重庆八中周赛Round#28

时间：2024年3月30日

T1 前导一 one (ARC127A)

考虑最只有一个前导1的数字，是下面这些数字：

$[1,2)$，$[10,20)$，$[100,200)$，...

考虑最只有两个前导1的数字，是下面这些数字：

$[11,12)$，$[110,120)$，$[1100,1200)$，...

考虑最只有三个前导1的数字，是下面这些数字：

$[111,112)$，$[1110,1120)$，$[11100,11200)$，...

......

观察到上面每一类的区间特点是：

1. 每一个区间都是左闭右开
2. 每一类的第一个区间的左端点都是1，右端点比左端点大1

所以对于一类区间，假设描述的是有x个前导1的数字，那么第一个区间$[l,r]$左端点
$l=11\cdots1(一共x个1)$，$r=l+1$

$[l,r)$，$[l*10,r*10),[l*100,r*100),\cdots$

枚举前面 1 的个数作为下界闭区间，再加上 1 作为上界开区间，不断乘 10 来获得新的上下界，需要注意边界条件 n 和当前算的数要取一个最小值。时间复杂度 $O(\log^2 n)$。

T2 程序 program (「NOI2015」程序自动分析)

我们考虑使用并查集先维护所有 $x_i=x_j$ ，即将 i,j 添加到同一集合之中

对于 $x_i\neq x_j$ 的式子，我们需要查看 i,j 是否处于同一集合，若是，说明条件无法满足，否则说明可以满足

注意到 $1\leq i,j\leq 10^9$ ，且我们只需要关心 i,j 的相等性，因此我们需要对 i,j 进行离散化操作。时间复杂度 $O(nlogn)$

T3 溜冰 skate ([COCI 2023/2024 #3] Vrsar)

对于这个任务,最重要的观察是总是可以找到一个只使用一个溜冰场的最优解。

证明

让我们假设某个最优解使用了多个溜冰场。看看 诚诚和勤勤 最后滑冰的溜冰场。如果他们直接去那个溜冰场,解决方案将是相同的。她们到达那里所花的时间不会更多(因为在两种解决方案中他们都必须到达那里),而且在其他溜冰场滑冰的每一分钟都可以用在最后一个溜冰场上。
有了这个观察,我们可以简化一下任务。我们不需要从山上下来的时间。对于每个起始位置,我们必须找到

对于每个 i,$t_i - |a - x_i|$ 的最大值。这可以通过多种方式完成;官方解决方案使用了两个集合,一个用于当前位置左侧的位置,一个用于当前位置右侧的位置。有关详细信息,请查看附带的实现。

T4 礼物发放 gift (COCI 2023/2024 #2 Kuglice)

对于这个题目，如果用最朴素的暴力做法，每次判断选取两端中的哪一个礼物，可以直接用dfs求解。因为每次选择有两种情况，最终时间复杂度为 $O(2^n)$

很显然，前边的暴力做法并不能得到所有的分数。而通过观察数据范围，时间复杂度大约在 $O(n^2)$，又由于每次对答案只能左取或者右取，因此，每次都会留下连续的一个片段，且通过观察，可以得到这样一个结论：

- 若对于区间$[l,r]$而言，对于颜色a_i，若该区间内没有包含颜色a_i**第一次出现的位置**或**最后一次出现的位置**，那么，这个区间范围内，对于颜色a_i而言就一定不会得分。

因此，我们只需要记录每种颜色的礼物第一次和最后一次出现的位置，就可以利用dp来解决这个问题。

设$dp[i][j]$表示在区间$[i,j]$内先手能够得到的加分。这里的加分是指先手比后手多的分数(若后手得分更多，则这个加分为负)。

假设，在区间内共能够获得分数k分，先手比后手多a分，那么，先手得到的分数就是$\frac{k+a}{2}$。而对于题目而言，总分为k，加分为$dp[1][n]$，那么，先手的得分就为$\frac{k+dp[1][n]}{2}$。

对于每次dp而言，判断从左边拿和从右边拿，哪种产生的贡献最大，取max进行转移即可。这样，就可以得到状态转移方程式

$$d[l][r] = max(check(l,r,a[l]) - del(l+1,r), check(l,r,a[r]) - del(l,r-1))$$

其中check用于检查该颜色是否为第一次或最后一次出现，若是则+1，若不是则不变。del函数为递归函数，用于计算更小的[l,r]区间进行答案的转移。即，这个写法用到了记忆化搜索。