重庆八中周赛Round#29

时间：2024年4月12日

T1 生成矩阵 CF202C

此题需要多多尝试，然后找到以下这样一些规律：

- 我们所需要寻求的n一定是一个奇数。因为，若n为偶数，那么，矩阵A的两个最中心的行必须是0，否则，中间将存在包含两个1相邻的情况。同样的，对于列而言，也会出现相同的问题。因此，若n是偶数，则它能放的数量和边长为$n-1$能放的数量是一样的。而我们要求的是最小的边，因此，n一定是奇数。
- 对于奇数而言，很明显，对于每一个1×2的格子，可以填入一个数字1，那么，对于边长为$2*i+1$的矩阵，最多可以放入$(2*i+1)*((2*i+1)+1)/2=2*i+1$个数字$1$
- 对于更少的数字1，若少的个数为1个，我们可以减少最中间位置的数字1，若少的个数为2，可以减少最中间行或列对称位置的两个数字1，若少的个数为3，可以减少最中间行或列对称位置的两个数字1以及最中间的数字1，若减少的个数为4，则可以减少任意处于对称位置的四个数字1。超过4个时，就通过前面描述的这四种方法叠加以此类推。

因此，这个问题可以这样求解：先预处理出所有奇数边长情况下最多能够容纳的数字1的个数。对于输入的数字x，只需要找到第一个比它大的满足条件的边长，那么，这个边长就是最终的答案。

特别的，因为当边长为3时，因为没有办法在最中间行减少两个数字以达到对称，需要特判。

T2 pSort CF28B

显然，对某三个位置 a,b,c ，如果 a 能到达 b ，b 能到达 c，那么显然 a 能到达 c，因此，我们考虑用并查集维护这种带传递性的关系

显然，对于某个位置 i 而言，它可以到达 $i+b_i(i+b_i\le n)$，$i-b_i(i-b_i>0)$，那么我们将这几个位置合并即可

最后判断所有的 a_i 和 i 是否在同一集合之中

T3 消除孤立值 ABC283E

动态规划

第 i 行的合法，依赖于第 $i+1$ 行的状态，第 $i+1$ 状态只有$0/1$两个，只考虑前 i 行的时候把第 $i+1$ 行的状态也压下来，就没有后效性。

记 `dp[i][0/1][0/1]` 表示考虑到第 i 行，且第 $i-1$ 行是否翻转以及第 i 行是否翻转时使得前 i 行没有孤立元素的最小操作次数。

考虑第 i 行是不是合法的，当第 $i-1$ 行、第 i 行、第 $i+1$ 行翻不翻的状态都确定下来时，第 i 行的合法性是唯一确定的，用第 $i+1$ 行翻不翻作为代价转移。

状态转移方程为：

$$dp[i+1][j][k]=\min_{u\text{为第}i-1\text{行状态}}\{dp[i][u][j]+k\}$$

最终答案为：

$$\min dp[H+1][0][0],dp[H+1][1][0]$$

时间复杂度：$O(HW)$

T4 排列计数 CF1946E

组合数学

首先，$p_1\neq 1,s_{m2}\neq n$ 肯定是非法情况（第一个位置肯定是前缀最大值，最后一个位置肯定是后缀最大值）

其次，$p_{m1}\neq s_1$ 也是非法情况（p_{m1} 所在位置肯定是数列的最大值）

接下来考虑计数

设 ans 一开始为 1

最大数 n 肯定位于位置 p_{m1} （或位置 s_1），观察到此时两边数列互不影响，因此我们将 ans 乘上 $C_{n-1}^{p_{m1}-1}$ ，代表我们从剩下的 $n-1$ 个数中选择了 $m-1$ 个数放在**最大值**的前面

此时前后两段解法类似，我们以前面一段为例

此时，前缀最大值数组为 $p_1(1),p_2,\cdots p_{m1-1},p_{m1}$，我们需要将我们刚刚选择的 $m-1$ 个数的最大值放在位置 p_{m1-1} ，此时，相当于我们可以从剩下 $m-2$ 个数中任选 $p_{m1}-p_{m1-1}-1$ 个，**按任意顺序**放在我们的区间 (p_{m1-1},p_{m1})，设 $k=p_{m1}-p_{m1-1}-1$，那我们需要将 ans 乘上 A_{m-2}^{k}，后续过程类似，以此类推即可

时间复杂度 $O(n)$