

# TP Ondes stationnaires

Camille Yerly, Romain Blondel

*2M8, Gymnase Auguste Piccard*

28 mai 2023

## 1 But

Le but de ce TP est de comprendre le fonctionnement d'une onde, à l'aide d'une corde vibrante, en mesurant les longueurs d'ondes et les fréquences pour les différents modes, afin de vérifier les formules de vitesse des ondes.

## 2 Introduction

Les ondes stationnaires furent découvertes au 19<sup>ème</sup> siècle par Franz Melde. Il développa une expérience semblable à celle que nous avons reproduit afin de les observer. Les ondes stationnaires se forment lorsque deux ondes de même fréquence se superposent. À l'œil humain, elles semblent figées dans leur milieu. Pourtant, l'utilisation d'un stroboscope réglé à la même fréquence qu'elles, permet d'observer le mouvement de celles-ci. Dans l'expérience que nous avons menée, ces ondes stationnaires sont observées sur une corde. Les ondes progressives produites au départ se réfléchissant aux extrémités de la corde. Ainsi, en réglant la fréquence de ces ondes, il est possible de trouver des ondes stationnaires.

Dans le cas d'une corde, elles sont caractérisées par des points particuliers : des nœuds et des ventres. Les nœuds représentant une superposition nulle des ondes et les ventres une superposition minimale ou maximale. Le nombre de ventres nous donne le mode de vibration.

Les ondes stationnaires se trouvent dans beaucoup de phénomènes vibratoires au quotidien. Elles sont omniprésentes dans la musique, de nombreux instruments de musiques acoustiques illustrent ce principe ; le fonctionnement d'une corde de violon ou d'un tuyau d'orgue par exemple.

Dans ce travail pratique, nous avons cherché à vérifier expérimentalement la formule de la célérité des ondes stationnaires basée sur les caractéristiques de la corde en la comparant à la formule basique avec la fréquence et la longueur d'onde.

La vitesse des ondes se calcule avec la longueur d'ondes  $\lambda$  [m] et la fréquence  $f$  [Hz] selon la formule :

$$c = \lambda \cdot f$$

Dans le cas des ondes stationnaires sur une corde, il est aussi possible d'utiliser une formule basée uniquement sur les caractéristiques de la corde : la tension de la corde  $F$  [N] et sa masse linéaire  $\mu$ , c'est-à-dire sa masse [kg] par mètre [m], tel que :

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

La démonstration de cette formule est assez intéressante. Prenons un tronçon de corde infinitésimal  $AB$  avec  $A(x; y)$  et  $B(x + dx; y + dy)$ , et l'angle entre la tangente à la corde et l'horizontal en ce point au temps  $t$  donné par  $\alpha(x, t)$  (respectivement  $\alpha(x + dx, t)$ ). En négligeant la force pesante, on a uniquement la force de tension qui agit sur la corde,  $\vec{T}_A$  en  $A$  et  $\vec{T}_B$  en  $B$ .

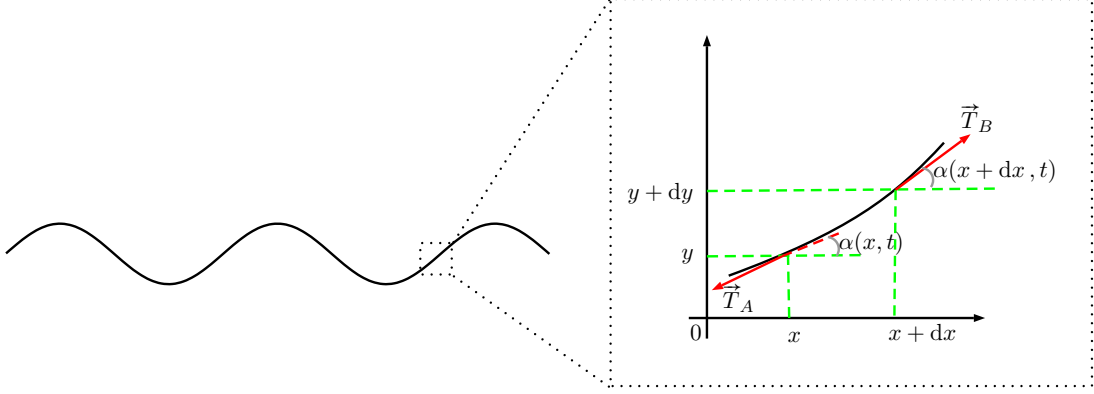


FIGURE 1 – Onde sur une corde et forces considérées.

Connaissant la masse linéique de la corde  $\mu$ , on peut écrire la relation suivante :

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B = \mu dx \vec{a}$$

où  $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}$  est l'accélération de la corde (nulle horizontalement, car il n'y a qu'un déplacement vertical). On peut décomposer l'équation en deux équations, une selon l'axe horizontal  $Ox$  et une selon l'axe verticale  $Oy$ .

$$\begin{cases} Ox : -T_A \cos \alpha(x, t) + T_B \cos \alpha(x + dx, t) = 0 \\ Oy : -T_A \sin \alpha(x, t) + T_B \sin \alpha(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

En utilisant les approximations du premier ordre  $\sin \alpha \approx \alpha$  et  $\cos \alpha \approx 1$ , si l'on considère la variation créée par l'onde et donc les angles comme faibles, on obtient :

$$\begin{cases} Ox : -T_A + T_B = 0 \\ Oy : -T_A \alpha(x, t) + T_B \alpha(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = T_B = T \\ -T \alpha(x, t) + T \alpha(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

De plus, nous pouvons considérer que  $\alpha = \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ , d'où :

$$-T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + T \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

En notant que

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(y(x + dx, t) - y(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) dx \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

on obtient

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

qui est une équation d'onde, ou équation de d'Alembert, de forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  est la célérité de l'onde. On peut également noter que la solution générale de cette équation qui nous intéresse est de la forme

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \psi)$$

et via les conditions de bord  $y(0, t) = 0$  et  $y(L, t) = 0$ , où  $L$  est la longueur de la corde, on obtient que  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , donc on peut transformer le cosinus en sinus, et  $k = \frac{n\pi}{L}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . Finalement, on obtient une équation de la forme

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \phi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

avec  $A$  l'amplitude de l'onde,  $\omega$  la pulsation,  $\phi$  la phase et  $n$  le mode de vibration. On voit également que cette équation peut être écrite de manière indépendante du temps, sous la forme

$$y(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

qui est la forme générale d'une onde stationnaire, utile à la visualisation des modes de vibration.

### 3 Principe de mesure et description

#### 3.1 Matériel

- Corde
- Vibreur
- Générateur de fonction
- Multimètre réglé pour mesurer la fréquence
- Coinceur et poulie pour la corde
- Plusieurs masses
- Serre-joint
- Balance
- Mètre

#### 3.2 Déroulement

1. Tout d'abord, nous avons relevé la masse de la corde, à l'aide de la balance.
2. Nous avons fait passer la corde dans le vibreur, puis avons réglé sa hauteur sur la table à l'aide du coinqueur et de la poulie.
3. Nous avons ensuite, fixé les masses au bout de la corde, du côté de la poulie, afin de la tendre. Ainsi, en changeant les masses, il était possible de changer la tension de la corde.
4. Avec une masse de 110 [g], nous avons cherché les modes 3, 5 et 7 (Un contrepoids de 110 [g] était idéal afin de trouver les différents modes, car il permettait d'avoir une corde ni trop ni trop peu tendue). Les modes impairs étant plus facilement observables que les modes paires. Nous avons mesuré la longueur d'onde avec le mètre (mesure de la distance entre trois nœuds) et avons relevé la fréquence d'oscillation du vibreur avec le multimètre pour chacun des trois modes.

5. Puis, nous avons fait varier le contrepoids entre 60 [g] et 360 [g] avec des écarts de 50 [g] en mesurant la longueur d'onde et la fréquence pour les modes 5 et 7 à chaque fois.

### 3.3 Schéma

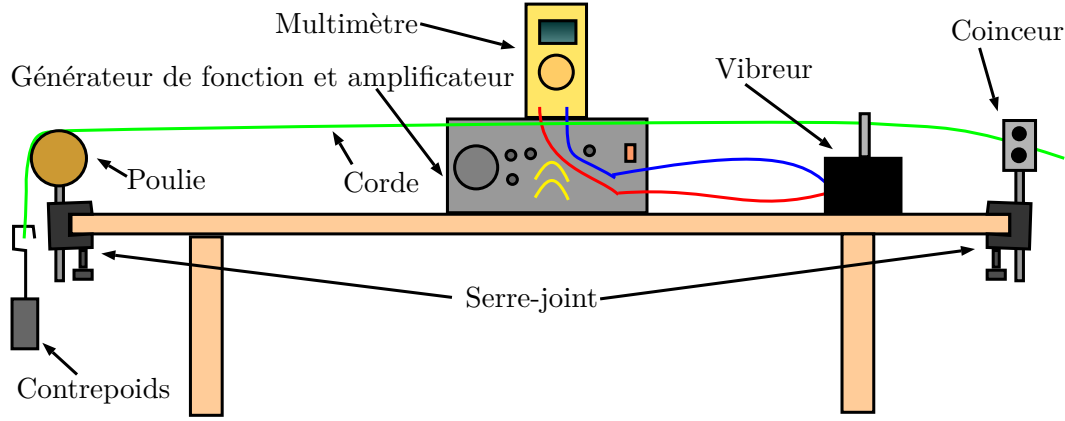


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience

## 4 Résultats et calculs

Ci-suit les résultats obtenus lors de l'expérience, ainsi que les différents calculs effectués. Pour commencer, nous avons mesuré la masse de la corde, ainsi que sa longueur totale, afin de pouvoir calculer la masse linéaire  $\mu$  de la corde : elle pèse  $M \approx 4$  [g] et mesure  $l \approx 2.638$  [m], d'où  $\mu = \frac{m}{L} \approx 1.516 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{kg}{m} \right]$ .

De plus, la longueur de la corde qui vibre est de  $L \approx 1.475$  [m]. De celle-ci, nous pouvons représenter les différents modes de vibration, en fonction de la position  $x$  sur la corde, comme illustré sur la Figure 3. Pour ce faire, nous avons utilisé la formule  $y(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , où  $n$  est le mode de vibration et  $A$  l'amplitude de l'onde, que nous avons fixé à 1. Sur le graphe sont représentés les modes  $n = 3, 5, 7$ , car ce sont les modes les plus facilement observables (car les modes paires paraissent instable à l'œil). De plus on y a ajouté les nœuds, qui sont les points où l'amplitude de l'onde est nulle, et donc une référence fixe afin de mesurer la longueur d'onde  $\lambda$ , qui correspond à l'espace entre trois nœuds, car cela correspond à un ventre en haut et un autre en bas, soit un cycle complet.

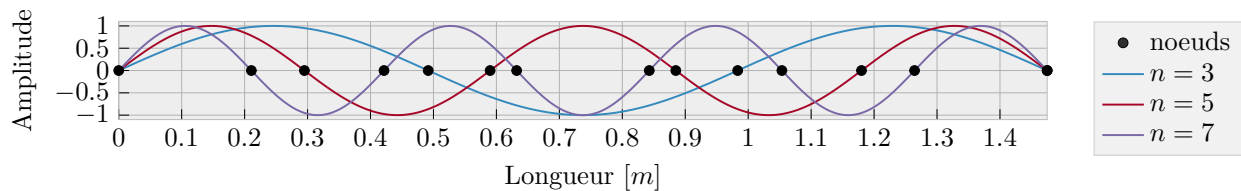


FIGURE 3 – Ondes stationnaires selon différents modes.

Ensuite, nous avons consigné nos mesures, ainsi que les quelques résultats de calculs nécessaires au traitement de ces données, dans la Table 1.

Dans la première colonne est notée la masse du contrepoids  $m$ , en gramme, qui est utilisé pour

tendre la corde. Juste à côté est consignée la tension  $T$  de la corde, en Newton, qui est égale à la force pesante du contrepoids,  $F_P = T = m \cdot g$ , avec  $g$  est l'accélération terrestre, qui vaut  $9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ . Les deux colonnes suivantes contiennent la fréquence  $f$  de vibration de la corde, en Hertz, ainsi que le mode  $n$  de vibration, qui est le nombre de ventres présents sur la corde. Ce sont les deux valeurs mesurées à proprement parler lors de l'expérience, avec la longueur d'onde.

Celle-ci est consignée dans la colonne suivante, en mètre, et est consignée sous le symbole  $\lambda$  pour celle que nous avons mesurée, et  $\lambda_{th}$  pour celle que nous avons calculée théoriquement, via la formule  $\lambda_{th} = \frac{2L}{n}$ , où  $L$  est la longueur de la corde qui vibre et  $n$  le mode de vibration.

Enfin, les trois dernières colonnes contiennent la célérité calculée via les différentes formules, soit  $c = f \cdot \lambda$ ,  $c_{th1} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  et  $c_{th2} = f \cdot \lambda_{th}$ , en mètre par seconde.

$m$ [g]	$T$ [N]	$f$ [Hz]	$n$	$\lambda$ [m]	$\lambda_{th}$ [m]	$c$ $\left[ \frac{m}{s} \right]$	$c_{th1}$ $\left[ \frac{m}{s} \right]$	$c_{th2}$ $\left[ \frac{m}{s} \right]$
110	1.079	45.65	5	0.590	0.590	26.93	26.68	26.93
110	1.079	64.22	7	0.425	0.421	27.29	26.68	27.06
110	1.079	26.26	3	1.010	0.983	26.52	26.68	25.82
110	1.079	56.06	6	0.480	0.491	26.91	26.68	27.56
60	5.886	34.00	5	0.585	0.590	19.89	19.70	20.06
60	5.886	45.46	7	0.450	0.421	20.46	19.70	19.16
160	1.570	57.09	5	0.587	0.590	33.51	32.17	33.68
160	1.570	78.04	7	0.420	0.421	32.78	32.17	32.89
210	2.060	64.06	5	0.565	0.590	36.19	36.86	37.80
210	2.060	90.00	7	0.410	0.421	36.90	36.86	37.93
260	2.551	67.71	5	0.590	0.590	39.95	41.01	39.95
260	2.551	97.00	7	0.405	0.421	39.29	41.01	40.88
310	3.041	75.90	5	0.590	0.590	44.78	44.78	44.78
310	3.041	108.6	7	0.400	0.421	43.44	44.78	45.77
360	3.532	82.00	5	0.580	0.590	47.56	48.26	48.38
360	3.532	116.9	7	0.415	0.421	48.51	48.26	49.27

TABLE 1 – Mesures et calculs.

Finalement, nous avons représenté graphiquement les célérités calculées en fonction de la masse du contrepoids utilisé pour tendre la corde, dans la Figure 4. En plus des trois séries de points, nous avons également représenté la courbe correspondant à la célérité  $c_{th} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

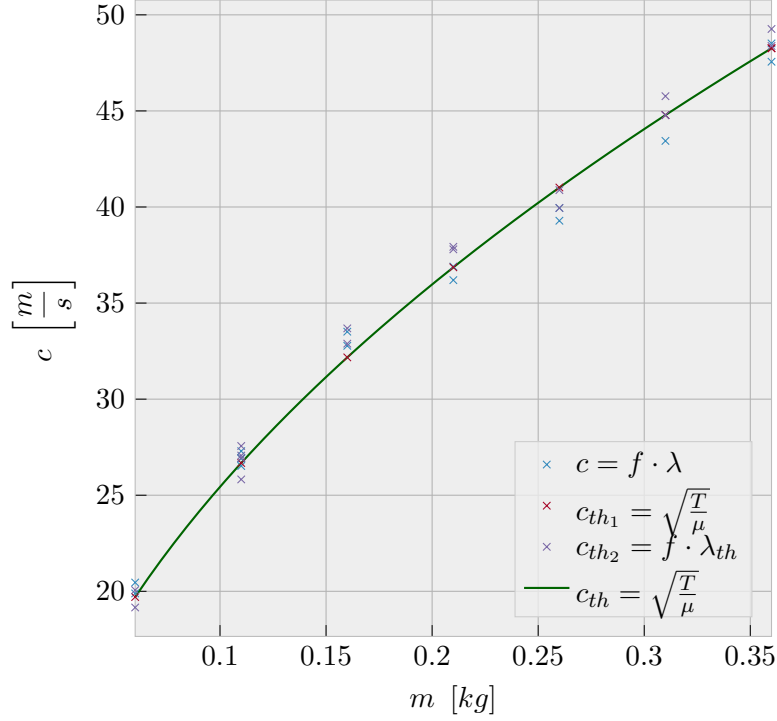


FIGURE 4 – Célérité en fonction de la masse.

#### 4.1 Incertitudes

Les plus grandes sources d'incertitudes se trouvent dans la mesure de la fréquence et de la longueur d'onde. L'incertitude sur la fréquence est très faible sur la lecture de l'appareil, mais la fréquence dans laquelle il est possible de trouver un mode spécifique varie d'environ 1 [Hz]. Les fréquences allant de 45.7 [Hz] à 116.9 [Hz] l'incertitude varie entre 2.2% et 0.9% ( $\frac{1}{65} = 1.5\%$ , 65 [Hz] étant une fréquence typique). L'incertitude sur la longueur d'onde quant à elle est de l'ordre de 1%, ( $\frac{0.005}{0.45} = 1.1\%$ ). Ainsi l'incertitude sur la célérité calculée selon ces paramètres,  $c = \lambda \cdot f$ , est de l'ordre de 3% ( $1.5 + 1.1 = 2.6$ ).

Par contre, l'incertitude sur le calcul basée sur les caractéristiques de la corde,  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , est bien plus faible, de l'ordre de 0.2%. Ceci s'explique par une mesure précise de la masse linéaire de la corde. En comparant la célérité obtenue par les deux calculs, nous constatons que l'erreur ne dépasse pas l'écart imposé par l'incertitude. Nous pouvons donc dire que les mesures sont satisfaisantes.

### 5 Discussion des résultats

Nous pouvons voir que les célérités calculées via les différentes formules sont très proches les unes des autres, ce qui semble indiquer que les formules utilisées sont correctes. Tout d'abord, notons que malgré la difficulté à observer les modes pairs, nous avons tout de même pu avoir une mesure pour  $n = 6$ .

Ensuite, nous observons sur la Figure 4 que les célérités calculées via les propriétés de la corde

( $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ) sont très proches de la célérité mesurée ( $c = f \cdot \lambda$ ) et celle calculée selon les conditions de l'expérience ( $c = f \cdot \lambda_{th}$ ). La tendance générale est que celle mesurée est légèrement plus faible, et celle via les conditions de l'expérience légèrement plus élevée. Cela peut s'expliquer par plusieurs facteurs.

Tout d'abord à propos de la célérité propre aux propriétés de la corde, il faut tout d'abord mentionné que c'est un résultat admettant plusieurs hypothèses et approximations (voir Section 2), comme négliger la pesanteur, une tension uniforme, une perturbation de faible amplitude, etc.

De plus, il faut noter que la masse linéique de la corde est calculée via la mesure de la masse de la corde, soumise à peu d'erreur, néanmoins le nombre de chiffres significatif est limité par la précision de la balance. D'un autre côté, la mesure de la longueur de la corde est également soumise à de l'erreur, donc la masse linéique comporte plusieurs sources d'erreur.

Enfin, la tension sur la corde est peut-être légèrement différente de celle calculée, car la masse du contrepoids n'est pas vérifiée et peut être que le montage modifie légèrement la tension, via par exemple la poulie qui induit une force de frottement.

Ensuite, à propos de la célérité propre aux conditions de l'expérience, la principale source d'erreur est le montage de l'expérience. En effet, on a mesuré la distance entre la poulie et le vibreur en considérant que ce sont les bords de la corde qui crée l'onde et que ceux-ci sont fixes afin d'avoir la longueur  $L$ , or le vrai point fixe et le coinçeur, le vibreur est néanmoins une bonne approximation de part sa fréquence élevée.

Finalement, la mesure de la longueur d'onde est assez approximative, car on ne peut pas coller la règle à la corde et il faut donc estimer la position du nœud. De plus, la fréquence est réglée manuellement via un générateur de fonction, dont le réglage se fait via une molette, ce qui n'est pas forcément très précis.

## 6 Conclusion

En conclusion, nous sommes satisfaits des résultats obtenus, car ils sont cohérents avec les formules utilisées. L'expérience est très intéressante, car elle permet de visualiser les ondes stationnaires, et de plus elle permet de mettre en évidence que l'on peut calculer la célérité d'une onde en connaissant uniquement les propriétés de la corde, ce qui est très pratique, par exemple cela explique comment fonctionne un instrument à corde, et pourquoi il faut tendre ou détendre la corde pour l'accorder. Le montage pourrait néanmoins être amélioré, par exemple en créant la tension dans la corde via un système de mesure de la force, afin d'avoir une tension plus précise, ainsi qu'une fixation plus précise que la poulie pour mesurer la longueur de la corde. Deuxièmement, on pourrait attacher la corde au vibreur afin d'être plus exact sur la longueur de la corde. Ensuite, on pourrait utiliser un générateur de fonction avec un réglage plus fin, que l'on pourrait même brancher à un stroboscope afin de pouvoir le synchroniser avec la fréquence de l'onde et ainsi fixer l'onde et pouvoir mesurer la longueur d'onde plus précisément. Finalement, on pourrait monter le tout sur un support afin de pouvoir mesurer les longueurs d'onde de manière plus précise, et ainsi avoir une meilleure précision sur la célérité, par exemple en utilisant deux lasers que l'on pointerait sur les nœuds afin de mesurer précisément leur écartement. Malgré tout, cela demeurera une expérience très intéressante dans l'étude des ondes stationnaires.