概率论作业六

151220129 计科 吴政亿

第一题

设随机变量$X \sim B(n,p_1),Y \sim B(n,p_2)$,则有
$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_1^i(1-p_1)^{n-i}$
$P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_2^i(1-p_2)^{n-i}$
设σ均匀分布在$[0,1]$之间:
$\sigma \leq p_1 \Leftrightarrow X_i = 1$
$\sigma \leq p_2 \Leftrightarrow Y_i = 1$
$\because 0 < p_1 < p_2 < 1, \therefore P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$
$\therefore \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_1^i(1-p_1)^{n-i} \leq \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_2^i(1-p_2)^{n-i}$

第二题

1. 置换ρ的第一个必定属于$S(\rho)$,故$S(\rho)$非空。
   对于$\forall v \in S(\rho)$,它的任意邻居节点w必定落后与它，
   故$w \notin S(\rho)$,故$S(\rho)$为独立集。

2. 设随机变量X_i, $X_i = 1$当且仅当X_i在独立集中，
   $X_i = 0$当且仅当X_i不在独立集中。设X为独立集中点的个数。
   则有$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$,
   其中$P(X_i = 1) = \frac{1}{d_i+1}$,因为这个点是它邻居和它在$\rho$中第一个出现的。
   代入有$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1} \Rightarrow P(X \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}) > 0$，问题得证。

3. 运用基本不等式，$\frac{n}{\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_2+1}+...+\frac{1}{d_n+1}} \leq \frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}$,
   $\because d_1 + d_2 + ... + d_n = nk, \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1} \geq \frac{n}{k+1}$,问题得证。

第三题

假设对于一个n节点的d正则图，我们以p的概率随机选择点构成集合S，
再将所有$v \in V, v \notin S$并且v不与S中任意节点相邻的点加入集合S构成集合S*。
则有$|S| \sim N(n,p) \Rightarrow E(|S|) = np$。
设Y为所有$v \in V, v \notin S$并且v不与S中任意节点相邻的点的个数，
则有$Y \sim N(n,(1-p)^{d+1}) \Rightarrow E(Y) = n(1-p)^{d+1}$。
$E(|S^*|) \leq E(|S|) + E(Y) = np + n(1-p)^{d+1} \leq np + ne^{-p(d+1)}$
令$p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$,代入有$E(|S^*|) \leq \frac{n(1+\ln(d+1))}{d+1}$。

第四题

假设从第1种颜色到第k种颜色，每次从完全图K_n中随机选择一个与图G同构的K_n的子图进行着色，并且覆盖上一次的着色，那么由于图G不包含H子图，我们只需要证明k种颜色存在一种着色，使得所有边都被着色，问题便得证。
设随机变量X_i, $X_i = 1$当且仅当边X_i未被着色，$X_i = 0$当 且仅当边X_i被着色。
随机变量X为K_n中未被着色的边的个数，则有：

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} X_i) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} E(X_i) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} P(X_i = 1)$$

其中$P(X_i = 1) = (1 - \frac{m}{\binom{n}{2}})^k$

$$\begin{aligned}故E(X) &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}}(1 - \frac{m}{\binom{n}{2}})^k = \binom{n}{2}(1 - \frac{m}{\binom{n}{2}})^k < \frac{n^2}{2}(1 - \frac{2m}{n^2})^k < \frac{n^2}{2} * e^{\frac{-2mk}{n^2}} \\ &< \frac{n^2}{2} * e^{-2\ln(n)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore P(X = 0) = P(X < \frac{1}{2}) > 0$，故存在一个着色方案使所有边都被着色，结论成立。

第五题

分析题意，我们只需要证明当n趋向于无穷时，该图不存在孤立点的概率趋向于0即可。设随机变量X为孤立点的个数，设随机变量$X_i = 1$表示点X_i是孤立点，$X_i = 0$表示点X_i不是孤立点。那么有

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = (1-p)^{n-1}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n(1-p)^{n-1}$$

$D(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = (1-p)^{n-1} - (1-p)^{2n-2}$

$cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = (1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2}$

$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{1 \le i < j \le n} cov(X_i, X_j)$

$\quad = n((1-p)^{n-1} - (1-p)^{2n-2}) + (n^2-n)((1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2})$

$P(X=0) \le P(|X - E(X)| \ge E(X)) \le \frac{D(X)}{E(X)^2}$

$\quad = \frac{n((1-p)^{n-1} - (1-p)^{2n-2}) + (n^2-n)((1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2})}{n^2(1-p)^{2n-2}}$

$\quad = \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{p}{1-p} \to \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} - \frac{p}{1-p} \to 0$

问题得证。

第六题

1. $E(X) = \binom{n}{3}(\frac{1}{n})^3$,应用马尔可夫不等式有
   $P(X \ge 1) \le \frac{E(X)}{1} = \binom{n}{3}(\frac{1}{n})^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6*n*n*n} < \frac{1}{6}$

2. 利用条件期望不等式： $P(X > 0) \ge \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{P(X_i=1)}{E[X|X_i=1]}$

   $E[X|X_i=1] = \sum_{k=1}^{\binom{n}{3}} E[X_k|X_i=1] = \sum_{k=1}^{\binom{n}{3}} P(X_k=1|X_i=1)$

   $E[X|X_i=1] = \binom{n-3}{3}p^3 + 3\binom{n-3}{2}p^3 + 3\binom{n-3}{1}p^2 + 1$

   $P(X > 0) \ge \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{p^3}{\binom{n-3}{3}p^3 + 3\binom{n-3}{2}p^3 + 3\binom{n-3}{1}p^2 + 1}$

   $\qquad = \frac{\binom{n-3}{3}p^3}{\binom{n-3}{3}p^3 + 3\binom{n-3}{2}p^3 + 3\binom{n-3}{1}p^2 + 1} \to \frac{1}{7}$

   问题得证。