KMP

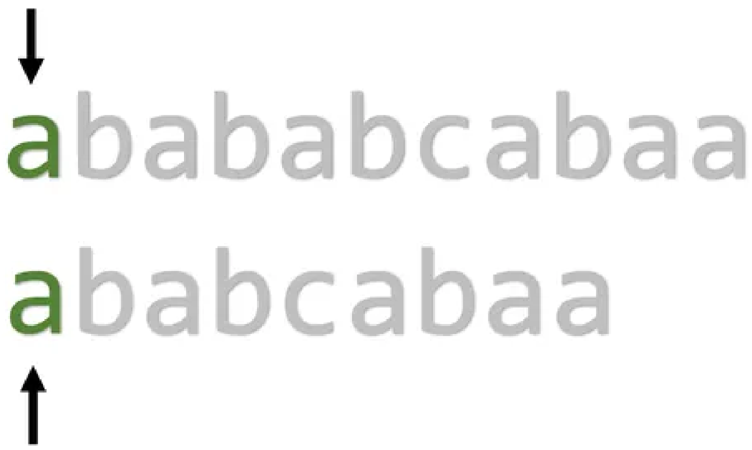
KMP算法（全称Knuth-Morris-Pratt字符串查找算法，由三位发明者的姓氏命名）是可以在**文本串** s 中快速查找**模式串** p 的一种算法。

要想知道KMP算法是如何减少字符串查找的时间复杂度的，我们不如来看暴力匹配方法是如何浪费时间的。所谓暴力匹配，就是逐字符逐字符地进行匹配（比较 `s[i]` 和 `p[j]`），如果当前字符匹配成功（`s[i] == p[j]`），就匹配下一个字符（`++i, ++j`），如果失配，`i` 回溯，`j` 置为0（`i = i - j + 1, j = 0`）。代码如下：

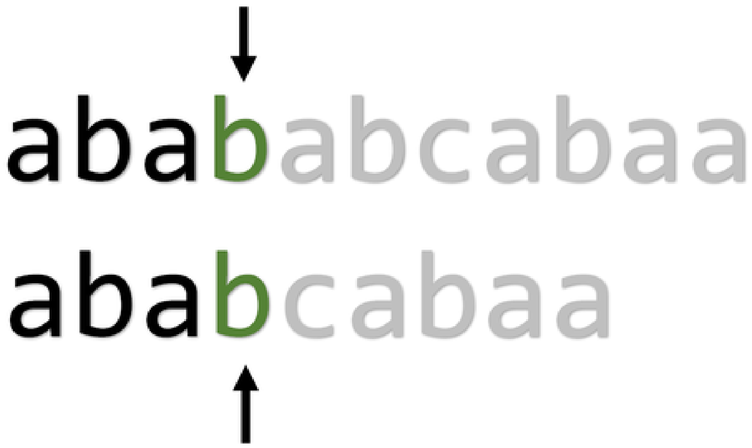
```
// 暴力匹配
int i = 0, j = 0;
while (i < s.length()) {
    if (s[i] == p[j]) ++i, ++j;
    else i = i - j + 1, j = 0;
    if (j == p.length()) {  // 匹配成功
        // do something
    }
}
```

举例来说，假如 $s = \texttt{abababcabaa}$，我们暴力匹配，过程会是怎样？

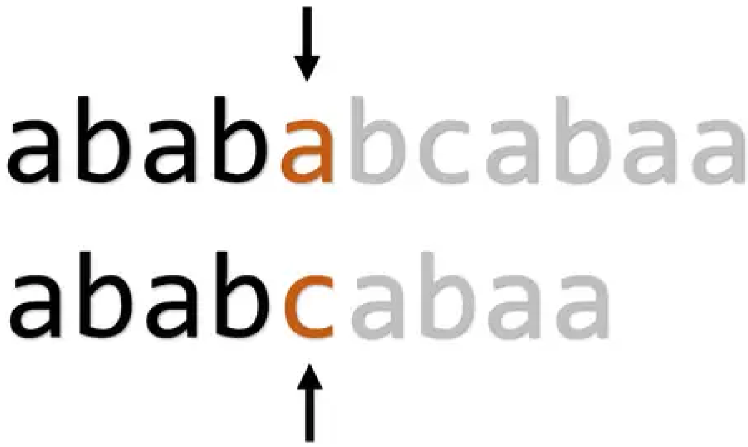
从头开始匹配，第一个字符是a，匹配成功。



第2~4个字符也匹配成功，继续。

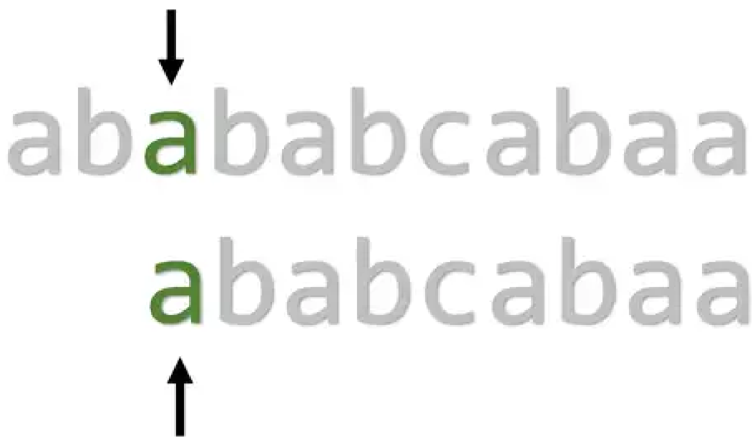


下一位，匹配失败，回溯。

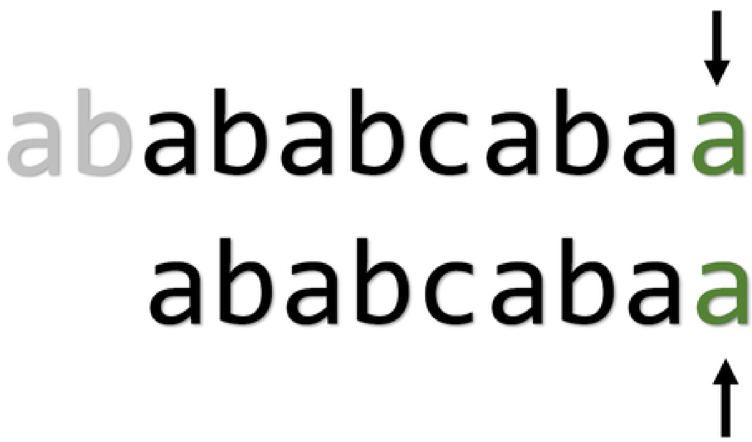


匹配失败，继续尝试。

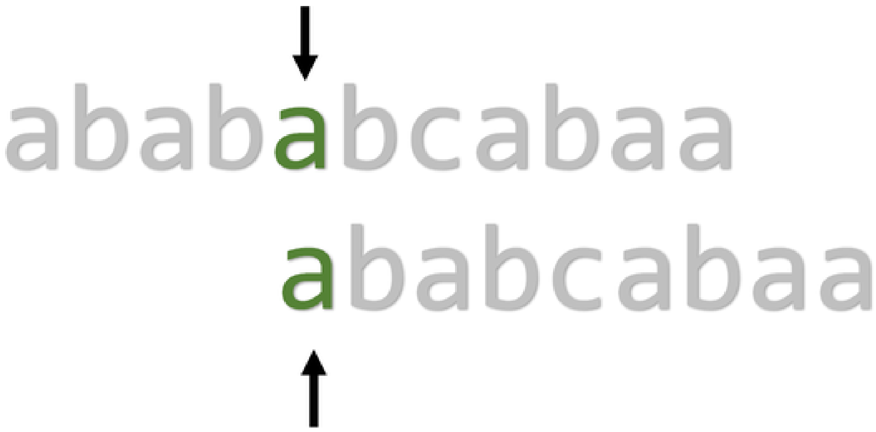
下一位，匹配成功。



就这样一直匹配到结尾。



设两个字符串的长度分别为 n 和 m ，则暴力匹配的最坏时间复杂度是 $O(nm)$ 。究其原因，在于 i 进行回溯浪费了时间。能不能让 i 不走回头路呢？然而，如果 i 不回溯，同时又把 j 置为 0，很可能会出现缺漏，如下图。



因此，我们考虑让 j 被赋为一个合适的值，我们引入了**PMT**（Partial Match Table，**部分匹配表**）。

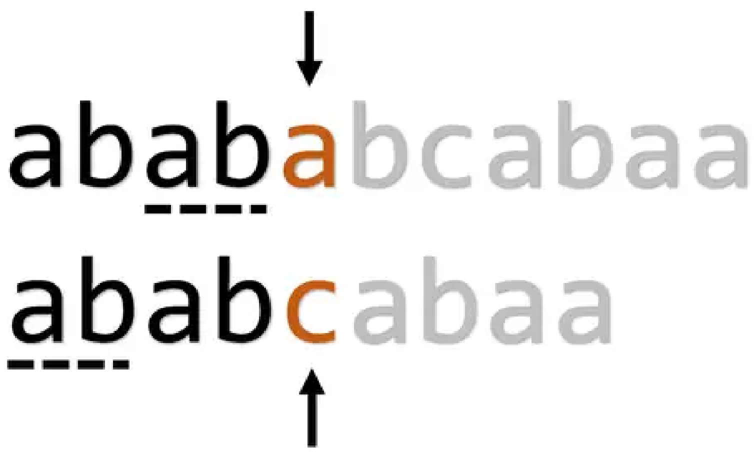
因为 j 的值理论上可以从**模式串自身**得到，因此我们可以对模式串预处理出来一张PMT表，例如 `ababcabaa` 对应的PMT如下：

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p	a	b	a	b	c	a	b	a	a
pmt	0	0	1	2	0	1	2	3	1

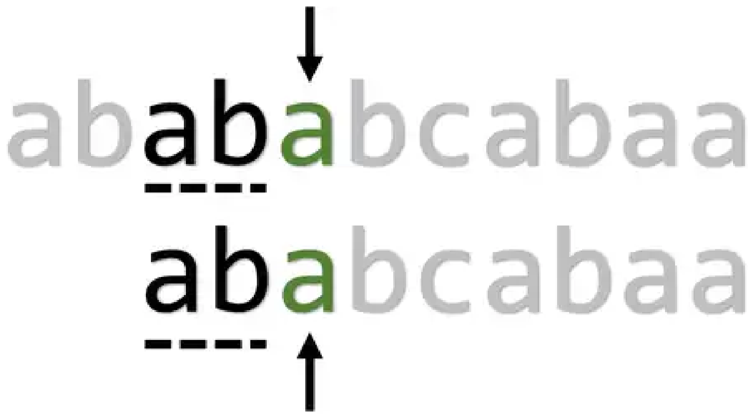
简单地说，`pmt[i]` 就是，从 `p[0]` 往后数、同时从 `p[i]` 往前数相同的位数，在保证**前后缀**相同的情况下，最多能数多少位（这也称为前缀的 `border` ）。即：

$$\max\{len\}\text{where } p[0\ldots len-1]=p[i-len+1\ldots i]$$

为什么PMT可以用来确定 j 指针的位置呢？让我们先回到暴力匹配算法第一次失配时的情形：

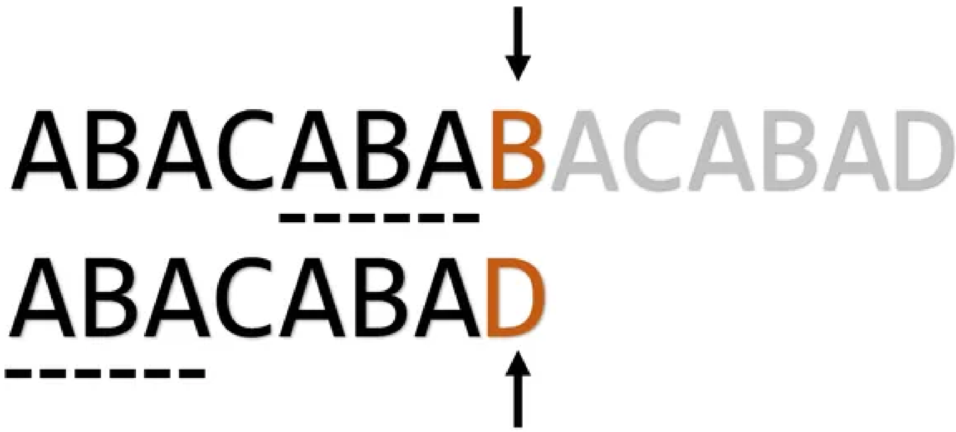


这时，s 中的 `'a'` 与 p 中的 `'c'` 没有配上，我们计划保持 i 指针（上面的指针）不变，而把 j 指针左移。我们注意到，`"abab"` 已经匹配成功了，它拥有一个前缀 `"ab"`，以及一个后缀 `"ab"`（虚线部分），所以我们可以把这个 `"ab"` 利用起来，变成下面这样：

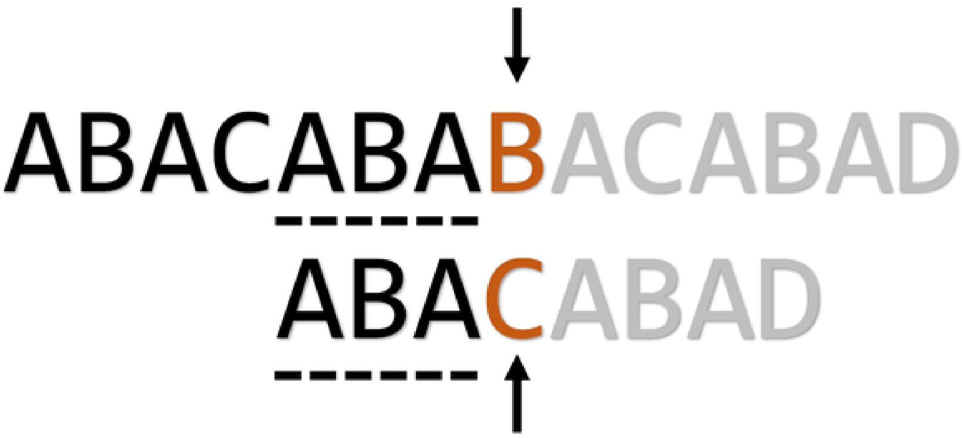


回到我们刚刚的PMT表中，我们发现这时我们正是在令`j = pmt[j - 1]`

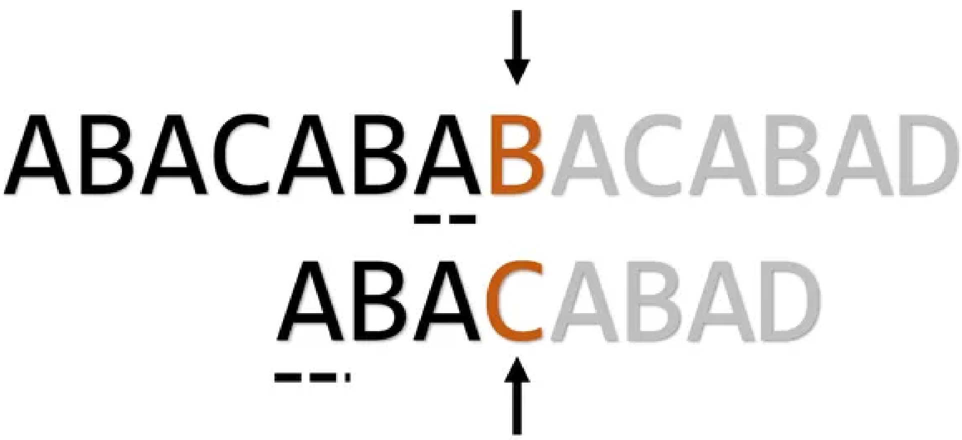
再举一个例子：



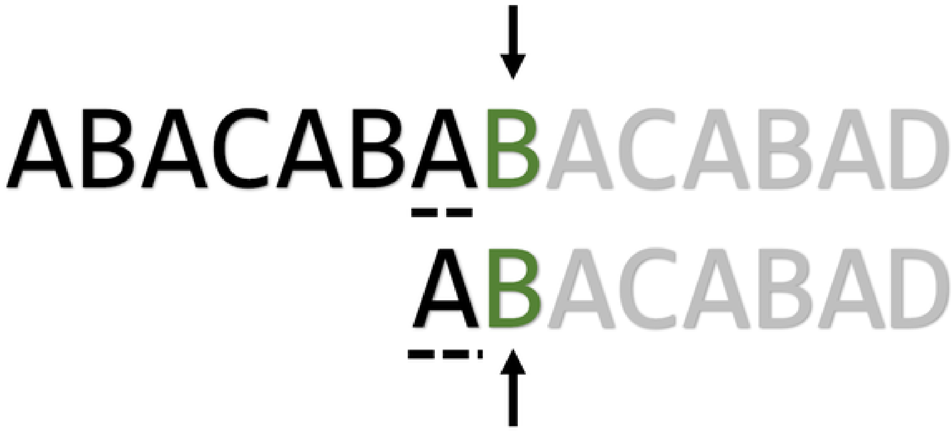
此时发生失配，我们令`j = pmt[j - 1] (= 3)`（也就是符合条件的**最长前缀**所**紧接**着的下一位）：



仍不匹配，我们继续：



这次取得了成功。当然，我们并不总是能成功，有可能 j 指针一路减到了0，但`s[i]`仍然不等于`p[j]`，这时我们不再移动 j 指针



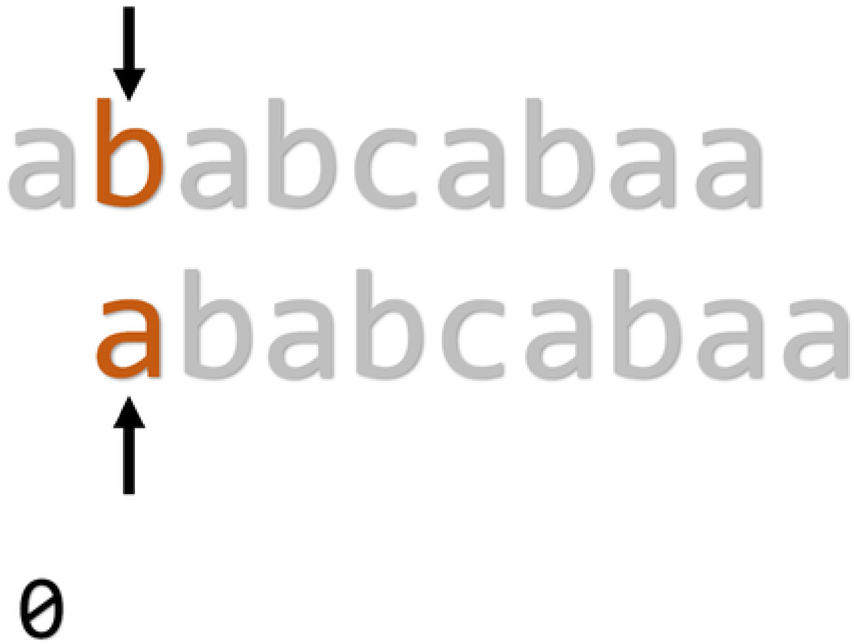
同时，`pmt` 数组整体右移一位（首位填 `-1`），许多操作会方便许多，我们也通常将其称为 `nxt` 数组

上述的kmp算法转换成代码是这样的：

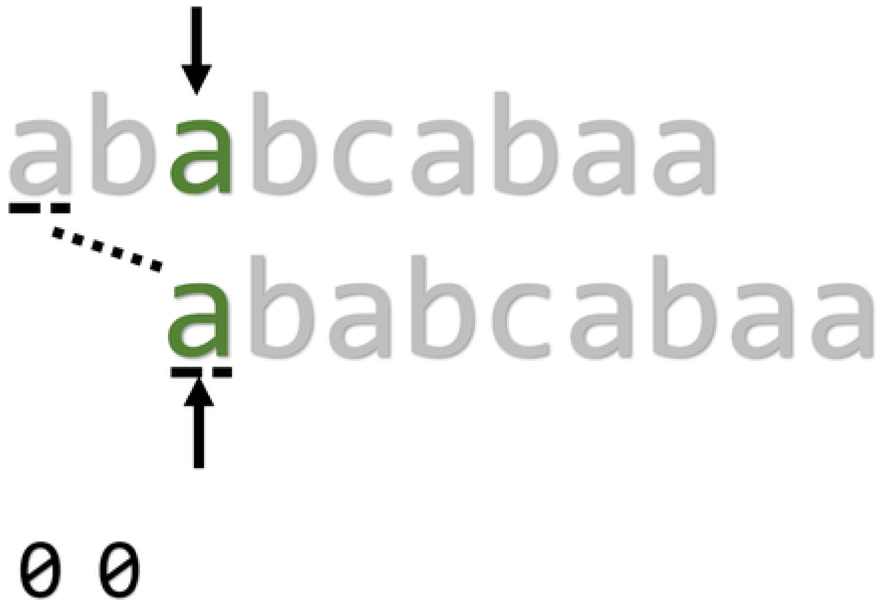
```
void kmp(string& f, string& s, const vector<int>& nxt) {
    int i = 0, j = 0;
    while (i < (int)f.size()) {
        if (j == -1 || f[i] == s[j]) {
            i++; j++;
            if (j == s.size()) {
                // do sth.
            }
        }
        else {
            j = nxt[j];
        }
    }

}
```

现在问题来了，`nxt` 怎么求？如果暴力求的话，时间复杂度是 $O(m^2)$，并不理想。一种精妙的做法是，在**错开一位**后，让 `p` **自己匹配自己**（这相当于是用**前缀**去匹配**后缀**）。我们知道 `nxt[0] = -1`，而之后的每一位则可以通过在匹配过程中记录 `j` 值得到。

还是以刚刚的模式串为例：

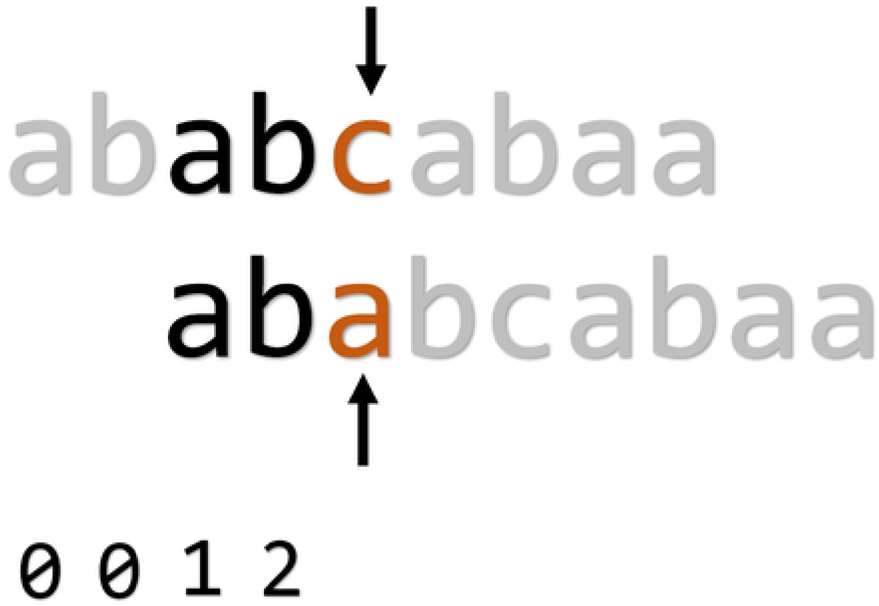


匹配失败，则 `nxt[2] = -1 + 1 = 0` ， `i` 指针后移。

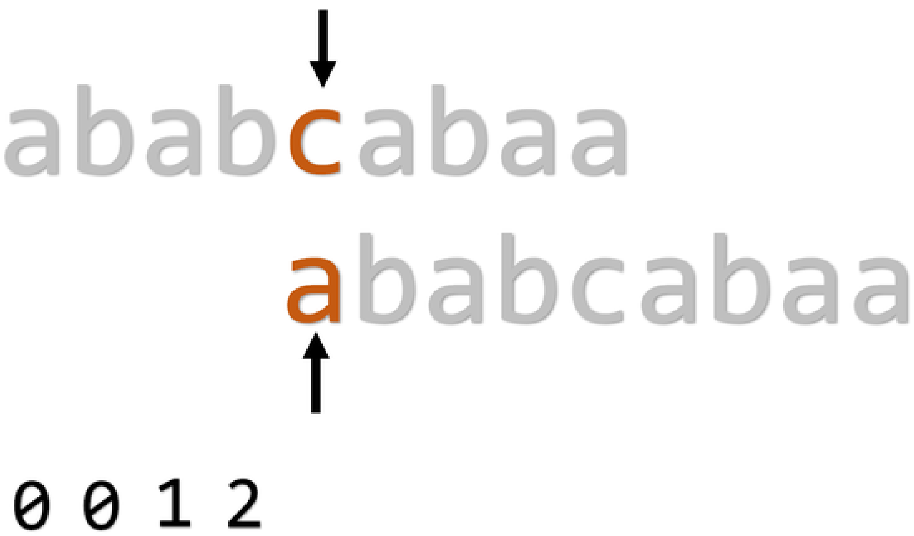


接下来匹配成功， `j` 指针右移，可知 `nxt[3] = 1` ，然后将两个指针都右移。

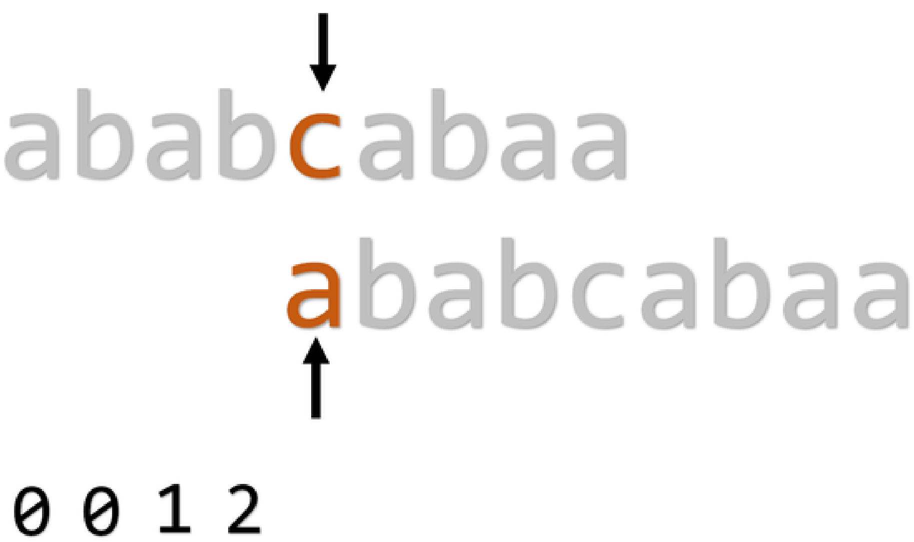
继续匹配成功， `j` 指针右移， `nxt[4] = 2` 。



下一位失配，因为前面的 `nxt` 已经算出来了，我们可以像匹配文本串时那样地使用它。`nxt[2]` 即 `pmt[1]` 等于0，所以退回到开头。



`j` 指针已经到了开头，仍未匹配成功，所以不再移动，`nxt[5] = j = 0`。

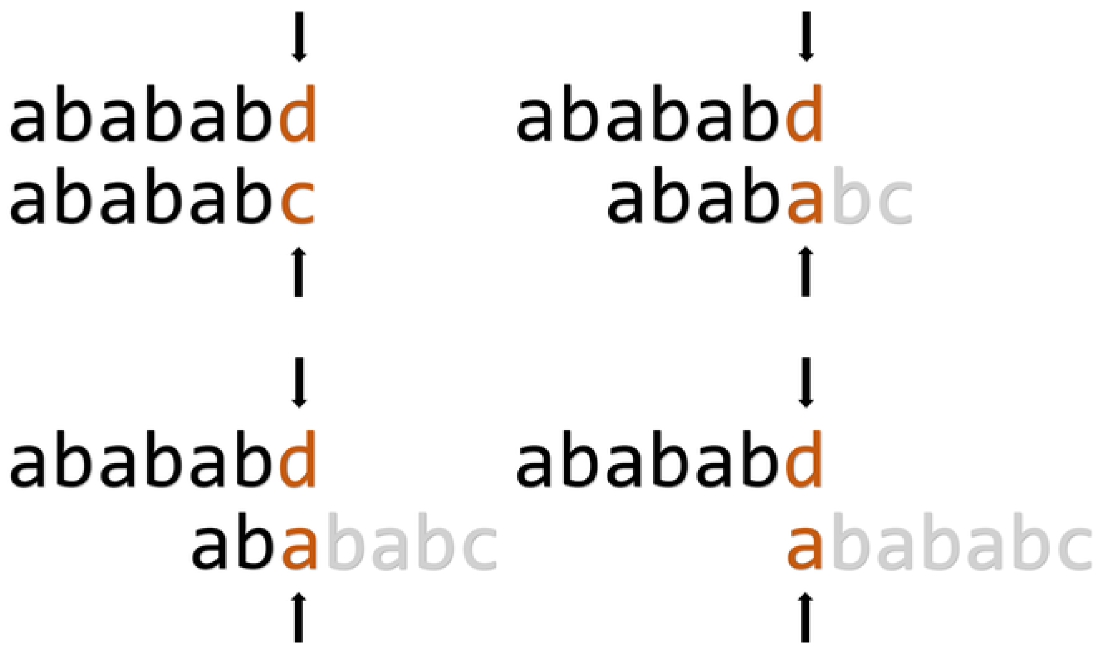


依此类推，转换成代码语言如下：

```
void get_nxt(const string& s, vector<int>& nxt) {
    nxt.resize(s.size());
    nxt[0] = -1;
    int i = 0, j = -1;
    while (i < s.size()) {
        if (j == -1 || s[i] == s[j]) {
            i++; j++; nxt[i] = j;
        }
        else j = nxt[j];
    }
}
```

实际上，上文介绍的算法只能叫MP算法，Knuth将其进行了一个常数优化后，才能称为KMP算法

例如对于 `"abababc"` 这个模式串，如果我们用它来匹配 `"abababd"` ，在最后处要跳转3次才能发现匹配失败：



其实中间这几次跳转毫无意义，我们明知道 `d` 和 `a` 是不能匹配的，却做了很多无用功。所以我们可以在计算 `nxt` 时做一些小改动来避免这种情况：

```
void get_nxt(string& s, vector<int>& nxt) {
    nxt.resize(s.size());
    nxt[0] = -1;
    int i = 0, j = -1;
    while (i < s.length()) {
        if (j == -1 || s[i] == s[j]) {
            i++; j++;
            // 相同就一路前跳
            if (s[i] == s[j]) nxt[i] = nxt[j];
            // 不同就不跳
            else nxt[i] = j;
        }
        else j = nxt[j];
    }
```

```
}
```

此时的 `nxt` 数组在部分文章中也称为 `nxtval` 数组

复杂度分析

- 求 `nxt` 数组时候， `i` 指针至多移动 $O(|s|)$ 次，`j` 指针**单次**至多移动 $O(|s|)$ 次，总共移动 $O(|s|)$ 次
- 在使用kmp算法进行匹配时， `i` 指针至多移动 $O(|p|)$ 次，`j` 指针**单次**至多移动 $O(|s|)$ 次，总共移动 $O(|s|)$ 次
    - $|s|$ 设为模式串长，$|p|$ 设为文本串长
- 故预处理 $O(|s|)$，单轮匹配 $O(|s+p|)$