# 作业 6

提交时间: 10月25日

1. 假设$0 < p_1 < p_2 < 1$，$n$为正整数。求证：对于任意正整数$0 \le k \le n$,

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \le \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_2^i (1-p_2)^{n-i}.$$

2. 设$G(V,E)$为包含$n$节点的无向图，考虑如下方式生成$G$的独立集。给定节点的置换$\rho$，通过如下方式定义节点的集合$S(\rho)$：对于每一个节点$i \in V$, $i \in S(\rho)$当且仅当在置换$\rho$中，$i$的每一个邻居节点均落后于$i$.

   a) 证明$S(\rho)$为$G$的独立集；

   b) 证明$G$拥有不小于$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}$的独立集，其中$d_i$为节点$i$的度.

   c) 设$G$的边数为$nk/2$，利用b)的结果证明$G$拥有不小于$n/(k+1)$的独立集。

   (注：课堂上的结论能够证明$G$拥有不小于$n/(2k)$的独立集，而题中的方法则给出了一个更强的结果。)

3. 给定图$G(V,E)$，若节点集合$D \subseteq V$满足条件：对于任意$v \in V$，$v \in D$或$v$与$D$中某个节点相邻，则称$D$为图$G$的一个支配集(dominating set). 求证：对于$n$个节点的$d$正则图，必存在大小不超过$\frac{n(1+\ln(d+1))}{d+1}$的支配集. (注：可以利用$1-x \le e^{-x}$简化计算)

4. 设$H$为节点数小于$n$的图.已知存在一个图$G(V,E)$满足$|V| = n$, $|E| = m$且不包含$H$子图. 求证：对于$k > \frac{n^2 \ln n}{m}$，存在一个对$K_n$ ($n$个节点的完全图)的$k$边着色$f : E \to [k]$，使其不包含同色的$H$子图.

5. 考虑一随机图$G(n,p)$，其中$p = c \ln n/n$, $c < 1$为常数。求证: 对于任意常数$\epsilon > 0$及充分大的$n$，该图存在孤立点的概率至少为$1-\epsilon$.

6. 考虑一随机图$G(n,p)$，其中$p = 1/n$. 令$X$表示该图中三角形的个数。求证：

   a) $P(X \ge 1) \le 1/6$.

   b) $\lim_{n\to\infty} P(X \ge 1) \ge 1/7$.