概率论与随机过程试题集

目录

[2015-2016 1](#_Toc27049920)

[2013-2014 7](#_Toc27049921)

[2012-2013 11](#_Toc27049922)

[2011-2012 17](#_Toc27049923)

[2012 23](#_Toc27049924)

[2010 25](#_Toc27049925)

[2009-2010 30](#_Toc27049926)

# **2015-2016**

**考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号!**

**一. 单项选择题和填空题：（每空3分，共36分）**

1.设为一可测空间，为定义在其上的测度，为其上的实可测函数，则下面不正确的是 .D

（A）若,且，则；

（B）若,且，；

（C）对一切实数；

（D）是简单函数列的一致极限.

2.设是从概率空间到Borel可测空间上的实可测函数，表达式为，其中,若已知，则 . 1/9

3.设是概率空间上的随机变量，它的分布函数为则对于（一维Borel域），有 . 

4.设二维随机变量的条件概率密度函数如下给出

其中则  . 1/2

5.设随机变量的特征函数为，则　　 . 3

6.设是平稳高斯过程，均值函数为，相关函数为， 则的协方差矩阵为　　.

7.设随机过程，其中服从二维正态分布，则的概率密度函数　　 　. 

8.设二维正态随机变量的特征函数为则 = . 2

9.设是参数为的维纳过程，是均匀分布随机变量，且对任意，与独立.令，则 .



10.设是均方连续的随机过程， 其中为一随机变量，且已知，则 .

，

11.设是参数为2的Poisson 过程，求 . 

12. 设齐次马氏链的状态空间为,转移概率矩阵为则 ．1/2

**二．**（6分）设是从到上的映射，如果是上的-代数，证明:

是上的-代数

三．（10分）设随机变量独立且有相同的Poisson分布，即



求:（1)随机变量的特征函数； (2) 的特征函数；

（3）.

**解.** （1） . (2分)

 (2分)

（2） = . (3分)

(3)=

(3分)

四. (12分) 设随机变量的联合概率密度函数为



令（1）求的概率密度、和的边缘概率密度和；（2）判别和的独立性； （3）求；（4）.

**解.** （1）令得从而雅可比行列式.

所以， (2分)

从而边缘概率密度函数



 (2分)

（2）因为，所以不独立 (2分)

（3）,,

. （2分）

(4) 于是当时，

当时，

于是当时，，

于是当时，，

 （4分）

**五．**（12分）设齐次马氏链的状态空间为, 初始分布为，一步转移概率矩阵,

计算 (1) ； (2) ；

(3) .

**解.**  二步转移概率矩阵为  (3分)

(1) . (3分)

(2) ==0, (3分)

(3) ==. (3分)

六．（12分）设 是两个相互独立的平稳随机过程，均值函数分别为，相关函数分别为，谱密度分别，定义：



(1) 求证：是平稳随机过程；



(2) 求的谱密度.



**解.**(1)



均值函数为常数，相关函数只与有关，所以是平稳过程。 (6分)



(2) 



*.* (6分)



七．（12分）设齐次马氏链的状态空间为，一步转移概率矩阵为



问该链是否可分，若可分，给出全部不可分闭集，讨论该链的状态分类，各状态的周期，并求链的平稳分布.

**解.** （1）链可分, 是不可分闭集, (2分)



.



状态是常返状态，2非常返.



状态是正常返状态. 所有状态的周期为1. (5分)

（3）设平稳分布为，则求解方程组：



解之得其中，

或者

或者 (5分)

# **2013-2014**

**考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号!**

1. **填空题：（每空3分，共30分）** 
   1. 给定集合，则定义在上的包含的最小σ-代数是 . 
   2. 若是Ω上的两个非空集合类，是上的测度，若满足：（1） ;（2），则称是在上的扩张。



* 1. 某集代数包含了所有的左开右闭区间（实数集上的）. 该集代数上有一个测度，对于任意可测集，其中，均有.将该测度扩张到某σ-代数上记为.对单点集， .

0

* 1. 设概率测度空间，，，两个简单函数，，则 ， .



* 1. 设为定义某概率空间上的随机变量，若的分布函数为，则数学期望的L-S积分形式为 .



* 1. 设三维随机变量服从正态分布，其中，，则=

1

* 1. 设随机过程为平稳二阶矩过程，且均方连续.设该过程的均值函数为，相关函数，均方积分记为随机变量. 则 .



* 1. 设为泊松过程,则条件概率 .



9. 设为参数为的维纳过程,,则= .



**二.**（8分）设A是系，证明A是单调类；若A也是系，证明A是σ-代数。

证明：由A是系，若A，*n*=1，2，…，且，则A.

若，A，*n*=1，2，…，由A是系，A且，则A.

所以A.即 A，所以A是单调类。 4分

A是系，A对余集运算封闭且A，若A也是系， A对交集运算封闭，所以A是集代数。因为A是单调类，所以A是σ-代数。 4分

**三.**（16分）设随机向量的概率密度为

* 1. 求边缘密度；
  2. 求时条件密度；
  3. 求.

解（1），. 4分

（2）当时，=. 4分

（3）由（2）知

，所以.

，所以.

= . 8分

**四.** （14分）设随机变量的分布列为



（1） 求随机变量的特征函数;

（2）求.

解 （1） . ……8分

（2）易知 ，所以

. ……6分

**五.** （14分）设随机过程，其中是两个独立同分布的随机变量.

（1）若都以2/3和1/3的概率取值-1和2，证明为平稳过程;

（2）若都服从标准正态分布，证明为高斯过程.

（1）证明　，

，

所以，均值函数为常数，自相关函数只依赖于时间差，为平稳随机过程。7分

（2）对于任意正整数，取任意时间点任意实数

，因为相互独立且服从正态分布，的线性组合仍然服从正态分布，所以

服从一维正态分布。故为高斯过程。7分

**七.** （18分）设马氏链的状态空间为，转移概率矩阵为



(1)确定该链的状态分类；(2)各状态的周期；(3)求平稳分布；

(4) 求, .

**解.** （1）链可分, {3}{2,6}是不可分闭集, 状态空间,3,2,6正返态,1,4,5为非常返. 6分

（2） 周期. 3分

（3） 设平稳分布为,则



解之得,其中. 5分

（4） .

.

 4分

# **2012-2013**

**考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号!**

**一. 单项选择题和填空题：（每空3分，共30分）**

1.设是定义在非空集合上的集代数,则下面正确的是 .A

（A）若,则;

（B）若,则;

（C）若,则;

（D）若,且,则.

2. 设为一可测空间，为定义在其上的有限可加测度，则下面正确的是 .c

（A）若,则；

（B）若,且，则；

（C）若，则；

（D）若,且，.

3.设为从概率空间到Borel可测空间上的实可测函数，表达式为，其中，则 ；若已知，则 .



4. 设二维随机变量的概率密度



则= .2/3

5. 设随机过程，其中随机变量服从参数为的指数分布，为常数，则（1）的概率密度 ；（2） .



6. 设是参数为的维纳过程，令，则相关函数 .

7. 设齐次马氏链的状态空间为,一步转移概率为



则（1） ；（2） . 1/2,2

**二. 概率题（共30分）**

1.(10分) 设的概率密度为

,

令, （1）求的概率密度；（2）求的边缘概率密度.

解解.（1） 解方程得

所以雅可比行列式,

故

 ……5分

（2）对，



,

故 ……10分

2.（10分）设的概率密度



（1）求，其中（2）.

解 的边缘概率密度为



所以条件概率密度

 ……4分

（1）



……7分

（2）因为，所以。 ……10分

3.（10分）设独立同分布，均服从两点分布，即，令，（1）求*Y*的特征函数；（2）求.

解: （1）因为*Y*服从二项分布，所以*Y*的特征函数

 ……5分

（2）



 ……10分

**三.随机过程题（共40分）**

1. （10分）设是参数为的泊松过程，即满足：

(1)

(2)

(3)对.

也是参数为的泊松过程，且与 独立，令，（1）求；（2）求.

解：因为是参数为的泊松过程，所以

（１） ……5分

　　 （２） ……10分

2. （10分） 设是平稳过程，是其谱密度函数，（1）证明：对于任意的，是平稳过程；（2）求的谱密度.

解 （1）,





与无关，则是平稳过程。 ……5分

（2）



. ……10分

3. （10分）设齐次马氏链的状态空间为，一步转移概率矩阵为

，

初始分布为, 求

(1) 和;

(2) 的分布律.

解 (1) 



 ……６分

(2)  ……10分

4.（10分）齐次马氏链的状态空间为，一步转移概率矩阵为



确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布.

**解.** （1）链可分, {1，4}{3}是不可分闭集, 状态空间

……2分

（2） 周期

. ……4分

（3） 设平稳分布为,则



解之得,其中. ……7分

（4） 所以1,3,4正返态,其余都不是常返态，又因为

，所以都为非常返态。 ……10分

# **2011-2012**

**考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号!**

1. **填空题：（每小题3分，共30分）** 
   1. 设集合，则定义在上的包含{1}的最小σ-代数是 . 
   2. 设随机事件两两不相容且满足. 记,则概率 .

1/2

* 1. 若集函数为定义在代数上的测度，则当 时，为定义在代数上的概率测度.



* 1. 若是Ω上的两个非空集合类，是上的测度，若满足：（1） ;（2） ，则称是在上的扩张。

；

* 1. （1）设为二可测空间，是从上的映射。若对∀*B*∈B，有 ，则称是从上的可测映射；（2）设为一概率空间，*X*是从到上的取有限值的实函数，若对任意实数，有 ，则称*X*是上的随机变量。

； 

* 1. 设为定义在概率空间上的随机变量，则数学期望用可测函数的积分表示形式为 ；若的分布函数为，则数学期望的L-S积分形式为 .

;

* 1. 设随机过程,其中随机变量独立同分布于标准正态分布,则的一维概率密度函数 . 
  2. 设随机过程均方可导，导过程为，相关函数，则 .



* 1. 设为参数为的泊松过程,,则条件概率

 .

1/e

10. 设为参数为的维纳过程,,则二维随机变量

的协方差矩阵为 .



**二.**（4分）设A是集代数，也是单调类，证明A是σ-代数.

证明：由A是集代数，要证A是σ-代数，只需证A对可列并运算封闭。

若A，*n*=1，2，…，

令，由A是集代数知，A。 ……2分

显然，且，而A是单调类，故A，从而A。

……2分

**三.**（10分）设随机变量*R*和相互独立，且~U(0,2π)，*R*具有概率密度



令*X*=*R*cos，*Y*=*R*sin，求的概率密度.

解：令，则 ……2分

 ……2分

又（*R*，）的联合概率密度为

 ……2分

于是（*X*，*Y*）的联合概率密度为

 ……4分

**四.**（10分）设*X*与*Y*均服从参数为1的指数分布，且相互独立，求条件数学期望.

解：令，则。



又（*X*，*Y*）的联合概率密度为



于是（*U*，*V*）的联合概率密度为

 （3分）

则

于是当时，

当时， （3分）

于是当时，，

于是当时，， （3分）

 （1分）

五. （10分）设随机变量的分布列为



（1） 求随机变量的特征函数;

（2）求.

解 （1） . ……4分

（2） 记, . ……6分

六. （10分）设是两个相互独立的平稳过程，均值函数分别为，谱密度函数分别为,相关函数分别为.

（1）证明过程为平稳过程;

（2）求平稳过程的功率谱函数.

（1）证明　　　　　（５＇）



所以是平稳过程。

（2）

 (5)

**七.**（10分）3个人(分别称为第1,2,3人)相互传球, 每次传球时, 传球者等可能地把球传给其余2人中的任何一人．对, 表示经过次传递后球的状态（若经过次传递后，球在第人手中，则）, 令.

（1）证明为齐次马氏链，并写出一步转移概率矩阵；

（2）求经过2次和4次传递后，球都回到第１人手中的概率.

解：（1）证明：对于任意整数，及任意,当时，总有



且以上条件概率与m无关,其中，

故为齐次马氏链． ……２分

又　，　

所以一步转移概率矩阵为

 …… 5分

（２）

（2）初始分布为　, 所以

 ……5分

八. （10分）设马氏链的状态空间为，转移概率矩阵为



确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布.

**解.** （1）链可分, {3}{2,6}是不可分闭集, 状态空间

（2） 周期

. ……4分

（3） 设平稳分布为,则



解之得,其中.

（4） 所以3,2,6正返态,1,4,5为非常返. ……6分

九. （6分）设是齐次有限马氏链, 证明

（1）所有非常返态不构成闭集;

（2）状态空间中无零常返态.

证明. (1) 记所用非常返态的集合为,并设之为闭集, 则



由的任意性, 矛盾. …..3分

(2) 设有零常返态, 并记为, 则为闭集. 用代替(1)中的可

证明结论. …..3分

# **2012**

一、填空题

1. 设事件满足, 则

2. 袋中有10个球，其中1个红球，10个人不放回地依次抽取，每次抽取一个，问最后一个人取到红球的概率是

3. 设平面区域由围成，平面区域由围成。现向内依次随机地投掷质点，问第3次投掷的质点首次落在内的概率是

4. 设随机变量且相互独立，求的概率密度函数

5. 设平稳过程的功率谱密度为，则其自相关函数为

6.设一灯管的使用寿命服从均值为的指数分布，现已知该灯管用了10小时还没有坏，该灯管恰好还能再用10小时的概率为

7.设电话总机在内接受到电话呼叫次数是强度（每分钟）为的泊松过程，， 则2分钟收到3次呼叫的概率

8.设随机过程，其中服从正态分布，即，求

二、设二维随机变量(X,Y)具有概率密度



1. 求边缘概率密度，(2) 求条件概率密度，，(3)求条件概率.

三、在某交通路口设置了一个车辆计数器，记录南行北行的车辆总数。设X(t)和Y(t)分别表示在[0,t]内南行和北行的车辆数，它们是强度分别为和的possion过程，且相互独立。如果在t(>0)时记录的车辆总数为n，求其中南行车辆有k(0<k<n)辆的概率。

**四、**有三个黑球和三个白球。把这六个球任意等分给甲、乙两个袋中，并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四个状态：0，1，2，3。现每次从甲、乙两袋中各取一球，然后相互交换，即把从甲袋取出的球放入乙袋，把从乙袋取出的球放入甲袋，经过次交换，过程的状态为。

1. 试问该过程是否为马尔可夫链；
2. 计算它的一步转移概率矩阵。

五、设马氏链的状态空间I={1,2,3,4，5},转移概率矩阵为：



讨论其状态分类，并求其常返闭集的平稳分布。

六、设随机过程，其中和是相互独立的二元随机变量，它们都分别以和的概率取值为-1和2

1. 求的均值和自相关函数；
2. 证明是宽平稳过程。
3. 判断Z（t）是否是各态历经过程。

7、设随机过程, 为常数，,其中是平稳过程，自相关函数为，谱密度为，服从上的均匀分布且与独立。证明是平稳过程并求其谱密度。

8. 设一平稳过程先通过一个微分器，其输出过程为,然后过程再输入到另一脉冲响应函数为的线性系统, 输出过程记为.若测得的功率谱密度为,试求的自相关函数.

（注：若的傅里叶变换为，则的傅里叶变换为）

# **2010**

**1、（10分）有随机过程{*ξ*(*t*)，-∞<*t*<∞}和{*η*(*t*)，-∞<*t*<∞}，设*ξ*(*t*)=*A* sin(*ω* *t*+*Θ*)，*η*(*t*)=*B* sin(*ω* *t*+*Θ*+*φ*),其中*A，B，ω，φ*为实常数，*Θ*均匀分布于[0，2π]，试求*Rξη*(*s*,*t*)**

**1.**解：



**2、（15分）随机过程*ξ*(*t*)=*A*cos(*ωt*+*Φ* )，-∞<*t* <+∞，其中*A, ω,Φ* 是相互统计独立的随机变量，E*A*=2, D*A*=4, *ω* 是在[-5, 5]上均匀分布的随机变量，*Φ* 是在[-π，π]上均匀分布的随机变量。 试分析*ξ(t)*的平稳性和各态历经性。**

2、解：





所以具有平稳性。



故均值具有各态历经性。



故相关函数不具有各态历经性。

**3、（10分）某商店顾客的到来服从强度为4人每小时的Poisson过程，已知商店9：00开门，试求：**

**（1）在开门半小时中，无顾客到来的概率；**

**（2）若已知开门半小时中无顾客到来，那么在未来半小时中，仍无顾客到来的概率。**

3、解：设顾客到来过程为{N(t), t>=0}，依题意N(t)是参数为λ的Poisson过程。

（1）在开门半小时中，无顾客到来的概率为：



（2）在开门半小时中无顾客到来可表示为，在未来半小时仍无顾客到来可表示为，从而所求概率为：



**4、（15分）设某厂的商品的销售状态（按一个月计）可分为三个状态：滞销（用1表示）、正常（用2表示）、畅销（用3表示）。若经过对历史资料的整理分析，其销售状态的变化（从这月到下月）与初始时刻无关，且其状态转移概率为*pij*（*pij*表示从销售状态*i*经过一个月后转为销售状态*j*的概率），一步转移开率矩阵为：**

****

**试对经过长时间后的销售状况进行分析。**

4、解答：由一步转移概率矩阵可知状态互通，且pii>0，从而所有状态都是遍历状态，于是极限分布就是平稳分布。设平稳分布为π={π1，π2，π3}，求解方程组：

π=πP, π1+π2+π3=1

即：



得：



即极限分布为：

由计算结果可以看出：经过相当长时间后，正常销售状态的可能性最大，而畅销状态的可能性最小。

**5、（10分）试对以下列矩阵为一步转移概率矩阵的齐次马尔可夫链的状态空间进行分解。**

**（1）**

**（2）**

5、略 张卓奎P144. 14(5)\(6)

**6、（15分）一个服务系统，顾客按强度为*λ*的Poisson过程到达，系统内只有一个服务员，并且服务时间服从参数为*μ*的负指数分布，如果服务系统内没有顾客，则顾客到达就开始服务，否则他就排队。但是，如果系统内有两个顾客在排队，他就离开而不返回。令*ξ*(t)表示服务系统中的顾客数目。**

**（1）写出状态空间；**

**（2）求Q矩阵**

6、课本P158例题。

**7、（15分）设是平稳过程，令，其中*ω*0是常数，Θ为均匀分布在[0,2π]上的随机变量，且与Θ相互独立，*R*ξ(τ)和*S*ξ(ω)分别是的相关函数与功率谱密度，试证：**

**（1）是平稳过程，且相关函数：**

****

**（2）的功率谱密度为：**

****

7、7:(1)

故为平稳过程

（2）



**8、（10分）已知随机过程*ξ*(*t* )的相关函数为：**

**，问该随机过程*ξ*(*t* )是否均方连续？是否均方可微？**

8、解答：τ=0时，相关函数是连续的，故随机过程在任意时刻均方连续。



由于二阶导数在τ=0存在，故过程是均方可微的。

# **2009-2010**

　　考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

1. **填空题（45分，每空3分）**

　设两两独立的事件满足，且

,求 1/4

1. 袋中有5个球，其中1个红球，每次从中任取1个球，取出后不放回，问前3次取到红球的概率为3/5
2. 设平面区域由围成，平面区域由围成。现向内依次随机投掷质点，问第3次投掷的质点恰好第二次落在内的概率是 
3. 设随机变量的概率分布函数为，问 -1

5． 随机变量在上服从均匀分布，即，则方程

有实根的概率为 7/10

6．设随机变量序列独立同分布于上的均匀分布，即，

则 1/2

1. 已知随机变量,定义函数,求的密度函数 
2. 设随机变量服从区域上的均匀分布,求 1/6
3. 设～满足，则 3
4. 设一灯管的使用寿命服从均值为的指数分布，现已知该灯管用了10小时还没有坏，该灯管恰好还能再用10小时的概率为 0
5. 设电话总机在内接受到电话呼叫次数是强度（每分钟）为的泊松过程，， 则2分钟收到3次呼叫的概率 
6. 设高斯过程是平稳过程，均值为0，相关函数，对于任意的，求的密度函数 
7. 设随机过程，其中服从正态分布，即，求 1
8. 设是参数为的维纳过程，令，求自协方差函数 
9. 设平稳过程的功率谱密度为，则其平均功率为 1/60

**二．（10分）**

设为两个随机事件，且,令

 

求(1) 二维随机变量的分布律, (2) 的相关系数, (3) 的分布律。

解. (1) 

则

即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y X | 0 | 1 |
| 0 | **2/3** | 1/12 |
| 1 | 1/6 | 1/12 |

（3分）

（2）



 （3分）

（3）的取值为0,1,2。



故的分布率为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 2/3 | 1/4 | 1/12 |

（4分）

**三．（１5分）**

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度



(1)求边缘概率密度，(2) 求条件概率密度，，(3)求条件概率.

解. (1)



 (5分)

(2)

当，=，当，不存在。(5分)

（3）,,

所以 (5分)

**四．（１5分）**

设质点在1,2,3,4上做随机游动，假设只能在时刻n=1,2,…移动，且只能停留在1,2,3,4点上。当质点转移到2,3点时，它以1/3的概率向左，向右移动一个格或停留在原处，当质点移动到1点时，以概率1向右移动一个格，当质点移动到4点时，以概率1向左移动一个格。以表示时刻质点所处的位置，表示初始时刻0质点所处位置。

（1）证明为齐次马氏链，并写出一步转移概率矩阵,

（2）若初始时刻质点位于点1，求概率,

（3）证明具有遍历性，并求其极限分布,

（4）若以极限分布为初始分布，求。

解：（1）证明：对于任意整数，及任意

总有



以上条件概率与n无关，故为齐次马氏链．

一步转移概率矩阵为

 （ 3分）

（2）由题意，初始时刻质点位于点1，,故有初始分布为



又

 （4分）

（3）

故马氏链具有遍历性，

设平稳分布

解方程组 

得 

所以极限分布为 （4分）

（4）由于初始分布时极限分布，所以，

所以 （4分）

**五．（１5分）**

设一平稳过程先通过一个微分器，其输出过程为,然后过程再输入到另一脉冲响应函数为的线性系统, 输出过程记为.若测得的功率谱密度为,试求的自相关函数.

（注：若的傅里叶变换为，则的傅里叶变换为）

解：(1)



 （5分）

(2) 



 (5分)

　 (3) 输入,输出的关系为



作傅里叶变换得



所以,系统的传输函数为





 (5分)