北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2011-2012学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、给定$\boldsymbol{R}^{2\times 2}=\{\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{2\times 2}|a_{ij}\in\boldsymbol{R}\}$(数域$\boldsymbol{R}$上的2阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间)的子集

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}|a_{ij}\in\boldsymbol{R}\text{且}a_{11}+a_{22}=0\}$$

*(1)*证明$\boldsymbol{V}$是$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$的子空间；

*(2)*求$\boldsymbol{V}$的维数和一个基。

二、设$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$的两个子空间为

$$\boldsymbol{V_1}=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix},x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$

$$\boldsymbol{V_2}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2}),\boldsymbol{B_1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{B_2}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

*(1)*将$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$表示成生成子空间；

*(2)*求$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$的基和维数；

*(3)*求$\boldsymbol{V_1}\cap\boldsymbol{V_2}$的基和维数。

三、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I}$。

四、在$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$中定义线性变换

$$\boldsymbol{T_1X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\boldsymbol{X},\boldsymbol{T_2X}=\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix},\boldsymbol{T_3X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}$$

求$\boldsymbol{T_1},\boldsymbol{T_2},\boldsymbol{T_3}$在基$\boldsymbol{E_{11}},\boldsymbol{E_{12}},\boldsymbol{E_{21}},\boldsymbol{E_{22}}$下的矩阵。

五、已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的全体初等因子。

六、设$\boldsymbol{y}$是欧式空间$\boldsymbol{V}$中的单位向量，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，有$\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$，证明$\boldsymbol{T}$是正交变换。常称这种正交变换为镜面反射。

七、设$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$是$\boldsymbol{C^n}$上的两种范数，又$k_1,k_2$，是正常数，证明下列函数

(1) $\max(\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta)$

(2)$k_1\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha+k_2,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$

是$\boldsymbol{C^n}$上的范数

八、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，求$x'(t)=\boldsymbol{A}\cdot x(t)$的通解。

九、证明$rank\boldsymbol{A}=rank(\boldsymbol{A^TA})=rank(\boldsymbol{AA^T})$这里$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R_r^{m\times r}}$

十、设$\boldsymbol{D}=diag(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，证明$\boldsymbol{D^+}=diag(d_1^+,d_1^+,\ldots,d_n^+)$