博弈

Part 0

- 动态规划与诈和

- 给一个无环有向图，一开始在某个点上有一个棋子，两个人人轮流动这个棋子，每次选择一条出边走出去，不能走的输。

- 求先手是否一定有必胜策略。

小题题

- 给你n*m的网格，(1,x), (x,1)的位置标着移到这个位置为胜或者负，然后有一个在(a,b)位置的棋子，Alice和Bob轮流移动，每次可以往左或者往上。

- n,m<=1e5

Solution

- 找规律可以发现两行两列之后每条对角线都是相同的。

AGC 002 E

- 有n堆糖，然后Alice和Bob轮流操作。
- 可以吃完最大的一堆，也可以每堆吃一个。
- 问谁能赢。
- n<=1e5, ai<=1e9

Solution

- 诈和好题。
- 还是每个对角线一样。

k倍减法游戏

- k倍动态减法游戏：有一个整数S（>=2），先行者在S上减掉一个数x，至少是1，但小于S。之后双方轮流把S减掉一个正整数，但都不能超过先前一回合对方减掉的数的k倍，减到0的一方获胜。

- 问：谁有必胜策略。

- S<=1e6

Solution

- 三方->单调性优化到平方->数据结构优化到线性。

Part 1

- 平等博弈(SG函数)

SG函数应该大家都会把?

简单的算SG函数小练习

练习1

- 有一堆石子，两个人轮流取，每次可以取1到k个，谁不能动就算输，问谁会获胜。

Solution

- $sg(i)=i\%(k+1)$

练习2

- 有一堆石子，两个人轮流取，每次可以取l到r个，谁不能动就算输，问谁会获胜。

Solution

- 找规律，选取合适的l, r比如l=3, r=7。
- sg=[0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,0,....]
- 容易发现sg(i)=i % (l+r) / l
- 一般来说，我们可以甚至需要找sg函数的规律。
- 因为sg函数的取值不容易直接思考，并且如果找到了规律一般都可以用数学归纳法证明。

练习3

- 有n堆石子。两个人轮流取，每次可以在一堆石子里面选取任意多的石头，或者把一堆石头分裂成两堆。谁不能操作算输。

Solution

- 一个游戏可以分裂成两个独立的游戏，而两个游戏的整体的sg值为这两个游戏分别的sg值异或起来。
- sg[i]=mex(sg[j],sg[j]^sg[i-j])
- {1,2,4,3,5,6,8,7,….}

练习4

- nim游戏，每次能拿掉一个因子。

Solution

- 找规律发现是__builtin_ctz(x)。

练习5

- nim游戏，每次能拿掉一个互质的数。

CF某题

- 有n个数1~n, 两个轮流选择数字删除，如果x被删除了，那么x^2, x^3, ...也要被一起删除。
- 问先手必胜还是后手必胜。
- n<=10^9

Solution

- 每个幂次(x, x^2,x^3, ..., x^k)都独立，所以可以看成独立的游戏。
- 每个游戏都只和数字的个数k有关，且这里的k<=30。
- 对于单独的k，可以使用状压dp求出sg值，由于k很小所以可以打表。
- 对于x>=sqrt(n)的k都等于1，可以直接判断。
- 时间复杂度O(sqrt(n) log n)

沙雕题

- 有一个1*n的纸条，两个人轮流在格子里画×。
- 谁画了连续的三个×获胜。

Solution

- 一个格子如果填入，那么周围两格都不能放。
- 所以转化成两边独立的游戏，然后求sg值即可。

SPOJ COT3

- 有一个有根树，每次可以选择一个节点，然后把它到根的路径全部删除。问谁会赢。
- n<=1e5

Solution

- sg[x]表示子树x的sg值，枚举删除哪个点，整个树被拆成若干个子树，把这些子树的sg值异或起来然后取mex即可。

- 线段树合并。

PE 306

- 1*n的长条，每个人轮流拿连续两个，求sg值。

Solution

- 1120311033224052233011302110452740
- 1120311033224455233011302110453748
- 1120311033224455933011302110453748
- 1120311033224455933011302110453748

CF 新年的睿智题

- 两个小老弟玩游戏，若干行，每行有三个棋子。
- Alice可以选择一行将左边一个或者两个棋子往右移d步。Bob可以将右边一个或者两个棋子往左移d步。
- 要求移完之后棋子之间顺序不变，要求d是素数或者两个素数的乘积。
- 问谁能赢。
- 1e5行，每行棋子坐标范围在1e5之内。

Solution

- bitset一哈
- 难度全在读题上。

一个数据结构题

- 一个点x可以走到[lx,rx]这段中的一个，求sg值。
- 本质上是一个区间mex问题。

Solution

- 离线，按r排序。
- 然后搞一个线段树记一下每个数出现的最右边的位置。
- 找一个前缀使得min>l。

N阶nim

N 阶 Nim 游戏：有 k 堆石子，各包含 $x_1,x_2\ldots x_k$ 颗石子。双方玩家轮流操作，每次操作选择其中非空的若干堆，至少一堆但不超过 N 堆，在这若干堆中的每堆各取走其中的若干颗石子（1 颗，2 颗…甚至整堆），数目可以不同，取走最后一颗石子的玩家获胜。

结论：当且仅当在每一个不同的二进制位上，$x_1,x_2\ldots x_k$ 中在该位上 1 的个数是 N+1 的倍数时，后手方有必胜策略，否则先手必胜。

Nim3

- 有n堆石头，三个人轮流玩nim。
- 谁拿了最后一步是第一名，倒数第二步是第二名，倒数第三步是第三名。
- 每个人都想玩使得自己的名次最高。

Solution

- 如果所有数字写成二进制表示，然后每位做模3的加法，加起来等于0，那么最后一个玩家获胜。
- 虽然看起来很假，但好像是对的。
- 判断第一个玩家能否获胜只需要看能不能移到必胜态。
- 否则就是B赢。

阶梯nim

- 有n堆石子。两个人轮流取，每次可以在第i堆石子里面选取若干石头放到i-1堆里面。谁不能操作算输。

Solution

- 只需要看第2堆,第4堆,第6堆...石子异或起来是否等于0。
- 因为如果移动奇数编号的石子，那么下一个可以模仿他的行为。

翻硬币

- n枚硬币排成一排，有的正面朝上，有的反面朝上。我们从左开 始对硬币按1~n编号。

- 两个人轮流根据某些约束翻硬币（如：每次只能翻一或两枚，或者每次只能翻连续的几枚），但他所翻动的硬币中，最右边的必须是 从正面翻到反面。

- 谁不能翻谁输。

Solution

- 局面的sg值为局面中每个正面朝上的棋子单一存在时的sg值的异或和。
- 翻硬币可以直接脑补成给这些堆加入硬币。
- 因为如果一个堆有了两个硬币，那么这两个硬币的sg值异或起来也是0，相当于没有硬币。

翻硬币

- 只能翻连续不超过3个。
- 那么sg[i]=mex(0, sg[i-1], sg[i-1]^sg[i-2])
- 高维情况同理。

CF 494 E

- 有一个n*n的棋盘，其中染黑了m个矩形，剩下的是白的。
- 你在上面玩翻硬币，只能翻长度不超过k的正方形。
- 求胜负状态。
- n<=1e9, m<=1e5

Solution

> If we calculated the first values of $g_{i,j}$ one can see a pattern in the Grundy numbers. Then one can prove that $g_{i,j} = min(lowest\_bit(i), lowest\_bit(j), greatest\_bit(k))$ where $lowest\_bit(x) =$ the maximum power of 2 which is
> $greatest\_bit(x) =$ the maximum power of 2 which is not greater than x.

- 来一手矩形并。

翻硬币

- 有一棵有根树，每个节点上有一个硬币。
- 每次可以选择一个正面的硬币，然后在他的所有后代中选择一个子集翻转。
- 谁不能动算输。

Solution

- 每个硬币是独立的，证明同上。
- 只需要求出每个点的sg值即可。
- 通过归纳可得每个点的sg值为2^(到最深叶子的距离)。

砍树游戏

- 给定一一棵有根树，两个人人轮流操作，每次可以选择一一条边删掉它，然后扔掉根不不在的那个连通块，无法操作的输

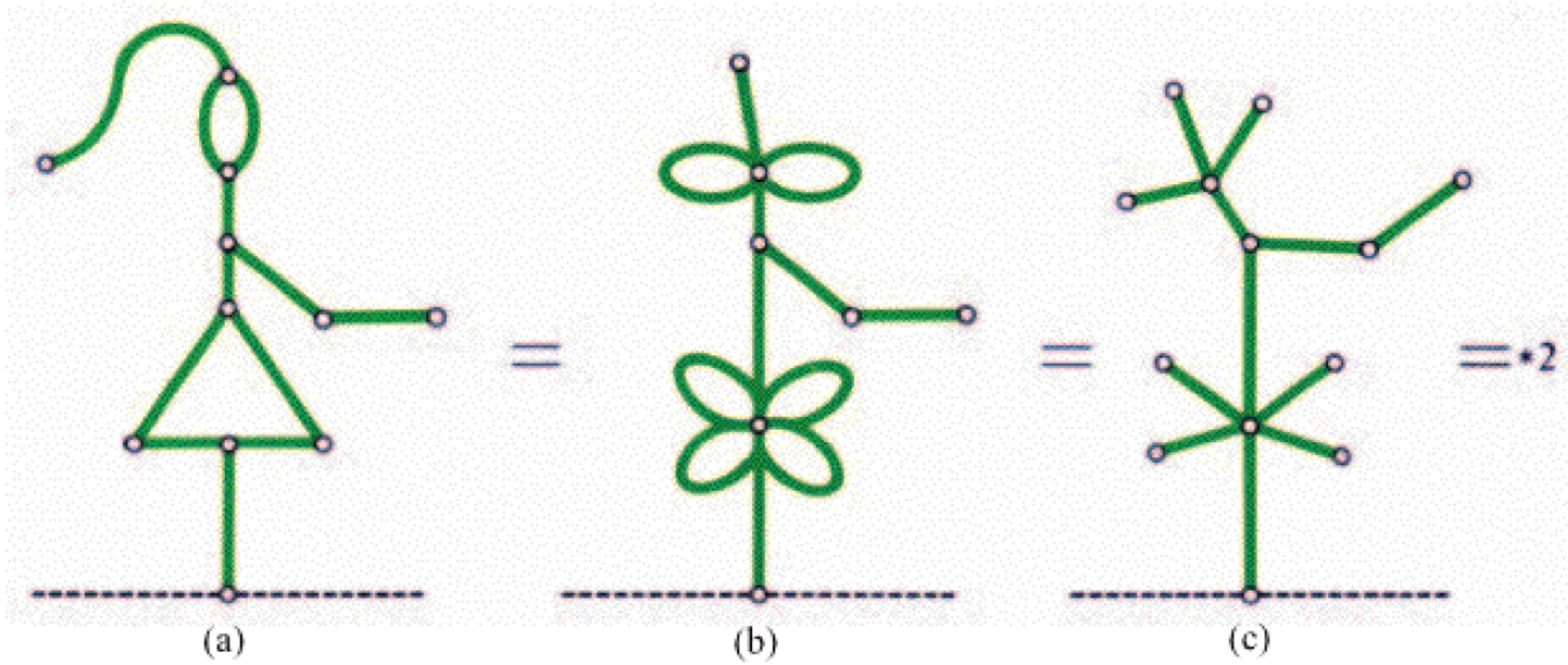
Solution

- 所有儿子sg+1异或起来。

砍树游戏ex

- 给定一一棵有根树，每条边可能是重边。
- 两个人人轮流操作，每次可以选择一一条边删掉它，然后扔掉根不不在的那个连通块，无法操作的输

Fusion Principle



- 你可以把一个环上的边捏起来。
- 可以做任意图。

Anti-SG

- 对于任意一个Anti-SG游戏，如果我们规定当局面中所有的单一游戏的SG值为0时，游戏结束，则先手必胜当且仅当：
- （1）游戏的SG函数不为0且游戏中某个单一游戏的SG函数大于1。
- （2）游戏的SG函数为0且游戏中没有单一游戏的SG函数大于1。

Nim積

$$\mathcal{G}(a,b) = \operatorname{mex}\left\{\mathcal{G}(a',b) \overset{*}{+} \mathcal{G}(a,b') \overset{*}{+} (a',b')\right\}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

Nim积

- Nim积有结合律，交换律，对Nim和(xor)有分配律。

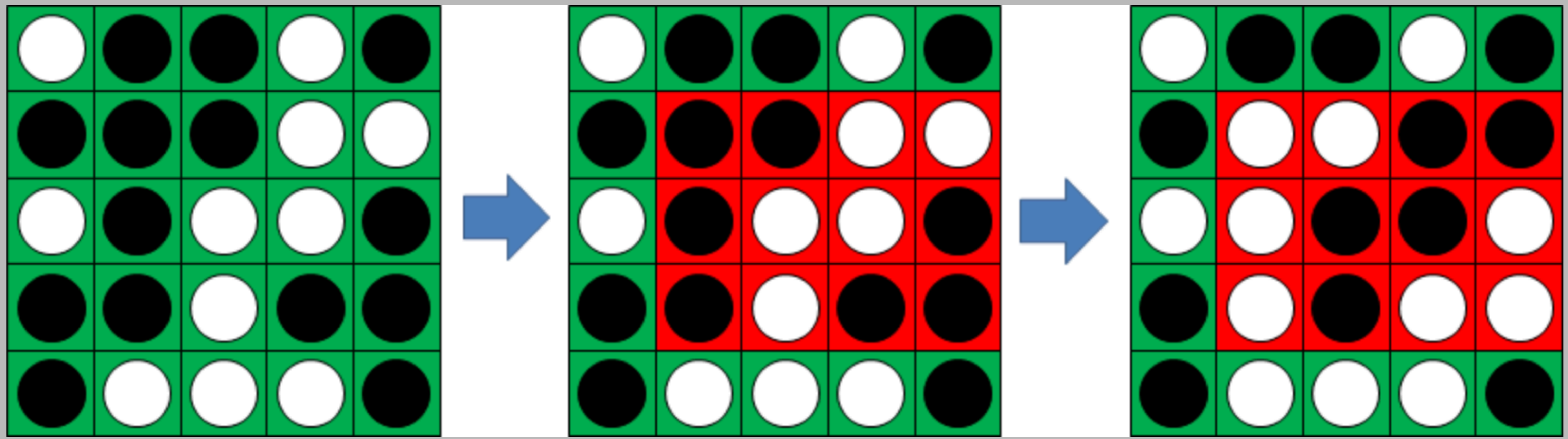
```
int nim(int x,int y);
int _nim(int x,int y){
    if(!x||!y)return 1<<(x+y);
    int &F=f[x][y];
    if(F!=-1)return F;
    int ret=1,e=1;
    for(int i=0;i<16;++i)
        if(((x^y)>>i)&1)e*=1<<(1<<i);
        else if((x>>i)&1)ret=nim(ret,3*(1<<(1<<i))/2);
    return F=nim(ret,e);
}

int nim(int x,int y){
    if(x<2||y<2)return x*y;
    int ret=0;
    for(int i=0;i<16;++i) if((x>>i)&1)
        for(int j=0;j<16;++j) if((y>>j)&1)
            ret^=_nim(i,j);
    return ret;
}
```

小练习

- 翻硬币，可以翻转以这个点为右下角的矩形。

PE459

- the upper right corner of the rectangle contains a white disk
- the rectangle width is a perfect square (1, 4, 9, 16, ...)
- the rectangle height is a triangular number (1, 3, 6, 10, ...)



Players alternate turns. A player wins by turning the grid all black.

Let W(N) be the number of winning moves for the first player on a N by N board with all disks white, assuming perfect play.
W(1) = 1, W(2) = 0, W(5) = 8 and $W(10^2) = 31395$.

Solution

- 求出每行每列单独的sg值，然后乘一下。

Boring Game

- 有一个n*n的棋盘，其中染黑了m个矩形，剩下的是白的。
- 你在上面玩翻硬币。
- 求胜负状态。
- n<=1e9, m<=1e5

Solution

- 扫描线+nim积。
- 为啥毛子不会呢?

Welter Game

- 你有n堆石子，你要玩nim，要求不能有石子个数相同。

Solution

- 很遗憾这是个结论题。
- [a|b]=a xor b-1
- 每次删除最匹配的数对，也就是模2^k同余，其中k最大的数对。
- [a|b|c|d|…]=[a|b] xor [c|d] xor …
- 三堆石子必败的充要条件是(a+1) xor (b+1) xor (c+1)==0

Part 2

- 非平等博弈(surreal number)。
- 看老夫从掏一手WC讲课课件。

Tree

- 有一棵树，Alice可以选择一个任意点染黑，然后Alice和Bob可以任选一个与Alice点相邻的点染上自己的颜色。

Solution

- 考虑树形dp。
- 一个叶子是{0|0}=*，否则就是{儿子的和|0}。
- 如果儿子是奇数个*，那么这个节点的值变成down。
- 所以先手会走向小于0的态，后手会走向0，节点的值始终小于0。
- 先手必胜当且仅当每个点的儿子都是偶数。

CF 1033G

- 有若干堆石子，alice可以拿掉A个，bob可以拿掉B个，问Alice/Bob先手，谁赢。

Solution

1. $0 \leq v_i' < a$: As neither Alice nor Bob can make a move, this is a zero game ($P = 0$).
2. $a \leq v_i' < b$: Alice can take at least one move in this pile, and Bob none. This is a strictly positive game ($P > 0$).
3. $b \leq v_i' < 2a$: If either of the players makes a move, it changes to a zero game. This is thus a fuzzy game ($P || 0$). Note that this interval may be empty.
4. $\max(2a, b) \leq v_i' < a + b$: If Alice makes a move, she can turn this game into a positive game for her. Bob can turn this into a zero game. This is a fuzzy game ($P || 0$).

As we see, there are no negative games. Hence, in the combined game, we can ignore the zero games in our calculation (type 1) and if there is at least one positive game (type 2), the game is won for Alice. If there is at least one game of type 4 and Alice starts, or at least two games of type 4, Alice can always play one of them to make herself a positive game, thus winning. Otherwise, it is always optimal to play in a game of type 3 or 4 if there is one, and the game is subsequently turned into a zero game. The parity of the number of these games thus determines whether the starting player wins or loses.

Part 3

- 杂题

经典题

- 你有一个无向图，Alice和Bob轮流移棋子，不能移到相同的点上。
- 问先手是否必胜。
- NOI 2011兔兔与蛋蛋

Solution

- 看是否一定在最大匹配上。

经典题2

- 你有一个二分图，Alice和Bob轮流移棋子，不能移相同的边。
- 问先手是否必胜。
- https://codeforces.com/gym/100886/problem/B

Solution

- 对于右边的点，如果存在左边的一个点集S满足每个点度数都是偶数，那么必胜。
- 所以只需要判v这个点所在的行在不在其他点的线性基里面即可。

CF 1110 G

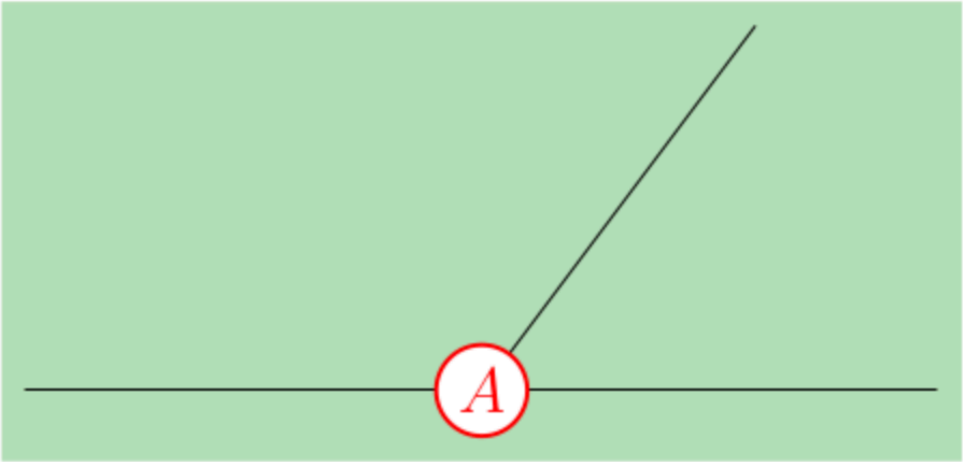
- Alice和Bob在树上下三子棋，树上已经放了一些Alice的棋子，问Alice先手是否必胜。

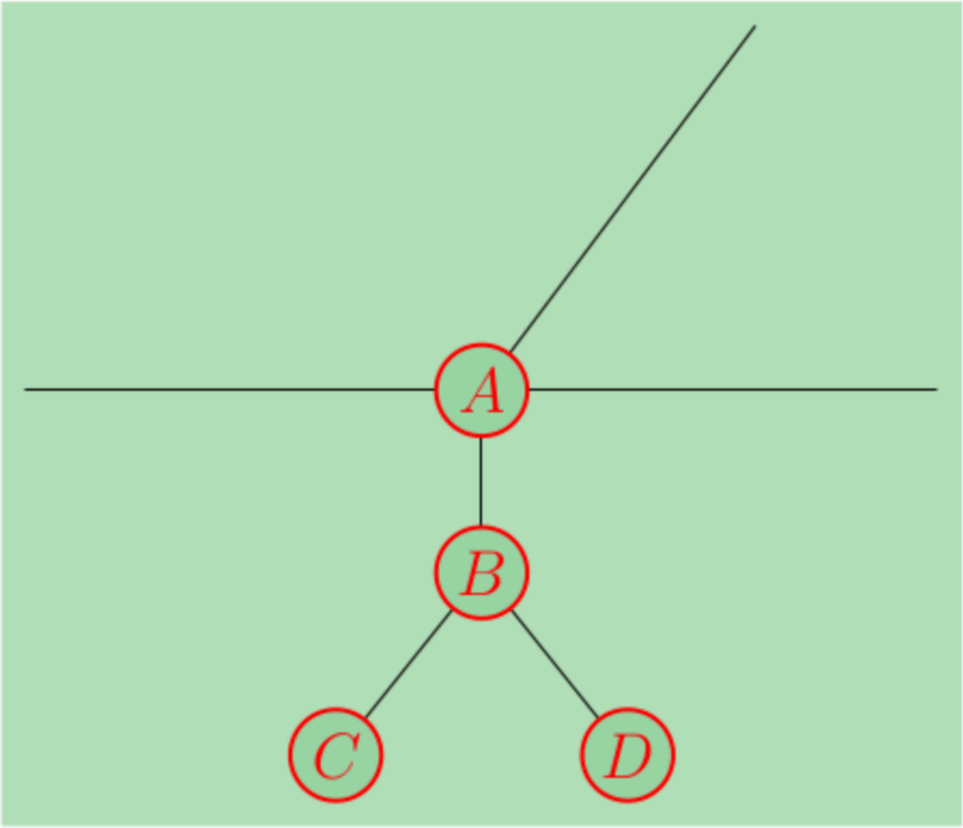
Solution

- 考虑没有Alice的棋子。
- 如果有个点度数=4，必胜。如果一条链必败。
- 如果存在三度点并且有1,2,2的形状，必胜。
- 如果三度点连出了两个叶子+一条链，必败。
- 只剩一种情况。

Solution

- 等价，所以判断奇偶即可。





CF 794E

- 有n个数，每次可以拿开头或者结尾。
- Alice想要剩下的数最大，Bob想要最小。
- 问最后是哪个数。

Solution

- 假设我们二分了答案。Alice要拿1，Bob要拿0。
- 然后我们观察一下dp数组，跑一层之后每个主对角线是一样的。
- n is even and one of the two middle numbers is 1.
- n is odd, the middle digit is 1 and at least one of the digits beside the middle digit is 1 (unless n=1, for which first players wins when the only carrot is labelled 1)

CF 388C

- 有若干排石子，每排石子都有若干堆。
- Alice可以选一排，拿最左边的，Bob可以选一排，拿最右边的。
- 最大化自己的石子总数。

Solution

- 如果都是偶数的话，那么两人会各拿一半，因为Alice能保证自己的分>=左边的一半，Bob能保证自己>=右边的一半。

- 否则按顺序从大到小拿中间的。

AGC 010 F

- 你有一棵树，每个节点有若干个石头。
- Alice，Bob玩游戏，你一开始可以放一个棋子在某个节点，然后每次操作在棋子所在的节点移除一个石头，然后移向相邻的节点，谁不能动算输。
- 问每个位置是否为必胜态。
- n<=3000

Solution

- 当Au>Av的时候那么你能强行把棋子推到v节点。
- 如果v是必败态，那么u就是必胜态。
- 否则u一定是必败态。

AGC 026F

- 有n个盒子，每个盒子里面有ai的分数。
- 轮流移动，选择一个与上一步选择的盒子相邻的并且没被选的盒子，如果没有选择那么就任选一个。
- Alice和Bob都想要最大化自己的分数。

Solution

- 将它黑白染色，如果n是偶数，那么先手至少能拿到max(B,W)，后手至少能拿到min(B,W)。
- 否则先手还是至少能拿到B的分数，并且先手如果选了个B的格子，那么后手至少能拿到W。

Solution

- 所以我们写出暴力的式子，dp[l][r]表示l,r这段区间最多能拿多少。
- 我们要么直接那W-B，要么枚举一个B，然后dp下去。
- 整理式子，二分答案，等价于判是否可达。

PA 2009 Terminal

- 有n个石子，Alice和Bob轮流选，每次可以选一堆与0相邻的石子，最大化自己的分数。
- n<=1e6

Solution

- 如果都是递减，那么一定从大到小选。
- 否则将a<=b>=c换成a+c-b，然后两头如果a>=b，那么直接根据奇偶性分配。