北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2006-2007学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、求$\boldsymbol{R^4}$的子空间

$$V_1=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0\}$$

$$V_2=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0\}$$

的交的标准正交基

二、设$\boldsymbol{y}$是欧式空间$\boldsymbol{V}$中的单位向量，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，证明变换$\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$是正交变换。

三、求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$的$\left\|\bullet\right\|_1,\left\|\bullet\right\|_2,\left\|\bullet\right\|_\infty,\left\|\bullet\right\|_{m_1},\left\|\bullet\right\|_{m_2}$范数

四、设$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T,\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$n$阶对称方阵，$\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)^T$是$n$维向量，$c$为常数，试求$f(\boldsymbol{x})=\left\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\right\|_2^2+c$，对于$\boldsymbol{x}$的导数

五、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$，求$e^{\boldsymbol{A}},e^{\boldsymbol{B}},e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$。

六、已知矩阵$\boldsymbol{A_{n\times m}}$请用奇异值$(SVD)$分解求$\boldsymbol{A}$的伪逆，并证明之

七、设$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n),\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ 是$\boldsymbol{R^n}$的任意两个向量，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$正定，令$\boldsymbol{(x,y)=xAy^T}$

*(1)*证明在该定义下，$\boldsymbol{R^n}$形成了欧式空间；

*(2)*求$\boldsymbol{R^n}$对单位向量$\boldsymbol{e_1}=(1,0,,\ldots,0),\boldsymbol{e_1}=(0,1,,\ldots,0),\ldots,\boldsymbol{e_n}=(0,0,\ldots,1)$ 的度量矩阵

八、已知矩阵$\boldsymbol{A_{n\times m}}\neq\boldsymbol{O}$，且伪逆$\boldsymbol{A}^+$已知，记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{B}^+$，并验证。

九、已知函数矩阵$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}1&x^2\\x&0\end{bmatrix}$，试计算：

(1)$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{A}(x),\dfrac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{A}(x),\dfrac{d^3}{dx^3}\boldsymbol{A}(x)$

(2)$\dfrac{d}{dx}|\boldsymbol{A}(x)|$

(3)$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{A^{-1}}(x)$

十、设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{C^{n\times n}},\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in\boldsymbol{C^n}$，证明：

*(1)*方阵的$m_\infty-$范数与向量的$1-$范数相容；

*(2)*方阵的$\boldsymbol{F}-$范数与向量的$2-$范数相容。