北京邮电大学 2011——2012 学年第 1 学期

《概率论与随机过程试题》期末考试试题答案

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号！

一、 填空题：（每小题 3 分，共 30 分）

1．设集合 $\Omega=\{1,2,3\}$，则定义在 Ω 上的包含 $\{1\}$ 的最小σ-代数是_____.

$\{\Omega,\Phi,\{1\},\{2,3\}\}$

2．设随机事件 $A_1,A_2,\ldots$ 两两不相容且满足 $P(A_n)=\frac{1}{3^n},n=1,2,\ldots.$ 记 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，则概率 $P(A)=$_____.

1/2

3．若集函数 μ 为定义在 σ 代数 $\mathcal{G}$ 上的测度，则当_______时，μ 为定义在 σ 代数 $\mathcal{G}$ 上的概率测度.

$\mu(\Omega)=1$

4．若 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ 是 Ω 上的两个非空集合类，ν_i 是 $\mathcal{A}_i\ (i=1,2)$ 上的测度，若满足：

（1）_____；（2）_____，则称 ν_2 是 ν_1 在 $\mathcal{A}_2$ 上的扩张。

$\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2$； $\forall A\in\mathcal{A}_1$，有 $\nu_1(A)=\nu_2(A)$

5．（1）设 $(\Omega,\mathcal{F})$，$(R,\mathcal{B})$ 为二可测空间，f 是从 Ω 到 R 上的映射。若对 $\forall B\in\mathcal{B}$，有_____，则称 f 是从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(R,\mathcal{B})$ 上的可测映射；（2）设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，X 是从 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 到 $(R,\mathcal{B})$ 上的取有限值的实函数，若对任意实数 x，有_____，则称 X 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量。

$f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$; $\{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathscr{F}$

6．设 X 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量，则数学期望 EX 用可测函数的积分表示形式为_____；若 X 的分布函数为 $F(x)$，则数学期望 EX 的 L-S 积分形式为_____.

$\int \xi dP$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$

7．设随机过程 $X(t) = Y\cos t + Z\sin t, t > 0$, 其中随机变量 Y, Z 独立同分布于标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $X(t)$ 的一维概率密度函数 $f(x;t) =$_____.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

8．设随机过程 $\{X(t)\}$ 均方可导，导过程为 $X'(t)$，相关函数

$R_X(s,t) = \frac{1}{6} s^2 (2t - 1)$，则 $R_{X'}(s,t) =$_____.

$$\frac{2s}{3}$$

9．设 $N(t)$ 为参数为 1 的泊松过程, $N(0) = 0$, 则条件概率

$P(N(2) = 2 \mid N(1) = 1) =$_____.

1/e

10． 设 $W(t)$ 为参数为 σ^2 的维纳过程, $W(0) = 0$, 则二维随机变量

$(W(1), W(2))$ 的协方差矩阵为_____.

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

二.（4 分）设 $\mathscr{A}$ 是集代数，也是单调类，证明 $\mathscr{A}$ 是σ-代数.

证明：由 $\mathscr{A}$ 是集代数，要证 $\mathscr{A}$ 是σ-代数，只需证 $\mathscr{A}$ 对可列并运算封闭。

若 $A_n \in \mathscr{A}$，n=1，2，…，

令 $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_n$，由 $\mathscr{A}$ 是集代数知， $B_n\in\mathscr{A}$。 ……2 分

显然 $B_n\uparrow$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$，而 $\mathscr{A}$ 是单调类，故 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n\in\mathscr{A}$，从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathscr{A}$。

……2 分

三.（10 分）设随机变量 R 和 Θ 相互独立，且 $\Theta\sim U(0,2\pi)$，R 具有概率密度

$$f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r>0\\ 0 & r\le 0\end{cases}$$

令 $X=R\cos\Theta$，$Y=R\sin\Theta$，求 (X,Y) 的概率密度.

解：令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}$ ……2 分

$$J'=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\ne 0$$ ……2 分

又（R，Θ）的联合概率密度为

$$f(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r>0,\theta\in(0,2\pi)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

……2 分

于是（X，Y）的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},-\infty<x,y<+\infty$$

……4 分

四.（10 分）设 X 与 Y 均服从参数为 1 的指数分布，且相互独立，求条件数学期望 $E[(X+Y)\,|\,(X-Y)]$.

解：令 $\begin{cases}U=X+Y\\ V=X-Y\end{cases}$，则 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=(u+v)/2\\ y=(u-v)/2\end{cases}$。

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{vmatrix}=-0.5$$

又（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0 \\ 0 \qquad 其他 \end{cases}$$

于是（U，V）的联合概率密度为

$$\varphi(u,v)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-u}, u>0, u+v>0, u-v>0 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$$ （3 分）

则 $\varphi_V(v)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{v}, v\le 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{-v}, v>0 \end{cases}$

于是当 $v\le 0$ 时，$\varphi_{U|V}(u|v)=\begin{cases} e^{-(u+v)}, u>0, u+v>0 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$

当 $v>0$ 时，$\varphi_{U|V}(u|v)=\begin{cases} e^{-(u-v)}, u>0, u-v>0 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$ （3 分）

于是当 $v>0$ 时，$E[U|V=v]=\int_v^{+\infty} ue^{-(u-v)}du=1+v$，

于是当 $v\le 0$ 时，$E[U|V=v]=\int_{-v}^{+\infty} ue^{-(u+v)}du=1-v$， （3 分）

$E\left[\left(X+Y\right)|\left(X-Y\right)\right]=1+|X+Y|$ （1 分）

五. （10 分）设随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$$

（1） 求随机变量 X 的特征函数 $\phi_X(t)$;

（2）求 $E\left(2X+1\right)^2$.

解 （1）

$$\phi_X(t)=E\left(e^{itX}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda e^{ik})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$ ……4 分

（2） 记$Y=\left(2X+1\right)^2$,

$EY^2=4EX^2+4EX+1=4\lambda^2+8\lambda^2+1.$ ……6 分

六.（10 分）设 $X(t),Y(t)$ 是两个相互独立的平稳过程，均值函数分别为 m_X,m_Y，谱密度函数分别为 $f(\omega),g(\omega)$，相关函数分别为 $R_X(\tau),R_Y(\tau)$.

（1）证明过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 为平稳过程;

（2）求平稳过程 $Z(t)$ 的功率谱函数 $h(\omega)$.

（1）证明 $E(Z(t))=E[X(t)+Y(t)]=EX(t)+EY(t)=m_X+m_Y$ （5′）

$$
\begin{aligned}
R_Z(t+\tau,t)&=E[Z(t+\tau)Z(t)]\\
&=E[(X(t+\tau)+Y(t+\tau))(X(t)+Y(t))]\\
&=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+2m_Xm_Y
\end{aligned}
$$

所以是平稳过程。

（2）$h(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}R_Z(\tau)d\tau=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}(R_X(\tau)+R_Y(\tau)+2m_Xm_Y)d\tau$

$=f(\omega)+g(\omega)+2m_Xm_Y\delta(\omega)$ (5)

七.（10 分）3 个人(分别称为第 1,2,3 人)相互传球, 每次传球时, 传球者等可能地把球传给其余 2 人中的任何一人. 对 $n=0,1,2,\ldots$, X_n 表示经过 n 次传递后球的状态（若经过 n 次传递后，球在第 i 人手中，则 $X_n=i(i=1,2,3)$），令 $X_0=1$.

（1）证明 $\{X_n,n\geq 0\}$ 为齐次马氏链，并写出一步转移概率矩阵；

（2）求经过 2 次和 4 次传递后，球都回到第 1 人手中的概率 $P\{X_2=1,X_4=1\}$.

解：（1）证明：对于任意整数 $n>0,m\geq 0$，及任意 $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_r<m$，当 $P\{X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_r}=i_r,X_m=i\}>0$ 时，总有

$$P\{X_{m+n}=j\mid X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_r}=i_r,X_m=i\}=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\}$$

且以上条件概率与 m 无关,其中 $i,j,i_k\in\{1,2,3\}$，

故$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链. ……2 分

又$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & i \neq j \\ 0, & i=j\end{cases}$ ， $i, j=1,2,3$

所以一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ …… 5 分

（2） $P(2)=P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（2）初始分布为 $P\{X_0=1\}=1, P\{X_0=i\}=0, i=2,3$，所以

$$P\{X_2=1, X_4=1\}=\sum_{i=1}^{3} P\{X_0=i\} p_{i1}(2) p_{11}(2)=p_{11}(2) p_{11}(2)=\frac{1}{4}$$ ……5 分

八. （10 分）设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布.

解. （1）链可分, $\{3\}\{2,6\}$是不可分闭集, 状态空间$E=\{3\}\cup\{2,6\}\cup\{1,4,5\}$

（2） 周期

$d(1)=2, d(5)=2, d(i)=1, i=1,2,...,6$. ……4 分

（3） 设平稳分布为$\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_6)$,则

$$\begin{cases} \pi=\pi P, \\ \pi_1+\cdots+\pi_6=1 \\ \pi_i\geq 1, i=1,2,\ldots,6. \end{cases}$$

解之得$\pi=(0,p,q,0,0,p)$,其中 $p\geq 0, q\geq 0, 2p+q=1$.

（4） 所以 3,2,6 正返态,1,4,5 为非常返. ……6 分

九. （6 分）设$\{X_n, n=1,2,\ldots\}$是齐次有限马氏链, 证明

（1）所有非常返态不构成闭集;

（2）状态空间中无零常返态.

证明. (1) 记所用非常返态的集合为A,并设之为闭集, 则

$$\sum_{j\in A} p_{ij}^{(n)}=1, \forall i\in A, \forall n=1,2,\ldots$$

由n的任意性, $0=\sum_{j\in A}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in A} p_{ij}^{(n)}=1, \forall i\in A$, 矛盾. …..3 分

(2) 设有零常返态，并记为i，则$B=\{k: j\to k\}$为闭集. 用B代替(1)中的A可证明结论. …..3 分