整除性

Quack

2022 年 7 月 16 日

目录

1. 带余除法和整除
2. 公因数
3. 裴蜀定理
4. 公倍数
5. 质数和合数
6. 练习
7. extra

带余除法和整除

定义 (带余除法)

设 a, b 为两个正整数，定义带余除法 a/b：商为正整数 k，余数为正整数 r，满足 $a = kb + r$ 且 $0 \leq r < b$。
商 k 记为 $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$，余数 r 记为 $a \bmod b$。

例

5 除以 3 的带余除法，商为 1，余数为 2。
余数的一个常见应用是进制转换。

带余除法和整除

定义 (整除)

若 $a \bmod b = 0$，则称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的因数（因子），a 被 b 整除，b 整除 a，记为 $b|a$。

例

9 除以 3 的带余除法，余数为 0，所以 $3|9$。

1 带余除法和整除

2 公因数

3 裴蜀定理

4 公倍数

5 质数和合数

6 练习

7 extra

公因数

定义 (公因数和公倍数)

我们把多个数共有的因数和倍数叫做这些数的公因数和公倍数。这些数的公因数中，最大的公因数叫做最大公因数（gcd），最小的公倍数叫做最小公倍数（lcm）。

例

30 是 2 的倍数，也是 3 的倍数，所以，30 是 $2,3$ 的公倍数。$2,3$ 的最小公倍数是 6，一般写成 $\mathrm{lcm}(2,3)=[2,3]=6$。
4 是 24 的因数，也是 8 的因数，所以，4 是 $24,8$ 的公因数。$24,8$ 的最小公因数是 8，一般写成 $\gcd(24,8)=(24,8)=8$。

公因数

定义 (互质)

若两个数的最大公因数为 1，则称这两个数互质。

例

因为 $\gcd(8, 15) = 1$，所以 8 和 15 互质。

公因数

如何求两个数的 gcd？下面的定理给了保证：

定理 (辗转相除法)

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

公因数

如何求两个数的 gcd？下面的定理给了保证：

定理 (辗转相除法)

$$\gcd(a,b)=\gcd(b, a \bmod b)$$

证明.

设 u 同时整除 a 和 b，则存在 s,t，使得 $a=su, b=tu$。
令 $r=a \bmod b, k=\lfloor\frac{a}{b}\rfloor$，则 $a=kb+r$。
把 $a=su, b=tu$ 代入，得到 $su=ktu+r$，即 $r=(s-kt)u$，得到 u 也整除 r。
反过来，对每一个同时整除 b 和 r 的数 v，也能得到 v 整除 a。
综上，a 和 b 的每一个公因子也是 b 和 r 的公因子；反过来，b 和 r 的每一个公因子也是 a 和 b 的公因子。所以，a 和 b 的所有公因子集合就和 b 和 r 的所有公因子集合相同，所以 $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$。 □

公因数

根据上述定理，不难写出求两个数 gcd 的代码：

辗转相除法

```
int gcd(int a, int b){return b?gcd(b,a%b):a;}
```

由于每两次递归后 $((a,b) \to (b, a \bmod b) \to (a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)))$，两个参数都缩小至少一半，所以时间复杂度为 $O(\log n)$，其中 $n = \min(a,b)$。

公因数

根据上述定理，不难写出求两个数 gcd 的另一个版本的代码：

Binary GCD algorithm

```
int gcd(int a, int b){
    if (a == b) return a;
    if ((a & 1) && (b & 1)) return gcd(b, abs(a - b));
    else if ((a & 1) && (!(b & 1))) return gcd(a, b >> 1);
    else if ((!(a & 1)) && (b & 1)) return gcd(a >> 1, b);
    else return gcd(a >> 1, b >> 1) << 1;
}
```

不难发现时间复杂度也为 $O(\log n)$，其中 $n = \max(a, b)$。
这种方法的好处是避免取模，写高精度 gcd 的时候可以考虑。

1 带余除法和整除

2 公因数

3 裴蜀定理

4 公倍数

5 质数和合数

6 练习

7 extra

裴蜀定理

定理 (裴蜀定理)

对于任意正整数 a, b，存在整数 s, t，使得 $sa + tb = \gcd(a, b)$。

定义 (扩展欧几里得算法)

对于给定的正整数 a, b，扩展欧几里得（exgcd）算法能求出一组 s, t，使得 $sa + tb = \gcd(a, b)$。

证明.

证明的思路是反向模拟辗转相除法从 a, b 求出 $\gcd(a, b)$ 的过程。 $\square$

裴蜀定理

证明.

设 r_i 表示辗转相除法的过程中的参数（余数），$r_0 = a, r_1 = b$。
由辗转相除法的过程，有 $r_n = r_{n-2} \bmod r_{n-1}$。
由带余除法的定义，设 q_{n-1} 是 r_{n-2} 和 r_{n-1} 做带余除法的商，我们可以改写成 $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1}$。
设辗转相除法做了 $n-1$ 步停止，则 $r_n = \gcd(a,b)$。
又因为 $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-2}$，所以有

$$\begin{aligned}\gcd(a,b) = r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1} \\ &= r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-2})q_{n-1} \\ &= (1 + q_{n-1}q_{n-2})r_{n-2} - q_{n-1}r_{n-3}\end{aligned}$$

以此类推，最终可以得到 $\gcd(a,b) = sr_0 + tr_1 = sa + tb$。 □

裴蜀定理

定理 (裴蜀定理)

对于任意正整数 a, b，存在整数 s, t，使得 $sa + tb = \gcd(a, b)$。

关于此证明有两点需要注意：

- 这只是一种构造 s, t 的方法，只为了证明存在性，实际上满足条件的 s, t 可能不唯一
- 由这个证明我们可以设计出递推版本的 exgcd 算法

裴蜀定理

具体来说，有

$$
\begin{aligned}
\gcd(a,b) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n-2} \\ r_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

那么我们首先对 a, b 使用辗转相除法，在过程中把 r 数组和 q 数组存下来。然后根据上述式子递推即可得到一组 s, t。

裴蜀定理

根据上述算法描述，不难写出递推版 exgcd 的代码：

递推版 exgcd

```
void exgcd(int a, int b){
    r[0] = a, r[1] = b;
    int i = 2;
    for ( ; r[i - 1]; i++) {
        r[i] = r[i - 2] % r[i - 1];
        q[i - 1] = r[i - 2] / r[i - 1];
    }
    d = r[i -= 2];
    mat res(1, 0, 0, 1);
    for (int j = i - 1; j; --j)
        res.mul(mat(0, 1, 1, -q[j]));
    s = res.get(1, 0); t = res.get(1, 1);
}
```

显然复杂度为 $O(\log n)$，其中 $n = \min(a, b)$。

裴蜀定理

不过实际应用中更常见的是递归版本。我们暂时忘记递推版本。现在我们要求 $ax+by=\gcd(a,b)$ 的整数解，由裴蜀定理我们知道这个方程是存在解的。此外，根据之前辗转相除法的证明过程，$\gcd(a,b)=\gcd(b,a \bmod b)$，所以方程
$bx'+(a \bmod b)y'=\gcd(a,b)$ 也是存在整数解的。
同时，$a \bmod b=a-\lfloor\frac{a}{b}\rfloor b$，所以我们有

$$ax+by=bx'+(a-\lfloor\frac{a}{b}\rfloor b)y'$$

按 a,b 稍作整理，得到

$$ax+by=ay'+b(x'-\lfloor\frac{a}{b}\rfloor y')$$

裴蜀定理

假如说我们已知方程 $bx' + (a \bmod b)y' = \gcd(a, b)$ 的整数解 x', y'，那么我们就可以构造出方程 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的整数解 $x = y', y = x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y'$。
只要按照前面计算最大公因数的方法，在递归的过程中加入 x 和 y 的计算就好了。当递归到末尾的时候 $b = 0$，这时方程有整数解 $x = 1, y = 0$。

裴蜀定理

根据上述算法描述，不难写出递归版 exgcd 的代码：

递归版 exgcd

```
int exgcd(int a, int b, int &x, int &y){
    if (!b) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    int d = exgcd(b, a%b, x, y);
    int t = x;
    x = y;
    y = t - a / b * y;
    return d;
}
```

显然复杂度为 $O(\log n)$，其中 $n = \min(a, b)$。

裴蜀定理

定理 (裴蜀定理)

对于任意正整数 a, b，存在整数 s, t，使得 $sa + tb = \gcd(a, b)$。

由裴蜀定理和 gcd 的定义能得到一些 gcd 的性质，如:

- $\gcd(ad, bd) = d \gcd(a, b)$
- $\gcd(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}) = 1$
- 若 $c|a, c|b$，则 $c|gcd(a, b)$
- 若 $\gcd(a, b) = 1$，则 $\gcd(a, bc) = \gcd(a, c)$

裴蜀定理

前三个好证，我们证一下第四个。

证明.

证明的思路是证 $\gcd(a, bc) | \gcd(a, c)$ 和 $\gcd(a, c) | \gcd(a, bc)$。
由于 $\gcd(a, bc)|a$，所以 $\gcd(a, bc)|ac$。并且 $\gcd(a, bc)|bc$。所以 $\gcd(a, bc) | \gcd(ac, bc)$，即 $\gcd(a, bc)|c$。又因为 $\gcd(a, bc)|a$，所以 $\gcd(a, bc) | \gcd(a, c)$。
由于 $\gcd(a, c)|c$，所以 $\gcd(a, c)|bc$，并且 $\gcd(a, c)|a$，所以 $\gcd(a, c) | \gcd(a, bc)$。 $\square$

裴蜀定理

定理 (裴蜀定理)

对于任意正整数 a, b，存在整数 s, t，使得 $sa + tb = \gcd(a, b)$。

由裴蜀定理也能分析二元一次不定方程 $ax + by = c$ 解的结构。

- 对方程 $ax + by = c$，方程有解当且仅当 $\gcd(a, b) | c$，此时可以用 exgcd 算法得到方程 $ax + by = c$ 的一组特解 $x = x_0, y = y_0$。
- 由特解可以得到方程其他的解：$x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} \cdot t, y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} \cdot t$，其中，$t$ 为任意整数。

裴蜀定理

定理

设方程 $ax+by=c$ 的特解为 $x=x_0, y=y_0$，那么 $x=x_0+\frac{b}{\gcd(a,b)}\cdot t, y=y_0-\frac{a}{\gcd(a,b)}\cdot t$（$t$ 为任意整数）构成了方程所有的解。

证明.

首先不难验证 $x=x_0+\frac{b}{\gcd(a,b)}\cdot t, y=y_0-\frac{a}{\gcd(a,b)}\cdot t$ 确实是方程的解。 $\square$

裴蜀定理

证明.

设 x, y 是方程的任一组解，则有 $ax + by = c$，与 $ax_0 + by_0 = c$ 相减得

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$

从而

$$\frac{a}{\gcd(a, b)}(x - x_0) = \frac{b}{\gcd(a, b)}(y_0 - y)$$

因为 $\gcd(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}) = 1$，所以 $\frac{a}{\gcd(a,b)} | y_0 - y$。故存在整数 t，使得 $y_0 - y = \frac{a}{\gcd(a,b)} t$，即 $y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} t$。同理有 $x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} t$。

由 x, y 的任意性，方程的全部解都可以表示为这个形式。 $\square$

裴蜀定理

定理

设方程 $ax+by=c$ 的特解为 $x=x_0, y=y_0$，那么 $x=x_0+\frac{b}{\gcd(a,b)}\cdot t, y=y_0-\frac{a}{\gcd(a,b)}\cdot t$（$t$ 为任意整数）构成了方程所有的解。

考虑通解在实际问题中的应用：

- 如何求所有解中，$x>0$ 且 x 最小的解?
- 如何求在限制 $0\le x,y\le C$ 下，方程的解数?
- 如何求所有解中，$|x|+|y|$ 最小的解?

裴蜀定理

例

如何求所有解中，$x > 0$ 且 x 最小的解 x_{min}？

由于 $x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} \cdot t$，所以我们用 exgcd 先求出 x_0，设 $pr = \frac{b}{\gcd(a,b)}$，那么 $x_{min} = (x_0 \bmod pr + pr) \bmod pr$。根据 x_{min} 不难得到其对应的 y。

裴蜀定理

例

如何求在限制 $0 \le x, y \le C$ 下，方程的解数?

用通解列不等式:

$$0 \le x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} \cdot t < C$$

$$0 \le y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} \cdot t < C$$

解出两个关于 t 的区间，求交集包含的整点个数即可。

裴蜀定理

例 (poj2142)

如何求所有解中，$|x|+|y|$ 最小的解?

用通解代入想要最小化的式子 $|x|+|y|$ 中，有:

$$|x_0+\frac{b}{\gcd(a,b)}\cdot t|+|y_0-\frac{a}{\gcd(a,b)}\cdot t|$$

发现这是一个关于 t 的绝对值函数，进行分类讨论即可获得最小值点。

裴蜀定理

考虑多个数的 gcd 的计算方法，由定义，有
$\gcd(a,b,c)=\gcd(\gcd(a,b),c)$，所以我们可以两个两个算。
那么有多个数的裴蜀定理：

定理 (裴蜀定理)

存在 $s_1,\cdots,s_n$，*使得* $\sum_{i=1}^{n} s_i a_i = \gcd(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

证明.

用数学归纳法。当 $n=2$ 时成立。
当 $n>2$ 时，存在 k,s_n，使得
$k\gcd(a_1,\cdots,a_{n-1})+s_n a_n=\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。又因为 $n-1$ 的情形下存在 $s_1,\cdots,s_{n-1}$，使得
$\sum_{i=1}^{n-1} s_i a_i=\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$，代入立即得到 n 的情形也是成立的。 $\square$

1. 带余除法和整除
2. 公因数
3. 裴蜀定理
4. 公倍数
5. 质数和合数
6. 练习
7. extra

公倍数

下面补充一些关于 lcm 的性质：

- 若 $a|x, b|x$，则 $\operatorname{lcm}(a,b)|x$（用带余除法）
- $\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b)=ab$（证两个数相等时，考虑证互为因数）

如果要计算多个数的 lcm，要么还是两个两个求，要么用 $\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b)=ab$ 代换（比较“高级”的代换方式是使用 min-max 反演）。

1 带余除法和整除

2 公因数

3 裴蜀定理

4 公倍数

5 质数和合数

6 练习

7 extra

质数和合数

定义 (质数和合数)

由因数还可以定义质数和合数。
质数定义为大于 1 的且因数只有 1 和自身的数。
合数定义为大于 1 的且不是质数的数。
这样，自然数被分为三个部分：1，质数和合数。
还可以定义某个数的质因子：是这个数的因数且为质数的数。

例

5 是质数。
18 是合数，其所有质因子为 $2, 3$。

再补充一些质数的性质，若 p 是质数，则：

- $p|a$ 或者 $\gcd(p, a) = 1$
- 若 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$

质数和合数

定理（质数定理）

当 $n \to +\infty$ 时，$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$，其中，$\pi(n)$ 为质数函数，即前 n 个自然数中含有的质数数量。

证明略。

质数和合数

定理 (唯一分解定理)

对任意一个大于 1 的整数 n，n 能被唯一地表示成若干个质数的幂的乘积，即

$$n = p_{i_1}^{s_1} p_{i_2}^{s_2} \cdots p_{i_k}^{s_k}$$

证明.

这里只简述证明思路。思路是分别证明可表示性和唯一性。
可表示性：设要分解的数为 a。若 a 是合数，那么 a 有非 1 和 a 的因子，设为 b，那么就可以分别分解 b 和 $\frac{a}{b}$。若 a 是质数，那么 a 可以直接用自身来表示。那么递归地考虑，只要是一个合数就可以继续分解，而当分解到了质数就无法继续分解下去，因此所有的数最终都可以由质数的幂的乘积来表示。
唯一性：反证法，设两种不同的分解形式，然后推矛盾。 □

质数和合数

做质因子分解的思路是，每次取走最小的一个质因子。不难写出代码：

质因子分解

```
void getfactor (int n) {
    for (int i = 2; i * i <= n; ++i) if (n % i == 0) {
        ++cnt;
        factor[cnt][0] = i;
        int t = 0;
        while (n % i == 0) n /= i, ++t;
        factor[cnt][1] = t;
    }
    factor[cnt][0] = n;
    factor[cnt][1] = 1;
}
```

时间复杂度 $O(\sqrt{n})$。我们也可以用质因子分解算法来判定一个数是否为质数。

1 带余除法和整除

2 公因数

3 裴蜀定理

4 公倍数

5 质数和合数

6 练习

7 extra

accoders10074

链接

1 带余除法和整除

2 公因数

3 裴蜀定理

4 公倍数

5 质数和合数

6 练习

7 extra

几个证明题

例

$$\gcd(a^n-1, a^m-1) = a^{\gcd(n,m)} - 1$$

几个证明题

例

$\gcd(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\gcd(n,m)} - 1$

提示：$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$

几个证明题

例

f_n 表示 fib 数列第 n 项（$f_1 = f_2 = 1$），
$\gcd(f(n), f(m)) = f(\gcd(n, m))$

几个证明题

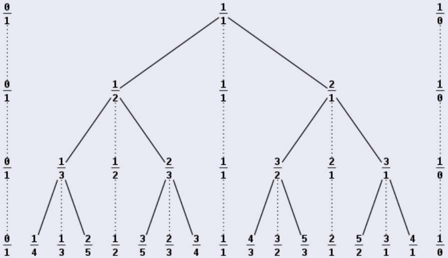
例

f_n 表示 fib 数列第 n 项（$f_1 = f_2 = 1$），
$\gcd(f(n), f(m)) = f(\gcd(n, m))$

证明参考链接

Stern–Brocot tree

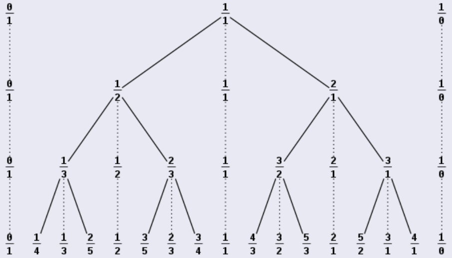
定义 (Stern–Brocot tree)



序列里初始有两个元素 $(0,1),(1,0)$，然后每次向序列相邻的两个元素 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 中添加一个元素 (x_1+x_2,y_1+y_2)，即可得到 Stern–Brocot tree。

Stern–Brocot tree

定理



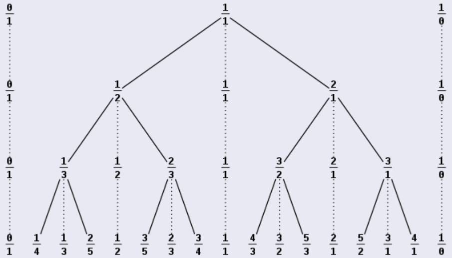
对于树上相邻两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，有 $|x_1y_2 - x_2y_1| = 1$。

证明.

$|x_1(y_1 + y_3) - (x_1 + x_3)y_1| = |x_1y_3 - x_3y_1| = 1$。
然后用数学归纳法。 □

Stern–Brocot tree

定理



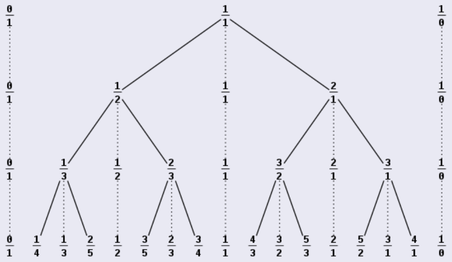
若 $|x_1y_2 - x_2y_1| = 1$，则 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在树上相邻。

证明.

与上一个性质的证明类似。略。 $\square$

Stern–Brocot tree

定理



设 (x, y) 是树上一点，则 $\gcd(x, y) = 1$。

证明.

存在树上相邻一点 (u, w)，使得 $ux - wy = 1$。 □

Stern–Brocot tree

例 (accoders2169)

跳跳棋是在一条数轴上进行的。棋子只能摆在整点上。每个点不能摆超过一个棋子。我们用跳跳棋来做一个简单的游戏：棋盘上有 3 颗棋子，分别在 a, b, c 这三个位置。我们要通过最少的跳动把他们的位置移动成 x, y, z（棋子是没有区别的）。
跳动的规则很简单，任意选一颗棋子，对一颗中轴棋子跳动。跳动后两颗棋子距离不变。**一次只允许跳过 1 颗棋子**。
判断是否可以完成任务。如果可以，输出最少需要的跳动次数。
数据范围：棋子的坐标的绝对值不超过 10^9。

Stern–Brocot tree

由于有一次只允许跳过 1 颗棋子的限制，所以两边往中间跳只有一种方案。而中间往两边跳有两种方案。
然后聪明的你可以发现，如果不考虑绝对坐标只考虑棋子之间的相对坐标差的话，这就是在 Stern–Brocot tree 上面跳。
所以如果有解，答案就是树上两个点的距离，用 lca 之类的不难求得。
当然这个题有绝对坐标必须相等的限制，所以还要判无解。我们就对他给的两个状态都疯狂地往父亲跳，在跳的过程中维护棋子的坐标，然后跳到根看看绝对坐标是否相等就可以了。注意往根跳的时候，可以发现这就是在做辗转相减，我们应该优化成辗转相除，不然会超时。

Thanks!