Erratum sur *"Les algorithmes quantiques - ou une théorie d'optimisation"*

Romain Blondel

25 novembre 2023

Dans le travail de maturité rendu à date du 30 octobre 2023 au gymnase Auguste Piccard intitulé *"Les algorithmes quantiques - ou une théorie d'optimisation"*, une erreur est demeurée dans une équation. Ce document vise à rectifier cela. Tout d'abord, le travail cité est celui de Romain Blondel, classe 3M8, avec M. De Montmollin comme maître de travail.

Il y a une première erreur en page 32 :

"

Démonstration. On a $H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 0\right| + (\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 1|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 0|0\right\rangle + (\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 1|0\right\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle = \left|+\right\rangle$, et un raisonnement similaire pour $\left|1\right\rangle$. □

"

qui est en fait :

"

Démonstration. On a $H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 0\right| + (\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle)\left\langle 1\right|)\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle)\left\langle 0|0\right\rangle + (\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle)\left\langle 1|0\right\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle = \left|+\right\rangle$, et un raisonnement similaire pour $\left|1\right\rangle$. □

"

Il y en deux fautes dans ce passage. La première est l'oubli d'une parenthèse à la fin avant le second symbol d'égalité, et la seconde est l'échange d'un moins pour un plus dans l'expression liée à $\left\langle 1\right|$, qui de toute manière s'annule à 0, mais si l'on essaie avec cette erreur de calculer pour $H\left|1\right\rangle = \left|-\right\rangle$, on n'aurait pas le bon résultats car la première expression est fausse selon la définition de la porte d'Hadamard.

Il y a une autre erreur se situant en page 51, dans le passage cité ci-dessous :

“
Nous ne soucions donc plus que des qubits d'entrée, et on peut réécrire l'équation comme suit :

$$\frac{1}{2}(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle)$$

qui devient ensuite par la porte d'Hadamard :

$$\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|0\rangle - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle) = \frac{1}{2}((1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)})|0\rangle + (1 - (-1)^{f(0)\oplus f(1)})|1\rangle)$$

On constate alors que si $f(0) \oplus f(1) = 0$, alors la probabilité de mesure de $|0\rangle$ est de 1, et si $f(0) \oplus f(1) = 1$, alors la probabilité de mesure de $|1\rangle$ est de 1, ainsi, en mesurant le qubit d'entrée, on peut déterminer si l'oracle est constant ou équilibré.
”

qui doit être corrigé ainsi :

“
Nous ne soucions donc plus que des qubits d'entrée, et on peut réécrire l'équation comme suit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle)$$

qui devient ensuite par la porte d'Hadamard :

$$\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|0\rangle - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle) = \frac{1}{2}((1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)})|0\rangle + (1 - (-1)^{f(0)\oplus f(1)})|1\rangle)$$

On constate alors que si $f(0) \oplus f(1) = 0$, alors la probabilité de mesure de $|0\rangle$ est de 1, et si $f(0) \oplus f(1) = 1$, alors la probabilité de mesure de $|1\rangle$ est de 1, ainsi, en mesurant le qubit d'entrée, on peut déterminer si l'oracle est constant ou équilibré.
”

En effet, une faute de rédaction, vraisemblablement lié au copier-coller d'une partie des calculs qui précédent le passage, a mené à l'oubli de modifier la fraction devant l'expression de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En effet, dans la première expression, pour que les probabilités correspondent, il faut prendre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ car $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(0)\oplus f(1)})^2 = 1$. Ensuite, en se rappelant que la porte d'Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}((|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|)$, on voit que le facteur revient bien à $\frac{1}{2}$ et que les probabilité finissant bien à 1 selon la séparation des cas.