浅谈支配树及其应用

南京外国语学校 陈孙立

本文主要介绍了支配树的求解算法以及它的应用。
本文第二节介绍了一些记号和定义。
本文第三节着重讲解了支配树的求解算法。
本文第四节介绍了支配树的一些应用。
本文第五节是总结。

1 引言

支配树这个概念在图论和计算机设计理论中经常出现，作为一个算法也时有出现在各类算法竞赛中，但是系统介绍它的中文资料却相对较少。笔者希望通过本文，能让更多的同学了解支配树，以及它的一些应用。

2 定义

本文中我们考察一个 n 个点 m 条边的**有向图** $G = (V, E)$ ，其中 V 是节点集，E 是边集，且 $|V| = n, |E| = m$ 。本文假设读者已经熟悉图论中路径、环、深度优先搜索 (DFS)、拓扑序、DFS 序等基础概念。

在给定一个源 $s \in V$ 的前提下，如果对于两点 x, y 满足任意以 s 为起点，y 为终点的路径都经过 x ，则称 x 支配 (dominates) y 。由于当不存在 s 到 x 的路径时，和 x 有关的支配关系都没有意义，所以**在本文中，我们始终假设从 s 能到达所有其他点**，对于一般的图只需先以 s 为起点进行深度优先遍历，并只保留被访问的点即可。

首先观察到，我们可以仅考虑简单路径，这是因为如果路径出现了重复节点，可以把重复部分之间的节点删去，这样的修改对支配条件不会产生影响。

一个显然的性质是 s 支配所有点，除此之外，支配关系还满足以下性质，从而可以用一个树结构完全描述它们。

性质 1：如果 x 支配 y 且 y 支配 z 则 x 支配 z ，也即支配关系满足**传递性**。

这个性质比较显然。

性质 2：如果 x 支配 y 且 y 支配 x ，则 $x = y$ 。

证明：假设 $x \neq y$ ，可知任意一条从 s 到 x 的简单路径都经过 y ，且在经过 y 之前必须经过 x ，于是这条路径形如 $s, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, x$ ，和简单路径矛盾。由此导出必有 $x = y$ 。 □

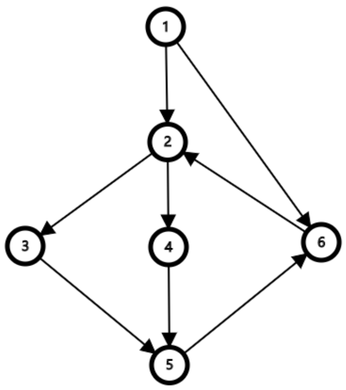
性质 3：如果 x, y, z 互不相等，且 x 和 y 均支配 z ，则必有 x 支配 y 或 y 支配 x 。

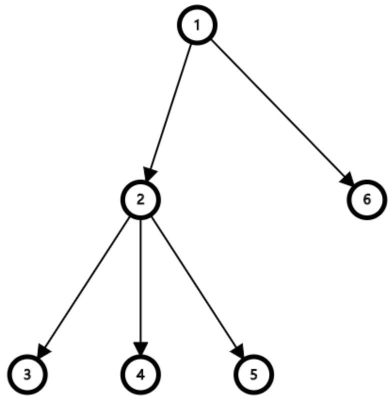
证明：考察任意一条从 s 到 z 的简单路径，这条路径上必有 x 和 y ，不失一般性可以假设路径形如 $s, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, z$ 。如果 x 不支配 y ，则存在一条不经过 x 的 s 到 y 的路径，此时若把前述路径从 s 到 y 的部分替换成这条不经过 x 的路径，就得到了一条从 s 到 z 且不经过 x 的路径了，而这和 x 支配 z 矛盾。 □

上述性质表明，对于某点 $x \neq s$ ，考察点集 $S = \{y \mid y \text{ 支配 } x\}$ ，则 S 中的点依支配关系构成全序集，且 S 中有至少两个元素。由此，一定存在一个点 z 满足：如果 $y \neq x$ 支配 x ，则 y 也支配 z 。我们称 z 是 x 的直接支配点 (immediate dominator)，记为 $z = idom(x)$ 。

现对于所有除 s 之外的点 x 连一条 $idom(x) \to x$ 的边，这样得到的图每个点的入度均不超过 1 ；结合**性质 1**和**性质 2**可知，这个图是无环的，于是这样的图一定是一个以 s 为根的有向树，称为支配树 (Dominator Tree)，记为 $DT(G, s)$ 。它满足：对于两点 x, y ，x 支配 y 当且仅当在支配树上 x 是 y 的祖先（本文中的祖先等于自身），所以只要得到了支配树，我们就得到了所有的支配关系。

下面右图是左图在 $s = 1$ 时的支配树。





3 支配树的求解算法

3.1 有向无环图的特殊情况

对于有向无环图 $G=(V,E)$ ，由于拓扑序在后的点不会影响前面点的支配关系，可以按照拓扑序依次求解每个点 x 的直接支配点。现假设所有拓扑序在 x 之前的点的直接支配点都已求出，此时可以得到一个不完整的支配树，它一定是最终得到的支配树的一部分，这里姑且叫做“当前支配树”。设以 x 为终点的边有 $(c_1,x),\dots,(c_k,x)$ ，则 $idom(c_i)$ 均已求出。

引理 1：点 y 支配 x 当且仅当 $y=x$ 或 y 支配所有 $c_1,\dots,c_k$ 。

证明：$y=x$ 时结论显然，下面假设 $y\neq x$ 。先证当 y 支配所有 $c_1,\dots,c_k$ 时，y 必支配 x ：考察任意一条从 s 到 x 的路径，则在 x 之前的点一定是 $c_1,\dots,c_k$ 之一，于是这条路径必须经过点 y 。

再证上面的否命题：不失一般性假设 y 不支配 c_1 ，则存在从 s 到 c_1 的路径不经过 y ，此时可以沿这条路径走到 x ，就得到了一条从 s 到 x 的、不经过 y 的路径，于是 y 不支配 x 。 □

满足上面性质的点就是 $c_1,\dots,c_k$ 在“当前支配树”上的公共祖先，于是 $idom(x)=LCA(idom(c_1),\dots,idom(c_k))$ （LCA 指最近公共祖先），这相当于在“当前支配树”上添加了一个叶子和一条边。如果使用倍增求解 LCA 的算法，只需稍加修改就能支持每次添加一个叶子了，这个做法的时间和空间复杂度都是 $O((n+m)\log n)$ 。

3.2 半支配点的定义和性质

在之后的算法中我们要考虑任意一个图 G 的从 s 出发的 DFS 树，即进行深度优先遍历时经过的边形成的树结构，同时按照遍历顺序（DFS 序）为点赋予大小。具体来说对于两点 x, y ，如果 x 在遍历时比 y 访问的时间更早，则称 $x < y$ ，类似地也可定义 $x > y$ ，以及点集的最大值和最小值等相关概念。有向图的 DFS 树不存在边 (x, y) 满足 $x < y$ 且 x 不是 y 的祖先。一个更有用的表述是：

定理 1：如果 $x \le y$ 则任意 x 到 y 的路径必须经过 x 和 y 在 DFS 树上的某个公共祖先。

证明：x 是 y 的祖先时结论显然，因此可认为 x 不是 y 的祖先。假设存在一条路径 $x = v_0, v_1, \dots, v_k = y$ ，其中不存在 x 和 y 在 DFS 树上的公共祖先。令 z 是 x 和 y 在 DFS 树上的最近公共祖先，z 的孩子中必有唯一一点 y' 是 y 的祖先。

考察任意一条路径 $x = v_0, v_1, \dots, v_k = y$ ，令 $p = \max\{i \mid v_i < y'\}$ ，并假设 v_p 不是 z 的祖先，那么 v_p 也一定不是 v_{p+1} 的祖先，这是由 DFS 序的性质得到的：若 x 是 y 的祖先，则 x 也是 $z(x \le z \le y)$ 的祖先。由此可得存在边 (v_p, v_{p+1}) 且 $v_p < v_{p+1}$ ，v_p 不是 v_{p+1} 的祖先。然而，这条边不可能在 DFS 树中存在，否则在遍历到 v_p 时会直接沿着这条边遍历 v_{p+1} 。这个矛盾表明 v_p 一定是 z 的祖先。 □

下面给出半支配点 (semi-dominator) 的定义。

定义：点 x 的半支配点 $sdom(x) = \min\{y \mid$ 存在一条路径 $y = v_0, v_1, \dots, v_k = x$ 满足对于任意 $1 \le i \le k-1$ 都有 $v_i > x\}$ 。

称定义中路径的存在性为“半支配点条件”。半支配点的求解是直接支配点求解的中间步骤。以下是一些关于直接支配点和半支配点的重要性质。

引理 2：$idom(x)$ 和 $sdom(x)$ 都是 DFS 树上 x 的祖先且不等于 x。更进一步地，在 DFS 树上 $idom(x)$ 是 $sdom(x)$ 的祖先。

证明：$idom(x)$ 在 DFS 树上是 x 的祖先是显然的，因为 DFS 树上有一条 s 到 x 的路径，$idom(x)$ 必定在这条路径上。

由于 x 在 DFS 树上的父亲已经满足了半支配点的要求，所以有 $sdom(x) < x$ 。另一方面，如果 $sdom(x)$ 不是 x 的祖先，则不难发现 $sdom(x)$ 在 DFS 树上的父亲也满足半支配点的要求，且比 $sdom(x)$ 更小，这和半支配点的定义矛盾。

根据半支配点的定义，可以沿 DFS 树从 s 走到 $sdom(x)$ 再沿定义所述的路径走到 x 。因此 DFS 树中，$sdom(x)$ 到 x 的路径上（这里不包括 $sdom(x)$）的点均不支配 x ，故 $idom(x)$ 一定是 $sdom(x)$ 的祖先。 □

引理 3：令 v, w 满足 DFS 树上 v 是 w 的祖先，则 v 是 $idom(w)$ 的祖先或 $idom(w)$ 是 $idom(v)$ 的祖先。

证明：若 $v = w$ 结论显然，因此假设 $v \neq w$ 。使用反证法，由于 $v, w, idom(v), idom(w)$ 都是 w 的祖先，如果引理中的结论不成立，则它们按深度排序依次是 $idom(v), idom(w), v, w$ 且它们互不相等。这意味着存在一条不经过 $idom(w)$ 的从 s 到 v 的路径，继续沿 DFS 树走到 w 就得到一条不经过 $idom(w)$ 的从 s 到 w 的路径，矛盾。 □

有了上述性质，我们将展示半支配点和直接支配点的紧密联系，从而可以通过前者计算后者。

定理 2：任取点 $w \neq s$ 。考虑 DFS 树上从 $sdom(w)$ 到 w 的路径上（不包括 $sdom(w)$）的任意点 x，如果均满足 $sdom(x) \geq sdom(w)$ ，则 $idom(w) = sdom(w)$ 。

证明：根据**引理 2**，有 $idom(w)$ 是 $sdom(w)$ 的祖先，因此只需证 $sdom(w)$ 支配 w 。考虑任意一条 s 到 w 的路径 P ，我们将要证明 $sdom(w)$ 一定在 P 中。令 x 是 P 中**最后一个**满足 $x < sdom(w)$ 的点，如果不存在则必有 $sdom(w) = idom(w) = s$ ，结论仍然成立。同时，令 y 是 P 中 x 之后的第一个在 DFS 树中从 $sdom(w)$ 到 w 的路径上的点。在 P 中截取 x 到 y 之间的部分得 $v_0 = x, v_1, \ldots, v_k = y$。

现在考虑路径 $v_0, \ldots, v_k$ ，我们声称对于 $1 \leq i < k$ 都有 $v_i > y$ ，也即 $sdom(y) \leq x < sdom(x)$ 。若不满足这一点，则有某个 $v_i < y$ ，此时根据**定理 1**可得存在某个 $i \leq j \leq k-1$ 满足 v_j 是 y 的祖先。由 x 的取值可知 $sdom(w) \leq v_j$ ，于是 v_j 也在 DFS 树中从 $sdom(w)$ 到 w 的路径上，这和 y 的取值矛盾。上述矛盾可推得 $sdom(y) \leq x < sdom(x)$ ，结合定理的条件必有 $y = sdom(w)$ ，即路径 P 包含 $sdom(w)$。 □

定理 3：任取点 $w \neq s$ 。考虑 DFS 树上从 $sdom(w)$ 到 w 的路径上（不包括 $sdom(w)$）的所有点，令 u 是其中 $sdom$ 最小的点，则 $sdom(u) \leq sdom(w)$ 且 $idom(u) = idom(w)$ 。

证明：由于 w 也是 u 的一个候选，$sdom(u) \leq sdom(w)$ 是显然的。注意到在 DFS 树上 $idom(w)$ 是 u 的祖先，于是根据**引理 3**可知 $idom(w)$ 也是 $idom(u)$

的祖先，因此只需证 $idom(u)$ 支配 w 。考虑任意一条 s 到 w 的路径 P ，我们将要证明 $idom(u)$ 一定在 P 中。令 x 是 P 中**最后一个**满足 $x < idom(u)$ 的点，如果不存在则必有 $idom(u) = idom(w) = s$ ，结论仍然成立。同时，令 y 是 P 中 x 之后的第一个在 DFS 树中从 $idom(u)$ 到 w 的路径上的点。在 P 中截取 x 到 y 之间的部分得 $v_0 = x, v_1, \ldots, v_k = y$。

和**定理 2**的证明类似，我们可以得到 $sdom(y) \le x$ 。根据**引理 2**有 $idom(u) \le sdom(u)$ ，综合起来可得 $sdom(y) \le x < idom(u) \le sdom(u)$ 。至此，由 u 的选择可知 y 不能是 $sdom(w)$ 的除自身外的后代；另一方面，y 不能既是 $idom(u)$ 的除自身外后代也是 u 的祖先，否则沿 DFS 树从 s 走到 $sdom(y)$ 再沿 P 走到 y，最后沿 DFS 树走到 u 的这条路径就不经过 $idom(u)$ 了，这和支配点的定义矛盾。

根据 $idom(u) \le sdom(w) < u \le w$ 和 $idom(u) < y$ ，唯一的情况就只剩下 $y = idom(u)$ 了，于是路径 P 包含 $idom(u)$ 。 □

上面两个定理说明了半支配点和直接支配点的关系，也给出了由前者求出后者的方法。对于点 $w \ne s$ 来说，考虑 DFS 树上从 $sdom(w)$ 到 w 的路径上（不包括 $sdom(w)$）的所有点，令 u 是其中 $sdom$ 最小的点，若 $sdom(u) = sdom(w)$ 则可利用**定理 2**得到 $idom(w) = sdom(w)$ ；否则 $u \ne w$ ，可利用**定理 3**得到 $idom(w) = idom(u)$ 。

3.3 计算半支配点和直接支配点

3.3.1 半支配点

为了求出半支配点，我们需要下面的定理。

定理 4：$sdom(w)$ 由以下两种情况产生的候选取最小值得到。

- 1. 有边 (v, w) ，此时 v 是 $sdom(w)$ 的候选。
- 2. u 是 v 在 DFS 树上的祖先，$u > w$ 且有边 (v, w) ，此时 $sdom(u)$ 是 $sdom(w)$ 的候选。

证明：令 x 是所有候选的最小值。我们首先证明每个候选都满足半支配点的条件，从而得到 $sdom(w) \le x$ 。若 x 由情况 1 得到，则显然 (x, w) 就是满足半支配点条件的路径；否则 $x = sdom(u)$ ，此时取出 $sdom(u)$ 到 u 的半支配点

条件中所述的路径，再接上 DFS 树中 u 到 v 的路径，最后从 v 到 w 就是满足 w 的半支配点条件的路径。

还需证明 $sdom(w) \geq x$ 。为此考虑 $sdom(w)$ 到 w 的半支配点条件对应的路径 $v_0 = sdom(w), v_1, \ldots, v_k = w$ ，其中对于任意 $v_i (1 \leq i < k)$ 都有 $v_i \geq w$。若 $k = 1$ 则它在情况 1 中被考虑到，下设 $k > 1$ 。取 j 是最小的满足 $j \leq 1$ 且 v_j 是 v_{k-1} 在 DFS 树上的祖先的数，这样的 j 一定存在，因为 k 就是一个合法的数。

现在考虑路径 $v_0, \ldots, v_j$ ，我们声称它是满足 v_j 的半支配点条件的路径，即对于任意 $1 \leq i < j$ 都有 $v_i > v_j$ 。若不是，则考虑所有 $v_i \leq v_j$ 的 i ，取其中满足 v_i 最小的 i ，可由**定理 1**得到 v_i 一定是 v_j 的祖先，这和 j 的选取矛盾。于是 $sdom(v_j) \leq sdom(w)$ ，而 $sdom(v_j)$ 必定在情况 2 中被考虑到，因此 $x \leq sdom(w)$ 。 □

有了**定理 4**，可以设计如下求出半支配点的算法：

- 1) 求出图 G 的一个 DFS 树和 DFS 序。
- 2) 若当前所有点的 $sdom$ 都已经求出，则结束算法；否则找到 $sdom(w)$ 未求出的点中最大的 w 。
- 3) 考虑情况 1，可以直接计算所有的候选。
- 4) 考虑情况 2，枚举边 (v, w) 且 $v > w$ ，此时 v 一定被标记。从 v 开始不断地在 DFS 树上向被标记的父亲走形成一条路径，并求出这条路径上 $sdom$ 的最小值作为候选。
- 5) 合并情况 1 和情况 2 求出的所有候选，得到 $sdom(w)$ 的值，标记 w 为已求出 $sdom$ ，并回到 2)。

可以看到，从大到小考虑所有节点正是为了步骤 4) 中所用到的 $sdom$ 值均已求出。容易发现除步骤 4) 外的其他部分时间复杂度均不超过 $O(n+m)$ 。为了优化复杂度，在步骤 4) 中，选取带权并查集这个数据结构维护路径的 $sdom$ 最小值和取到最小值的位置，在标记 x 时，把 DFS 树上 x 的所有孩子向 x 连边并重新维护最小值即可。朴素地使用路径压缩的并查集实现，时间复杂度可以做到 $O((n+m)\log n)$ ，空间复杂度为 $O(n+m)$ 。针对此问题还存在更快的并查集实现，复杂度可以做到更低的 $O((n+m)\alpha(n))$ 甚至线性，有兴趣的读者可以参考相关资料。

3.3.2 直接支配点

为求出所有点的 $idom$ ，定义 $pivot(w)$ 是 DFS 树中 $sdom(w)$ 到 w 的路径上（不包括 $sdom(w)$）$sdom$ 值最小的点。若求出了所有的 $sdom(w)$ 和 $pivot(w)$ ，就可以**从小到大**根据**引理 2**和**引理 3**依次确定每个点的 $idom$ ，具体来说：若 $sdom(pivot(w)) = sdom(w)$ 则 $idom(w) = sdom(w)$ ；否则 $idom(w) = idom(pivot(w))$ ，这里由于 $pivot(w) \le w$ 在考虑到点 w 之前一定已经求出 $idom(pivot(w))$ 。

最后，可以在之前的求半支配点的算法上略加修改得到每个点的 $pivot$ 。我们为每个点 x 开辟一个通 $bucket(x)$ 储存 $sdom(w) = x$ 的所有点 w 。若当前正在求解点 w 的 $sdom$ ，则在进行步骤 5) 的标记，即并查集的 link 操作之前，考虑所有 $bucket(w)$ 中的点 x ，并直接在并查集中查询得到 $pivot(x)$ 的值。在求出 $sdom(w)$ 之后，也别忘记还要把 w 加入 $bucket(sdom(w))$ 中。

综合之前所述，我们已经得到了完整的支配树算法。

3.4 算法总结

下面把之前的算法汇总并简要概括如下：

- 1) 求出图 G 的一个 DFS 树和 DFS 序。
- 2) 若当前所有点的 $sdom$ 都已经求出，则进行 8)；否则找到 $sdom(w)$ 未求出的点中最大的 w 。
- 3) 考虑情况 1，可以直接计算所有的候选。
- 4) 考虑情况 2，枚举边 (v, w) 且 $v > w$ ，此时 v 一定被标记。从 v 开始不断地在 DFS 树上向被标记的父亲走形成一条路径，并求出这条路径上 $sdom$ 的最小值作为候选，这条路径就是当前并查集中从点 v 到点 v 的根的路径，可以直接在并查集中查询。
- 5) 合并情况 1 和情况 2 求出的所有候选，得到 $sdom(w)$ 的值，并把 w 加入 $bucket(sdom(w))$ 。
- 6) 对每个 $bucket(w)$ 中的数 x 求出 $pivot(x)$ ，它也可以直接在并查集中查询从 x 到 x 的根的路径最小值得到。

- 7) 对 DFS 树上 w 的每个孩子 c 执行：在并查集中设置 c 的父亲为 w ，并维护路径最小值信息。
- 8) 从小到大依次考虑每个点 w ，若 $sdom(pivot(w)) = sdom(w)$ 则 $idom(w) = sdom(w)$ ；否则 $idom(w) = idom(pivot(w))$ 。

这个算法空间复杂度为 $O(n+m)$ ，时间复杂度的瓶颈在维护并查集上，如果使用朴素的路径压缩，复杂度为 $O((n+m)\log n)$ ，在信息学竞赛范围内这个复杂度已经足够优秀。

4 支配树的应用

4.1 某个点集的支配点

点集 S 的支配点定义为 s 到任意一个 $x \in S$ 都必须经过的点。不难发现这样的点就是 S 中所有支配点的交集，而点 x 的支配点就是支配树中 x 的所有祖先，因此点集 S 的支配点就是所有 $x \in S$ 在支配树上的最近公共祖先（LCA）。

4.2 支配边

和支配点的定义类似，若任意从 s 到 x 的路径都经过边 (u,v) 则称 (u,v) 支配 x 。同时也可以类似地定义直接支配边：若 (u,v) 支配 x 且 x 的所有支配边也支配 u 则称 (u,v) 是 x 的直接支配边。

为了求出每个点的支配边，一个简单的做法是对原图的每条边 (u,v) 建立辅助点 w ，并连边 (u,w) 和 (w,v) ，并求出新图的支配树。对于一个原图的节点 x ，它的支配边就是新图的支配树中 x 的是辅助点的祖先，直接支配边就是其中深度最大的一个，可以简单地使用 DFS 求出，不过新图的点数是 $n+m$ 边数是 $2m$ ，这可能会带来较大的常数。仔细审视这个做法可以发现，辅助点在运行算法时会有诸多性质，从而不一定要在新图运行完整的算法就可能得出支配边。

引理 4：边 (u,v) 是点 x 的支配边当且仅当 u 和 v 都是 x 的支配点且 u 到 v 仅有一条简单路径（即边 (u,v) 是 v 的支配边）。

证明：若边 (u,v) 是点 x 的支配边，则任意 s 到 x 的路径都经过 u 和 v ，即 u 和 v 支配 x ；更进一步地，如果 u 到 v 有边 (u,v) 之外的路径，可沿任意

一条从 s 到 u 的路径再到 v 再到 x 且不经过 (u,v) ，因此 u 到 v 必须有且仅有一条简单路径。

反过来，若引理的条件成立，则显然边 (u,v) 将支配点 x 。 □

有了**引理 4**，对于一条 DFS 树上的边 (u,v) ，若 u 支配 v 且 u 到 v 仅有一条简单路径，则 (u,v) 支配所有 v 支配的点。回顾支配树算法，若边 (u,v) 在 DFS 树上，且 $idom(v)=u$ ，则必有 $sdom(v)=u$ 。

现在把注意力放在 u 到 v 仅有一条简单路径这个条件上，可以通过之前建立辅助点的方法理解。假设仅对这条边新建了辅助点 w ，则 $sdom(w)=u$ 且 $sdom(v)\ge u$ ，此时 $idom(v)=w$ 当且仅当 $sdom(v)=w$ 。回到原图则是：在计算 $sdom(v)$ 时不考虑 (u,v) 这条边，即只考虑情形 2 时没有任何候选。这样，只要在求 $sdom$ 时加入一个判断，就能确定 u 到 v 是否只有一条简单路径了。

最后，我们求出了所有边 (u,v) 满足它支配 v ，再在 DFS 树上进行一遍遍历即可确定每个点的直接支配边。这个做法不需要建立辅助点，常数更小且代码难度没有明显增加。

4.3 有向图的割点和桥

有向图 G 中，u 和 v 强连通指 u 能到达 v 且 v 也能到达 u 。强连通关系是等价关系，它形成的等价类称为强连通分量，这和无向图中的连通分量对应。对图 G 来说，记 $G\backslash\{u\}$ 为删去点 u 和相关的边后得到的新图；$G\backslash\{(u,v)\}$ 为删去边 (u,v) 后得到的新图。

无向图的割点和桥指删去之后连通分量个数增加的点和边。与之对应地，有向图的强割点和强桥指删去之后强连通分量个数增加的点和边。一个自然的问题是如何求出某个图 G 中所有的强割点和强桥。和无向图一样，求强割点和强桥时可以对每个强连通分量分开考虑，因此**以下讨论均对强连通图进行**。

引理 5.1：点 v 是强割点当且仅当对于任意 $x\neq v$ 都存在一个点 $y\neq v$ ，使得以下之一成立：

- 1. 任意 x 到 y 的路径都经过 v
- 2. 任意 y 到 x 的路径都经过 v

引理 5.2：边 (u,v) 是强桥当且仅当对于任意 x 都存在一个点 y ，使得以下之一成立：

- 1. 任意 x 到 y 的路径都经过边 (u,v)
- 2. 任意 y 到 x 的路径都经过边 (u,v)

证明：这两个引理的证明基本一致，这里仅证明**引理 5.1**。若 v 是强割点，则图 $G\backslash\{u\}$ 不是强连通图，那么考察与 x 不在同一强连通分量里的某点 y，要么不存在 x 到 y 的路径，要么不存在 y 到 x 的路径。由于 G 是强连通的，可得引理的条件成立；另一方面，若引理的条件成立则 x 和 y 不再强连通。 □

若使用**引理 5.1**，任选一点 v 即可求出所有除 v 之外的强割点。对于条件 1，只要求出 $DT(G,v)$，则支配树中所有除 v 之外的非叶子节点都是强割点；对于条件 2，只要构建出 G 的反图 G^R 并求出 $DT(G^R,v)$ 即可。最终再使用普通的求强连通分量算法即可判断点 v 是否是强割点。

对于强桥有类似的结论，可套用上一节所述的支配边算法解决。上述求强割点和强桥的算法时间复杂度都和求支配树的复杂度相同。

4.4 工业方面的应用

支配树在许多需要基于有向图的结构上有着很多用处。

神经网络可以抽象成一个有向图，每个节点的计算任务依赖于有边指向它的节点的结果，为了加速神经网络的运行，通常采用并行计算的方式优化节点的计算顺序，此时支配树可以部分地求出那些被高频使用的节点并优先计算它们。

除此之外，支配树还能在编译原理、内存泄漏检测中发挥作用。总的来说，“支配”的概念在很多领域都有类似的说法，因此支配树作为求解支配关系的工具应用广泛。

5 总结

本文介绍了支配树的求解算法和一些应用。虽然支配树问题已经被解决，但从它的应用来看，支配树的变种很多，也有许多值得研究之处。

希望能通过本文让更多的同学了解支配树这一算法和工具，并更深入地探究相关问题。

感谢

感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。
感谢国家集训队教练高闻远的指导。
感谢南京外国语学校李曙老师的指导和支持。
感谢所有曾经给予我帮助的老师和同学。
感谢我的父母一直以来的全力支持和鼓励。

参考文献

[1] Thomas Lengauer, Robert Endre Tarjan, A Fast Algorithm for Finding Dominators in a Flowgraph

[2] Adam L. Buchsbaum, Haim Kaplan, Anne Rogers, Jeffery R. Westbrook, A new, simpler linear-time dominators algorithm

[3] Giuseppe F. Italianoa, Luigi Laura b, Federico Santaroni, Finding strong bridges and strong articulation points in linear time

[4] Robert E. Tarjan, Depth-first search and linear graph algorithms