马尔可夫链

汪超男

C_WANG@JNU.EDU.CN

马尔可夫链

- 随机过程
- 马尔可夫链的定义
- C-K方程
- 状态的分类
- 长程性质和极限概率

3 随机过程

- 一个随机过程（stochastic process）$\{X(t), t \in T\}$是随机变量的一个集合
  - 集合T称为此过程的指标集（index set）或参数集
  - 每个$t \in T$称为一个参数
  - 对于每个$t \in T$，$X(t)$是随机变量
  - 指标t常常解释为时间，作为结果，认定$X(t)$为过程在时间t的状态（state）
  - 描述了某个（物理）过程经历的时间发展
- 随机过程的状态空间（state space）为随机变量$X(t)$所有可能取的值的全体

随机过程实例

- （随机游动）一个醉汉在路上行走，以概率p前进一步，以概率$1-p$后退一步（假定其步长相同）。以$X(t)$记他t时刻在路上的位置，则$\{X(t)\}$就是直线上的随机游动
- （Brown运动）英国植物学家Brown注意到飘浮在液面上微小粒子不断进行无规则的运动，这种运动后来称为Brown运动。若以$\big(X(t),Y(t)\big)$表示粒子的平面坐标上的位置，则它是平面上的Brown运动
- （排队模型）顾客来到服务站要求服务。当服务站中的服务员都忙碌，即服务员都在为别的顾客服务时，来到的顾客就要排队等候。顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的，所以如果用$X(t)$表示t时刻的队长，用$Y(t)$表示t时刻到来的顾客所需的等待时间，则$\{X(t),t\in T\}$，$\{Y(t),t\in T\}$都是随机过程

随机过程的分类

- 当T是可数集时，随机过程称为离散时间（discrete time）过程
  - $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$是一个以非负整数为指标的离散时间随机过程
- 当T是一个实数区间，随机过程称为连续时间（continuous time）过程
  - $\{X(t), t \geq 0\}$是一个以非负实数为指标的连续时间随机过程
- 参数通常称为时间（time），离散的状态过程通常称为链（chain）
  - Discrete **time**, stochastic **chain**
  - Continuous **time,** stochastic **chain**
  - Discrete **time**, continuous state process
  - Continuous **time**, continuous state process

		Index Set T	
		Discrete	Continuous
State Space	Discrete	1. Discrete parameter Discrete state	2. Continuous parameter Discrete state
	Continuous	3	4

随机过程实例

- Number of commands received by a time-sharing system during time interval $(0\ , t1)$
  - $\{X(t), 0 < t < t1\}$
  - Type?
- Number of students attending the nth lecture
  - $\{X_n, n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$
  - Type?
- Average time to run a batch job at a computing center on the nth day of the week.
  - $\{X_n, n = 1, 2, 3, 4, \dots, 7\}$
  - Type?
- The waiting time of an inquiry message that arrives at time t, until processing is begun
  - $\{\ X(t), t \geq 0\}$
  - Type?

马尔可夫链

- ✓ 随机过程
- 马尔可夫链的定义
- C-K方程
- 状态的分类
- 长程性质和极限概率

马尔可夫链的定义

- 令$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$为有限个值或者可数个可能值的随机过程（若不另外说明，以非负整数集$\{0, 1, 2, \dots\}$来表示）
- $X_n = i$表示该过程在时刻n在状态i，称$\{0, 1, 2, \dots\}$为该过程的状态空间
- 对任意的$n \geq 0$，及任意状态$i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$，有

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

- 这样的随机过程称为马尔可夫链（Markov chain）

给定过去的状态$X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$及现在的状态X_n，将来的状态X_{n+1}的条件分布与过去的状态独立，只依赖于现在的状态。

转移概率

- 一步转移概率（one-step transition probability）
  - 条件概率$P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$为马尔可夫链$\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$的一步转移概率，简称转移概率，记为P_{ij}，它代表处于状态i的过程下一步转移到状态j的概率
  - 一般情况下，转移概率与状态i,j和时刻n有关
  - 以$\boldsymbol{P}$记一步转移概率P_{ij}的矩阵，简称转移矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}\geq 0, i,j\geq 0; \sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}=1, i=0,1,\dots$$

例1：（天气预报）假设明天下雨的机会只依赖于前一天的天气的条件，即今天是否下雨，而不依赖过去的天气条件。如果今天下雨，那么明天下雨的概率为α，如果今天没有下雨，那么明天下雨的概率为β。以X_n记第n天的天气状态，求转移概率矩阵，并画出状态转移图。

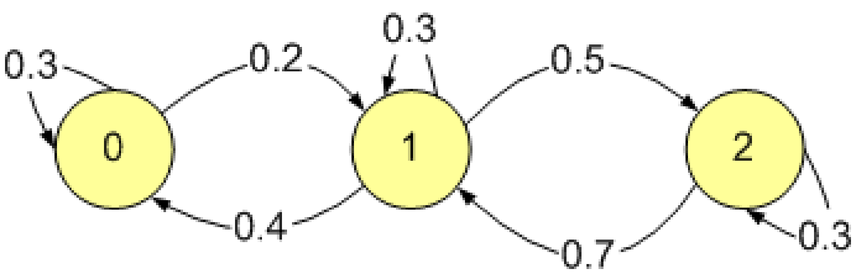
例2：在任意给定的一天，加里的心情或者是快乐的（C），或者是一般的（S），或者是忧郁的（G），如果今天他是快乐的，则明天他分别以概率$0.5, 0.4, 0.1$是C, S, G，如果今天他感觉一般，则明天他分别以概率$0.3, 0.4, 0.3$为C, S, G，如果今天他是忧郁的，则明天他分别以概率$0.2, 0.3, 0.5$为C, S, G。以X_n记加里在第n天的心情，求转移概率矩阵，并画出状态转移图。

例3：（自由随机游动）如果对于某个数$0 < p < 1$，$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$，该马尔可夫链称为随机游动，可以想成一个在直线上行走，在每一个时间点以概率p向右走一步，或者以概率$1 - p$向左走一步，求其转移概率矩阵，并画出状态转移图。

例4：（赌博模型）考察一个赌徒，在每局中赢1美元的概率为p，输1美元的概率为$1 - p$，如果我们假设他在破产时或者在财富达到N美元时离开，那么赌徒的财富是一个马尔可夫链，$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$，$P_{0,0} = P_{N,N} = 1$，状态0，$N$称为吸收态，该马尔可夫链称为具有吸收壁的有限状态的随机游动，求其转移概率矩阵，并画出状态转移图。

练习

- Consider a discrete-time "Markov chain" expressed by the following state transition diagram



- Set up the one-step state transition probability matrix P of the "Markov chain".
- Is this a valid Markov chain? If not, make the least changes without adding more transitions to make the Markov chain become valid.

C-K方程

- n步转移概率$P_{ij}^{(n)}$：处于状态i的过程将在n次转移后处于状态j的概率

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+k} = j | X_k = i\},\quad n \geq 0,\quad i,j \geq 0$$

- C-K方程（查普曼-科尔莫戈夫方程）提供了计算n步转移概率的一个方法

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \quad \text{对于一切} m,n \geq 0\text{，一切} i,j$$

- 如果以$\boldsymbol{P}^{(n)}$记n步转移概率$P_{ij}^{(n)}$的矩阵，那么$\boldsymbol{P}^{(n+m)} = \boldsymbol{P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{P}^{(m)}$

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n-2)} = \cdots = \boldsymbol{P}^{n}$$

  - n步转移概率矩阵由$\boldsymbol{P}$自乘n次得到

例：（天气预报）假设明天下雨的机会只依赖于前一天的天气的条件，即今天是否下雨，而不依赖过去的天气条件。如果今天下雨，那么明天下雨的概率为α；如果今天没有下雨，那么明天下雨的概论为β。令$\alpha = 0.7$，$\beta = 0.4$，假定今天下雨，计算第4天下雨的概率。

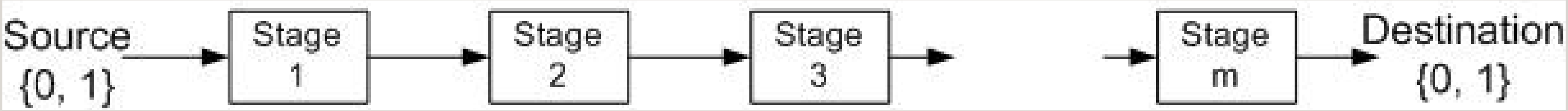
例：假设今天是否下雨依赖于前两天的天气条件。如果过去的两天都下雨，那么明天下雨的概率为0.7；如果今天下雨，但昨天没有下雨，那么明天下雨的概率为0.5；如果下雨，但今天没有下雨，那么明天下雨的概率为0.4；如果过去的两天都没有下雨，那么明天下雨的概率为0.2。已知星期一与星期二下雨，问星期四下雨的概率是多少？

例：在瓮中总含有两个球，球的颜色有红色和蓝色，每个时期随机地取出一个球，并且放回一个新球，新球的颜色以0.8的概率与取的球同色，而以0.2的概率为相反的颜色，如果开始时两个球都是红色，求第五次取到的球是红色的概率。

例：假定球逐个地被分配到8个瓮中，各球以相等的可能放到其中任意一个瓮中；问在分配9次后，其中恰有3个瓮不是空的概率是多少？

练习

- A communication system transmits the digit 0 and 1 through several stages. At each stage, there is a probability of 0.75 that the output will be the same digit as the input.



- What is the probability that a 0 that is entered at the first stage is output as a 0 from the 4th stage?

作业

- 2，3，4，8
- 第4题写出状态转移矩阵
- 第8题画出状态转移图

马尔可夫链

- ✓ 随机过程
- ✓ 马尔可夫链的定义
- ✓ C-K方程
- <u>状态的分类</u>
- 长程性质和极限概率

状态的可达与互通

- 若存在$n \geq 0$使得$P_{ij}^{(n)} > 0$，状态j称为是从状态i可达的（accessible），记为$i \rightarrow j$
  - 如果状态j不是从状态i可达的则

$$P\{\text{进入状态}j|\text{开始在状态}i\} = 0$$

- 若$i \rightarrow j$，并且$j \rightarrow i$，称状态i和j互通（communicate），记为$i \leftrightarrow j$
- 互通关系满足三个性质
  - 自返性：$i \leftrightarrow i$
  - 对称性：$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$
  - 传递性：$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$

马尔可夫链的可约

- 两组互通的状态称为在同一个状态类（class）中
  - 同在一类的状态应该都是互通的
  - 任何一个状态不能同时属于两个不同的类
- 若马尔可夫链只存在一个类，则称它是不可约的（irreducible），否则称为可约的（reducible）
  - 只有一个类的马尔可夫链所有的状态彼此互通

例： 考虑由$0,1,2$三个状态组成的马尔可夫链，其转移概率矩阵如下，是否可约?

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

例： 考虑由$0,1,2,3$四个状态组成的马尔可夫链，其转移概率矩阵如下，是否可约?

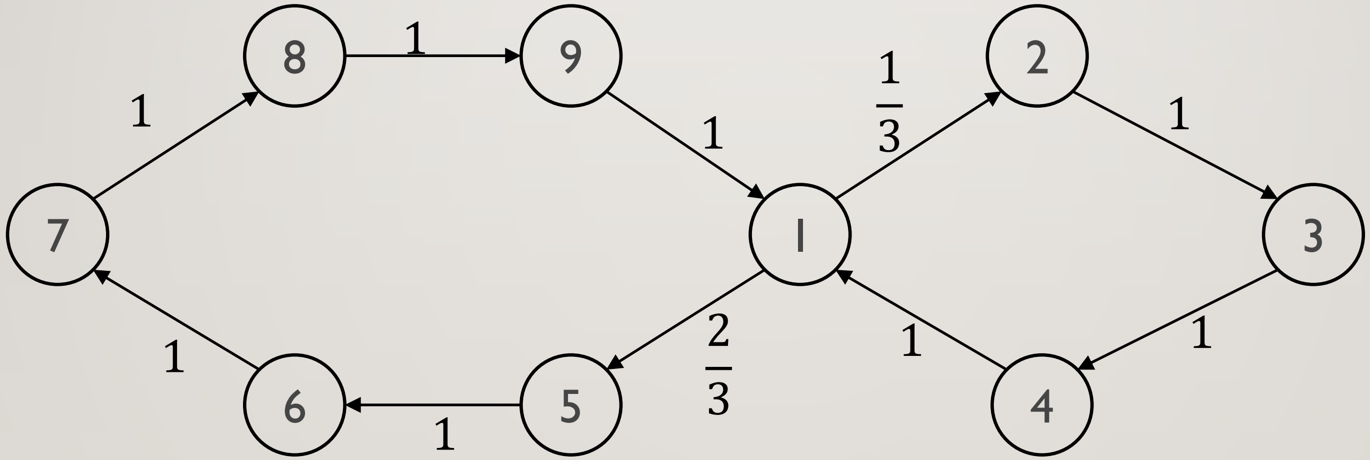
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

状态的周期

- 若集合$\left\{n: n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\right\}$非空，则称该数集的最大公约数$d(i)$为状态$i$的周期（period）
- 若$d(i) > 1$，称状态i为周期的（periodic）
- 若$d(i) = 1$，称状态i为非周期的（aperiodic）
- 若状态i，j同属一类，则$d(i) = d(j)$
- 如果马尔可夫链的每个状态的周期都为1，则称该马尔可夫链为非周期的

例： （自由随机游动）如果对于某个数$0 < p < 1$，$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$，状态0是否为周期的？如果是周期的，周期为多少？

例： 对于下图所示的马尔可夫链，状态1是否为周期的？如果是周期的，周期为多少？



首达时间与概率

- 首达时间T_{ij}：从状态i出发首次到达状态j的时间

$$T_{ij} = \min\{n: n \geq 1, X_n = j, X_0 = i\}$$

  - T_{ii}：从状态i出发首次回到状态i的时间

- 首达概率$f_{ij}^{(n)}$：从状态i出发经n步首次到达状态j的概率

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n | X_0 = i\} = P\{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i\}$$

- 从状态i出发经有限步首次到达状态j的概率为

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

例： 设系统有三种可能状态$S=\{1,2,3\}$。“1”表示系统运行良好， “2”表示运行正常， “3”表示系统失效，以X_n表示系统在时刻n的状态，并设$\{X_n,n\geq 0\}$是一马尔可夫链，在没有维修更换条件下，其自然转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{17}{20} & \frac{2}{20} & \frac{1}{20}\\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算$f_{13}^{(1)}$， $f_{13}^{(2)}$。

常返态与暂态

- f_{ii}：从状态i出发首次回到状态i的概率
- 若$f_{ii} = 1$，称i为常返态（recurrent state）
- 若$f_{ii} < 1$，称i为非常返态，也称暂态或瞬时状态（transient state）
- 如果状态i为常返态，那么开始在状态i的过程将一再地进入i
  - 开始在状态i的过程处于状态i的时间周期（time periods）的期望数是无穷的
- 如果状态i为暂态，开始在状态i的过程第n次离开状态i并不再进入状态i的概率为$f_{ii}^{n-1}(1 - f_{ii}), n \geq 1$，即随机变量$n$符合几何分布，期望值为$\frac{1}{1-f_{ii}}$
  - 开始在状态i的过程处于状态i的时间周期的个数是一个有限均值为$\frac{1}{1-f_{ii}}$的几何分布

状态的性质

- 状态i是

常返态，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

暂态，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

- 一个有限状态马尔可夫链中不可能所有的状态都是暂态
- 如果状态i是常返态，而$i \leftrightarrow j$，那么状态j是常返态
- 如果状态i是暂态，而$i \leftrightarrow j$，那么状态j是暂态
- 由上面三个性质可得，有限不可约马尔可夫链的所有状态都是常返态

例： 由状态$0, 1, 2, 3$组成的马尔可夫链有转移概率矩阵，确定哪些状态是暂态，而哪些状态是常返态

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例： 由状态$0, 1, 2, 3, 4$组成的马尔可夫链有转移概率矩阵，确定哪些状态是暂态，而哪些状态是常返态

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

正常返与零常返

- 如果$f_{ii} = 1$，记$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$，则$m_i$表示从状态$i$出发回到状态$i$的平均回转时间（mean recurrence time）或期望转移次数
- 若$m_i < \infty$，称i为正常返的（positive recurrent）
  - 若i正常返，且$i \leftrightarrow j$，j正常返
- 若$m_i = \infty$，称i为零常返的（recurrent null）
  - 若i零常返，且$i \leftrightarrow j$，j零常返
- 如果状态i为正常返的且非周期的，则称状态i为遍历状态

例： 设马尔可夫链的$S=\{0,1,2,3\}$，转移概率矩阵如下，判断每个状态是否遍历。

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}
$$

马尔可夫链

- ✓随机过程
- ✓马尔可夫链的定义
- ✓C-K方程
- ✓状态的分类
- 长程性质和极限概率

长程时间比例

- 若i是常返的，且i和j互通，则$f_{ij} = 1$
- 若马尔可夫链是不可约且常返的，则对于任意初始状态，马尔可夫链在状态j停留的长程时间比例（long-run proportion of time），记为π_j，为

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}$$

- 一个不可约的有限马尔可夫链必然是正常返的

长程比例求解

- 对于一个不可约的马尔可夫链，若此链是正常返的，则长程比例是以下线性方程组的唯一解

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

- 若方程无解，则此马尔可夫链是暂态的或者是零常返的，而且一切$\pi_j = 0$

例：若今天是雨天则明天下雨的概率为α，而若今天下是雨天则明天下雨的概率为β，如果我们将下雨称为状态0，而将不雨称为状态1，求长程比例π_0和π_1。

$$\boldsymbol{\pi = \pi P}$$

例：在任意给定的一天，加里的心情或者是快乐的（C），或者是一般的（S），或者是忧郁的（G），如果今天他是快乐的，则明天他分别以概率$0.5, 0.4, 0.1$是C, S, G，如果今天他感觉一般，则明天他分别以概率$0.3, 0.4, 0.3$为C, S, G，如果今天他是忧郁的，则明天他分别以概率$0.2, 0.3, 0.5$为C, S, G。以X_n记加里在第n天的心情，求长程中，过程处于三个状态中的每一个的时间比例是多少？

例：（阶层迁移模型）社会学家感兴趣的一人问题是确定高职业阶层或较低职业阶层在社会中的比例。假定一个家庭中一个孩子的职业只决定于他父母的职业，其转移概率矩阵如下，求长程比例。

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.05 & 0.49 \end{bmatrix}$$

马尔可夫链的概率分布

- 马尔可夫链$\{X_n\}$在第n步（第n次转移）处于状态j的概率，记为$\pi_j(n)$

$$\pi_j(n) = P\{X_n = j\}$$

- 其中状态j的初始分布为$\pi_j(0) = P\{X_0 = j\}$

平稳概率分布

- 如果一个马尔可夫链满足以下条件，称该过程有平稳概率分布（stationary probability distribution） $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots)$
  - 对于任意状态及任意时刻，$\pi_j(0)=\pi_j(n)=\pi_j$
  - 满足矩阵方程$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$
  - $\pi_j\geq 0$，且$\sum_i \pi_i=1$

极限概率分布

- 如果一个马尔可夫链满足以下条件，称该过程有极限概率分布（limiting probability distribution）

$$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n) = \lim_{n\to\infty}P\{X_n = j\} = \pi_j, j = 0, 1, 2, \ldots$$

  - 与初始状态$\pi(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \pi_2(0), \ldots)$无关
- 极限概率为以下方程组的唯一解 $\begin{cases} \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$
- 对有限状态的马尔可夫链，极限分布就是平稳分布，也称为稳态分布

极限概率与长程时间比例

- 考察转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.571 & 0.429 \\ 0.571 & 0.429 \end{bmatrix}$$

  - 当$n \to \infty$，$P_{ij}^{(n)}$收敛到不依赖于i的某个值
  - 长程比例$\pi_0 = 4/7 \approx 0.571$，$\pi_1 = 3/7 \approx 0.429$
  - 此例长程比例与极限概率相等
- 考察转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1, & 若n为偶 \\ 0, & 若n为奇 \end{cases}$$

  - 当$n \to \infty$，$P_{00}^{(n)}$没有极限
  - 此马尔可夫链存在长程时间比例$\pi_0 = \pi_1 = 1/2$

遍历马尔可夫链

- 如果一个马尔可夫链符合以下条件，则称马尔可夫链为遍历的（ergodic）
  - 不可约的：每个状态都能到达每另一个状态
  - 非周期的：每个状态的周期为1
  - 所有状态均为正常返的：每个状态在有限的平均时间内以概率1返回原状态
- 一个不可约且非周期的有限状态马尔可夫链是遍历的

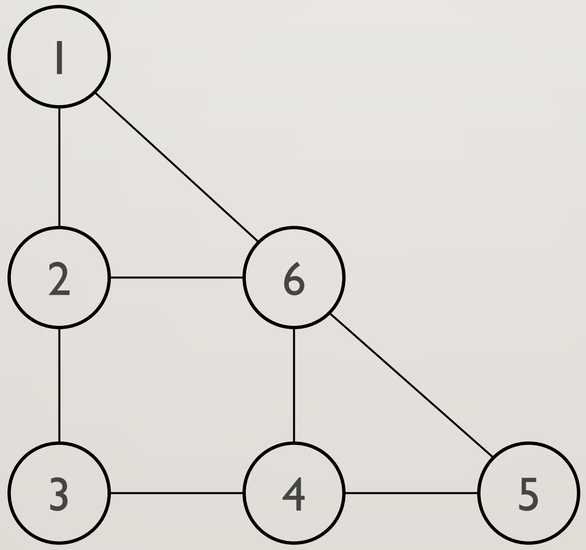
有限遍历马尔可夫链存在极限概率，且与长程比例相等

例：设有4个状态的马尔可夫链的一步转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

问：此链是否具有遍历性？试求其平稳分布。

例：设有6个车站，车站中间的公路连接情况如图所示，汽车每天可以从一个车站驶向与之直接相邻的车站，并在夜晚到达车站留宿，次日凌晨重复相同的活动。设每天凌晨汽车开往邻近的任何一个车站都是等可能的，试说明很长时间后，各站每晚留宿的汽车比例趋于稳定。求出这个比例以便正确地设置各站的服务规模。



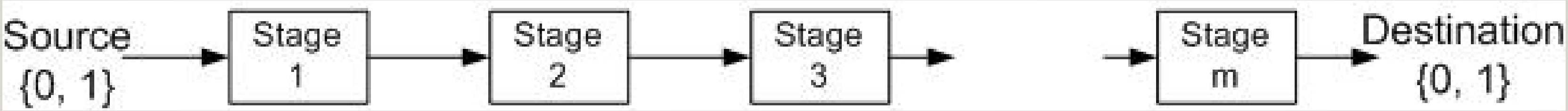
例：设甲袋中有k个白球和1个黑球，乙袋中有$k+1$个白球，每次从两袋中各任取一球，交换后放入对方的袋中。求经过$n \to \infty$次交换后，黑球仍在甲袋中的概率。

例：欧洲和亚洲的绝大部分汽车年保险金是由所谓好-坏系统确定的，参保人的状态随着上一年参保人要求理赔的次数一年一年地变化。
对于如下图的一个好坏系统，假定某参保人年理赔要求是均值为1/2的泊松随机变量，那么此参保人相继的状态将构成一个马尔可夫链，求该参保人平均所付的年保险费。

		Next state if			
State	Annual Premium	0 claims	1 claim	2 claims	$\geqslant 3$ claims
1	200	1	2	3	4
2	250	1	3	4	4
3	400	2	4	4	4
4	600	3	4	4	4

练习

- A communication system transmits the digit 0 and 1 through several stages. At each stage, there is a probability of 0.75 that the output will be the same digit as the input.



- What is the limiting probability that a 0 entered into the first stage is output as a 0 from the nth stage as $n \to \infty$?

练习

Suppose that in New Zealand, home of the Gala apple, years for these wonderful apples can be described as *Great, Average, or Poor*. Suppose that following a *Great* year the probabilities of *Great, Average, or Poor* years are 0.5, 0.3, and 0.2, respectively. Suppose also that following an *Average* year the probabilities of *Great, Average, or Poor* years are 0.2, 0.5, and 0.3, respectively. Finally, suppose that following a *Poor* year the probabilities for *Great, Average, or Poor* years are 0.2, 0.2, and 0.6, respectively. Assume we can describe the situation from year to year by a Markov chain with the states 0, 1, and 2 corresponding to *Great, Average,* and *Poor* years, respectively.

- Set up the transition probability matrix P of the Markov chain & draw the state transition diagram.
- Is the Markov chain ergodic? Why or why not?
- Suppose the initial probability for a *Great* year is 0.2, for an *Average* year is 0.5, and for a *Poor* year is 0.3. What is the probability of a *Great* year after **one** year?
- What is the probability for a *Great* year after $\boldsymbol{n}$ year as $n \to$ infinity?

作业

- 14，18，23，36
- 将两个红球放入甲盒，四个白球放入乙盒中。每次从两个盒子中各取一球交换，以X_n记第n次交换后甲盒中的红球数。
  - 说明是一马尔可夫链并求转移矩阵
  - 试证该马尔可夫链是遍历的
  - 求它的极限分布