概率论引论

汪超男

C_WANG@JNU.EDU.CN

2 概率论引论

- 样本空间与事件
- 概率
- 条件概率
- 贝叶斯公式
- 独立事件

3 试验与样本空间

- 试验（Experiment）
  - 可以在相同的条件下重复进行
  - 每次试验前不能确定哪个结果（outcome）会出现
  - 预先知道试验的所有可能的结果
- 样本空间（Sample space）
  - 一个试验的所有可能结果的集合，记为S

4 例子

- 抛掷一枚硬币

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$$

  - H代表正面（Head）;T代表反面（Tail）

- 抛掷两枚硬币

$$S = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$$

5 例子

- 抛掷一颗骰子

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  - 结果 i 表示点数，$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

- 抛掷两颗骰子

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (2,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (1,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{matrix} \right\}$$

6 例子

- 测量一辆汽车的寿命
  - 样本空间为所有的非负实数构成

$$S = [0, \infty)$$

7 事件

- 事件（event）：样本空间S的任意子集E，当试验的结果在E中，事件发生
  - 抛掷一枚硬币：$E = \{\mathrm{H}\}$，硬币为正面的事件；$E = \{\mathrm{T}\}$，硬币为反面的事件
  - 抛掷两枚硬币：$E = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$，第一枚硬币出现正面的事件
  - 抛掷一颗骰子：$E = \{1\}$，点数为1的事件；$E = \{2,4,6\}$，点数为偶数的事件
  - 抛掷两颗骰子：$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，点数和为7的事件
  - 测试一辆汽车寿命：$E = (2,6)$,汽车耐用2年到6年的事件

8 事件的并

- 事件的并（Union）
  - 对于样本空间S的任意两个事件E和F，定义新事件$E \cup F$，由所有在E或F中的结果组成
  - 如果E或F有一个发生，事件$E \cup F$就发生
  - n个事件（$E_1, E_2, \dots, E_n$）的并，记为$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$
- 例子：
  - 抛掷一枚硬币：$E = \{\mathrm{H}\}$，$F = \{\mathrm{T}\} \rightarrow E \cup F = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
  - 抛掷一颗骰子：$E = \{1, 3, 5\}$，$F = \{1, 2, 3\} \rightarrow E \cup F = \{1, 2, 3, 5\}$

9 事件的交

- 事件的交（intersection）
  - 对于样本空间S的任意两个事件E和F，定义新事件EF或$E \cap F$，由所有既在E中又在F中的结果组成
  - 只有E和F都发生，事件EF才发生
  - n个事件（$E_1, E_2, \dots, E_n$）的交，记为$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$，由所有E_i中的共同结果构成
  - 例子：
    - 抛掷一颗骰子：$E = \{1,3,5\}$，$F = \{1,2,3\} \rightarrow EF = \{1,3\}$
    - 抛掷一枚硬币：$E = \{\mathrm{H}\}$，$F = \{\mathrm{T}\} \rightarrow$ 事件EF不可能发生，不包含任何结果

10 不可能事件

- 不可能事件（null event）
  - 记为∅，不包含任何结果的事件
- 互不相容（mutually exclusive）
  - 如果两个事件的交集为∅，则这两个事件互不相容

对立事件

- 对立事件（complement）
  - 记为E^{c}，由样本空间中不属于E的所有结果构成
  - E^{c}发生当且仅当E没有发生
  - $S^{c}=\emptyset$
- 例子：
  - 抛掷两颗骰子：$E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \Longrightarrow E^{c}$为点数和不为7的事件

概率

- 事件E的概率（Probability）：对于样本空间S的每一个事件E，满足以下三个条件的数，记为$P(E)$
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(S) = 1$
  - 对于任意互不相容的事件序列$E_1, E_2, \ldots, E_n$，即当$i \neq j$时，$E_i E_j = \emptyset$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

- 如果试验不断地重复，那么事件E发生的比率正是$P(E)$

例子

- 抛掷一枚硬币
  - 假定硬币出现正面和出现反面是等可能的

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

  - 如果硬币不均匀，出现正面的可能是反面的两倍

$$P(\{H\}) = \frac{2}{3}, \quad P(\{T\}) = \frac{1}{3}$$

例子

- 抛掷一颗骰子
  - 假定6个数的出现是等可能的

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

  - 结果为偶数的概率

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$

15 对立事件的概率

- 事件E和E^c总是互不相容的，而且$E \cup E^c = S$，有

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$\Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$$

- 一个事件不发生的概率是1减去它发生的概率

16 两个事件并的概率

- 两个事件E和F并的概率，记为$P(E \cup F)$

$$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(EF)$$
$$\Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

- 当E和F互不相容时，即$EF = \emptyset$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(\emptyset) = P(E) + P(F)$$

例子

- 假定掷两枚硬币，样本空间$S=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$中的4个结果都是等可能的，因而每个结果出现的概率为$1/4$，设E是第一枚硬币出现正面这一事件，F是第二枚硬币出现正面这一事件，结果出现正面的概率是多少？

$$E=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\},\quad F=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$$

- 结果出现正面的概率

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(EF)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P\{(\mathrm{H},\mathrm{H})\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(E\cup F)=P\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}=\frac{3}{4}$$

多个事件并的概率

- 三个事件的并$P(E \cup F \cup G)$

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG)$$

- n个事件的并$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k)$$

$$- \sum_{i<j<k<l} P(E_i E_j E_k E_l) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \ldots E_n)$$

容斥恒等式

n个事件的并的概率等于这些事件一次取一个的概率的和减去这些事件一次取两个的概率的和，再加上一次取三个的概率的和，依次类推

条件概率

- 例子：假定掷两颗骰子得到的36个结果是等可能出现的，即每种结果出现的概率都为1/36，在已知第一颗骰子的点数为4时，两颗骰子的点数和为6的概率是多少？
  - 当第一颗骰子的点数为4时，有6种可能的结果：$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$
  - 每种结果出现的概率相等，为1/6，出现其他30种结果的概率都为0
  - 所求的概率是1/6
- E：骰子的点数和为6，F：第一颗骰子的点数为4
  - 如果事件F发生，那么为了E发生，实际出现的结果必须是一个既在E中又在F中的结果，也就是必须在EF中的结果
  - 因为已知F已经发生，F就成为新的样本空间，在这种情况下，事件EF发生的概率就等于EF的概率相对于F的概率

20 条件概率

- $P(E|F)$：已知F发生的条件下E发生的条件概率（conditional probability）

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \qquad P(F) > 0$$

例子

- 在帽子中混杂地放了写有1到10的10张卡片，抽取了其中一张，已知这张卡片上的数至少是5，那么它是10的条件概率是多少？

- 贝芙可以修计算机课，也可以修化学课，如果修计算机课，得到A的概率为1/2；如果修化学课，得到A的概率为1/3。贝芙用掷硬币来决定上哪门课，问贝芙选修了化学课并得到A的概率是多少？

- 在一个坛中有7个黑球，5个白球。不放回地从中摸取两个球，假设每个球都是等可能被摸取的，则摸取的两个球都是黑球的概率是多少？

22 练习

- “Tossing a die”
- Find the conditional probability of the event of the uppermost side showing 3 spots given the event of rolling an odd number occurring?

23 全概率公式

- 设E和F两个事件，可以将E表示为$E = EF \cup EF^c$

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(EF \cup EF^c) \\
&= P(EF) + P(EF^c) \\
&= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\
&= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]
\end{aligned}
$$

全概率公式

- 事件E的概率是已知F已发生时E的条件概率与已知F未发生时E的条件概率的加权平均，权重为各个条件事件发生的概率

24 贝叶斯公式

- 全概率公式（Total probability law）
  - 假定$F_1, F_2, \cdots, F_n$是互不相容的事件，$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$，则$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)$$

  - $P(E)$等于$P(E|F_i)$的加权平均，每项用被取条件的那个事件的概率加权
- 贝叶斯公式（Bayes' formula）

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

25 例：考虑两个瓮，第一个瓮中有2个白球，7个黑球，第二个瓮中有5个白球，6个黑球，抛掷一枚均匀的硬币，由其结果是正面还是反面决定是从第一个瓮还是从第二个瓮中抽取一个球。已知取到的球是白球，问抛掷的结果是正面的条件概率是多少？

例：学生在回答单项选择题时，或者知道答案或者猜测答案。假定她知道答案的概率是p，而猜的概率是$1-p$，她猜对的概率是$1/m$，其中m是单选题可选的项数。问在已知学生答题正确时，她确实知道答案的概率是多少？

例：已知某一封信等可能地在3个不同的文件夹的任意一个之中，若此信实际上在文件夹i中（$i=1,2,3$）而经过对文件夹i的快速翻阅发现了你的信的概率记为a_i。假定查看了文件夹1且没有发现此信，问信在文件夹1中的概率是多少？

26 练习

- Suppose that 6 percent of men and 0.3 percent of women are color-blind. And assume that there are an equal number of males and females.

- a. What is the probability that a randomly chosen person is color-blind?
- b. Suppose a person selected at random is found to be color-blind. What is the probability of this (color-blind) person being female?

27 独立事件

- 如果$P(EF) = P(E)P(F)$，那么两个事件E和F称为独立的（independent）

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = P(E)$$

  - F已经发生的这个事实不影响E发生的概率
  - E的发生独立于F是否发生
- 不独立的两个事件E和F，称为相依的（dependent）

28 例子

- 扔两颗均匀的骰子
- E_1表示两颗骰子的点数和等于6这一事件，F表示第一颗骰子的点数是4这一事件，E_1和F是否相互独立？
- E_2表示两颗骰子的点数和等于7这一事件，E_2和F是否相互独立？

29 独立的性质

- $P(E|F) = P(E), P(F|E) = P(E)$
- 两个事件独立，并不代表二者不相容，反之亦然
- 如果E和F独立，则E^c和F独立， F^c和E独立， E^c和F^c独立

多个事件的独立

- 对于$E_1, E_2, \cdots, E_n$，如果这些事件的每个子集$E_{1'}, E_{2'}, \cdots, E_{r'}, r \leq n$，有 $P(E_{1'} E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$，称$E_1, E_2, \cdots, E_n$**联合独立**

- 如果这些事件每一对都相互独立，称$E_1, E_2, \cdots, E_n$**两两独立**

例子

- 假定从装有号码分别为$1,2,3,4$的4个球的瓮中抽取一个球。设$E=\{1,2\}$，$F=\{1,3\}$，$G=\{1,4\}$，问这三个事件是否是联合独立？是否两两独立？

练习

- *“tossing a fair coin three times”*
- Define the events A, B, C so that
  - – A=“first toss results in a tail”
  - – B=“second toss results in a head”
  - – C=“third toss results in a tail”
- Questions: are the three events A, B, and C mutually independent? Pair-wise independent?

小结

- 样本空间与事件：试验，样本空间，事件的定义，事件并，事件交，不可能事件，对立事件
- 概率：事件的概率，对立事件的概率，事件并的概率（容斥恒等式）
- 条件概率：$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$
- 贝叶斯公式 $P\left(F_j|E\right)=\frac{P\left(EF_j\right)}{P(E)}=\frac{P\left(E|F_j\right)P\left(F_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)}$
  - 全概率公式 $P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)$
- 独立事件：独立的定义，独立与不相容，两两独立与联合独立

作业

- 课本4，23，29， 39， 41