

# 题目讲评

HJQwQ

2020 年 8 月 16 日

# 目录

- ① 多米诺骨牌
  - 各种部分分
  - 正解
  - 证明
  - 后记
- ② 抽卡
  - 各种部分分
  - 正解
  - 证明
  - 后记
- ③ 归程
  - 各种部分分
  - 正解
  - 后记

# 测试点 1

$$n = 1, m \leq 10$$

显然  $n=1$  的时候用  $1 \times 2$  的骨牌尽可能靠左填就行

## 测试点 2,3

$$n \leq 2, m \leq 10^5$$

显然  $n=2$  的时候用  $2 \times 1$  的骨牌尽可能靠左填就行

## 测试点 4,5

$$n \leq 5, m \leq 10^5$$

说实话我也没想过这部分该怎么做.. 可能有乱搞能拿 50 分

但其实我小小地卡了一下我能想到的几种贪心乱搞.. 乱搞能过的话算你狠

## 测试点 6,7

$$n \leq 10, m \leq 1000$$

这部分或许可以用插头 DP 来做.. 但写起来肯定会很恶心所以我也没细想..

# 一个结论

答案就是  $\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{6} \rfloor$

惊不惊喜? 刺不刺激?(仿佛梦回 NOIP2017D1T1)

# 问题转化

原问题是在  $n \times m$  的棋盘中, 放入若干**不相邻的**  $1 \times 2$  或  $2 \times 1$  的骨牌

这个问题等价于在  $(n+1) \times (m+1)$  的棋盘中, 放入若干**不重叠的**  $2 \times 3$  或  $3 \times 2$  的骨牌

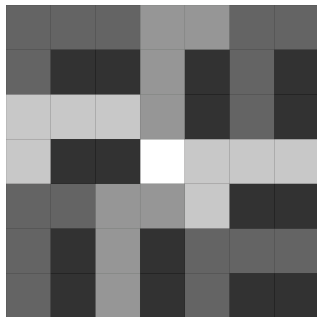
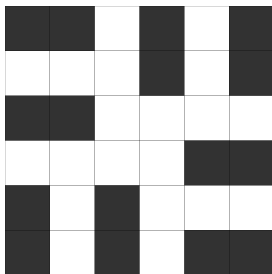
我们不难证明这两个问题中的方案是一一对应的: 在第二个问题的任一个方案中, 所有的骨牌删去最上方一行和最左侧一列, 再删去棋盘的最上方一行和最左侧一列, 就能得到第一个问题的一种方案

类似地, 在第一个问题的任一个方案中, 所有的骨牌在左侧添加一列, 在上方添加一行, 再在整个棋盘的最左侧添加一列, 最上方添加一行, 就能得到第二个问题的一种方案

故两个问题中能放置骨牌的最大数目相同, 这样我们就完成了对问题的转化



## 良心插图



原问题中  $n = 6, m = 6$  的最优方案与新问题中的最优方案可相互转化

$r = 2$  或  $r = 3$  时..

接下来我们讨论的都是转化后的问题

我们将  $(n+1)$  记作  $r$ ,  $(m+1)$  记作  $c$ , 故  $r, c \geq 2$

当  $r = 2$  或  $r = 3$  的时候答案一定是  $\lfloor \frac{rc}{6} \rfloor$ , 因为我们只要把骨牌挨着放就行了

## $r = 6$ 时

结论: 当  $r = 6$  时, 一定可以放满

首先不难发现当  $r = c = 6$  时, 一定是可以放满的, 所以只需要按  $c \bmod 6$  的值进行讨论

若  $c \bmod 6 = 0$ , 则直接放满就行

若  $c \bmod 6 = 2$ , 不难发现  $6 \times 2$  的很容易放满

若  $c \bmod 6 = 3$ , 不难发现  $6 \times 3$  的也很容易放满

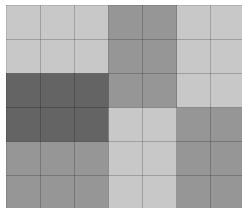
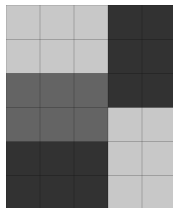
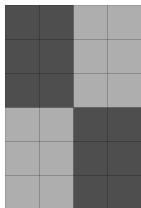
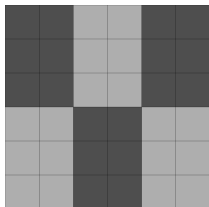
若  $c \bmod 6 = 4$ , 放两个  $6 \times 2$  就行

若  $c \bmod 6 = 5$ , 放一个  $6 \times 2$  和一个  $6 \times 3$

若  $c \bmod 6 = 1$ , 则  $c \geq 7$ , 放一个  $6 \times 3$  和两个  $6 \times 2$  就能填满  $6 \times 7$

**故  $r = 6$  时一定可以填满,  $c = 6$  时同理**

## 良心插图



六种情况对应的方案

## $r = 4$ 时

由于  $4 \times 6$  的可以填满, 所以只需要讨论  $c \bmod 6$  的值, 找到一种填的方法使留空的格子数小于 6

若  $c \bmod 6 = 0$ , 则直接放满就行

若  $c \bmod 6 = 1$ , 就不放, 反正只留了 4 个空

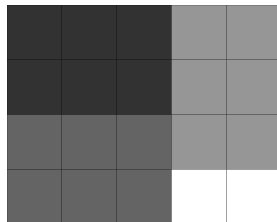
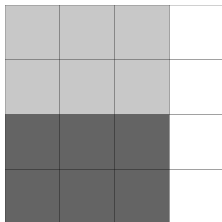
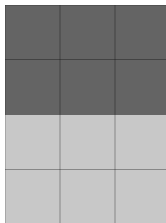
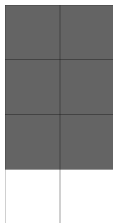
若  $c \bmod 6 = 2$ , 放一个  $3 \times 2$

若  $c \bmod 6 = 3$ , 放两个  $2 \times 3$

若  $c \bmod 6 = 4$ , 放两个  $2 \times 3$

若  $c \bmod 6 = 5$ , 放两个  $2 \times 3$  和一个  $3 \times 2$

## 良心插图



后四种情况对应的方案

# $r = 5$ 时

由于  $5 \times 6$  的可以填满, 所以只需要讨论  $c \bmod 6$  的值, 找到一种填的方法使留空的格子数小于 6

若  $c \bmod 6 = 0$ , 则直接放满就行

若  $c \bmod 6 = 1$ , 就不放, 反正只留了 5 个空

若  $c \bmod 6 = 2$ , 放一个  $3 \times 2$

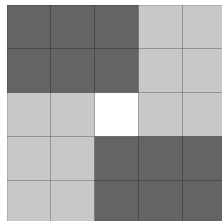
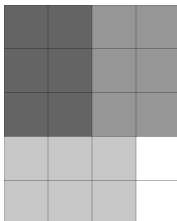
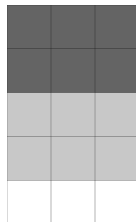
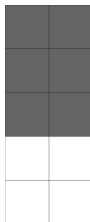
若  $c \bmod 6 = 3$ , 放两个  $2 \times 3$

若  $c \bmod 6 = 4$ , 放两个  $2 \times 3$  和一个  $3 \times 2$

若  $c \bmod 6 = 5$ , 像风车一样放两个  $2 \times 3$  和两个  $3 \times 2$ , 中间留空一

格

## 良心插图



后四种情况对应的方案



# $r = 7$ 时

由于  $7 \times 6$  的可以填满, 所以只需要讨论  $c \bmod 6$  的值, 找到一种填的方法使留空的格子数小于 6

若  $c \bmod 6 = 0$ , 则直接放满就行

若  $c \bmod 6 = 2$ , 放一个  $6 \times 2$

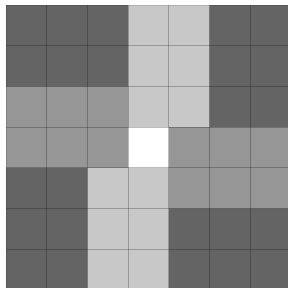
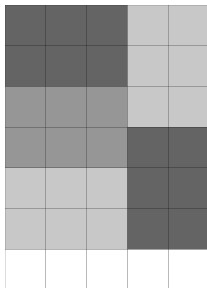
若  $c \bmod 6 = 3$ , 放一个  $6 \times 3$

若  $c \bmod 6 = 4$ , 放一个  $6 \times 4$

若  $c \bmod 6 = 5$ , 放一个  $6 \times 5$

若  $c \bmod 6 = 1$ , 则  $c \geq 7$ , 像风车一样放两个  $3 \times 4$  和两个  $4 \times 3$  就行

## 良心插图



后五种情况对应的方案

## $r > 7$ 时

由于  $r=6$  时一定可以填满, 我们可以先从棋盘中划去若干列, 使  $2 \leq r \leq 7$ , 再套用上面的证明, 于是这样留的空数目一定  $< 6$

综上所述, 我们证明了对于所有的情况, 都有  $ans = \lfloor \frac{rc}{6} \rfloor$ , 即

$$ans = \lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{6} \rfloor$$

# 后记

第一题就讲完惹..

HJQwQ 提醒自己休息一下 qwq

这题本来是去年 NOI 之前某场 CF div2 的 A 题.. 当时是罕见的下午比赛, 我就和机房小伙伴开黑.. 结果遇到了这个题

我很快就证明了答案就是  $\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{6} \rfloor$ .. 然后一直过不了 pretest.. 自闭了..div2A 都做不出来

然后比赛就被爆破 (unrated) 了.. 出题人和验题人写的是同一种乱搞做法..  $n = 6, m = 6$  时输出 7.. 导致正解过不了 pretest..

然后这题就作为错题从 CF 题库中被删掉了.. 我在 NOI 之前错过了最后一次橙名的机会.. 导致橙名迟到了 1 年 qwq

# 测试点 1,2

直接暴力 dfs 枚举抽的卡.. 然后统计答案  
时间复杂度大概是  $O(n!)$

## 测试点 3,4,5

动态规划.. 令  $f_{i,j,0/1}$  表示到达前  $i$  个位置中选了  $j$  个, 且第  $i$  个选/未选的最大价值和  
转移方程为:

$$\begin{cases} f_{i,j,0} = \max(f_{i-1,j,0}, f_{i-1,j,1}) \\ f_{i,j,1} = f_{i-1,j-1,0} + v_i \end{cases}$$

时间复杂度  $O(n^2)$

# 测试点 6,7

$v_i$  不是 1 就是 2.. 大概可以乱搞? 我没仔细想...

# 一个假贪心

每次抽序列中最大的.. 然后把它以及两侧的牌从序列中删去  
这样做满足了不能相邻的要求, 但得到的并不是最优解.. 甚至抽不  
满  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  张卡



# 改进贪心

我们发现, 如果  $k = 1$  时最优解为抽  $v_i$ , 那么  $k = 2$  时要么抽  $v_i$  和另一张卡, 要么抽  $v_{i-1} + v_{i+1}$

因为如果  $k=2$  时最优解是抽  $v_{i-1} + v_j$ , 其中  $j \neq i+1$  那么说明  $v_j > v_{i+1}$ , 且  $j$  与  $i$  不相邻, 又因为  $v_i$  是原序列的最大值, 故抽  $v_i + v_j$  一定优于  $v_{i-1} + v_j$ , 矛盾

抽  $v_{i+1} + v_j$  时同理

于是由  $k = 1$  到  $k = 2$  的过程中, 我们要么抽一张和  $v_i$  不相邻的卡, 要么放回  $v_i$ , 抽出  $v_{i-1}$  和  $v_{i+1}$

同理, 如果在  $k = 2$  时选了  $v_{i-1} + v_{i+1}$ , 那么  $k = 3$  时一定再抽一张不相邻的卡, 或者抽  $v_{i-2} + v_i + v_{i+2}$

不难发现我们每次都是在将一个类似于 01010 的串翻转为 10101, 1 和 0 表示抽或未抽

# 改进贪心

于是我们就用堆来维护所有翻转可以获得的最大价值 (可能为负), 并用双向链表来维护序列

每次从堆中取出一个点  $v_i$ , 就将其加入答案, 将  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  从序列中删除, 合并为一个新的点, 权值为  $v_{i-1} + v_{i+1} - v_i$ , 再插入到堆和双向链表中

一共要进行  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  轮这样的操作

总时间复杂度  $O(n \log n)$

注意特判取出的点  $v_i$  位于链表两端的情况, 以及已经从序列中被删除的情况

## 证明显然 (x)

emmm 其实挺复杂的.. 直接感性理解就是对贪心进行了改进, 可以对贪心进行反悔操作, 防止陷入局部最优解..

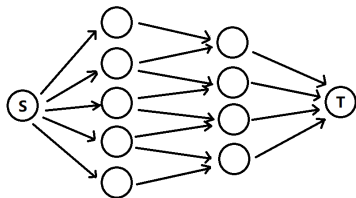
(因为证明太麻烦了所以我本来没打算出这个题.. 但在 GGN 的强烈要求下还是出了.. 他还立了个 flag 说这题没人 AC 他吃点啥 (滑稽))

**GGN 巨神**给出了一个证明, 课后会发给大家

HJQwQ 表示这题本质上是一个**模拟费用流问题**, 也给出了一个证明..

# 与费用流的联系

前置知识: 网络流, 费用流, MCMF 算法  
这道题可以抽象成一个费用流问题  
建图方法如下..



n=8时的费用流建图

中间的每一条边流量上限为 1, 费用为  $v_i$ , 代表原来的一张卡, 有流量就代表要选它

左右的边流量上限为 1, 费用为 0, 保证了相邻两张卡只会选一张  
那么这显然就是一个最大费用流问题

# 与费用流的联系

每次  $k++$  的过程就是费用流的增广过程: 在残量网络中找一条总费用最大的从  $s$  到  $t$  的路径, 然后将这条路径的流量增加 1

由于总费用最大的增广路一定是从  $s$  到第 1 层节点, 然后经过了若干条中间的边, 最后进入  $t$ , 这就等价于找一条翻转价值最大的 01 串

然后将这条路径上每条边的流量  $+1$ , 由于流量上限也是 1, 故这样会将残量网络中路径上的边反向, 等价于将这个 01 串翻转

这样就证明了题解的做法等价于费用流 MCMF 算法的增广过程, 由于贪心沿着最长费用路增广是正确的, 故题解中的也是正确的

我们称这类用堆等数据结构来模拟费用流的增广/退流等操作的问题为**模拟费用流问题**

# 拓展

什么? 为什么 MCMF 算法每次沿着最小费用路增广是正确的?  
时间原因这里就不再赘述.. 有兴趣的同学可以看巨佬的洛谷题解  
大概思路就是先证明消圈定理: 当前流是最小费用流等价于图中无  
负环

然后证明若图中一开始不存在负环, 那么沿着最小费用路增广后也  
一定不会出现负环

# 后记

第二题也讲完惹..

HJQwQ 提醒自己休息一下 qwq

这道题原题是洛谷 P1484

这题是我在广州集训的时候遇到的.. 当时还不会做.. 然后讲完之后觉得自己就是个蒻..

并且这题在很多 OJ 上都出现过很多次.. BZOJ 和洛谷至少各有 3 道一样的题..

我能找到的最早出处大概是 APIO2007 数据备份

后来就被无数集训/模拟赛/OJ 抄了无数次.. 但极难找到这道题的正确性证明.. 我和 **GGN 巨神** 证了好久才证出来

总而言之是一个很经典也很有意思的题 qwq

STL 的优先队列不开 O2 慢的要死..  $n$  只能出到  $2 \times 10^5$ .. 不然本来还想出到  $10^6$ ..

## 测试点 1,2

可以枚举删边, 然后  $O(n!)$  枚举所有可能的路径, 再计算经过这条路径的概率和总长度, 最后算出期望值



## 测试点 3,4,5

令  $g_i$  表示从  $i$  号点开始走经过的路径长度期望值, 则有

$$g_i = \begin{cases} 0, & i \text{ 无出边} \\ \sum_{(i,v) \in E} \frac{w_{(i,v)}}{\sum_{(i,u) \in E} w_{(i,u)}} (g_v + l_{(i,v)}), & i \text{ 有出边} \end{cases}$$

这样就可以枚举删边, 然后每次用拓扑排序暴力 DP, 时间复杂度  $O(m^2)$

# 测试点 6,7

不太清楚有什么乱搞做法 qwq..

# 正解

首先通过一次拓扑排序计算出  $g_i$

然后考虑删边对答案的影响: 删去边  $(u, v)$  只会对经过  $u$  点的路径造成影响, 并且只会对  $u$  点及其前驱的  $g$  值造成影响, 故要重新计算  $g_u$ , 并求出  $g_u$  的变化对总答案的影响, 故我们要求出经过  $u$  点的概率  $f_u$

令  $f_i$  表示从 1 号点出发, 前进路径经过  $i$  号点的概率, 则有

$$f_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \sum_{(u,i) \in E} \frac{w_{(u,i)}}{\sum_{(u,v) \in E} w_{(u,v)}} f_u, & i \neq 1 \end{cases}$$

# 正解

于是我们再用一次拓扑排序算出  $f_i$ , 对一条边  $(u, v)$ , 计算删去它后,  $g_u$  的变化量  $\Delta g_u$ , 总答案  $ans$  的变化量  $\Delta ans = \Delta g_u \times f_u$ , 这样算一次是  $O(1)$  的

然后我们枚举每一条边进行计算, 总答案  $ans$  取最小值即可, 总时间复杂度  $O(m)$

# 后记

终于讲完了 qwq

这道题原题是 [BZOJ3470](#)

原题要保留 6 位小数... 我当时好像卡了好长时间的精度才过  
这个题也是综合了概率和期望的很妙的题..

本来想出另外一道题的.. 但因为太容易搜到题解所以被我毙掉了  
然后正好想到这几天的模拟赛还没出概率期望.. 就想出一道概率期

望

本来打算出一个无向图随机游走的题.. 但 **GGN 巨神** 说那种题太水  
了.. HJQwQ 就只好另外找了这道题.. 结果还是被 **GGN 巨神** 秒了 qwq

emmm 还有就是 double 运算不开 O2 好慢... 本来打算出到  
 $m \leq 2 \times 10^6$  的.. 但试了一下直接就 TLE 了 qwq

# 完结

祝大家身体健康, 再见!