重庆八中周赛Round#26

时间：2024年3月1日

T1 移动 move

贪心

本题题目可以简化为：从N个具有X,Y两个属性的物品中选出若干件，使X**总和的绝对值**与Y**总和的绝对值**之和尽可能的大。

即答案为：

$$|\sum X_i| + |\sum Y_i|$$

若考虑一个属性的绝对值最大，假设考虑X属性。那么有：

$$|\sum X_i| = \max(\sum X_i, -\sum X_i)$$

现在要考虑两个属性的绝对值之和最大，根据绝对值的推导，可得：

$$|A| + |B| = \max(A+B, A-B, -A+B, -A-B)$$

所以有：

$$\begin{aligned}|\sum X_i| + |\sum Y_i| &= \max(\sum X_i + \sum Y_i, \sum X_i - \sum Y_i, -\sum X_i + \sum Y_i, -\sum X_i - \sum Y_i) \\ &= \max(\sum X_i + Y_i, \sum X_i - Y_i, \sum Y_i - X_i, \sum -X_i - Y_i)\end{aligned}$$

对于任意一件物品，只要该物品能为结果带来的收益> 0，就选择该物品，反之则抛弃该物品。

所以按照X_i和Y_i分成以下4类：

1. $X_i + Y_i > 0$
2. $X_i - Y_i > 0$
3. $Y_i - X_i > 0$
4. $-X_i - Y_i > 0$

得到4类物品价值总和的最大值就是最终答案。

复杂度分析：

时间复杂度：$O(n)$

T2 马棚 horse (BZ29750)

我们用$\mathrm{dp}[i][j]$表示，前j匹马，使用了i个马棚所能达到的**最小**系数之和

由于我们要求的**最小系数**，因此我们需要将dp数组的初始值赋成inf

我们枚举第i个马棚的**编号最小的马**k，计算区间$[k,j]$的马在一个马棚中所产生的不愉快系数v，那么我们就能够很简单地得到转移方程：

$$\mathrm{dp}[i][j] = \min(\mathrm{dp}[i][j], \mathrm{dp}[i-1][k-1] + v)$$

最后，我们的答案就是$\mathrm{dp}[K][n]$

T3 双色图案 bicoloring (CF 1051D)

题目是关于计数一些组合对象的数量，因此考虑用动态规划解决。

定义动态规划数组 $dp[i][j][\text{mask}]$ 为前 i 列的漂亮双色着色方案数，其中 j 个连通块已经创建且不能被修改，且第 i 列的颜色由掩码 $mask$ 决定（它的第一位是下方单元格的颜色，第二位是上方单元格的颜色）。如果第 i 列的单元格属于该连通块，则该连通块可以被修改。

初始状态是 $dp[0][0][\text{mask}] = 1$ 对于每个 $0 \le \text{mask} \le 3$，而其他任何状态 $dp[i][j][\text{mask}] = 0$。

你应该迭代下一列可能的 $nmask$ 并重新计算连通块数。显然，根据当前连通块数和上一列的状态，可以较容易计算出新的连通块数。

在代码中，函数 $get(mask, nmask)$ 用来确定在从 $mask$ 转移到 $nmask$ 时增加的连通块数。这需要小心处理几种情况。

```
bool full(int mask){
    return (mask == 0 || mask == 3);
}
int get(int mask, int nmask){
    int cnt = __builtin_popcount(mask ^ nmask);
    if (cnt == 0) return 0;
    if (cnt == 2) return (full(mask) ? 1 : 2);
    return (full(mask) ? 0 : 1);
}
```

那么所有的状态转移方程是：

$$dp[i+1][j+\text{get(mask,nmask)}][\text{nmask}] += dp[i][j][\text{mask}].$$

然而，最后一列并不会包含答案，因为连通块的数量是不正确的。

增加一个哨兵列 $n+1$，等于每个掩码与 3 的异或。这样把第 n 列新增的连通块数计算出来后，并从所需要的连通块总数中减去。所以答案是所有 $0 \le \text{mask} \le 3$ 的 $dp[n][k - \text{get(mask,mask}\oplus 3)][\text{mask}]$ 之和。

总体复杂度：$O(n^2 \cdot 4^m)$，其中 m 是行的数量（对于这个问题 $m = 2$）。

T4 星际货运 express (COCI 2009 R7 SVEMIR)

很显然，在n个点之间建$n-1$条边使得总的建边长度和最短，是一个很显然的最小生成树题目。但是，因为此题的点数有1e5个之多，那么，边的数量就有$n \times (n-1)/2$个，很显然，这个大小超过了数组能够承受的上限，因此，我们不能直接对所有的边进行处理，要处理这个问题必须得想办法减少需要处理的边的规模才行。

那么，有什么可以删边的方法呢?

我们发现，对于两点之间的边权，它的大小为x, y, z三个维度中最小的差的绝对值。因此，要使得任意两点之间的距离最小，我们能够选取的边一定是在以某个维度排序后位置相邻的两个点之间进行连接的。

因此，对于这个问题而言，我们分别按照x轴坐标，y轴坐标，z轴坐标从小到大排序三次，每次排完序之后，只在排序后相邻的两个点之间建边，那么，这样，我们使用的边数只有$3 \times n$条这么多，而这个规模就是我们能够接受的了。在建好这样一张图之后，跑一个Kruskal就可以了。