T1 题目讲评

胡晋侨

预期得分分布

- 100分：60人左右
- 60分：20人左右
- <60分：10人左右

实际得分分布

子任务1

- $n, m \leq 10$
- 随便爆搜

子任务2

- $1 \leq h_i \leq 2$
- 显然把1，2间隔排列最优，统计区间内1的数目即可

子任务3

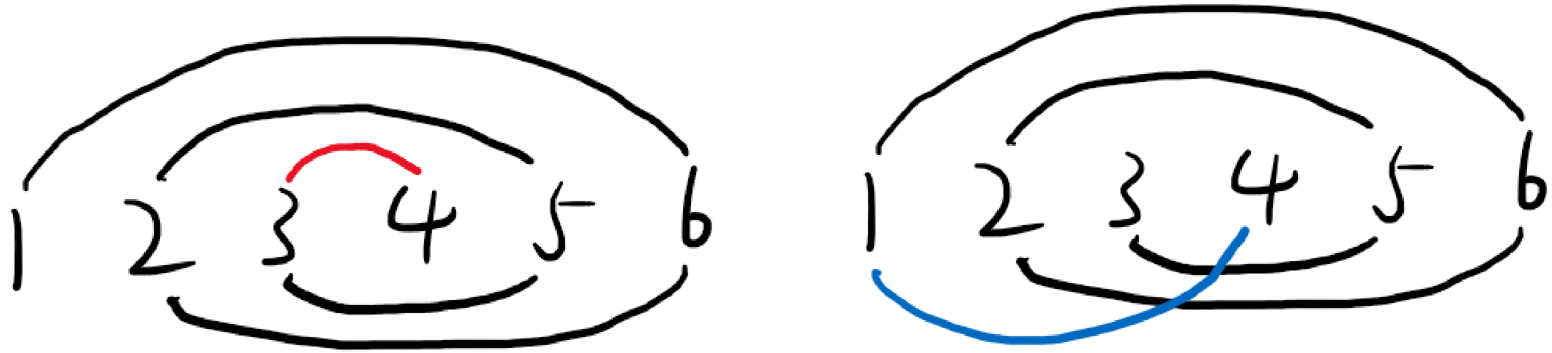
- $1 \leq h_i \leq 3$
- 还剩1和3的话就用13交替排列，否则用12/23交替排列
- 统计区间内1，2，3的数目

子任务4

- 考虑如何将一个区间内的所有数排列使得相邻数差的绝对值之和最大
- 一个直观的感觉：将所有数排序后，从两端向中间依次取数
- 但这样不一定能取得最大值：如1 2 3 4，最优方案是3 1 4 2，和为7；但这样取的话只能得到6
- 但其实已经与最优方案已经非常接近了

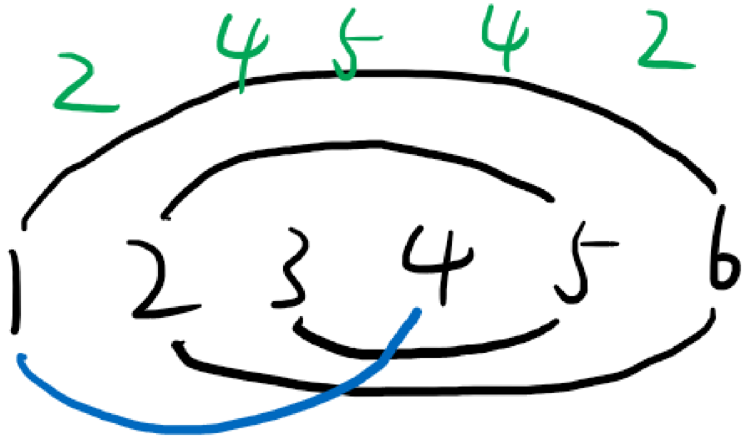
子任务4

- 继续刚刚的思路，不妨先考虑n为偶数的情况
- 替换这样一条边后，得到的是否就是最优解？



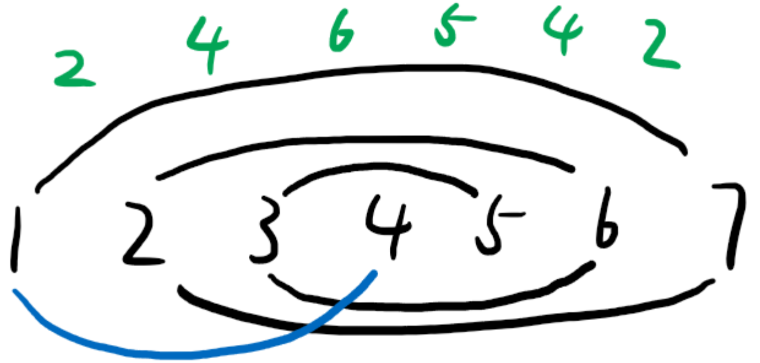
子任务4

- 将所有数排序后，考虑第i个数与第$(i+1)$个数之间的间隔被计算的次数
- 显然，由于每个点度数至多为2，所以跨过某个间隔$(i, i+1)$的边至多只有$2 * \min(i, n-i)$条
- 并且，如果n为偶数，则$\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$这个间隔至多只能被计算$n-1$次（否则至少连了$n$条边，矛盾）
- 不难发现我们刚刚构造的方案达到了这一上界



子任务4

- n为奇数的情况类似，不同的是在理论上界中，中间两个间隔$\left(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}\right)$有一个被计算$(n-1)$次，另一个被计算$(n-2)$次（如果都连了$(n-1)$次的话，所有点的度数都为2，矛盾）
- 也不难构造出达到这个上界的方案
- 令中间两个间隔中较小的一个少计算一次，就是最优解



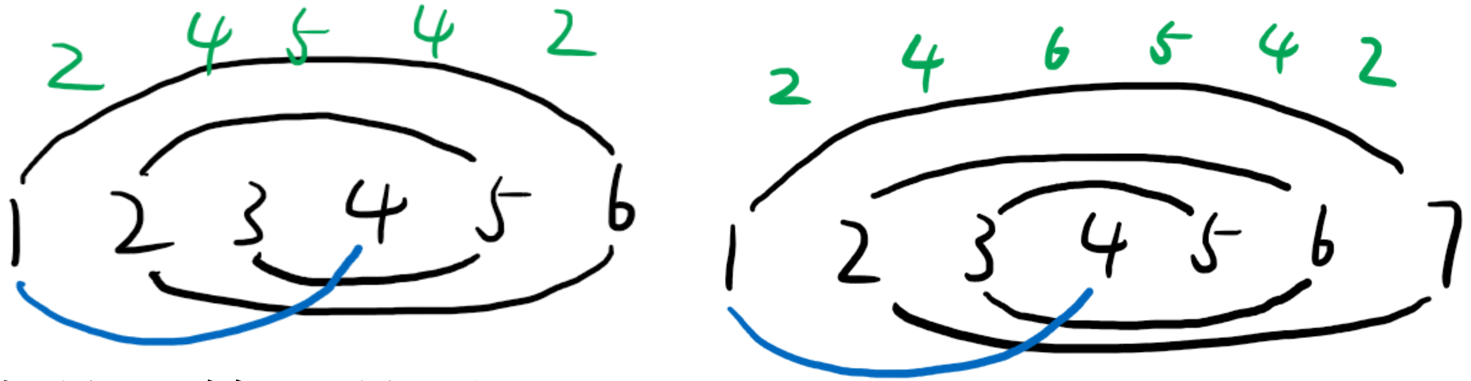
子任务4

- 于是我们可以对于每次询问暴力排序，计算每个间隔的贡献
- 时间复杂度$O(n^2 logn)$

子任务5

- 有了刚刚的结论，考虑如何快速计算答案
- 直观的想法是用平衡树维护所有间隔，再结合莫队计算答案
- 然而时间复杂度$O(n\sqrt{n}\log(n))$，并不能通过此题

子任务5



- 不难发现间隔被计算的次数成等差数列
- 差分数组乘上等差数列之和等价于原数组之和
- 对于偶数的情况，答案就是（所有比中位数大的数之和-所有比中位数小的数之和）*2-最中间的间隔
- 对于奇数的情况，答案就是所有比中位数大的数之和-所有比中位数小的数之和）*2-最中间两个间隔中较小的一个
- 于是可以使用主席树维护值域，就可以在$O(log(maxh_i))$的时间内回答单次询问
- 总时间复杂度$O((n+m)\log(maxh_i))$

总结

- 良心签到题
- 考察了选手构造与证明的能力，以及问题转化的能力
- 本来想加个带修的。。然后觉得硬套数据结构没啥意义就给删了