作业五

151220129 计科 吴政亿

习题四 4

1.

(U , V)	(1 , 1)	(2 , 1)	(2 , 2)
P	$\frac{2}{3}*\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}*\frac{1}{3}*2=\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

2. $E(U)=\frac{4}{9}*1+\frac{5}{9}*2=\frac{14}{9}$
   $e(v)=\frac{8}{9}*1+\frac{1}{9}*2=\frac{10}{9}$
3. $cov(U,V)=E(XY)-E(X)E(Y)$
   其中$E(XY)=\frac{4}{9}*1+\frac{4}{9}*2+\frac{1}{9}*4=\frac{16}{9}$
   代入得$cov(U,V)=\frac{16}{9}-\frac{14}{9}*\frac{10}{9}=\frac{4}{81}$

习题四 19

$E(X+Y)^2=D(X+Y)-(E(X+Y))^2=D(X)+D(Y)-(EX+EY)$
其中由于X与Y服从泊松分布，$D(X)=E(X)=1, D(Y)=E(Y)=2$
最终得$E(X+Y)^2=1+2+9=12$。

习题四 23

$P([X]\geq x)\leq\frac{1}{f(x)}E[f(|X|)]\Longleftrightarrow f(x)*P([X]\geq x)\leq E[f(|X|)]$ 设随机变量

$$Y=\begin{cases}f(x) & ,|X|\geq x\\ 0 & ,|X|<x\end{cases}$$

$E(Y)=P(|X|\geq x)f(x)$
$E[f(|X|)]-E[Y]=E[f(|X|)-Y]\geq 0\Longleftrightarrow f(x)*P([X]\geq x)\leq E[f(|X|)]$，故得证。

第二题

令$X_i = \begin{cases} 1 & 第\ i\ 个数为不动点 \\ 0 & 第\ i\ 个数非不动点 \end{cases}$，X为不动点的个数。

则$E(X_i) = \frac{1}{n}$

$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 1$

$EX^2 = E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 * \sum_{1 \le i \le j \le n}^{n} X_i X_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 * \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} E(X_i X_j)$

$= 1 + 2 * \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = 2$

$\therefore D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 2 - 1 = 1$

第三题

设X为d天中股票价格上涨的次数，Y为股票d天后的价格，则

$P(X = k) = \binom{d}{k} p^k q^{d-k}$

$E(Y) = \sum_{i=0}^{d} r^{2i-d} P(X = i) = \frac{(r^2 p+q)^d}{r^d}$

$D(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{(r^4 p+q)^d}{r^{2d}} - \frac{(r^2 p+q)^{2d}}{r^{2d}}$

第四题

1. $P(Y_i = 0) = P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$
2. 当n=3时，$P(Y_1 Y_2 Y_3) = 0, P(Y_1)P(Y_2)p(Y_3) = \frac{1}{8} \neq P(Y_1 Y_2 Y_3)$，故不相互独立。
3. $E(Y_i Y_j) = 1 * E(Y_i Y_j = 1) + 0 * E(Y_i Y_j = 0) = E(Y_i Y_j = 1)$
    - 当Y_i, Y_j对应的是不同的四个比特时，易得Y_i, Y_j独立，成立。
    - 当Y_i, Y_j对应的是不同的三个比特时，不妨设X_1为重复的比特，另两个比特为$X_2, X_3, E(Y_i) = E(X_1 = 1 \cap X_2 = 1), E(Y_j) = E(X_1 = 1 \cap X_3 = 1)$
      则
      $E(Y_i Y_j) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1) * 1 + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 0) * 1$
      $= \frac{1}{4} = E(Y_i = 1)E(Y_j = 1)E(Y_i)E(Y_j)$
4. $P(X = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}$
   $E(Y) = \sum_{i=0}^{n} i(n-i)P(X = i) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} i(n-i)\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)}{4}$
   $E(Y^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2(n-i)^2 P(X = i) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} i^2(n-i)^2 \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{16}$
   $D(Y) = E(Y^2) - EY^2 = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{16} - \frac{n^2(n-1)^2}{16} = \frac{n(n-1)}{8}$
5. 应用切比雪夫不等式有$P(|Y - E(Y)| \geq n) \leq \frac{D(Y)}{n^2} = \frac{n-1}{8n}$