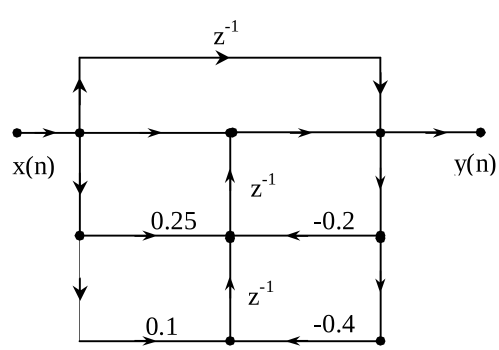
并联型



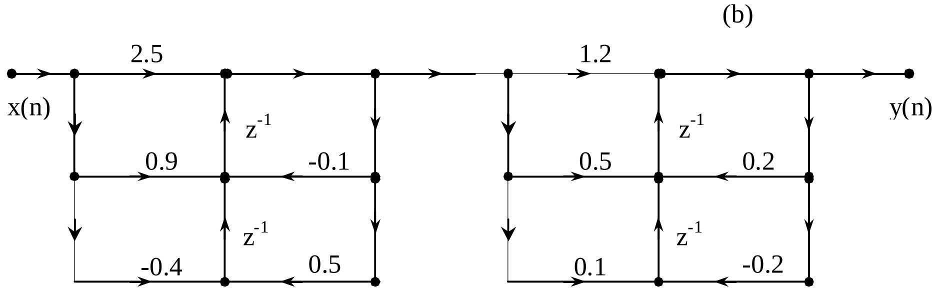
4.23 求所示结构的传输函数及差分方程。



(a)



(b)



(c)

解：（a）图中所示滤波器的传输函数为：

$$H(z)=\frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{16+2z^{-1}}{8-2z^{-1}-3z^{-2}}$$

滤波器的差分方程为：

$$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+\frac{3}{8}y(n-2)+2x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)$$

（b）图中所示为两个滤波器的并联组合，易知这两个滤波器的传输函数为：

$$H_1(z)=z^{-1}$$

$$H_2(z)=\frac{1+0.25z^{-1}+0.1z^{-2}}{1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}}$$

于是得整个滤波器的传输函数为：

$$\begin{aligned}H(z)&=H_1(z)+H_2(z)\\&=z^{-1}+\frac{1+0.25z^{-1}+0.1z^{-2}}{1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}}=\frac{1+1.25z^{-1}+0.3z^{-2}+0.4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}}\end{aligned}$$

滤波器的差分方程为：

$$y(n)=-0.2y(n-1)-0.4y(n-2)+x(n)+1.25x(n-1)+0.3x(n-2)+0.4x(n-3)$$

（c）图中所示为两个二阶滤波器的级联组合，易知这两个滤波器的传输函数分别为：

$$H_1(z)=\frac{2.5+0.9z^{-1}-0.4z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.5z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{1.2+0.5z^{-1}+0.1z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

于是得到该滤波器的传输函数为：

$$\begin{aligned}H(z)&=H_1(z)H_2(z)\\&=\left(\frac{2.5+0.9z^{-1}-0.4z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.5z^{-2}}\right)\left(\frac{1.2+0.5z^{-1}+0.1z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.2z^{-2}}\right)\\&=\frac{3+2.33z^{-1}+0.22z^{-2}-0.11z^{-3}-0.04z^{-4}}{1-0.1z^{-1}+0.32z^{-2}+0.12z^{-3}-0.1z^{-4}}\end{aligned}$$

差分方程为：

$$\begin{aligned}y(n)&=0.1y(n-1)-0.32y(n-2)-0.12y(n-3)+0.1y(n-4)\\&\quad+3x(n)+2.33x(n-1)+0.22x(n-2)-0.11x(n-3)-0.04x(n-4)\end{aligned}$$

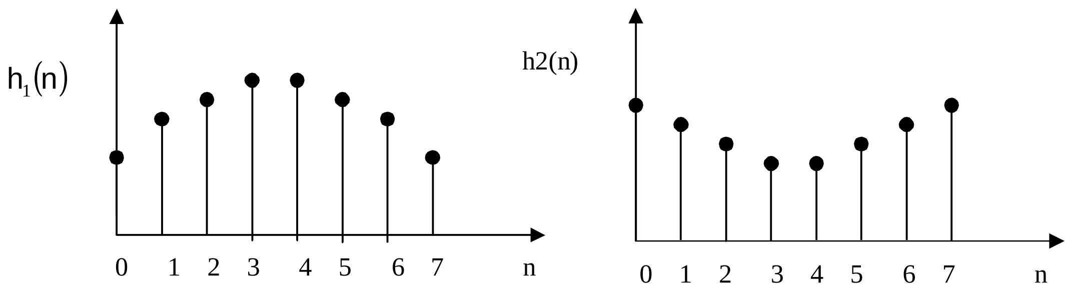
第五章 习题

5.1 已知图 p5.1(a)中的 $h_1(n)$ 是偶对称序列 N=8，图 p5.1(b)中的 $h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 圆周移位（移 $\frac{N}{2}$=4 位）后的序列。设 $H_1(k)=DFT\left[h_1(n)\right]$， $H_2(k)=DFT\left[h_2(n)\right]$

(1) 问 $H_1(k)=H_2(k)$ 成立否？ $\theta_1(k)$ 与 $\theta_2(k)$ 有什么关系？

(2) $h_2(n)$、$h_1(n)$ 各构成一个低通滤波器，问它们是否是线性相位的？延时是多少？

(3) 这两个滤波器性能是否相同？为什么？若不同，谁优谁劣？



(a) 图 p5.1 (b)

解：

(1) 根据题意可知

$$h_2((n))_8 = h_1((n-4))_8$$

则

$$H_2(k)=\sum_{n=0}^{7} h_1((n-4))_8 W_8^{nk} R_8(n)$$

$$\underline{\underline{i=n-4}}\sum_{i=-4}^{3}\tilde{h}_1(i)W_8^{ki}W_8^{4k} = W_8^{4k}\sum_{i=0}^{7}\tilde{h}_1(i)W_8^{ki}$$

$$=H_1(k)W_8^{4k}=e^{-j\frac{2\pi}{8}k\bullet 4}H_1(k)=e^{-jk\pi}H_1(k)=(-1)^k H_1(k)$$

令

$$H_1(k)=|H_1(k)|e^{j\theta_1(k)}$$

$$H_2(k)=|H_2(k)|e^{j\theta_2(k)}$$

则由上式可以看出

$$|H_2(k)|=|H_1(k)|$$

$$\theta_2(k)=\theta_1(k)-\frac{2\pi}{8}\bullet 4k=\theta_1(k)-k\pi$$

(2) $h_1(n)$ 及 $h_2(n)$都是以 n=（N－1）/2 ＝ 3.5 为对称中心的偶对称序列，故以它们构成的两个低通滤波器都是线性相位的，延迟为：

$$t=\frac{N-1}{2}=\frac{7}{2}=3.5$$

(3) 要知两个滤波器的性能，必须求出它们各自的频率响应的幅度函数，根据它们的通带起伏以及阻带衰减的情况，加以比较。由于 N＝8 是偶数，又是线性相位，故有

$$\begin{aligned}H(w)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)w\right]\\&=\sum_{n=0}^{3}2h(n)\cos\left[w\left(\frac{7}{2}-n\right)\right]\\&=\sum_{n=1}^{N/2}2h\left(\frac{N}{2}-n\right)\cos\left[w\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=\sum_{n=1}^{4}2h(4-n)\cos\left[w\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=2\left[h(3)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+h(2)\cos\left(\frac{3w}{2}\right)+h(1)\cos\left(\frac{5w}{2}\right)+h(0)\cos\left(\frac{7w}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

可以令

$$h_1(0)=h_1(7)=1\ ,\ h_1(1)=h_1(6)=2$$

$$h_1(2)=h_1(5)=3\ ,\ h_1(3)=h_1(4)=4$$

及

$$h_2(0)=h_2(7)=4，h_2(1)=h_2(6)=3$$

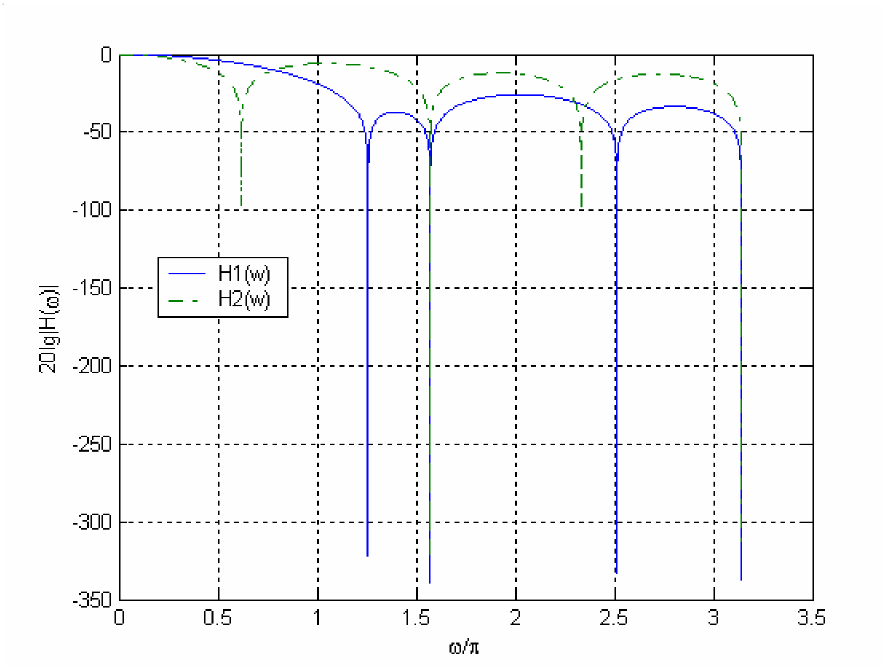
$$h_2(2)=h_2(5)=2，h_2(3)=h_2(4)=1$$

代入可得

$$H_1(w)=2\left[4\cos\left(\frac{w}{2}\right)+3\cos\left(\frac{3w}{2}\right)+2\cos\left(\frac{5w}{2}\right)+\cos\left(\frac{7w}{2}\right)\right]$$

$$H_2(w)=2\left[\cos\left(\frac{w}{2}\right)+2\cos\left(\frac{3w}{2}\right)+3\cos\left(\frac{5w}{2}\right)+4\cos\left(\frac{7w}{2}\right)\right]$$

$H_1(w)$、$H_2(w)$ 图形如下图所示：



根据图，从阻带看，$H_1(w)$阻带衰减大，而$H_2(w)$的阻带衰减小，这一点$H_1(w)$优于$H_2(w)$；从带通看，它们都是平滑衰减，但$H_1(w)$的通带较之$H_2(w)$的通带要宽一些。

5.2 用汉宁窗设计一个线性相位高通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi-\omega_c \le \omega \le \pi \\ 0, & 0 \le \omega < \pi-\omega_c \end{cases}$$

求出 h(n)的表达式，确定 α 与 N 的关系，并画出 20 lg｜H($e^{j\omega}$)｜的曲线。(设 ω_C =0.5π，N=51)。

解：

根据题意有

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{-j\omega(n-\alpha)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\frac{1}{j(n-\alpha)}\left[e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}\right]$$

$$= \frac{e^{jnp}}{j2p\,(n-a)}\left[e^{jw_c(n-a)} - e^{-jw_c(n-a)}\right]$$

$$= e^{jnp}\,\frac{w_c}{p}\,\frac{\sin\left[(n-a)\,w_c\right]}{(n-a)\,w_c}$$

$$= (-1)^n\,\frac{\sin\left[w_c\,(n-a)\right]}{p\,(n-a)}$$

所以

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\bullet(-1)^n\,\frac{\sin[w_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & n为其它值 \end{cases}$$

其中 $w(n)$ 为窗函数。

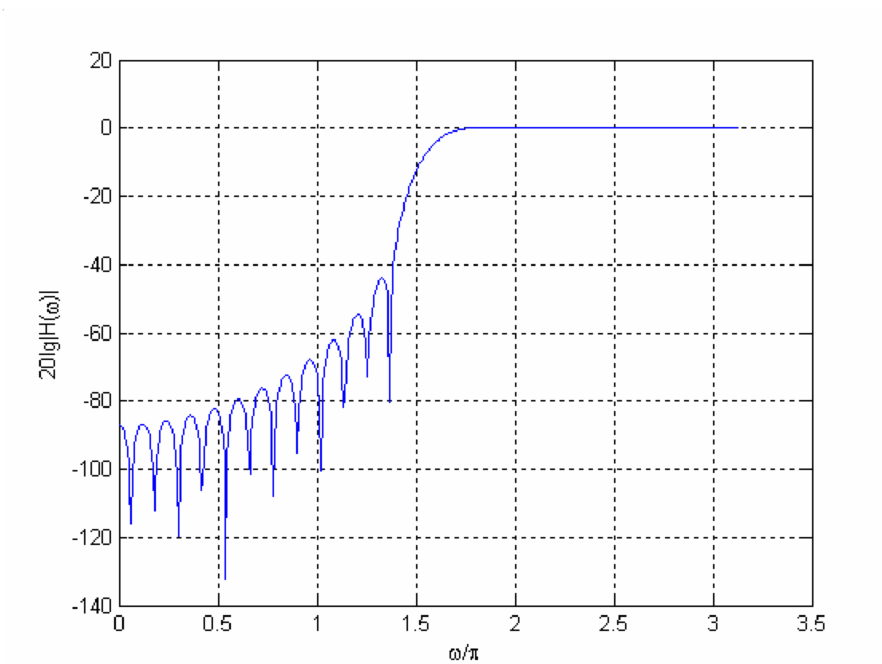
按照线性相位滤波器条件，有

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

代入 N＝51，得 α ＝25，则

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{25}\right)\right](-1)^n\,\frac{\sin[0.5(n-25)\pi]}{\pi(n-25)}, & 0 \le n \le 50 \\ 0, & n为其它值 \end{cases}$$

此高通滤波器的幅频响应曲线如下图所示。



5.3 用汉明窗设计一个线性相位带通滤波器

$$H_d\left(e^{jw}\right)=\begin{cases}e^{-jw\alpha}, & -w_c \le w-w_0 \le w_c \\ 0, & 0\le w < w_0-w_c, w_0+w_c < w \le \pi\end{cases}$$

求出 $h(n)$ 的表达式并画出 20 lg | H(e^{jw}) | 的曲线。(设 $w_c = 0.2p$ ， $w_0 = 0.5p$ ，N=51)

解：

可求得此滤波器的时域函数为

$$\begin{aligned}
h_d(n) &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} H_d(e^{jw})e^{jwn}dw \\
&= \frac{1}{2p}\int_{-w_c+w_0}^{w_c+w_0} e^{-jwa}e^{jnw}dw + \frac{1}{2p}\int_{-w_0-w_c}^{-w_0+w_c} e^{-jwa}e^{jwn}dw \\
&= \frac{1}{2p}\bullet\frac{1}{j(n-a)}\left[e^{j(n-a)(w_0+w_c)} - e^{j(n-a)(w_0-w_c)} + e^{j(n-a)(w_c-w_0)} - e^{j(n-a)(-w_0-w_c)}\right] \\
&= \frac{1}{p(n-a)}\left\{\sin\left[(w_0+w_c)(n-a)\right] - \sin\left[(w_0-w_c)(n-a)\right]\right\} \\
&= \frac{2}{p(n-a)}\sin\left[(n-a)w_c\right]\cos\left[(n-a)w_0\right]
\end{aligned}$$

采用汉明窗设计时

$$h(n)=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\dfrac{2}{\pi(n-\alpha)}\sin[(n-\alpha)w_c]\cos[(n-\alpha)w_0], & 0\le n\le N-1 \\ 0, & n\text{为其它值}\end{cases}$$

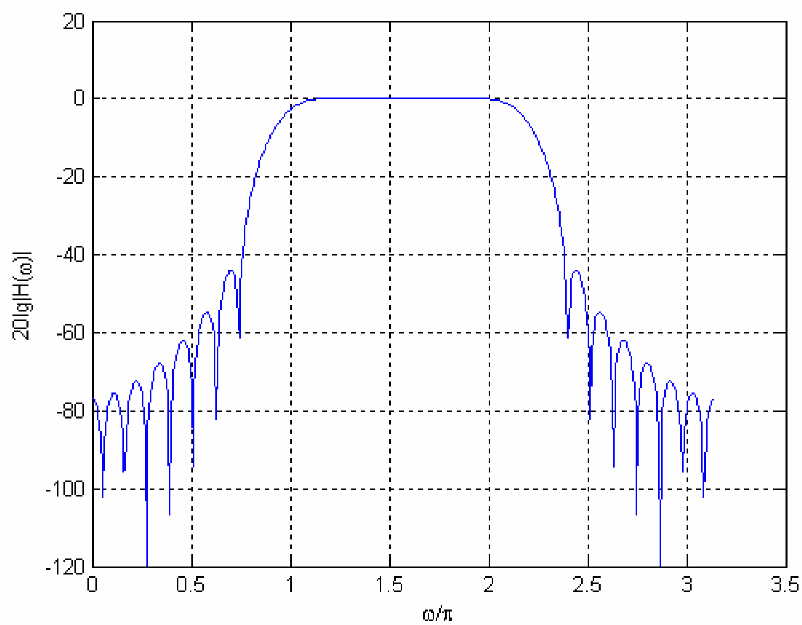
其中

$$\alpha=\frac{N-1}{2}$$

代入 N=51,得 α =25，则

$$h(n)=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos\left(\dfrac{\pi n}{25}\right)\right]\dfrac{2}{\pi(n-25)}\sin\left[(n-25)\dfrac{\pi}{5}\right]\cos\left[(n-25)\dfrac{\pi}{2}\right], & 0\le n\le 50 \\ 0, & n\text{为其它值}\end{cases}$$

其幅频响应曲线如下图所示。



5.4 设计满足下列指标的低通 FIR 滤波器。指标为：阻带衰减 40 dB、通带边缘频率 3 kHz、阻带边缘频率 3.5 kHz、取样频率 12 kHz。

解：

根据题意可知，过渡带宽：

$$\Delta f = f_c - f_p = 3.5 - 3 = 0.5\text{KHZ}$$

转换为数字频率过渡带：

$$\Delta w = 2\pi \frac{\Delta f}{f_s} = \frac{\pi}{12}$$

该滤波器的截止频率：

$$f_c = f_p + \frac{\Delta f}{2} = 3.25\text{KHZ}$$

数字截止频率：

$$w_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{3.25}{12} = 0.54\pi$$

所以，由此可得冲激响应：

$$h_d(n) = \frac{\sin((n-\tau)w_c)}{(n-\tau)\pi} = \frac{\sin[0.54\pi(n-\tau)]}{(n-\tau)\pi}$$

因为阻带衰减 **40dB**，通过查表可选择汉宁窗：

$$w(n) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{39}\right)$$

由过渡带宽确定窗口长度：

$$N=\left\lceil\frac{6.2\pi}{\Delta w}\right\rceil=79$$

则：

$$t=\frac{N-1}{2}=39$$

所以，此滤波器的冲激响应为：

$$h(n)=h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.54\pi(n-\tau)]}{(n-\tau)\pi}\bullet w(n), & 0\le n\le 78\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5.5 用 25 项矩形窗设计低通 FIR 滤波器，要求通带边缘位于 2 kHz，取样频率 20 kHz ：

(1) 确定过渡带宽度（Hz）

(2) 画出滤波器的幅频特性图

(3) 求出并画出具有下列指标的滤波器的幅频特性：低通、通带线性相位、取样频率 16 kHz、通带边缘频率 4.5kHz、阻带边缘频率 6 kHz、阻带衰减 75dB。

解：

(1) 根据 N 与过渡带宽的关系可知

$$\Delta w=\frac{1.8\pi}{25}=0.072\pi,$$

又因为

$$\Delta w=2\pi\frac{\Delta f}{f_s}$$

可得

$$\Delta f=\Delta w\bullet\frac{f_s}{2\pi}=0.72KHZ$$

（2）低通滤波器的截止频率为：

$$f_c=f_p+\frac{\Delta f}{2}=2.36KHZ$$

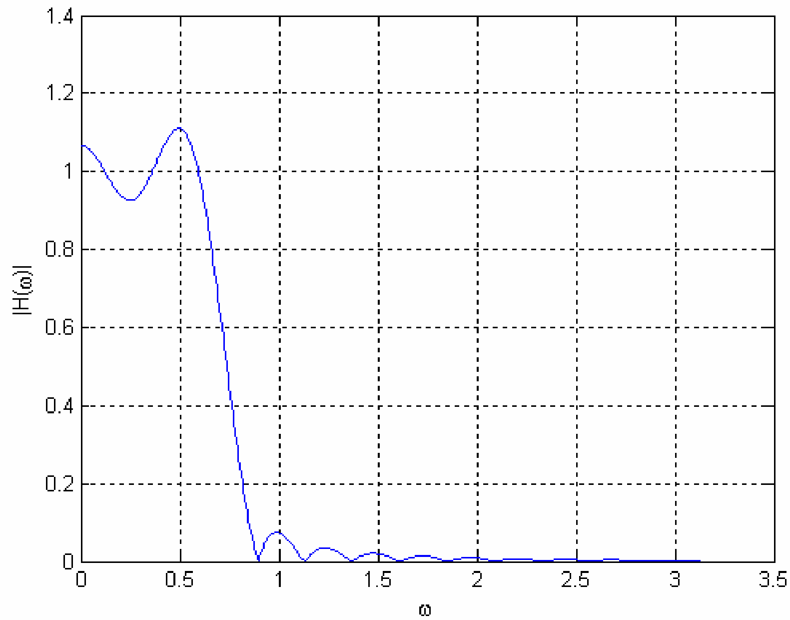
转换为数字频率

$$w_c=2\pi\frac{f_c}{f_s}=0.236\pi$$

由窗函数公式

$$h_d(n)=\frac{\sin(0.236\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)},0\le n\le 24,\ \tau=\frac{N-1}{2}=12$$

其幅频特性如下：



(3) 过渡带宽：

$$\Delta f = f_s - f_p = 1.5KHZ$$

则其截止频率为：

$$f_c = \frac{f_p + f_s}{2} = 5.25KHZ$$

转换为数字频率：

$$w_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 0.66\pi$$

得冲激响应为：

$$h(n) = \frac{\sin((n-\tau)w_c)}{(n-\tau)\pi} = \frac{\sin(0.66\pi(n-\tau))}{(n-\tau)\pi}$$

可由于阻带衰减为 75dB，所以选用布莱克曼窗

$$N = \left[\frac{11\pi}{\Delta w}\right] = 63$$

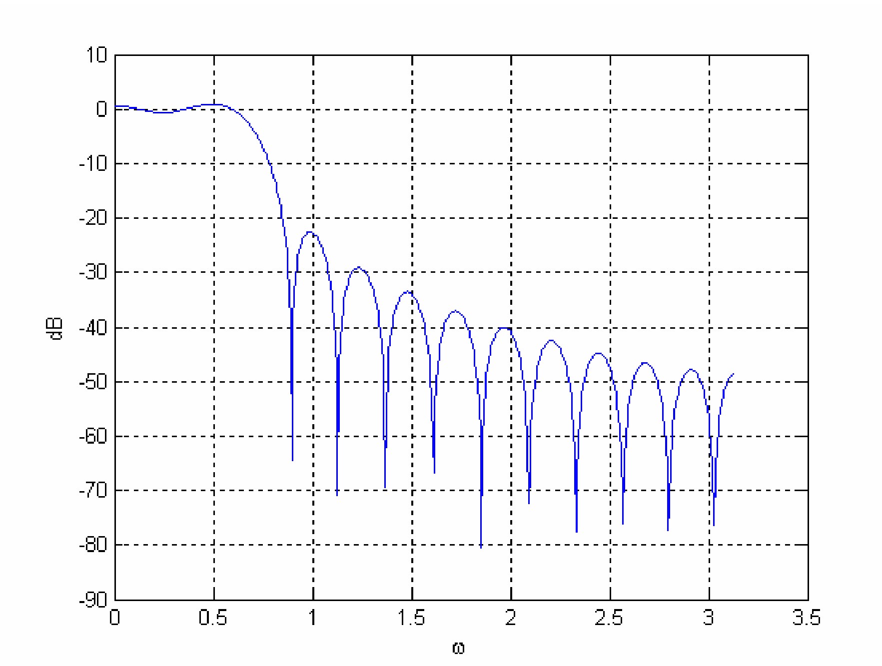
由此可得：

$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2pn}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4pn}{N-1}\right)$$
$$= 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{pn}{31}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2pn}{31}\right)$$

最后得到：

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(0.66p\,(n-31)\right)}{(n-31)p}w(n), & 0\le n\le 62\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

该滤波器幅频特性如下：



5.6 有 79 项的低通滤波器用 β＝6 的凯塞窗实现，通带边缘频率为 6 kHz，如果取样频率为 11.025 kHz：

(1) 过渡带宽度是多少？

(2) 阻带边缘频率是多少？

(3) 阻带边缘增益是多少？

解：

(1) 由 β＝**6**，查凯塞窗表可得 $\Delta w=\dfrac{8.64\pi}{79}$

$$\Delta f=\frac{\Delta w\cdot f_s}{2p}=0.6KHz$$

(2) $f_c=f_p+\dfrac{\Delta f}{2}=6.3KHz$，$w_c=2\pi\dfrac{f_c}{f_s}=1.14\pi$

(3) β＝**6** 时，

$$w(n)=\frac{I_0\left(6\sqrt{1-(1-\frac{n}{39})^2}\right)}{I_0(6)}$$

其中 $I_0(x)$ 为第一类变形零阶贝赛尔函数。

$$h_d(n)=\frac{\sin(1.14\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)},\quad \tau=\frac{N-1}{2}=39$$

最后可得

$$h(n)=\begin{cases} h_d(n)\cdot\dfrac{I_0\left(6\sqrt{1-(1-\frac{n}{39})^2}\right)}{I_0(6)}, & 0\le n\le 78 \\ o, & 其它 \end{cases}$$

所以可查表得到阻带边缘增益为 -63dB。

5.7 取样频率为 10 kHz，设计低通 FIR 滤波器，通带边缘在 2 kHz，阻带边缘在 3 kHz，阻带衰减 20 dB，求滤波器的脉冲响应和差分方程。

解：

由题意可知：

$$\Delta f=3KHz-2KHz=1KHz$$

则该滤波器的截止频率为：

$$f_c=f_p+\frac{\Delta f}{2}=2.5KHz$$

$$w_c=2\pi\frac{f_c}{f_s}=0.5\pi$$

可得

$$h_d(n)=\frac{\sin(0.5\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

又因为阻带衰减 20dB，故选择矩形窗。

所以可得

$$N=\left\lceil\frac{1.8\pi}{\Delta w}\right\rceil=9\ ,\ \tau=\frac{N-1}{2}=4$$

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin(0.5\pi(n-4))}{(n-4)\pi}w(n), & 0\le n\le 8\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求解差分方程

$$H(w)=h(0)+h(1)e^{-jw}+h(2)e^{-2jw}+\cdots+h(8)e^{-8jw}$$

$$=0.5+0.318e^{-jw}-0.106e^{-3jw}+0.064e^{-5jw}+0.5e^{-7jw}$$

$$y(n)=h(0)+h(1)x(n-1)+\cdots+h(8)x(n-8)$$
$$=0.5+0.318x(n-1)-0.106x(n-3)+0.064x(n-5)+0.5x(n-7)$$

5.8 布莱克曼窗设计一个理想线性相位 90° 移项带通滤波器

$$H_d\left(e^{jw}\right)=\begin{cases} je^{-jwa}, & -w_c \le w-w_0 \le w_c \\ 0, & 0 \le w < w_0-w_c, \quad w_0+w_c < w \le p \end{cases}$$

求出 h（n）的表达式，并画出 20 lg | H(e^{jw}) | 的曲线。（ 设 $w_c = 0.2p$ ， $w_0 = 0.4p$ ，N ＝51 ）

解：

可求得此滤波器的时域函数为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{jw})e^{jwn}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c+w_0}^{w_c+w_0}je^{-jw\alpha}e^{jnw}dw+\frac{1}{2\pi}\int_{-w_0-w_c}^{-w_0+w_c}je^{-jw\alpha}e^{jwn}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{j}{j(n-\alpha)}\left[e^{j(n-\alpha)(w_0+w_c)}-e^{j(n-\alpha)(w_0-w_c)}+e^{j(n-\alpha)(w_c-w_0)}-e^{j(n-\alpha)(-w_0-w_c)}\right]$$

$$=\frac{j}{\pi(n-\alpha)}\{\sin[(w_0+w_c)(n-\alpha)]-\sin[(w_0-w_c)(n-\alpha)]\}$$

$$=\frac{2j}{\pi(n-\alpha)}\sin[(n-\alpha)w_c]\cos[(n-\alpha)w_0]$$

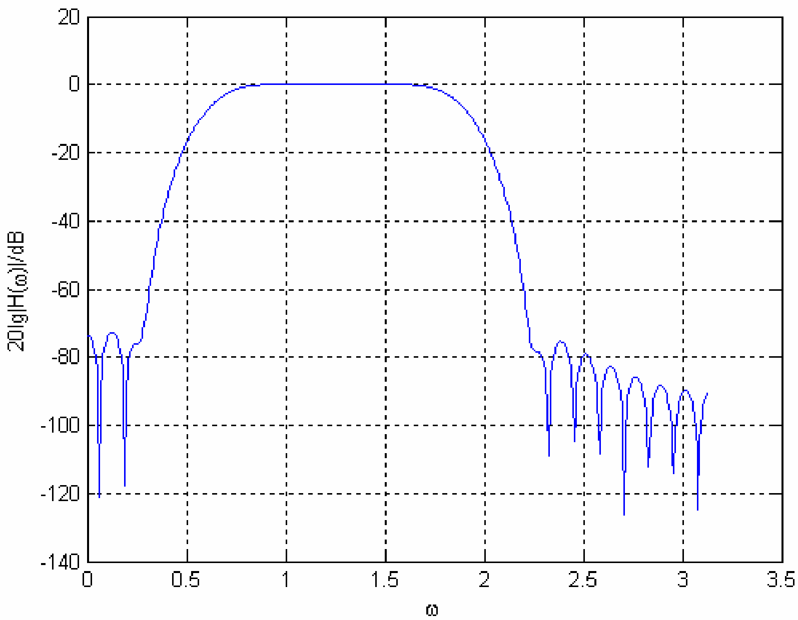
采用布拉克曼窗设计时（**N＝51**）

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\begin{cases}\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{pn}{25}\right)+0.08\cos\left(\frac{2pn}{25}\right)\right]\frac{2j}{p(n-25)}\sin\left[(n-25)\frac{p}{5}\right]\times\cos\left[0.4(n-25)p\right], & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\alpha=\frac{N-1}{2}=25$

其幅频响应曲线如图所示



此滤波器是90^0移相的线性相位带通滤波器（或称正交变换线性相位带通滤波器）。

5.9 如果一个线性相位带通滤波器的频率响应为

$$H_{BP}\left(e^{j\omega}\right)=H_{BP}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

(1) 试证明一个线性相位带阻滤波器可以表示成

$$H_{BR}\left(e^{j\omega}\right)=\left[1-H_{BP}(\omega)\right]e^{j\varphi(\omega)},\qquad 0\le\omega\le\pi$$

(2) 试用带通滤波器的单位冲激响应$h_{BP}(n)$表达带阻滤波器的单位冲激响应$h_{BR}(n)$

解：

(1) 证明

由于$H_{BP}\left(e^{j\omega}\right)=H_{BP}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，且是线性相位带通滤波器。则

$$H_{BP}(\omega)=\begin{cases}0, & 0\le\omega<\omega_0-\omega_c,\ \omega_0+\omega_c<\omega\le\pi\\ 1, & -\omega_c\le\omega-\omega_0\le\omega_c\end{cases}$$

且$\varphi(\omega)$也是线性相位，又因为

$$H_{BP}\left(e^{j\omega}\right)=H_{BR}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

因而

$$H_{BR}\left(e^{j\omega}\right)=1-H_{BP}(\omega)$$

$$H_{BR}(\omega)=\begin{cases}1, & 0\le\omega<\omega_0-\omega_c,\ \omega_0+\omega_c<\omega\le\pi\\ 0, & -\omega_c\le\omega-\omega_0\le\omega_c\end{cases}$$

所以带阻滤波器可以表示成

$$H_{BR}\left(e^{jw}\right)=\left[1-H_{BP}(w)\right]\cdot e^{j\varphi(w)}$$

(2) 由题意可得

$$h_{BP}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{BP}\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw$$

可推出

$$h_{BR}(n)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[1-H_{BP}(w)\right]e^{jj(w)}e^{jwn}dw$$
$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}e^{j\left[j(w)+wn\right]}dw-h_{BP}(n)$$

考虑到$\varphi(w)$的线性特性，有如下结论

(a) 当

$$\varphi(w)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)w$$

有

$$h_{BR}(n)=\frac{1}{2p}\bullet\frac{2\sin\left(j(p)+pn\right)}{\left[j(w)+n\right]}-h_{BP}(n)$$
$$=\frac{\sin\left\{\left(-\frac{N-1}{2}+n\right)p\right\}}{p\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}-h_{BP}(n)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin[(N-1)\pi/2]}{\pi[n-(N-1)/2]}-h_{BP}(n), & N=\text{偶数}\\ -h_{BP}(n), & N=\text{奇数}\end{cases}$$

(b) 当

$$\varphi(w)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)w+\frac{\pi}{2}$$

有

$$h_{BR}(n)=\begin{cases}\dfrac{j(-1)^{n+1}\sin[(N-1)\pi/2]}{\pi[n-(N-1)/2]}-h_{BP}(n), & N=\text{偶数}\\ -h_{BP}(n), & N=\text{奇数}\end{cases}$$

5.10 FIR 低通滤波器具有如下指标：阻带衰减 50 dB，通带边缘 1.75 kHz、过渡带宽 度 1.5kHz、取样频率 8kHz。

(1) 写出滤波器的差分方程

(2) 画出滤波器的幅度响应[(dB)对 Hz]的曲线，验证它满足指标

解：

(1) 根据题意，设计该滤波器截止频率

$$f_c = f_p + \frac{\Delta f}{2} = 1.75kHz + \frac{1.5}{2} = 2.5kHz$$

进而可得

$$\mathrm{w}_c = 2\pi\frac{\mathrm{f}_c}{\mathrm{f}_s} = 0.625\pi$$

可得

$$\mathrm{h_d}(\mathrm{n}) = \frac{\sin(0.625\pi(\mathrm{n}-\tau))}{\pi(\mathrm{n}-\tau)}$$

由阻带衰减 50dB，选择汉明窗；

$$\mathrm{N} = \left\lceil \frac{6.6\pi}{\Delta \mathrm{w}} \right\rceil = 19\text{，}\quad \tau = \frac{\mathrm{N}-1}{2} = 9$$

采用汉明窗设计时

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{p\,n}{9}\right)$$

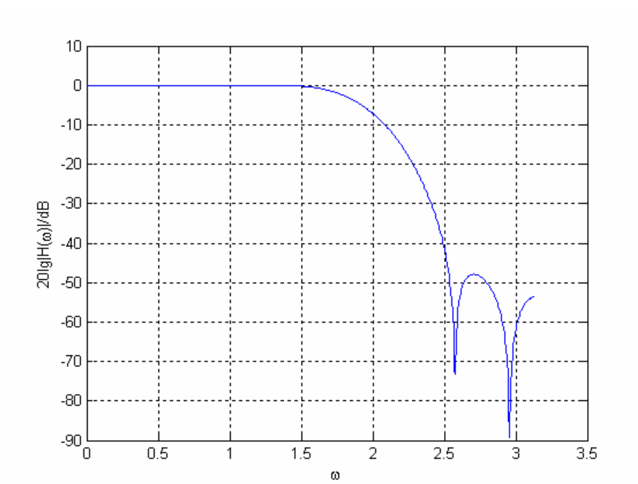
最后得到：$h(n) = \begin{cases} \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{p\,n}{9}\right)\right]\dfrac{\sin(0.625p\,(n-t))}{(n-t)p}, & 0 \le \mathrm{n} \le 18 \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases}$

可求得滤波器的差分方程：

$$\begin{aligned} y(n) &= h(0) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(18)x(n-18) \\ &= 0.625 + 0.2859x(n-1) + \cdots + (-0.0125)x(n-18) \end{aligned}$$

(2)

由（1）可画出幅频响应的曲线如下：



5.11 为了评测 10 Hz 取样系统中应变仪的动态质量，必须将大于 1Hz 的所有频率虑除，设计适当的滤波器来实现这一目标。

解：

根据题意分析可知，要设计一低通滤波器以虑除 1Hz 以外的频率分量。且 $f_s = 10Hz, \quad f_c = 1Hz$，我们假设 $\Delta f = 0.1Hz$，阻带衰减 50dB 来设计此低通滤波器。

所以,

$$w_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 0.2\pi, \quad \Delta w = 0.02\pi$$

可得

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.2\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

$$N = \left\lceil \frac{6.6\pi}{\Delta w} \right\rceil = 331 \text{（在此处选用了汉明窗）}, \ \tau = \frac{N-1}{2} = 165$$

汉明窗函数

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{pn}{165}\right)$$

可得此滤波器的冲激响应为：

$$h(n) = \begin{cases} \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{pn}{165}\right)\right]\frac{\sin[0.2p(n-t)]}{(n-t)p}, & 0 \le n \le 330 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当然，根据不同的阻带衰减和滤波器阶数的要求，可以应用其它窗函数以满足要求。

5.12 设计 FIR 滤波器满足下列指标的 FIR 带通滤波器，取样频率 16 kHz、中心频率 4 kHz、通带边缘在 3 kHz 和 5 kHz、过渡带宽度 900 Hz、阻带衰减 40 dB。求出并画出滤波器的脉冲响应。

解：

根据带通滤波器的设计思想，一个带通滤波器相当于两个截止频率不同低通滤波器相减，其中一个截止频率为 W_h，另一个为 W_L。则

$$w_h = 2\pi\frac{f_h}{f_s} = 0.625\pi, \quad w_L = 2\pi\frac{f_L}{f_s} = 0.375\pi$$

可得冲激响应为：

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.625\pi(n-\tau)) - \sin(0.375\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

再根据阻带衰减 40dB 选择窗函数，我们选择汉宁窗，此时有

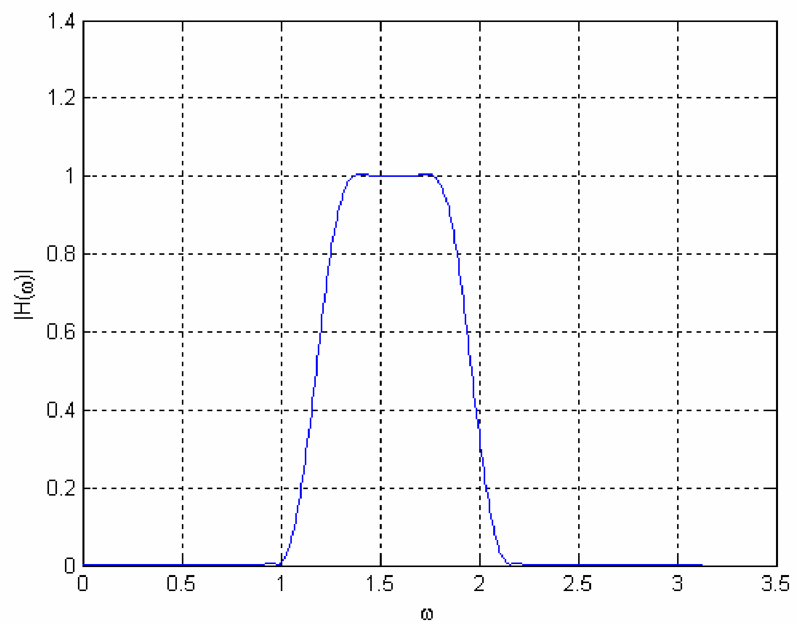
$$N=\left\lceil\frac{6.2\pi}{\Delta w}\right\rceil=55\ ,\quad \tau=\frac{N-1}{2}=27$$

可得

$$w(n)=0.5-0.5\cos\left(\frac{pn}{27}\right)$$

故 $$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[0.625p\,(n-27)\right]-\sin\left[0.375p\,(n-27)\right]}{p\,(n-27)}w(n)\ , & 0\le n\le 54\\ 0\ , & 其它\end{cases}$$

其幅频响应如下图：



5.13　24 kHz 取样系统里，要从传感器信号中提取 2 kHz 到 8 kHz 之间信号，所需滤波器至少要有 50 dB 的阻带衰减，过渡带宽度不大于 500 Hz。计算确定滤波器的脉冲响应。

解：

此题仍为设计带通滤波器，同上题一样：

$$w_h=2\pi\frac{f_h}{f_s}=\frac{2}{3}\pi\ ,\qquad w_L=2\pi\frac{f_L}{f_s}=\frac{1}{6}\pi$$

可得冲激响应为：

$$h_d(n)=\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi(n-\tau)\right)-\sin\left(\frac{1}{6}\pi(n-\tau)\right)}{\pi(n-\tau)}$$

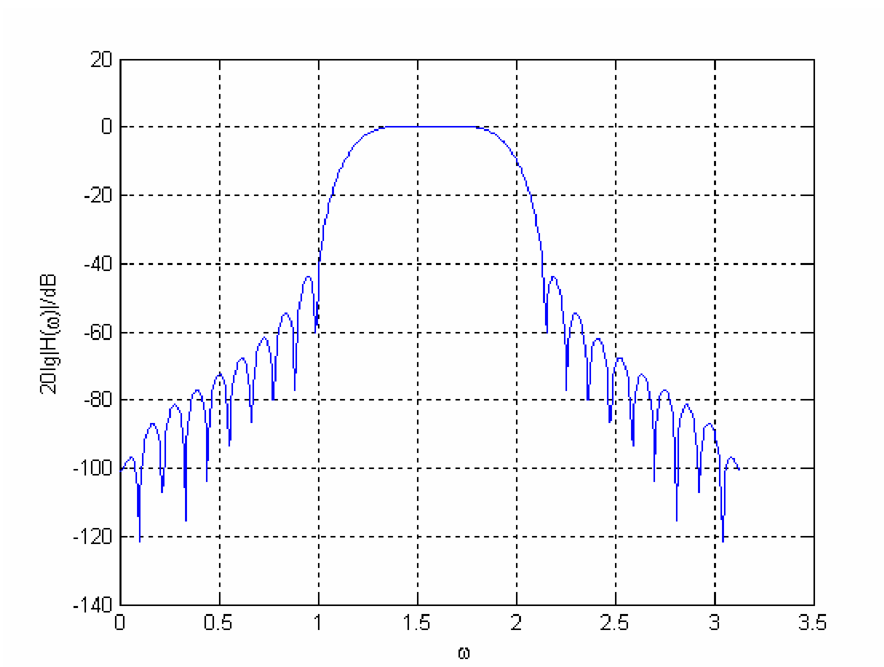
再根据阻带衰减 50dB 选择窗函数，我们选择汉明窗，此时有

$$N=\left\lceil\frac{6.6\pi}{\Delta w}\right\rceil=159\ ,\quad \tau=\frac{N-1}{2}=79$$

可得 $w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{pn}{79}\right)$

故 $h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[0.667p\,(n-79)\right]-\sin\left[0.167p\,(n-79)\right]}{p\,(n-79)}w(n)\ , & 0\le n\le 158\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$

其幅频响应如下图：



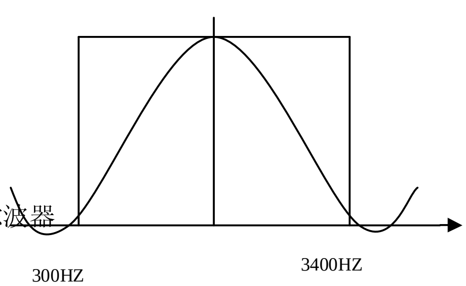
5.14 以 8 kHz 进行取样的声音信号，在编码传输前要虑除 300 到 3400 Hz 范围以外的分量，设计滤波器。

解：

由标准定义的声音指标要求可知，量化噪声比平均音量低 65dB 时，才能满足听觉要求，所以，此滤波器阻带衰减至少为 65dB。

又因为根据心理声学的研究，在 300Hz 附近过渡带宽的临界频率应是 100Hz，而在 3400Hz 附近的临界频率应该是 550Hz，由于考虑本题的复杂性，选择过渡带宽 $\Delta f=400Hz$

先设计相应的低通滤波器



可得到：

$$f_c=\frac{3400-300}{2}+\frac{400}{2}=1.75KHz$$

$$w_c=2\pi\frac{f_c}{f_s}=0.4375\pi$$

故

$$h_d(n)=\frac{\sin\left[0.4375p\,(n-t)\right]}{p\,(n-t)}$$

阻带衰减 65dB，选择 β＝6 的凯塞窗即可，

$$N=\left\lceil\frac{8.64\pi}{\Delta w}\right\rceil=87\ ,\ \tau=\frac{N-1}{2}=43$$

β＝**6** 时，$w(n)=\dfrac{I_0\left(6\sqrt{1-(1-\frac{n}{43})^2}\right)}{I_0(6)}$

其中 $I_0(x)$ 为第一类变形零阶贝赛尔函数。

又因为中心频率

$$f_0=1550HZ$$

所以，

$$w_0=2\pi\frac{f_0}{f_s}=0.3875\pi$$

转换为带通滤波器，将其冲激响应移位 $\cos(0.3875\pi n)$

得到：

$$h(n)=\begin{cases}h_d(n)\cdot\dfrac{I_0\left(6\sqrt{1-(1-\frac{n}{43})^2}\right)}{I_0(6)}\cdot\cos(0.3875\pi n), & 0\le n\le 86\\ o, & \text{其它}\end{cases}$$

注：在实际中，可根据具体需求来设计，在较高场合中可以选择非对称带通滤波器来实现，但相应的成本亦要增加。

5.15 如果取样频率为 24 kHz，则用低通滤波器和高通滤波器设计带通滤波器，通过 7 到 8 kHz 之间的频率，阻带衰减至少为 70 dB，过渡带宽度不能超过 500 Hz。

解：

根据题意先设计相应的低通滤波器

截止频率

$$f_c = f_p + \frac{\Delta f}{2} = \frac{(8000-7000)}{2} + \frac{500}{2} = 750HZ$$

进而可得

$$w_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 0.0625\pi$$

所以：

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.0625\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

又因为阻带衰减至少 70dB，所以选择 布莱克曼窗

$$N = \left[\frac{11\pi}{\Delta w}\right] = 287 \quad , \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 143$$

故：

$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

$$= 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{143}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi n}{143}\right)$$

又根据题设，滤波器频率中心应在 $f_0 = 7.5KHZ$，此带通滤波器分别由高通与低通滤波器叠加而成，所以

$$h(n) = h_d(n)w(n)\cos(nw_0)$$

可理解为在频率域上由一个在中心频率左边的高通滤波器和一个在中心频率右边的低通滤波器之和。所以

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[0.0625\pi(n-143)\right]}{\pi(n-143)} \cdot \left[0.42 - 0.5\cos\left(\dfrac{\pi n}{143}\right) + 0.08\cos\left(\dfrac{2\pi n}{143}\right)\right] \cdot \cos(0.625\pi n) & , 0 \le n \le 286 \\ 0 , & \text{其它} \end{cases}$$

5.16 已知一限带理想微分器，它的延时为 τ，对应的频率特性为

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega e^{-j\Omega\tau}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \text{其他}\Omega \end{cases}$$

(1) 利用冲激响应不变法，求有延时的理想数字微分器的单位抽样响应

$h_d(n) = Th_a(nT)$（设 $\Omega_c = \pi/T$）

(2) 由 $h_d(n)$ 求相应的频率特性 $H_d(e^{jw})$，并画出其示意图；这个系统的延时是多少个抽样间隔。

(3) 如果用点数为 N 的矩形窗对 $h_d(n)$截断，得到因果性 FIR 逼近的数字微分器 h（n），则在

(a) N 为偶数

(b) N 为奇数

这两种情况下应如何选择 τ，画出每种情况下 h(n) 的示意图。

解：

5.17 请选择合适的窗函数及 N 来设计一个线性相位低通滤波器

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega a}, & 0\le\omega\le\omega_c\\ 0, & \omega_c\le\omega\le\pi\end{cases}$$

要求其最小阻带衰减为－45dB，过渡带宽为 $\frac{8}{51}\pi$。

(1) 求出 h(n) 并画出 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 曲线（设 $\omega_c=0.5\pi$ ）。

(2) 保留原有轨迹，画出满足所给条件的其他几种窗函数设计的 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 曲线。

解：

（1）因为题目要求的低通滤波器的最小阻带衰减为－45dB，由表 5.2 可知汉明窗满足条件。又要求 $\frac{6.6\pi}{N}<\frac{8\pi}{51}$，选 N＝43，即小于所需的过渡带宽，满足要求。则有

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

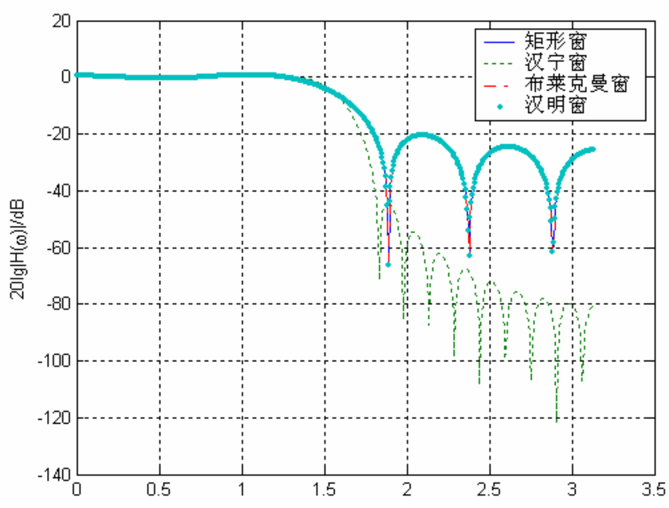
由根据题目所给低通滤波器的表达式求得

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c}e^{-jw\alpha}e^{jnw}dw=\frac{w_c}{\pi}\bullet\frac{\sin[w_c n]}{w_c n}$$

由此可得

$$\begin{aligned}h(n)&=h_d(n)w(n)\\&=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{\pi n}{21}\right)\right]\bullet\frac{\sin[0.5\pi(n-21)]}{(n-21)\pi}, & 0\le n\le 42\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

（2）用汉明窗其它窗函数设计的结果如下图所示：



5.18 试证明用窗函数法设计 FIR 滤波器时，对于所求的频率响应，矩形窗能提供一种最小均方误差意义下的最好的逼近。

证明：

在用窗函数法设计滤波器时，用$H(e^{jw})$ 近似 $H_d(e^{jw})$，必然存在着误差，这一误差是由于对$h_d(n)$截短所造成的。

我们令

$$|E(w)| = |H_d(e^{jw})| - |H(e^{jw})|$$

及

$$E_M^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E(w)|^2 dw \qquad (1)$$

那么E_M^2 表示将 $n<|M|$ 后的$h_d(n)$舍去后带来的总误差。此外，$H_d(e^{jw})$可表示为

$$H_d(e^{jw}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nw) \qquad (2)$$

式中，$a_0 = 2h_d(0)$, $a_n = h_d(n) + h_d(-n)$, $b_n = j[h_d(-n) - h_d(n)]$。如果$H(e^{jw})$是由对$h_d(n)$截短所产生的，假定

$$H(e^{jw}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} A_n \cos(nw) + \sum_{n=1}^{M} B_n \sin(nw) \qquad (3)$$

并且当$n<|M|$时，$A_n = B_n = 0$。那么把（2）及（3）两式带入（1）式，利用三角函数的正交性，有：

$$E_M^2 = \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_0 - A_n)^2 + \sum_{n=1}^{M}(b_n - B_n)^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

由于上式中每一项都是非负的，所以，只有当$A_0 = a_0, A_n = a_n, B_n = b_n, n = 1,2,\cdots,M$时，$E_M^2$ 才最小。当我们利用$H(e^{jw})$来近似$H_d(e^{jw})$时，欲使近似误差为最小，$H(e^{jw})$的单位抽样响应必须是$H_d(e^{jw})$的傅立叶系数。这也说明，有限项傅立叶级数是在最小平方意义上对原信号的最佳逼近，其逼近误差为：

$$E_M^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d^2(n)$$

自然，M 越大，误差E_M^2 越小（因为$h_d(n)$值愈小）。

但如果我们把截短后的$h_d(n)$再乘以非矩形窗$w(n)$后，$H(e^{jw})$已经不是在最小平方意

义上对$H_d\left(e^{j\omega}\right)$的最佳逼近了。故得证。

5.19 要设计一个理想线性相位带通滤波器

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_0-\omega_c\le\omega\le\omega_0+\omega_c \\ 0, & 0\le\omega\le\omega_0-\omega_c,\quad \omega_0+\omega_c<\omega\le\pi \end{cases}$$

若需阻带衰减大于(1) 50dB；(2) 60dB。

试用窗函数法设计这两个滤波器（取$\omega_0=0.5\pi$，$\omega_C=0.1\pi$）。

解：

（**1**）阻带衰减大于 **50dB**，选择汉明窗可满足要求；
根据题设，过渡带宽至少必须满足：

$$\frac{6.6\pi}{N}<0.1\pi,\quad 即N>66$$

我们取 N＝67（当然，还可选取更大的 N 值以提高精度，但运算量也会响应加大）。
并且

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{2}{\pi(n-\alpha)}\sin\left[(n-\alpha)\omega_c\right]\cos\left[(n-\alpha)\omega_0\right]$$

其中 $\alpha=\frac{N-1}{2}=33$

可得：

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{\pi n}{33}\right)\right]\bullet\frac{2}{\pi(n-33)}\sin[0.5\pi(n-33)]\bullet\cos[0.5\pi(n-33)] \\ \qquad\qquad 0\le n\le 66 \\ 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}$$

(2) 阻带衰减 60dB 选择凯塞窗（β＝5.658）即可满足要求；
根据题设，过渡带宽至少必须满足：

$$\frac{7.24\pi}{N}<0.1\pi,\quad 即N>72.4,$$

选取 N=73，并由（1）可得到$h_d(n)$

所以可得：

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{I_0\left(5.658\sqrt{1-(1-\dfrac{n}{36})^2}\right)}{I_0(5.658)}\bullet\dfrac{2}{\pi(n-33)}\sin\left[0.5\pi(n-33)\right]\bullet\cos\left(0.5\pi(n-33)\right), & 0\le n\le 72\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5.20 知滤波器单位脉冲响应为

$$\boldsymbol{h(n)=\begin{cases}0.2^n & 0\le n\le 5\\ 0 & others\end{cases}}$$

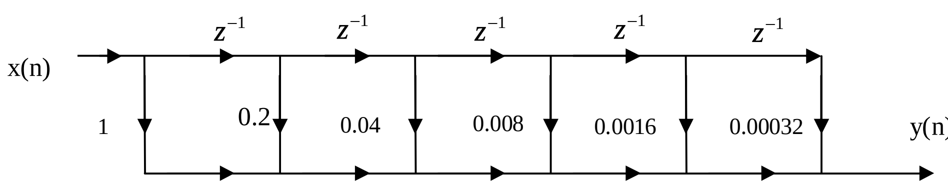
求横截型结构。

解：

根据题目所给的差分表达式，可得

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$$
$$=x(n)+0.2x(n-1)+0.04x(n-2)+0.008x(n-3)+0.2^4x(n-4)+0.2^5x(n-5)$$

所以横截型结构如下：



5.21 用横截型和级联型网络实现下面传递函数。

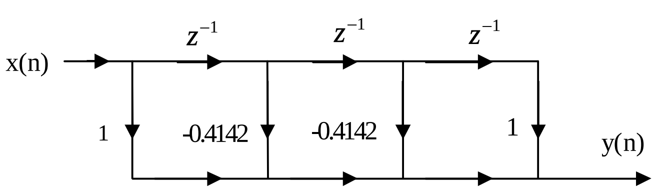
$$\boldsymbol{H(z)=(1-1.4142z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1})}$$

解：

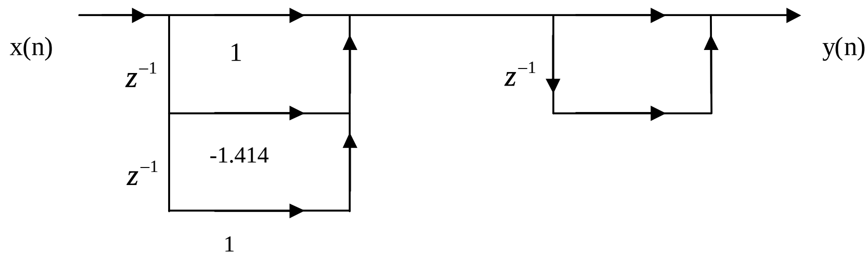
（1）根据题意：

$$H(z)=(1-1.4142z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1})$$
$$=1-0.4142z^{-1}-0.4142z^{-2}+z^{-3}$$

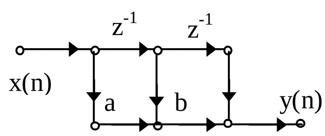
可画出其横截型结构如下：



（2）由 H(z)的的表达式，直接画出级联型结构如下：

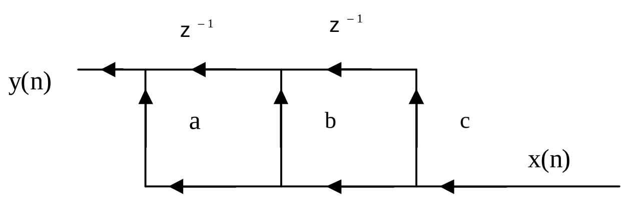


5.22 试求下图所示网络的转置网络，且证明原网络与转置网络的传递函数相同。



解：

（1）



（2）证明：

由（1）可写出转置后的转移函数 $H^{'}(z)=cz^{-1}+bz^{-2}+a$

显然 $H^{'}(z)=H(z)$

5.23 试问用什么结构可以实现以下单位脉冲响应：

$$h(n)=d(n)-3d(n-3)+5d(n-7)$$

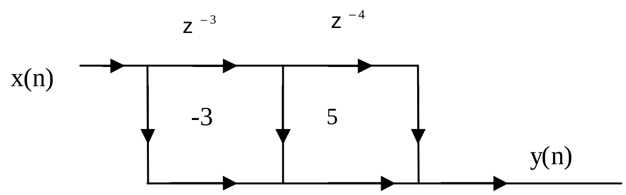
解：由题设，

$$h(n)=\delta(n)-3\delta(n-3)+5\delta(n-7)$$

可知

$$h(0)=1,\quad h(3)=-3,\quad h(7)=5,\ \text{其它为零。}$$

所以可由横截型结构实现如下：



5.24 FIR 数字滤波器的 h(n) 是圆周偶对称的，即

N = 6　h(0) = h(5) = 1.5

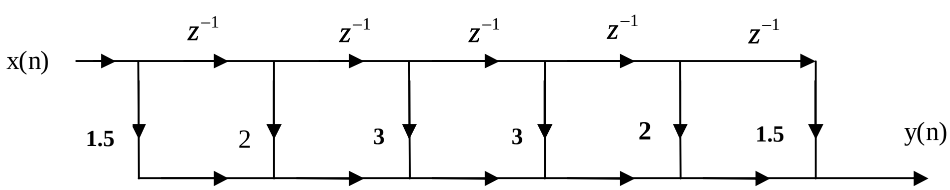
h(1) = h(4) = 2

h(2) = h(3) = 3

求滤波器的卷积结构。

解：

卷积结构如下



5.25 FIR 数字滤波器的 h(n) 是圆周奇对称的，即

N = 7　h(0) = -h(6) = 3

h(1) = -h(5) = -2

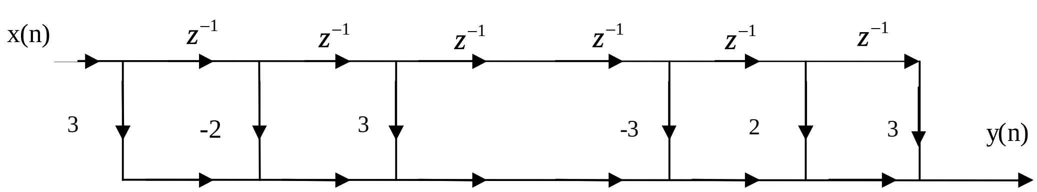
h(2) = -h(4) = 3

h(3) = 0

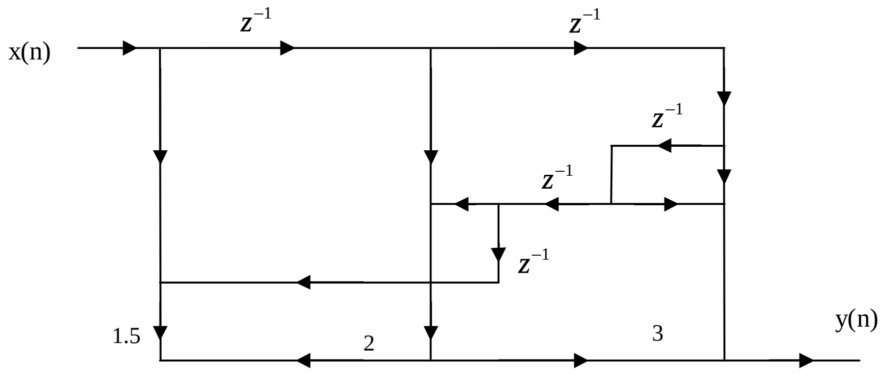
求滤波器的卷积结构,试问这两题结构能否少用乘法器?

解：

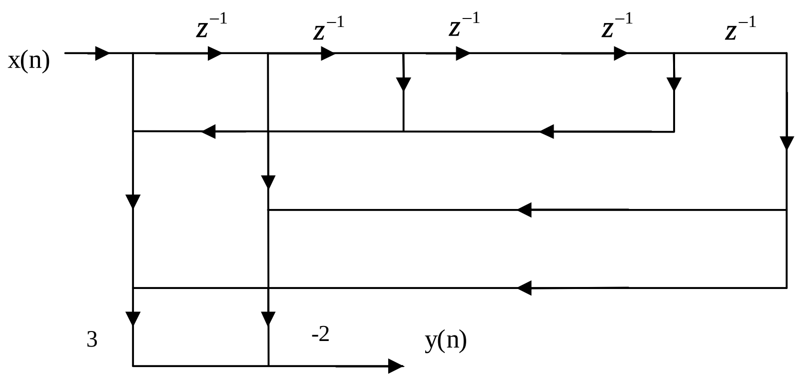
卷积结构如下：



经分析，由于 h(n)是圆周对称，可以利用此对称性来减少乘法器，改进的卷积结构如下：



同理：



5.26 用频率取样结构实现传递函数

$$H(z)=\frac{5-2z^{-3}-3z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

取样点 N = 6，修正半径 r = 0.9。

解：

因为 N＝6，所以根据公式可得

$$H(z)=\frac{1}{6}\left(1-r^{6}z^{-6}\right)\left[H_0(z)+H_3(z)+\sum_{k=1}^{2}H_k(z)\right]$$

$$H(z)=\frac{\left(5+3z^{-3}\right)\left(1-z^{-3}\right)}{1-z^{-1}}=\left(5+3z^{-3}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)$$

故：

$$H(k)=H(z)\Big|_{z=\frac{2\pi k}{N}}=\left(5+3e^{j\pi k}\right)\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\right)$$

因而

$$H(0)=24,\quad H(1)=2-2\sqrt{3}j,\quad H(2)=0$$

$$H(3)=2,\quad H(4)=0,\quad H(5)=2+2\sqrt{3}j$$

则

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-r\cdot z^{-1}}=\frac{24}{1-0.9z^{-1}}$$
$$H3(z)=\frac{H(3)}{1-r\cdot z^{-1}}=\frac{2}{1+0.9z^{-1}}$$

然后求$H_k(z)$。

K＝1 时

$$H_1(z)=\frac{\beta_{01}+\beta_{11}z^{-1}}{1-2z^{-1}r\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)+r^2z^{-2}}$$

$$\beta_{01}=2\mathrm{Re}[H(1)]=2\mathrm{Re}[2-2\sqrt{3}j]=4$$

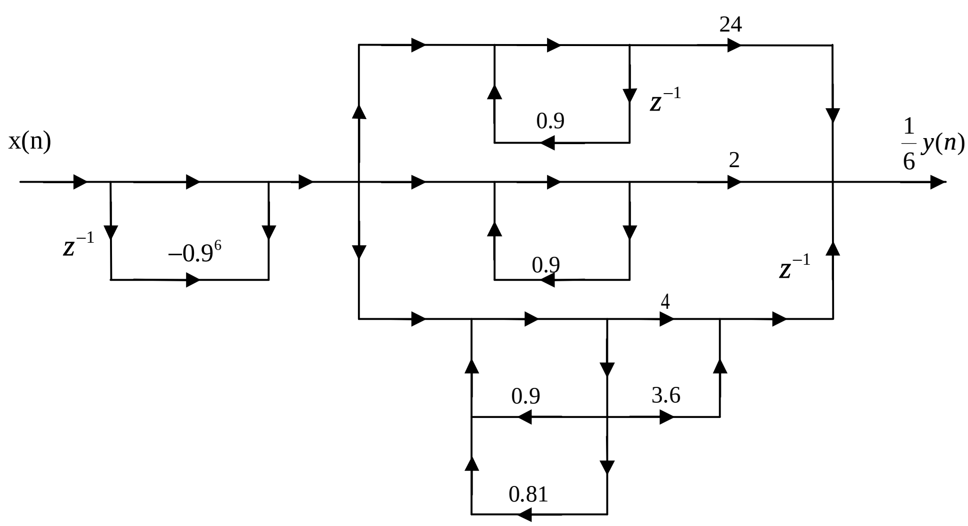
$$\beta_{11}=(-2)\cdot(0.9)\cdot\mathrm{Re}[H(1)w_6^1]=3.6$$

$$H_1(z)=\frac{4+3.6z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

K＝2 时

$$\beta_{02}=\beta_{12}=0$$
$$H_z(z)=0$$

结构如下图所示：



5.27 FIR 数字滤波器 N = 5

$$h(n) = d(n) - d(n-1) + d(n-4)$$

计算一个 N = 5 的频率取样结构，修正半径 r = 0.9。

解：

因为 N＝5，$h(n) = d(n) - d(n-1) + d(n-4)$

可得

$$H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-4}$$

由上式可得

$$H(k) = H(z)\Big|_{z=\frac{2\pi k}{N}} = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + e^{-j\frac{8\pi}{5}k}$$

所以

$$H(1) = 1 + 2j\sin\left(\frac{3}{5}\pi\right), \qquad H(2) = 1 - 2j\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$H_k(z) = \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2 z^{-2}}, \qquad k = 1,\quad 2$$

其中 $\beta_{0k} = 2\mathrm{Re}[H(k)]$

$$\beta_{1k} = (-2)\cdot r\cdot \mathrm{Re}\left[H(1)w_N^k\right]$$

所以，当 k＝1 时，

$$\beta_{01} = 2\mathrm{Re}[H(1)] = 2$$

$$\beta_{11} = (-2)\cdot 0.9\cdot \mathrm{Re}\left[H(1)w_5^1\right] = -1.8$$

可得

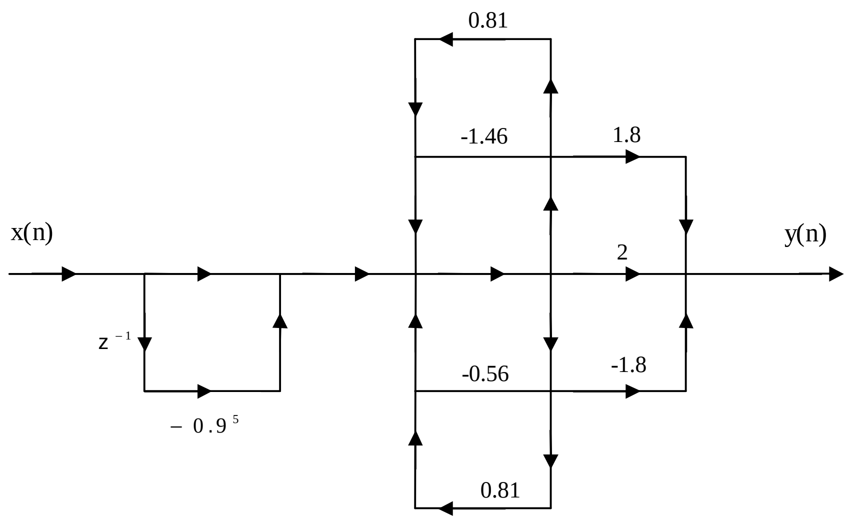
$$H_1(z) = \frac{2 - 1.8z^{-1}}{1 - 1.8\cdot z^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 0.81z^{-2}} = \frac{2 - 1.8z^{-1}}{1 - 0.56z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

同理

$$\beta_{11} = -1.8, \qquad \beta_{12} = -1.8,$$

$$H_1(z) = \frac{2 - 1.8z^{-1}}{1 - 1.8\cdot z^{-1}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 0.81z^{-2}} = \frac{2 - 1.8z^{-1}}{1 - 1.46z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

结构如下图：



第六章 习题

6.1 数的表示

(1) 将下列十进制数分别用 8 位（其中数据 7 位符号 1 位）的原码、补码、反码定点表示。

$x_1 = 0.4375$， $x_2 = -0.4375$， $x_3 = 0.8515625$， $x_4 = -0.8515625$

(2) 若以下二进制数分别是原码、补码、反码时，请算出其所表示的十进制数

$x_1 = 0_\vartriangle 1001$， $x_2 = 0_\vartriangle 1101$， $x_3 = 1_\vartriangle 1000$， $x_4 = 1_\vartriangle 1011$

解：

（1）

	原码	补码	反码
$x_1 = 0.4375$	$0_\vartriangle 0111000$	$0_\vartriangle 0111000$	$0_\vartriangle 0111000$
$x_2 = -0.4375$	$1_\vartriangle 0111000$	$1_\vartriangle 1001000$	$1_\vartriangle 1000111$
$x_3 = 0.8515625$	$0_\vartriangle 1101101$	$0_\vartriangle 1101101$	$0_\vartriangle 1101101$
$x_4 = -0.8515625$	$1_\vartriangle 0010011$	$1_\vartriangle 0010010$	$1_\vartriangle 0010010$

（2）

$x_1 = 0_\vartriangle 1001$	0.5625	0.5625	0.5625
$x_2 = 0_\vartriangle 1101$	0.8125	0.8125	0.8125
$x_3 = 1_\vartriangle 1000$	-0.5	-0.5	-0.5
$x_4 = 1_\vartriangle 1011$	-0.6875	-0.6875	-0.6875

6.2 负分数的补码可表示为： $(x)_2 = 1_\vartriangle b_1 b_2 \ldots\ldots b_L$

(1) 证明

$$(x)_{10} = -1 + \sum_{n=1}^{L} b_n 2^{-n}$$

(2) 证明负分数的补码代表的十进制数 $(x)_{10}$ 的动态范围为：-1 到（$1-2^{-L}$）。

解：

(1) 由补码定义

$$[x]_补 = \begin{cases} |x| & 0 \le x < 1 \\ 2-|x| & -1 < x < 0 \end{cases}$$

又由题意，x<0

所以

$$[x]_补 = 2 - |x| = 2 + x$$

因此

$$\begin{aligned} x &= [x]_补 - 2 \\ &= 1_\vartriangle b_1 b_2 \cdots b_L - 2 \\ &= -1 + 0_\vartriangle b_1 b_2 \cdots b_L \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{L} b_n 2^{-n} \end{aligned}$$

(2) 由（1）知，

$$x = -1 + \sum_{n=1}^{L} b_n 2^{-n}$$

当 $b_0=b_1=\ldots..=b_n=0$ 时， x 有最小值 -1。
当 $b_0=b_1=\ldots..=b_n=1$ 时， x 有最大值 -2^{-L}。

在补码表示中，“零”的表示是唯一的，故（L＋1）位字长可以表示 2^{L+1} 个不同的数，最小为 -1，最大为 -2^{-L}。

6.3

(1) 十进制数 143 和 –143，应用 2 的补 16 位（包括符号位）定点数表示。

(2) 16 位（包括符号位） 2 补定点数所能代表的十进制数的范围是多少？

解：

(1) 143:0000000001001111Δ

-143:1111111110110001Δ

(2) $[-2^{-15}, 2^{15}-1]$

6.4 用 32 位浮点制表示数，其中 16 位存储指数，24 位存储尾数，尾数和指数的符号位分别用 1 位表示。若尾数和指数分别用原码、补码、反码表示，它们能代表的十进制数的范围是多少？

解：

采用规范化尾数

原码： $2^{-(2^{16}-1)} \cdot 2^{-1} \le |X|_{10} \le 2^{(2^{16}-1)}(1-2^{-24})$

补码： $2^{-2^{16}} \cdot 2^{-1} \le |X|_{10} \le 2^{(2^{16}-1)}(1-2^{-24})$

反码： $2^{-(2^{16}-1)} \cdot 2^{-1} \le |X|_{10} \le 2^{(2^{16}-1)}(1-2^{-24})$

6.5 一个十进制数 x ，若 |x|<1 经下列处理

$$x_0 = \begin{cases} |x| & x \geq 1 \\ 2 - |x| & x < 0 \end{cases}$$

并用 （L+1）位（其中 L 位表数据）原码表 x_0，就可得到 x 的补码表示，补码加法按如下步骤进行：

(a) 所有的数都当作 （L+1） 位不带符号位的二进制数看待。

(b) 加法只是简单的二进制加法。

(c) 符号位的进位丢掉，即若和值大于 2，丢掉进行。因此它是按模 2 加法作加法的。

(1) 试利用上面的方法，写出两个数 x_1 和 x_2 作补码加法的完整表示式，这里 $|x_1|<1$, $|x_2|<1$。研究所有可能的情况，即 x_1 和 x_2 各都可正可负，$|x_1|$ 可比 $|x_2|$ 大，也可比 $|x_2|$ 小。

(2) 试证明 x_1 和 x_2 作补码加法，等价于函数 $f[x_1 + x_2]$。f[ ] 如图 P6.1 所示。

(3) 假设 x1 = 5/8，x2 = 3/4 和 x3 = -1/2，求各个数的补码表示，按 （x1+x2）+x3 的顺序将它们的补码数加起来。注意加法（x1+x2）中出现溢出，但最后结果仍是正确的。试证明，一般说来三个或三个以上的补码数累加求和过程中，可能多次出现益处，但如果正

确和值的绝对值小于 1，最后的结果就是对的。

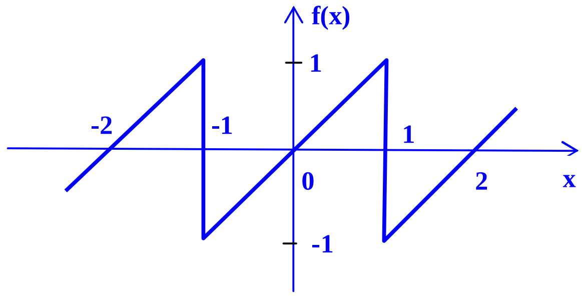


图 P6.1

解：

(1)

x_1	≥ 0	≥ 0		<0		<0
x_2	≥ 0	<0		≥ 0		<0
比较 $\|x_1\|,\|x_2\|$		$\|x_1\|<\|x_2\|$	$\|x_1\|>\|x_2\|$	$\|x_1\|<\|x_2\|$	$\|x_1\|>\|x_2\|$	
x_1，x_2补码和	x_1+x_2	$2-\|x_2\|+x_1$	$x_2-\|x_1\|$	$x_2-\|x_1\|$	$2-\|x_2\|+x_1$	$2-\|x_1\|-\|x_2\|$

(2) 考虑两种情况：

(a) $x_1>0$，$x_2>0$ 且 $x_1+x_2>1$，又有 $|x_1||x_2|<1$，因此，$x_1+x_2<2$。
补码和为 x_1+x_2，故符号位为 1，表示相反的符号。

(b) $x_1<0$，$x_2<0$，$|x_1|+|x_2|<2$，由上可知补码和为 $4-|x_1|-|x_2|$。
抛去符号位前进位后为 $2-|x_1|-|x_2|$，因此它是大于 0 小于 1 的数，符号位为 0，也表示和为原来相反的符号。

(3) 根据题意，x_1 和 x_2，没有 $|x_1||x_2|<1$ 的限制，可以把上题中关于数 x 补码的定义如下：$x = x_1 \bmod 2$，即取模 2 加。

设两数 x_1、x_2，其补码为 $x_1 = x_1 \bmod 2$，$x_2 = x_2 \bmod 2$，其补码和为 $x_1 \bmod 2 + x_2 \bmod 2$，此数超过 2 时要除去符号前的进位，因此，补码和为 $(x_1 + x_2) \bmod 2$，此补码所表示的数限制在 $|x|<1$ 的情况如图所示。

6.6

(1) 对问题 1 (a) 中的定点数用 4 位数据截尾和舍入表示。

(2) 计算它们相应的截尾和舍入误差。

解：

6.7 设输入序列 x(n) 通过一量化器 Q[.] 的输入输出关系如图 P6.2 所示，设量化器输出 $\hat{x}(n)$ 的形式为 $\hat{x}(n)=x(n)+e(n)$

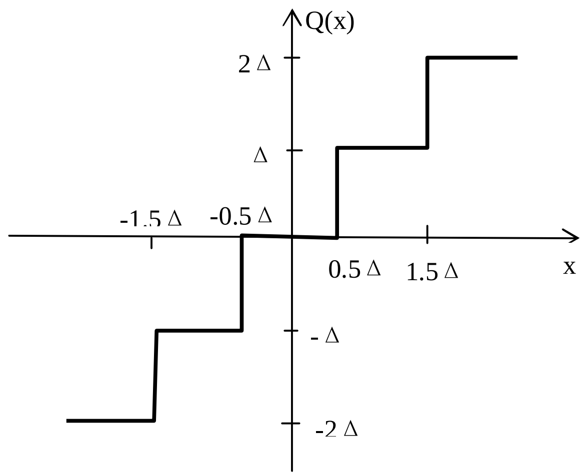


图 P6.2

式中 e(n) 是一平稳随机过程，它在 $\left(-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right)$ 之间有均匀分布的一阶概率密度，它的各取样间互不相关，它与 x(n) 也独立无关。

令 x(n) 是均值为零，方差为 σ_x^2 的平稳白色噪声过程。

（1）求 e(n) 的平均值、方差和自相关序列。

（2）求信号量化噪声比 σ_x^2/σ_e^2

（3）把量化的信号 $\hat{x}(n)$，用一个单位取样响应 $h(n)=\frac{1}{2}\left[a^n+(-a)^n\right]u(n)$ 的数字滤波器滤波，试确定输出端上量化噪声产生的噪声方差，和输出端的信噪比。

解：

(1) 因为 e(n) 在 （-Δ/2，Δ/2）上均匀分布，所以概率密度为：

$$p_e=\frac{1}{\Delta}$$

平均值为

$$m_e=E[e]=\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} ep_e de-\frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} ede=0$$

方差为

$$s_e{}^2 = E[e^2] = \int_{-\triangle/2}^{\triangle/2} e^2 p_e \mathrm{d}e - \frac{1}{\triangle}\int_{-\triangle/2}^{\triangle/2} e^2 \mathrm{d}e = \frac{\triangle^2}{12}$$

n≠0 时，自相关序列为

$$j\,(n) = E[e(m)e(m+n)] = E[e(m)e(m+n)] = m_e{}^2 = 0$$

所以

$$j\,(n) = s_e{}^2 d\,(n)$$

(2)

$$\frac{s_x{}^2}{s_e{}^2} = \frac{s_x{}^2}{\triangle^2/12} = 12\frac{s_x{}^2}{\triangle^2}$$

(3) 设输出噪声为 f(n)，则其方差为：

$$s_f{}^2 = s_c{}^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$$

而

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[a^n + (-a)^n]^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{\infty}[2a^{2i}]^2 = \frac{1}{1-a^4}$$

所以

$$s_f{}^2 = s_c{}^2 \cdot \frac{1}{1-a^4} = \frac{\triangle^2}{12}\cdot\frac{1}{1-a^4}$$

设输出信号为 w(n)，则

$$w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

因为 $m_x = 0$，所以

$$m_w = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = 0$$

而，

$$s_w{}^2 = s_x{}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h^2(k)| = s_x{}^2 \frac{1}{1-a^4}$$

所以

$$\frac{s_w{}^2}{s_f{}^2} = \frac{s_x{}^2}{s_e{}^2} = 12\frac{s_x{}^2}{\Delta^2}$$

6.8 一输入序列 {x(k)}，对于一切 k|x(k)| < 1，被编码为 4 位（其中一位为符号位）补码。此已量化序列经过下列传输函数表示的数字滤波器

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{1 - 0.4z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.18z^{-2}}}$$

（1）求输入量化产生的稳态输出噪声功率。

（2）若在 （a）间中需要减少输出功率 50%，求必要的量化位数。

（3）若量化用 16 位，计算输出噪声功率。

解：

(1)

$$s_f^{\ 2} = s_e^{\ 2} \cdot \frac{1}{2p\,j}\oint_c z^{-1}H(z)H(z^{-1})\mathrm{d}z = s_e^{\ 2} I$$

被积函数

$$A(z) = z^{-1}H(z)H(z^{-1}) = z^{-1} \cdot \frac{1-0.4z^{-1}}{(1-0.3z^{-1})(1-0.6z^{-1})} \cdot \frac{1-0.4}{(1-0.3z)(1-0.6z^{-1})}$$

单位圆内两个极点

$$z_1 = 0.3, \qquad z_2 = 0.6$$

$$I = \mathrm{Re\,s}[A(z), z = 0.3] + \mathrm{Re\,s}[A(z), z = 0.6] \approx 3$$

$$s_e^{\ 2} = \frac{1}{3}\times 2^{-2(L+1)} = \frac{1}{3}\times 2^{-8}$$

因此，

$$s_f^{\ 2} = \frac{1}{3}\times 2^{-8}\times 3 = 2^{-8}$$

(2)

(3) $s_e^{\ 2} = \frac{1}{3}\times 2^{-2(L+1)} = \frac{1}{3}\times 2^{-32} \qquad s_f^{\ 2} = \frac{1}{3}\times 2^{-32}\times 3 = 2^{-32}$

6.9 研究下列传输函数

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{1 - 0.4z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.18z^{-2}}}$$

（1）画出 H(z) 的幅频特性。

（2）若系数舍入成 4 位的定点表示，计算传输函数系数量化后的极点和它的幅频特性。

解：

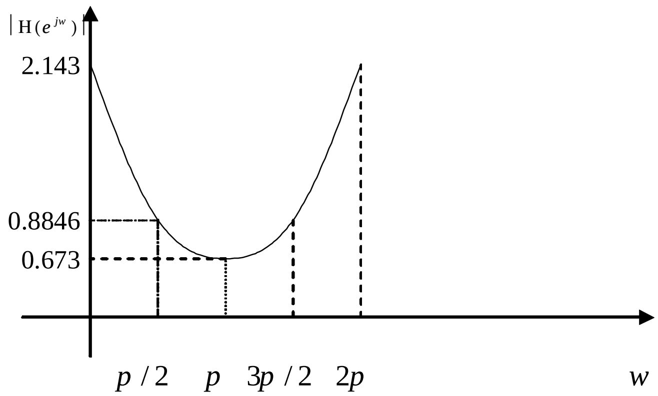
(1)

$$H(e^{jw}) = \frac{1-0.4e^{-jw}}{1-0.9e^{-jw}+0.18e^{-2jw}} = \frac{e^{jw}(e^{jw}-0.4)}{(e^{jw}-0.3)(e^{jw}-0.6)}$$

$w=0$时，$|H(e^{jw})|=2.143$;

$w=p/2$时，$|H(e^{jw})|=$**0.8846**;

$w=p$时，$|H(e^{jw})|=0.673$



6.10 一个二阶 IIR 网络的传输函数

$$\boldsymbol{H(z)=\frac{0.4-0.34z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})(1-0.7z^{-1})}}$$

用 6 位字长的定点制运算，尾数作舍入处理。

（1）分别计算直接型、级联型、和并联型结构的输出舍入噪声。

（2）比较以上不同结构，哪一种运算精度高，哪一种最差？

解：

(1)

直接型 $H(z)=\dfrac{0.4-0.34z^{-1}}{1-1.6z^{-1}+0.63z^{-2}}$

级联型 $H(z)=(0.4-0.34z^{-1})\cdot\dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}\cdot\dfrac{1}{1-0.7z^{-1}}$

并联型 $H(z)=\dfrac{0.1}{1-0.9z^{-1}}\cdot\dfrac{0.3}{1-0.7z^{-1}}$

直接型		级联型						并联型
I 型	II 型	abc	acb	bac	bca	cab	cba	
$15.15q^2$	$0.23q^2$	$11.53q^2$	$11.80q^2$	$0.52q^2$	$0.21q^2$	$1.35q^2$	$0.21q^2$	$1.20q^2$

注： a） $q=2^{-6}$

b）仅用一阶系统级联，有 6 种级联结构。

记 $a=0.4-0.34z^{-1}$ $\quad b=\dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$ $\quad c=\dfrac{1}{1-0.7z^{-1}}$

6 种结构可记为：abc、acb、bac、bca、cab、cba。

(2) 可见，直接 I 型精度最差，并联型精度较高，级联型根据不同级联顺序，精度有所不同，本题中 cba 级联结构精度最高。

6.11 一个数字滤波器其传输函数如下

$$\boldsymbol{H(z)=\frac{z^2+2z+1}{z^2+b_1z+b_2}} \qquad \text{其中}\ \boldsymbol{b_1=-r\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{b_2=r^2}$$

（1）用典型的级联型结构实现，试求灵敏度 $S_{b1}(z)$ 和 $S_{b2}(z)$。

（2）假设它是用定点运算实现，而且系数采用舍入量化方式。试计算量化台阶为 0.05，0.7<< r <<0.95 时的统计字长 L(w)，假定 $\triangle M_{max}(w)=0.02zx_1=2$。

解：

(1)

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$$

两个极点分别为：

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}r+j\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}r-j\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

极点 z_1 灵敏度

$$\frac{\partial z_1}{\partial b_1}=\frac{z_1}{z_1-z_2}=\frac{1}{2}(1-j)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial b_2}=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{1}{j\sqrt{2}r}$$

极点 z_2 灵敏度

$$\frac{\partial z_2}{\partial b_1}=\frac{z_2}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}(1+j)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial b_2}=\frac{1}{z_2-z_1}=-\frac{1}{j\sqrt{2}r}$$

系统灵敏度为：

$$\frac{\partial H(z)}{\partial b_1}=\frac{(1+2z^{-1}+z^{-2})z^{-1}}{(1-r\sqrt{2}z^{-1}+r^2z^{-2})^2}$$

$$\frac{\partial H(z)}{\partial b_2}=\frac{(1+2z^{-1}+z^{-2})z^{-2}}{(1-r\sqrt{2}z^{-1}+r^2z^{-2})^2}$$

6.12 设有一数字均衡器的传输函数为

$$\boldsymbol{H(z)=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{0i}z^2+a_{1i}z+1}{z^2+a_{1i}z+a_{0i}}}$$

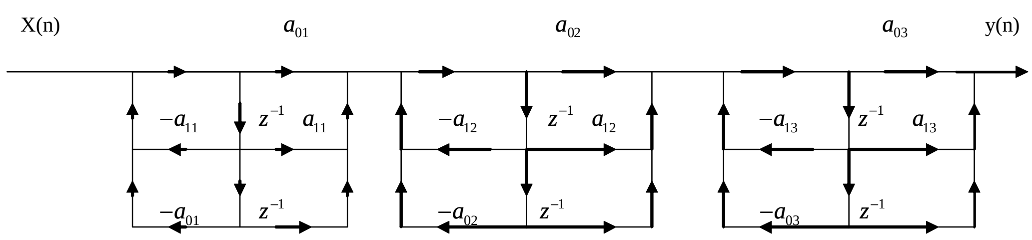
其中 a_{0i} 和 a_{1i} 给在下表中

i	a_{0i}	a_{1i}
1	0.973061	-1.323711
2	0.979157	-1.316309
3	0.981551	-1.345605

（1）用三个典型的级联节实现。

（2）确定最佳信噪比时的衰减系数，假定节的顺序按照上表中的网络系数安排的。

解：



6.13 研究一个如下形式的一阶系统

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

设所有变量和系数都表示成原码形式，乘法的结果作截尾，因此实际的差分方程是

$$\hat{y}(n) = Q[a\hat{y}(n-1)] + x(n)$$

式中 Q[ ] 表示原码截尾。

试研究对于所有的 n，能否存在形式为 $|\hat{y}(n)| = |\hat{y}(n-1)|$ 的零输入极限环。证明若理想系统是稳定的，则不存在零输入极限环，该结果对补码截尾是否正确？

解：

|a|≥1 时，存在零输入极限环；

|a|<1 时，不存在零输入极限环；

若系统稳定，则 |a|<1，不存在零输入极限环；

对于补码截尾，若系统稳定，则 |a|<1。

当 0<a<1 时，可能出现全是负数的零输入极限环；

当 -1<a<0 时，不存在极限环。

6.14 研究图 P6.14 的二阶系统

$$y(n) = f[x(n) + ay(n-1) + by(n-2)]$$

其中支路传输比 f[ ]，该函数表示补码加法。

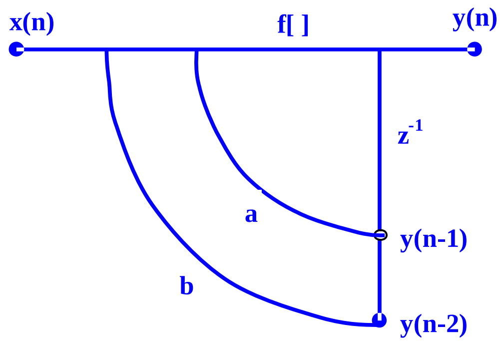


图 P6.14

（1）试确定在不发生溢出的条件下，使系统稳定的 a 值和 b 值的范围。并在 a-b 平面上画出在线性条件下的稳定区域。

（2）假定 x(n) = 0，a 和 b 满足什么条件下能保证不出现溢出（即 y(n) < 1）？在 a-b 平面上将相应的不溢出区画上影线。

解：

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}-bz^{-2}}=\frac{z^2}{(z-a_1)(z-a_2)} \qquad a_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

(1) 稳定：

$$|a_1|<1,|a_2|<1,\begin{cases}a_1+a_2=a\\ a_1a_2=-b\end{cases}$$

由于 $|a_1a_2|<1$，则 $|b|<1$

设 a_1，a_2 为实根，则

$$|a|+b<1 \qquad b\geq-\frac{a^2}{4}$$

设 a_1，a_2 为共轭复根，则

$$b>-1,b<-\frac{a^2}{4}$$

因此，系统稳定必须在 |a|+b <1 以及 b= -1 这三条直线方程包围的三角内。

(b) 益处：$x(n)=0, y(n)=f[ay(n-1)+by(n-2)]$

要求 |y(n)|<1 对所有 n 都成立。

因此，$|ay(n-1)+by(n-2)|<1$。

现证上式成立的充要条件是 |a| + |b| ≤1。

充分：$1 \ge |a| + |b| > |ay(n-1) + by(n-2)|$

必要：

假设 $y(n-1) = (1-m_1)signa, y(n-2) = (1-m_2)signb$

m_1、m_2 任意小数，于是

$$ay(n-1) + by(n-2) = (1-m_1)|a| + (1-m_2)|b|$$

若 |a| + |b| >1，则一定能找到 m，使得 (1-m)|a| + (1-m)|b| >1。

于是取 $m_1 = m_2 = m$，就有 $ay(n-1) + by(n-2) > 1$，矛盾。

因此，

$$|a| + |b| \le 1$$

所以

$|a| + |b| \le 1$ 是无溢出的充要条件，区域为图中阴影部分。