正睿 2019 省选十连测 Day7题解

A. 【19省选7】算术表达式

令 $f[i][j]$ 表示有几个表达式满足长度为 i，且值为 j

有一个 naive 的 DP 转移是：每次按照题目中给定的规则，把两个表达式拼起来转移，也就是 $f[i][j] \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{t=0}^{M-1} f[k][t] * f[i-k-1][j-t]$

$f[i][j] \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{t=0}^{M-1} f[k][t] * f[i-k-1][j+t]$

以此类推

但是这样是错的，因为本题中有减法，所以会有比较蛋疼的情况

例如表达式 A 是 $1+2$，值是 3

表达式 B 是 $1-2$，值是 1

那么用减号拼起来的话 $A-B=1+2-1-2$，值是 0，而不是 2

这是因为减法比较奇怪

所以我们要开两个 DP 数组，令 $g[i][j]$ 表示长度为 i 的值为 j 的没有被括号括起来的表达式的个数，令 $f[i][j]$ 表示最外层有一对括号的表达式个数，转移的话：$g[i][j]$ 是每次往后面加上一个 +或- 和一个被括号包含的表达式，

$f[i][j]$ 则是在最外面加括号就行了

特别地，纯数字表达式我们也归到 $f[i][j]$ 里

这样时间复杂度是 $O(n^2m^2)$

B. 【19省选7】树与深度的故事

考虑令 d_i 表示有几个 a_j 满足 $a_j \geq d_i$

考虑有根树是一个按深度分层的结构，所以我们考虑倒着一层一层加到树上

令 $f[i][j][k]$ 表示，我已经加好了深度 $i \dots n$ 的点，且一共加了 j 个点，且深度为 i 的点的个数是 k 个

转移则考虑深度为 $i-1$ 的点的个数，设为 p 个，则要求 $p+j \leq d_{i-1}$

我们先考虑这 p 个点的选择方案，肯定是从满足 $a_j \geq i-1$ 的 d_{i-1} 个点里去选，然后那 d_{i-1} 个点中已经有 j 个被我们选了（因为我们是倒着一层层加入的），所以方案数是 $C_{d_{i-1}-j}^{p}$

然后还有一个东西要算，因为每个深度为 i 的点的父亲都是深度为 $i-1$ 的，所以我们还要给那 k 个点认爹

如果只是普通的有根树，那么认爹的方案数是 p^k，但是本题中对于儿子还有顺序要求。我们考虑按照任意顺序将 那 p 个点的儿子序列首尾相接，那么可以得到一个 k 个点的排列，那我们计算方案时可以考虑 k 个点的任意一个排列，然后将它分成可以有空的 p 段，第 b 段就是深度为 $i-1$ 的 p 个点中第 b 个的儿子序列，所以这里的方案数是 $k!C_{k+p-1}^{p-1}$

时间复杂度：$O(n^4)$

C. 【19省选7】异或函数的值域

首先 $f(a_1,a_2...a_n)=2^{n-1}(a_1\ or\ a_2\ or....\ or\ a_n)$，这个结论非常显然，留给大家自己去证明

问题变成了有 n 个数，每个数都在 $[l,r]$ 内，求他们的或有几种可能，接下来讨论 $n\ge 2$ 的情况

首先，如果 l,r 的最高位相同的话，我们可以直接同时减掉，且不会影响答案

现在假设 r 的最高位是 2^i，且 $l<2^i$

首先或的可能范围是 $[l,2^{i+1}-1]$

那么这个范围中有哪些数是一定不可能被表示的呢?

我们考虑 r 的次高位是 2^j

如果 $x\in[l,2^{i+1}-1]$

如果 $x<2^i$，那么必有 $l\le x\le r$，所以一定能拼

所以不能被表示的 x 一定满足最高位是 2^i

接下来我们设 $x=x'+2^i$

首先我们可以令 $a_1=2^i$，这样我们就只需要表示 x' 了，而 x' 的范围是 $[0,2^i-1]$

如果 $x'\ge l$，那么直接选 $a_2=x'$，这样必有 $l\le x'\le r$，那么直接合法了

如果 $x'<2^{j+1}$，如果 $x'\le 2^j$，则令 $a_2=x'+2^i$就行，否则令 $a_1=2^i+2^j$，然后令 $a_2=2^i+x'-2^j$，显然这两个数都在范围内

所以不合法的 x' 的范围是 $[2^{j+1},l)$，接下来要证明的是这个范围内的 x' 一定不合法

因为 $x'\ge 2^{j+1}$，考虑 x' 的最高位是 2^k，那么 $2^i+2^k>r$，而 $2^k<l$，所以这一位没法被表示