省选模拟赛题解

King_George

2019.3.

图

考虑如何计数。

不难发现对于一个点 u，和它相邻的比它大的任意两个点颜色肯定不同。

图

考虑如何计数。

不难发现对于一个点 u，和它相邻的比它大的任意两个点颜色肯定不同。

从大到小给每个点染色，那么每个点染色的方案数就是 $n-$ 比它大的和它相邻的点的个数。乘法原理一下就可以得到答案了。

问题变成怎么求点的度数。

图

考虑如何计数。
不难发现对于一个点 u，和它相邻的比它大的任意两个点颜色肯定不同。
从大到小给每个点染色，那么每个点染色的方案数就是 $n-$ 比它大的和它相邻的点的个数。乘法原理一下就可以得到答案了。
问题变成怎么求点的度数。

图

从小往大枚举三元组里的 a，找到所有三元组，按这样的顺序就可以得到最终的图。

图

从小往大枚举三元组里的 a，找到所有三元组，按这样的顺序就可以得到最终的图。
可以发现对于最终图中 u 与 v 有边，当且仅当在原图中存在一条 u 到 v 的路径使得路径中间的点 $< min(u, v)$。

图

从小往大枚举三元组里的 a，找到所有三元组，按这样的顺序就可以得到最终的图。

可以发现对于最终图中 u 与 v 有边，当且仅当在原图中存在一条 u 到 v 的路径使得路径中间的点 $< min(u, v)$。

按从小往大的顺序依次加点，加完点后维护当前的联通块情况以及每个联通块向外连的邻居。扫到 i 时，i 所在联通块邻居个数就是 i 的度数。实现可以用启发式合并 $O(nlog^2 n)$ 或者线段树合并 $O(nlogn)$。

因数分解

考虑没有 b_i 不同的限制怎么做。把 $n!$ 质因数分解一下，对每个质因数 p^q 的 q，dp出 $\sum a_i \cdot x_i = q$ 的解的个数，然后乘起来。dp时对每一堆相同的 a_i 求一下方案数，然后跑个背包就是分解 q 的方案数。

因数分解

考虑没有 b_i 不同的限制怎么做。把 $n!$ 质因数分解一下，对每个质因数 p^q 的 q，dp出 $\sum a_i \cdot x_i = q$ 的解的个数，然后乘起来。dp时对每一堆相同的 a_i 求一下方案数，然后跑个背包就是分解 q 的方案数。
有 b_i 不等的限制就容斥一下，枚举哪些 b 相等，类似于搜划分数。复杂度 $O($ 跑得过 $)$。

求和

$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\binom{i}{j}\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]\cdot[j\equiv 0 \pmod 2] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}[x^j](x+1)^i\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]\cdot[j\equiv 0 \pmod 2] = \sum_{j=0}^{M}[j\equiv 0 \pmod 2]\cdot[x^j]\sum_{i=0}^{N}(x+1)^i\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]$。

求和

$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} \binom{i}{j} \cdot [i \equiv 0 \pmod 2] \cdot [j \equiv 0 \pmod 2] = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} [x^j](x+1)^i \cdot [i \equiv 0 \pmod 2] \cdot [j \equiv 0 \pmod 2] = \sum_{j=0}^{M} [j \equiv 0 \pmod 2] \cdot [x^j] \sum_{i=0}^{N} (x+1)^i \cdot [i \equiv 0 \pmod 2]$。
将 N 变为偶数，令 $F(x) = \frac{(x+1)^{N+2}-1}{(x+1)^2-1}$，则所求即为 $\sum_{i=0}^{M} [i = 0 \mod 2]\ [x^i]F(x)$。

求和

$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\binom{i}{j}\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]\cdot[j\equiv 0 \pmod 2] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}[x^j](x+1)^i\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]\cdot[j\equiv 0 \pmod 2] = \sum_{j=0}^{M}[j\equiv 0 \pmod 2]\cdot[x^j]\sum_{i=0}^{N}(x+1)^i\cdot[i\equiv 0 \pmod 2]$。

将 N 变为偶数，令 $F(x)=\frac{(x+1)^{N+2}-1}{(x+1)^2-1}$，则所求即为 $\sum_{i=0}^{M}[i=0 \mod 2]\,[x^i]F(x)$。

考虑如何做除法，令

$a_i=[x^i](x+1)^{N+2}$, $b_i=[x^i]F(x)$, $K=s\,2^t$, $s=1 \mod 2$，

如果分别求出 ans 对 s，2^t 取模的值就可以通过 CRT 合并来解决。

求和模 s 意义下的结果

由于 $gcd(s, 2) = 1$，所以在模 s 意义下存在 2 的逆元 2^{-1}，所以 $b_0 = a_1 2^{-1}$，$b_i = (a_i - b_{i-1}) 2^{-1} \ (i > 0)$。

求和模 2^t 意义下的结果

可以发现 $b_i = \sum_{j \geq i+2} (-2)^{j-(i+2)} a_j$，当 $j - (i+2) \geq t$ 时 $(-2)^{j-(i+2)} a_j = 0 \mod 2^t$，所以只用计算 $j < t + i + 2$ 即可。