§7.2 空间点、线、平面间的位置关系

7.2.1 相关概念

学习目标

1.掌握空间中点、 直线、平面之间的位置关系的相关定义;

2.掌握可以作为推理依据的基本事实（公理）和定理;

3.能够熟练运用基本事实和相关定理处理一些简单的立体几何问题.

1.四个基本事实（公理）

基本事实 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内.

基本事实 2：过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

基本事实 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过公共点的公共直线.

基本事实 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

推论 1：经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面.

推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

点通常用大写字母 A,B,P 等表示；直线通常用小写字母 l 等表示；平面通常用 α,β 等表示；如果直线 l 经过点 A,B 两点， l 也可用 AB 表示；如果平面 α 经过不在同一直线上的三个点 A,B,C ，则平面 α 也可表示成平面 ABC 。

【注意】点与线之间的关系是**属于**或**不属于**关系，比如点 P 在直线 l 上，可写成 $P\in l$ ，否则表示成 $P\notin l$;

直线与平面之间的关系是**包含**或**不包含**关系，比如直线 l 在平面 α 内，可表示成 $l\subset\alpha$ 。否则表示成 $l\not\subset\alpha$

2. 直线与直线的位置关系

异面直线:

不同在任何一个平面内的两条直线，称为异面直线。

根据两条直线是否在同一个平面内，可将它们的位置关系分成共面和异面两种，对于共面的两条直线，又可细分为平行和相交。因此，两条直线的位置关系有如下三种。

$$\begin{cases}\text{共面直线}\begin{cases}\text{平行}\\ \text{相交}\end{cases}\\ \text{异面直线：不同在任何一个平面内}\end{cases}$$

异面直线所成的角

①定义：设a,b是两条异面直线，经过空间任一点O作直线$a'//a$，$b'//b$，把a'与b'所成的锐角或直角叫做异面直线a,b所成的角(或夹角).

②范围：$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

3．直线与平面的位置关系

按照直线与平面有无公共点，以及公共点的多少，可将直线与平面的位置关系做如下分类：

（1）直线与平面相交，它们有一个公共点；

（2）直线在平面内，它们有无穷多个公共点；

（3）直线与平面平行，它们没有公共点

直线与平面相交或平行，统称为直线在平面外。

4、平面与平面的位置关系

按照两个平面有无公共点，可将两个平面的位置关系分为如下两种

（1）两平面平行：它们没有公共点

（2）两平面相交：它们有且仅有一条公共直线

5．直线与直线平行

基本事实 4：平行于同一直线的两条直线互相平行

等角定理：如果空间中两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补

6．直线与直线垂直

定义：两条直线所成的角为直角，则称这两条直线互相垂直。

7、直线与平面垂直

定义：一条直线l与一个平面α内的任意一条直线都垂直，则称这条直线和这个平面垂直，记作$l\perp\alpha$，直线l叫作平面α的垂线，l与α的交点称为垂足。

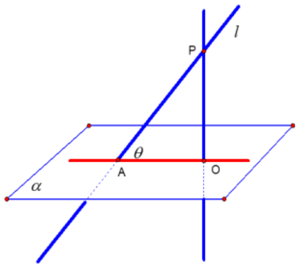
点到平面的距离：

过平面外一点作已知平面的垂线，该点与垂足之间的线段长，叫作这个点到该平面的距离。

8.直线与平面所成的角

如图，一条直线l与平面α相交但不垂直，我们将l叫作平面α的一条斜线，l与平面α的交点A叫斜足。过l上斜足以外的任意一点P作平面α的垂线PO，过垂足O和斜足A的直线AO

叫l在平面α上的射影。



定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角，叫作这条直线与这个平面所成的角。一条直线垂直于一个平面，我们说它们所成的角为直角。一条直线平行于一个平面或在平面内，我们说它们所成的角是0°。因此，线面角的范围为$[0^\circ, 90^\circ]$

9.直线到平面的距离

如果一条直线和一个平面平行，则这条直线上的任意一点到该平面的距离，称为这条直线到这个平面的距离。

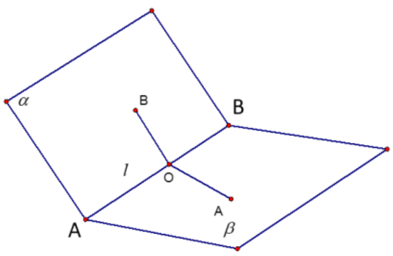
10.两平行平面间的距离

两平面平行，则其中一个平面内的任意一点到另一平面的距离，都称为这两个平行平面间的距离。

11.平面与平面垂直

二面角：从一条直线出发的两个半平面组成的图形叫二面角。这条直线叫二面角的棱，这两个半平面叫二面角的面。如二面角的棱为直线AB，两个面分别为α,β，则该二面角记为$\alpha-AB-\beta$。为方便，我们经常在二面角的两个面上分别取一点（不在AB上）P,Q，将二面角记为$P-AB-Q$。

如图，在二面角$\alpha-l-\beta$的棱l上任取一点O，以O为垂足，分别在两个半平面内作与l垂直的射线OA,OB，则$\angle AOB$称为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角。如果一个二面角的平面角为直角，则称此二面角为直二面角。显然，二面角的平面角的范围为$[0^\circ,180^\circ]$。如果两个平面所成的二面角为直二面角，则称这两个平面互相垂直。



7.2.2 典型例题

例 1.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)两个平面α，β有一个公共点A，则α，β相交于A点的任意一条直线.(　　)

(2)两两相交的三条直线最多可以确定三个平面.(　　)

(3)如果两个平面有三个公共点，则这两个平面重合.(　　)

(4)若直线a不平行于平面α，且$a\not\subset\alpha$，则α内的所有直线与a异面.(　　)

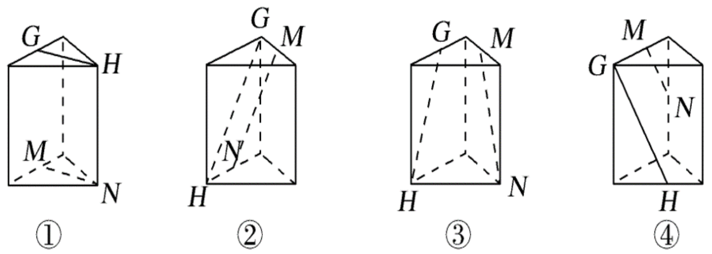
【解析】(1)只有过公共点的唯一一条交线，故错误；

（2）当三条直线在空间中交于一点时，可确定三个平面，正确；

(3)两个相交平面的交线上有无限个公共点，故错误；

(4)显然a为平面α的斜线，α内过斜足的直线与直线a相交，故错误.

例 2.如图，G,H,M,N分别是正三棱柱的顶点或所在棱的中点，则表示直线GH,MN是异面直线的图形有________(填上所有正确答案的序号).



【解析】：在图①中，直线$GH//MN$；

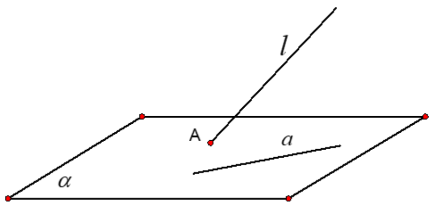
图②中，G,H,N三点共面，MN为GHN平面的一条斜线，N为斜足，因$N\notin GH$，故直线GH与MN异面；

在图③中，连接$GM,GM//HN$，因此GH与MN共面；

在图④中，G,M,N共面，但$H\notin$平面$GMN,G\notin MN$，因此GH与MN异面.

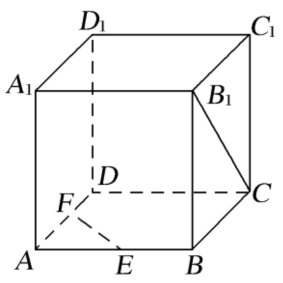
所以在图②④中GH与MN异面.

重要结论：平面的一条斜线与该平面内不过斜足的任意一条直线互为异面直线



例 3.如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别是AB，AD的中点，则异面直线B_1C与EF所成角的大小为(　　)

A.30°　　　　B.45°　　　　C.60°　　　　D.90°



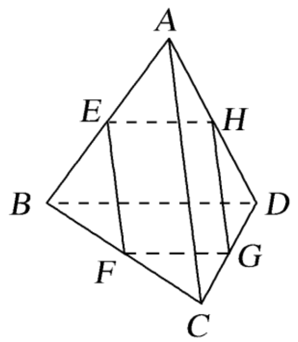
【解析】连接 B_1D_1， D_1C ，则 $B_1D_1//EF$ ，故 $\angle D_1B_1C$ 为所求的角

又 $B_1D_1=B_1C=D_1C$ ， $\therefore \angle D_1B_1C=60^\circ$ 。选 C。

例 4.已知空间四边形的两条对角线相互垂直，顺次连接四边中点的四边形一定是(　　)

A.梯形　　　　　　B.矩形　　　　　　C.菱形　　　　　D.正方形

【解析】如图所示，易证四边形 $EFGH$ 为平行四边形，因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，所以 $EF//AC$，又 $FG//BD$，所以 $\angle EFG$ 或其补角为 AC 与 BD 所成的角，而 AC 与 BD 所成的角为 90°，所以 $\angle EFG=90^\circ$，故四边形 $EFGH$ 为矩形.选 B。



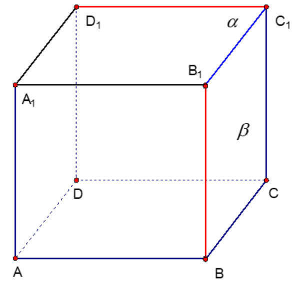
例 5．若直线 l_1 和 l_2 是异面直线，l_1 在平面 α 内，l_2 在平面 β 内，l 是平面 α 与平面 β 的交线，则下列命题正确的是(　　)

A. l 与 l_1，l_2 都不相交　　　　　B. l 与 l_1，l_2 都相交

C. l 至多与 l_1，l_2 中的一条相交　　　D. l 至少与 l_1，l_2 中的一条相交

【解析】以长方体为模型，很容易找到 A、B、C 的反例，只能选 D。

【注意】：两线两面的命题型问题，常以长方体为模型，以及定理、公理和推论为依据。



例 6.以下四个命题中，正确命题的个数是(　　)

② 不共面的四点中，其中任意三点不共线；

②若点 A,B,C,D 共面，点 A,B,C,E 共面，则点 A,B,C,D,E 共面；

③若直线 a,b 共面，直线 a,c 共面，则直线 b,c 共面；

④依次首尾相接的四条线段必共面.

A.0　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.3

【解析】 ①假设其中有三点共线，则该直线和直线外的另一点确定一个平面，这与四点不共面矛盾，故其中任意三点不共线，所以①正确.

②从条件看出两平面有三个公共点 A,B,C，但是若 A,B,C 共线，则结论不正确；

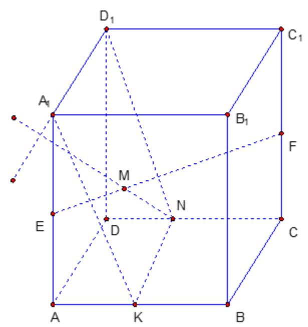
③不正确；以正方体为模型，很容易找到反例。

④不正确，因为此时所得的四边形的四条边可以不在一个平面上，如空间四边形.

例 7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AA_1,CC_1 的中点，则在空间中与三条直线 A_1D_1,EF,CD 都相交的直线有________条.

【解析】 如图，在 EF 上任意取一点 M，直线 A_1D_1 与 M 确定一个平面，不妨令其为 α，则平面 α 与底面 $ABCD$ 必定相交（否则，就与底面 $ABCD$ 平行，那 α 就与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 重合了，此与 M 在平面 α 上矛盾），且交线与 A_1D_1 平行，进而与 AD 平行，因此交线必定与 CD 相交，不妨令交点为 N，则 MN 必与 A_1D_1 相交（否则，MN 与 A_1D_1 平行，则 MN 变成图中的直线 NK，此与 M 在其上矛盾），

综上，直线 MN 满足与题中三线相交，显然，这样的直线 MN 有无数条.



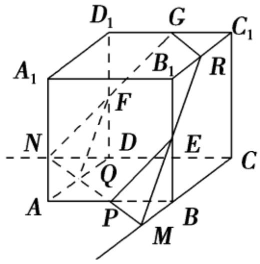
例 8. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P,Q,R 分别是 AB,AD,B_1C_1 的中点，那么，正方体的过 P,Q,R 的截面图形是(　　).

A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

【解析】 如图所示，作 $RG//PQ$ 交 C_1D_1 于 G，连接 QP 并延长与 CB 交于 M，连接 MR 交 BB_1 于 E，连接 PE,RE，得截面的部分外形.

同理连 PQ 并延长交 CD 于 N，连接 NG 交 DD_1 于 F，连接 QF,FG，得截面的部分外形

综上，截面为六边形$PQFGRE$。.



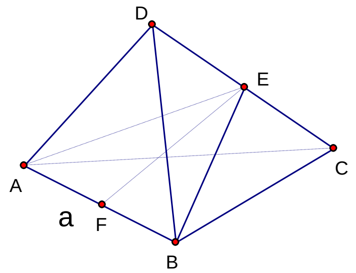
例 9．设四面体的六条棱的长分别为$1,1,1,1,\sqrt{2}$和a，且长为a的棱与长为$\sqrt{2}$的棱异面，则a的取值范围是（　　）

（A）$(0,\sqrt{2})$　　（B）$(0,\sqrt{3})$　　（C）$(1,\sqrt{2})$　　（D）$(1,\sqrt{3})$

【解析】令E为DC的中点，F为AB的中点，

易知$AE=BE=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由$AB<AE+BE=\sqrt{2}$知，选 A。



【巧解】由斯坦纳定理知$\cos(AC,BD)=\frac{|(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)|}{2AC\times BD}=\frac{a^2}{2}$

故，$0<\frac{a^2}{2}<1\Rightarrow 0<a<\sqrt{2}$

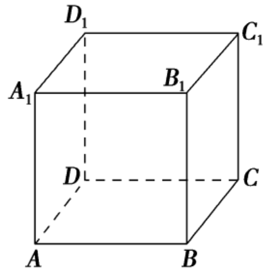
例 10（1）. 如果两条异面直线称为“一对”，那么在正方体的十二条棱中共有异面直线(　　).

A．12 对　　B．24 对　　C．36 对　　D．48 对

（2）从平行六面体的 6 个面中任取 3 个面，其中有两个面不相邻的选法有（　）种.

A.8　　B.12　　C.16　　D.20

【解析】(1) 如图所示，与AB异面的直线有B_1C_1；CC_1,A_1D_1,DD_1四条，因为各棱具有相同的位置且正方体共有 12 条棱，排除两棱的重复计算，共有异面直线$\frac{12\times 4}{2}$＝24(对).



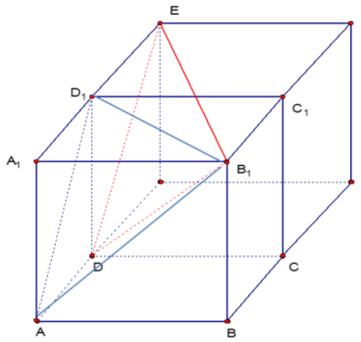
（2）我们考察平行六面体的上、下两个面，他两显然不相邻，再从剩下的 4 个面中任取 1 个与刚才的两个面构成三面组，显然这个三面组中存在两个平面不相邻，且这种三面组有 4 个。考虑到平行六面体的前、后面；左、右面都有同样的情况，因此，总共有 12 种取法。选 B。

例 11（全国 II）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】如图，将长方体延展出去，易知 $DE//AD_1$，故 $\angle EDB_1$ 即为 AD_1 与 DB_1 所成的角。

易知 $DE=2, DB_1=\sqrt{5}, B_1E=\sqrt{5}$，

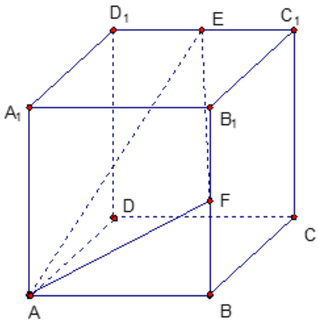


故，$\cos\angle EDB_1=\dfrac{\frac{1}{2}DE}{DB_1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，选 C。

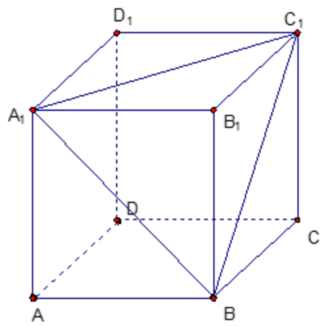
【法二】考察四面体 $A-B_1D_1D$，易知 $AD=1$，$AD_1=AB_1=2$，$DB_1=\sqrt{5}$，$D_1B_1=\sqrt{2}$，$DD_1=\sqrt{3}$，由斯坦纳定理得

$$\cos(AD_1, DB_1)=\frac{|(AB_1^2+DD_1^2)-(AD^2+B_1D_1^2)|}{2AD_1\cdot DB_1}=\frac{|(4+3)-(1+2)|}{2\times 2\times\sqrt{5}}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$，选 C。

例 12. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，E, F 分别是 C_1D_1 和 BB_1 的中点，画出图一中平面 AEF 与平面 $ABCD$ 的交线，以及图二中平面 A_1C_1B 与平面 $ABCD$ 的交线，并给出证明



图一



图二

【图一】 令M为DC的中点，连接EM由$BB_1//ME$知E,B_1,B,M四点共面

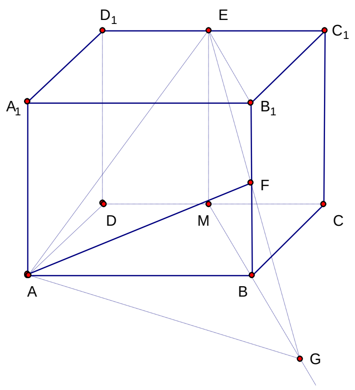
故，在平面BE内，连接EF并延长，它与MB的延长线必交于某点G，连接AG，

则AG为平面AEF与平面$ABCD$的交线，

证明： 由作图知，$G\in EF$，而$EF\subset$平面AEF，故$G\in$平面AEF，从而$AG\subset$平面AEF

同理，$G\in MB$，而$MB\subset$平面$ABCD$，故$G\in$平面$ABCD$，从而$AG\subset$平面$ABCD$

故，AG为平面AEF与平面$ABCD$的交线

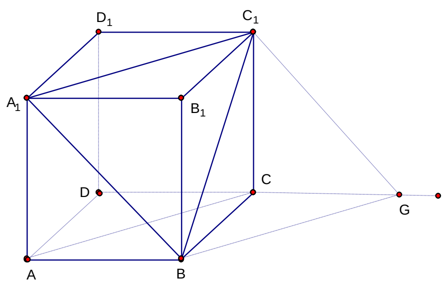


【图二】 延长DC至G，使$DC=CG$，连接BG，则BG为平面A_1C_1B与平面$ABCD$的交线。

证明： 连接AC，易知$BG//AC, A_1C_1//AC$

故，$A_1C_1//BG$，即A_1,C_1,G,B四点共面，因此$BG\subset$平面A_1C_1B

又$BG\subset$平面$ABCD$，从而BG为平面A_1C_1B与平面$ABCD$的交线。

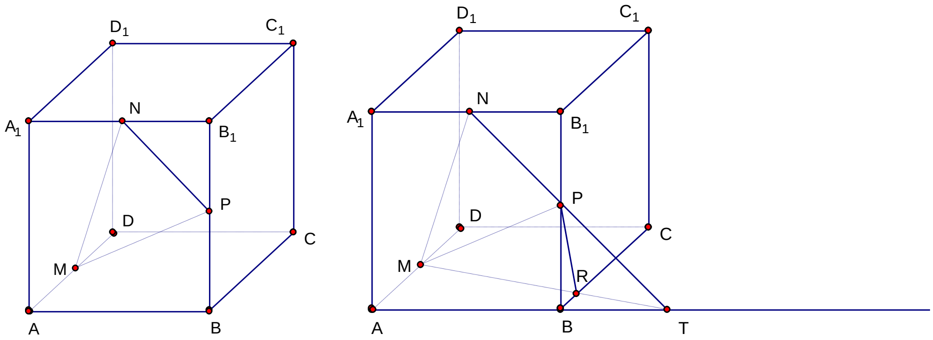


例 13. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 8，M,N,P分别是AD,A_1B_1,BB_1的中点，

（1）画出过 M,N,P 三点的平面与平面 AC 的交线以及与平面 BC_1 的交线；

（2）令过 M,N,P 三点的平面与 BC 交于 R，求 PR 的长

【解析】（1）连接 NP，在平面 AB_1 中，延长 NP，设其与 AB 之延长线交于点 T，连接 MT，则 MT 为过 M,N,P 三点的平面与平面 AC 的交线；令 MT 与 BC 交于 R，连接 PR，则 PR 为 M,N,P 三点的平面与平面 BC_1 的交线。

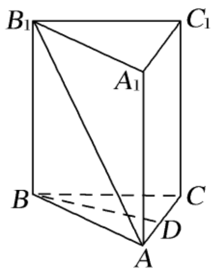


（2）过 N 作 AB 的垂线，垂足为 E，易知 BP 为 $\triangle NET$ 的中位线，故 $BT=4$

由 $\triangle AMT$ 与 $\triangle BRT$ 相似知 $BR=\dfrac{4}{3}$

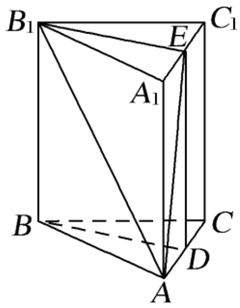
从而，$PR=\sqrt{PB^2+BR^2}=\sqrt{16+\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{10}$

例 14.如图所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 AC 的中点，$AA_1:AB=\sqrt{2}:1$，则异面直线 AB_1 与 BD 所成的角为________.



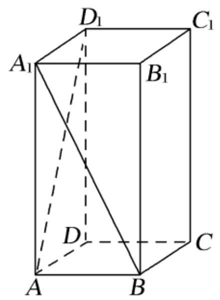
【解析】取 A_1C_1 的中点 E，连接 B_1E,ED,AE，在 $Rt\triangle AB_1E$ 中，$\angle AB_1E$ 为异面直线 AB_1 与 BD 所成的角.

设 $AB=1$，则 $A_1A=\sqrt{2},AB_1=\sqrt{3},B_1E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\angle AB_1E=60^\circ$.



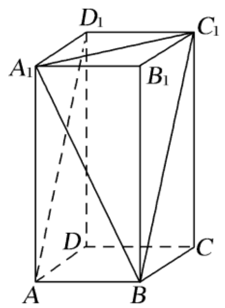
例 15. 如图，在底面为正方形，侧棱垂直于底面的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=2$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$



【解析】 连接 BC_1，易知 $BC_1//AD_1$，则 $\angle A_1BC_1$ 即为异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角。连接 A_1C_1，由 $AB=1, AA_1=2$，则 $A_1C_1=\sqrt{2}$，$A_1B=BC_1=\sqrt{5}$，

在 $\triangle A_1BC_1$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle A_1BC_1=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$。



例 16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{5}$，M 为 CC_1 的中点，点 N 在侧面 ADD_1A_1 内，若 $BM\perp A_1N$，则 $\triangle ABN$ 面积的最小值为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 25

【解析】 如图，取 BC 的中点 E，连接 B_1E，由 $B_1B=BC, BE=CM, \angle B_1BE=\angle BCM$，

可得 $\triangle B_1BE\cong\triangle BCM$，则 $\angle B_1BE=\angle BCM$。

$\therefore \angle B_1EB+\angle MBE=90^\circ$，则 $B_1E\perp BM$，

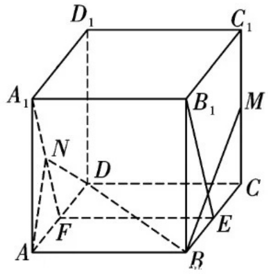
取 AD 的中点 F，连接 EF，可得四边形 A_1B_1EF 为平行四边形，$\therefore A_1F//B_1E$，

又点 N 在侧面 ADD_1A_1 内，且 $BM \perp A_1N$，

$\therefore N$ 在 A_1F 上，且 N 到 AB 的最小距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5}=2$，

$\therefore \triangle ABN$ 面积的最小值为 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，

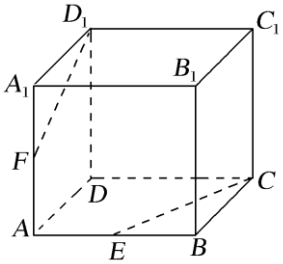
故，选 B



例 17.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 AB 和 AA_1 的中点.求证:

(1) E,C,D_1,F 四点共面；

(2) CE,D_1F,DA 三线共点.



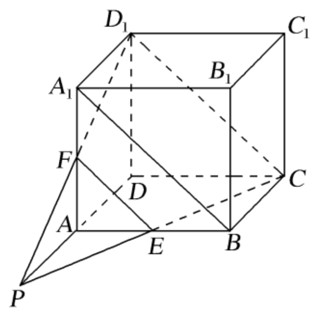
证明　(1)如图，连接 CD_1,EF,A_1B，

因为 E,F 分别是 AB 和 AA_1 的中点，所以 $EF//A_1B$，且 $EF=\dfrac{1}{2}A_1B$

又因为 $A_1D_1//BC,A_1D_1=BC$，所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形.

所以 $A_1B//CD_1$，所以 $EF//CD_1$，所以 EF 与 CD_1 确定一个平面 α.

所以 $E,F,C,D_1\in\alpha$，即 E,C,D_1,F 四点共面.



（2）由（1）知 $EF//CD_1$，且 $EF=\dfrac{1}{2}CD_1$，所以四边形 CD_1FE 是梯形，

所以CE与D_1F必相交。设交点为P，

则$P\in CE\subset$平面$ABCD$，且$P\in D_1F\subset$平面A_1ADD_1，

所以$P\in$平面$ABCD$且$P\in$平面A_1ADD_1

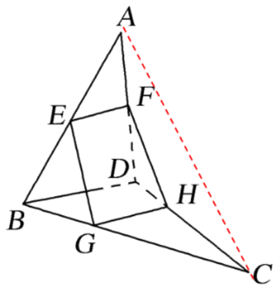
又因为平面$ABCD\cap$平面$A_1ADD_1=AD$，

所以$P\in AD$，所以CE,D_1F,DA三线共点.

例 18.如图，在空间四边形$ABCD$中，E,F分别是AB,AD的中点，G,H分别在BC,CD上，且$BG:GC=DH:HC=1:2$.

(1)求证：E,F,G,H四点共面；

(2)设EG与FH交于点P，求证：P,A,C三点共线.



【证明】(1)$\because E,F$分别为AB,AD的中点，$\therefore EF//BD$.

因为，在$\triangle BCD$中，$\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{HC}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore GH//BD,\therefore EF//GH$，$\therefore E,F,G,H$四点共面.

(2)$\because EG\cap FH=P,P\in EG,EG\subset$平面$ABC$，$\therefore P\in$平面$ABC$。

同理$P\in$平面ADC

$\therefore P$为平面ABC与平面ADC的公共点.

又平面$ABC\cap$平面$ADC=AC$，

$\therefore P\in AC$，$\therefore P,A,C$三点共线.