# 简单的讲题

# chemistry

# Solution

- 首先考虑k+1个杯子，如何构造k,1这样的情况。其中k为偶数。
- 首先合并为2的幂次。
- 接着解决c*2^p, 2^p, 2^q(c为偶数,p>q)如何合并为(c+1)*2^p, 2^q即可
- (c*2^p,2^p,2^q)->(c*2^p,2^q,2^p)->((c-1)*2^p+2^q,2^p,2^p)->((c-1)*2^p+2^q,2^(p+1),0)

# Solution

- 假设只有两个杯子(x,y)，且x+y=n，那么操作一次之后变为(2x mod n,2y mod n)。
- 这部分可以看成((c-1)*2^(p-q)+1,2^(p-q+1))，一定存在周期，且不超过(c+1)*2^(p-q)+1。
- 总的不超过2n。
- 所以总步数不会超过3n。

# Solution

- k=n-1,且k为奇数，考虑最后情况为(n-1,1), 若n不等于2则无解。
- k=n, 最后情况为n，考虑倒推，如果存在非1的奇因子，无法消除。
- 所以当且仅当k为2的幂次有解。

# random

# 暴力美学

$dp_{n,k}$表示$n$个点的图，选$k$次，不连通的概率。

归纳假设$dp_{n,k}=\sum_{i=0}^{n^2-1}c_{n,i}*\left(\frac{i}{n^2}\right)^k$，其中$c_{n,i}$为某个待定的系数。

考虑递推。

$$
\begin{aligned}
dp_{n,k} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{i-1}(1-dp_{i,j})\binom{k}{j}\left(\frac{i}{n}\right)^{2j}\left(\frac{n-i}{n}\right)^{2(k-j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{i-1}\left(1-\sum_{l=0}^{i^2-1}c_{i,l}*\left(\frac{l}{i^2}\right)^j\right)\binom{k}{j}\left(\frac{i}{n}\right)^{2j}\left(\frac{n-i}{n}\right)^{2(k-j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{i-1}\left(\left(\frac{i^2}{n^2}\right)^j-\sum_{l=0}^{i^2-1}c_{i,l}*\left(\frac{l}{n^2}\right)^j\right)\binom{k}{j}\left(\frac{(n-i)^2}{n^2}\right)^{k-j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\left(\left(\frac{i^2+(n-i)^2}{n^2}\right)^k-\sum_{l=0}^{i^2-1}c_{i,l}*\left(\frac{l+(n-i)^2}{n^2}\right)^k\right)
\end{aligned}
$$

第一步中考虑1号点所在连通块，枚举其中有$i$个点，$j$条边。

根据这个式子更新对应的$c_{n,i^2+(n-i)^2}$和$c_{n,l+(n-i)^2}$，即在$c_{n,i^2+(n-i)^2}$中加上$\binom{n-1}{i-1}$，在$c_{n,l+(n-i)^2}$中减去$c_{i,l}*\binom{n-1}{i-1}$。

答案为$\sum_{k\geq 0}dp_{n,k}=\sum_{k\geq 0}\sum_{i=0}^{n^2-1}c_{n,i}*\left(\frac{i}{n^2}\right)^k=\sum_{i=0}^{n^2-1}c_{n,i}*\frac{n^2}{n^2-i}$。

时间复杂度$O(n^4)$。

对于$dp_{n,k}$的形式的一个解释，考虑一个边集，大小为$i$构成了不连通的图，那么$k$次之后恰好为这个边集的概率为每次在这个边集中选的概率，并且对子集容斥，所以每一项的概率都为$\left(\frac{i}{n^2}\right)^k$这样的形式，合并后为$\sum_{i=0}^{n^2-1}c_{n,i}*\left(\frac{i}{n^2}\right)^k$。

# post

- 我们先来考虑这个问题在序列上的形式。
- 我们要将序列分成 $k$ 段，使得每一段所有数到其中位数的距离之和最小。
- 由于代价函数 $w$ 满足四边形不等式 $w(i,k)+w(j,l) \le w(i,l)+w(j,k)(i \le j \le k \le l)$，因此该 $DP$ 的决策点满足决策单调性。
- 那么利用决策调性进行分治，这个问题在序列上的形式就有一种简单的 $O(nk\log n)$ 的做法。
- 另外，注意到令 $opt(x)$ 为 $k=x$ 时的最优解，那么 $opt(x)$ 是一个关于 $x$ 的下凸函数，因此，通过二分斜率凸优化，我们可以在 $O(n\log n\log L)$ 的时间内解决这个问题在序列上的形式。

- 这里涉及到了一个凸优化输出方案的小技巧，设当前二分出的斜率 $x$ 的最优解分段至多分成 $k_1$ 段，至少分成 $k_2$ 段，且 $k_1 < k < k_2$ ，那么若存在一组位置 $i \le j \le k \le k$ ，其中 $i, l$ 为最少分段中相邻的两个断点，$j, k$ 为最多分段中相邻的两个断点，由 $w(i,k) + w(j,l) \le w(i,l) + w(j,k)(i \le j \le k \le l)$ ，并且原有的两个分段均为最优解，我们取最少分段中 $i$ 以及其之前的断点、取最多分段中 $k$ 以及其之后的断点，形成的解一定也是一个最优解。可以证明，我们一定通过这种方式可以找到一种调整的方式将分的段数调整至 $k$。

- 考虑环上的问题，假设全局最优解为 $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k)$，那么显然 $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, p_0)$ 也是全局最优解，由决策单调性，对于任意 $p_0 \le q_0 \le p_1$，以 $q_0$ 开头的最优解 $(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ 一定满足 $p_0 \le q_0 \le p_1, p_1 \le q_1 \le p_2, \ldots, p_k \le q_k \le p_0$。

- 不妨令 $p_0 \le 0 \le p_1$，用上述凸优化的方式求出以 0 开头的最优解 $(0, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ ，那么 $0 \sim q_1, q_1 \sim q_2, \ldots, q_{k-1} \sim q_k$ 中的每一段都会有一个最优解上的断点，选择其中最小的一段，其长度必定在 $O(\frac{n}{k})$ 内。不妨令选择了 $0 \sim q_1$，我们需要求出以其中每一个点开始的最优解，这些最优解中一定包含了全局最优解。

- 注意到我们已经确定了每一个决策点的范围，用最开始提到的分治做法求一个点开始的最优解是 $O(n \log n)$ 的。

- 注意到我们已经确定了每一个决策点的范围，用最开始提到的分治做法求一个点开始的最优解是 $O(n\log n)$ 的。
- 假设我们当前需要求 $[l,r]$ 中每一个点开始的最优解，我们可以先求出 $mid=\frac{l+r}{2}$ 开始的最优解，并且，我们将进一步确定 $[l,mid-1]$ 和 $[mid+1,r]$ 中的决策点的范围，如此递归处理，时间复杂度为 $O(n\log^2 n)$。
- 时间复杂度 $O(n\log^2 n+n\log n\log L)$ 。

# GCJ Round 3 A

- 有一条10^12的纸条，你和电脑轮流操作，每次选取长为10^10的一段。
- 电脑随机操作，要求你能在500局内赢499局。

# GCJ Round 3 B

- 一个序列，你可以增加其中某些项的值，使得这个序列变成先不降后不升，增加的量称为这个序列的权值。
- 对a1,a2,…,an，求所有子区间的序列的权值和。

# GCJ Round 3 C

- 有一个n*m的网格，填了A和B。如果两个格子四相邻，并且同一个字母，那么我们认为它是联通的。
- 对于任意2*2的矩形，可以选择让左上右下连通或者右上左下连通或者不选。
- 问能否构造方案使得A互相连通，B互相连通且AB不连通。

# Gym 102156 E

- 有一个长度为n的序列a，问能否将序列表示成k个排列的和。
- 也就是a=sum w_i* p_i，要求sum w_i=1，p_i为排列。
- n<=500

# Gym 102156 F

- 给一个带权的平面图，将图分成S和T两个集合。
- 使得割集的权值和最大。

# Gym 102201 J

- 左边n个点右边n-1个点m条边的二分图。
- 由S向左边每个点连流量n-1的边，右边每个点向T连流量为n的边，问是否满流。
- 构造方案
- n 1e5