§ 9.4 双曲线的性质

9.4.1 相关概念

学习提纲

1　焦点三角形的性质

2　斜率积定理

3 带倾斜角的焦半径和焦点弦长公式

4 其他

以下结论均针对双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

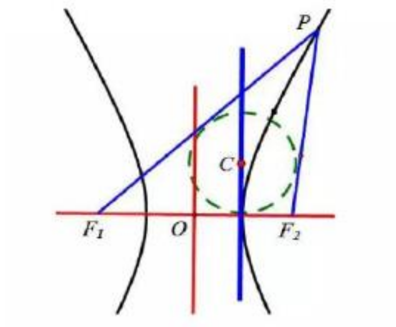
1、 焦点三角形$\triangle F_1PF_2$（P 为双曲线上异于实轴端点的任意点）中的结论:

(1) $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\angle F_1PF_2}{2}$

(2) $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=\frac{c+a}{c-a}=\frac{e+1}{e-1}$ （其中$\angle PF_1F_2=\beta, \angle PF_2F_1=\alpha$， $\alpha>\beta$）

(3) $\triangle F_1PF_2$的内切圆与实轴相切于实轴顶点。

P 在右支，则相切于右顶点； P 在左支，则相切于左顶点。



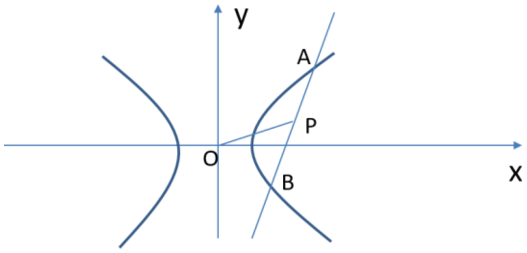
2、 斜率积定理（不特别声明：下面所涉及的斜率均存在）

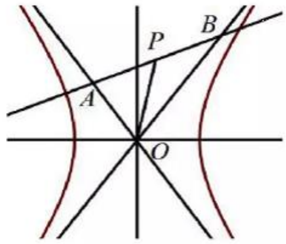
定理 1.如 AB 为双曲线的一条弦（不平行于坐标轴），P 为 AB 中点，O 为坐标原点，则

$$k_{OP}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$$

定理 2. A、B 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$渐近线上两点，$P$ 为 AB 的中点，则

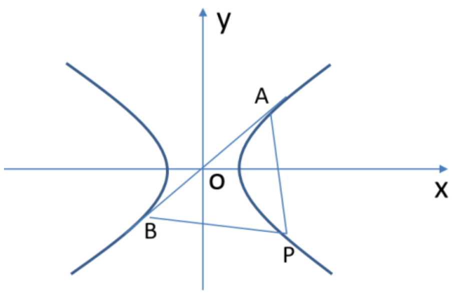
$$k_{AB}\cdot k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1,$$

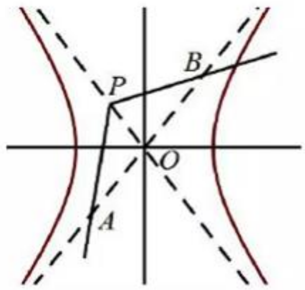




定理 3.如 A、B 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上关于坐标原点对称的两个点，P 为双曲线上异于 A、B 的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$

定理 4.分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线上关于原点对称的两点，P 为渐近线上任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$，





3、渐近三角形中的性质

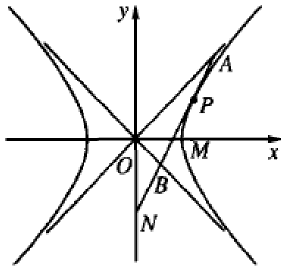
P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，过 P 作双曲线的切线交两渐近线于 A,B 两点，则称 $\triangle AOB$ 为双曲线的渐近三角形，双曲线的渐近三角形有如下性质：

（1）$|PA|=|PB|$；（P 为线段 AB 的中点不变）

（2）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a^2-b^2$；

（3）$S_{\triangle AOB}=ab$；（面积为定值）

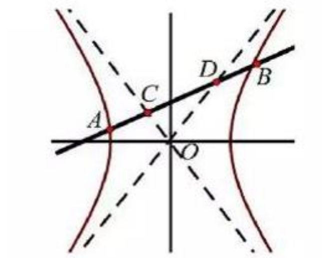
（4）$|OA|\cdot|OB|=a^2+b^2$；



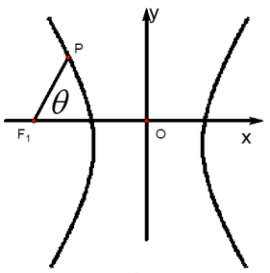
4、渐近线问题

(1) 如图，一直线与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和其渐近线分别交于$A,B,C,D$四点，则$AC=BD$

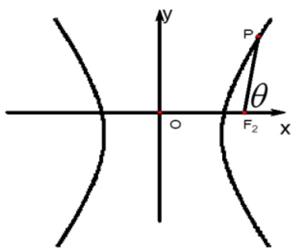
(2) 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点到渐近线的距离为$b$。



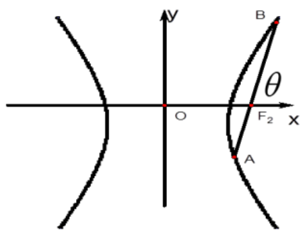
5、带倾斜角的短焦半径公式



$$F_1P=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}=-ex-a$$

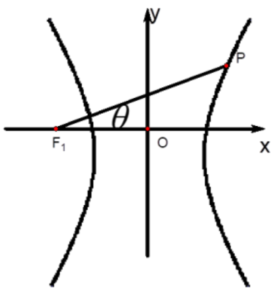


$$F_2P=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=ex-a$$

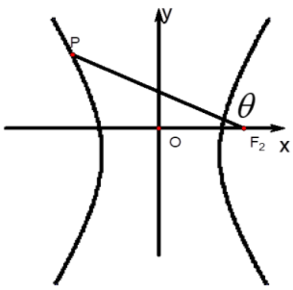


$$AB=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$$

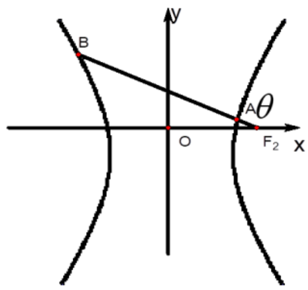
6、带倾斜角的长焦半径公式



$$F_1P=\frac{-b^2}{a-c\cos\theta}$$



$$F_2P=\frac{-b^2}{a+c\cos\theta}$$



$$AB=\frac{-2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$$

带倾斜角的焦点弦长统一公式：$AB=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}$

7、其他性质

（1） P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点，则 P 处的切线 PT 平分 $\angle F_1PF_2$

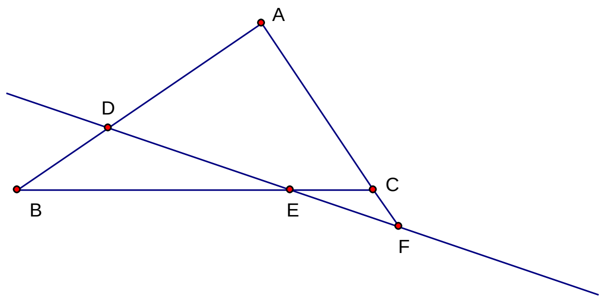
（2） P,Q 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意两点，且 $OP\perp OQ$，则 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$；

这个性质很有意思：该结论成立，意味着 $a<b$，否则不成立。

8、梅涅劳斯定理

如图，设直线 l 与 $\triangle ABC$ 的三条边（包括延长线分别交于）D,E,F，则

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$



9.4.2 典型例题

例 1 设 e_1，e_2 分别为具有公共焦点 F_1 与 F_2 的椭圆和双曲线的离心率，P 为两曲线的一个公共点，且满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $\dfrac{e_1^2+e_2^2}{(e_1e_2)^2}$ 的值为（　　）

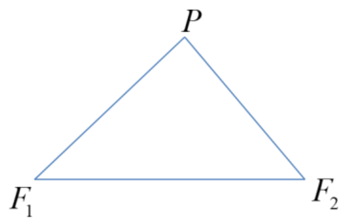
A．$\dfrac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.不确定

【解】 由题意，不妨设椭圆的三参数为 a_1,b_1,c，双曲线的三参数为 a_2,b_2,c。因 $\triangle F_1PF_2$ 是椭圆和双曲线共同的焦点三角形，由焦点三角形的面积公式得

$b_1^2\tan\dfrac{P}{2}=b_2^2\cot\dfrac{P}{2}$，即 $b_1^2\tan 45^\circ=b_2^2\cot 45^\circ$

故，$b_1^2=b_2^2\Rightarrow a_1^2-c^2=c^2-a_2^2\Rightarrow a_1^2+a_2^2=2c^2\Rightarrow\dfrac{a_1^2}{c^2}+\dfrac{a_2^2}{c^2}=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{e_2^{\ 2}}=2 \Rightarrow \dfrac{e_1^{\ 2}+e_2^{\ 2}}{e_1^{\ 2}e_2^{\ 2}}=2$，选 C。



例 2．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\sqrt{5}$，$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$，若$\triangle PF_1F_2$的面积为 4，则$a=$（　　　）

A．1　　　　B.2　　　　C.4　　　　D.8

【解】 由双曲线焦点三角形面积公式知:

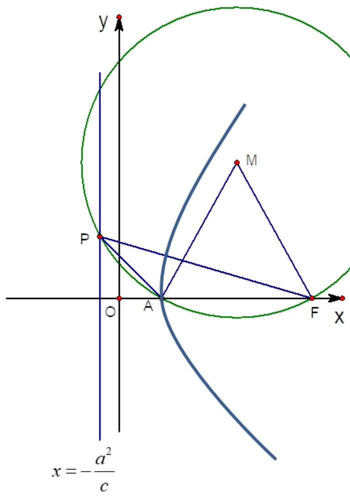
$$b^2\cot\frac{\angle P}{2}=4\Rightarrow b^2\cot 45^\circ=4\Rightarrow b^2=4$$

故，由$\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1=4\Rightarrow a=1$，选 A.

例 3．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右顶点和右焦点分别为$A\left(a,0\right)$、$F\left(c,0\right)$，若在直线$x=-\dfrac{a^2}{c}$上存在点$P$，使得$\angle APF=30^\circ$，则该双曲线的离心率的取值范围为

（A）$(1,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}]$　（B）$[\dfrac{3+\sqrt{17}}{2},+\infty)$　（C）$\left(1,4\right]$　（D）$\left[4,+\infty\right)$

【解】 问题等价于以AF为弦，所张圆周角为30°的圆与直线$x=-\dfrac{a^2}{c}$有交点，显然，AF所对的圆心角为60°，从而该圆的圆心为$\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-a)\right)$，半径为$c-a$，由$\dfrac{a+c}{2}-\left(-\dfrac{a^2}{c}\right)\le c-a$解得$e\ge\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，选（B）



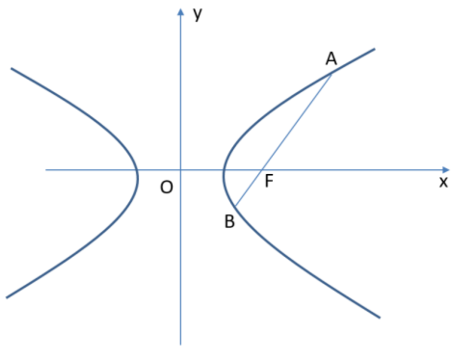
例 4. 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右焦点为$F$，过$F$且斜率为$\sqrt{3}$的直线交$C$于$A$、$B$两点，若$\overline{AF}=4\overline{FB}$，则$C$的离心率为（　　）

A. $\frac{6}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{9}{5}$

【解】 设直线AB的倾斜角为θ，易知$\theta=60^\circ$

因$|FA|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},|FB|=\frac{b^2}{a-c\cos(\theta+\pi)}=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

故$\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{4b^2}{a+c\cos\theta}\Rightarrow a+\frac{1}{2}c=4a-2c\Rightarrow 3a=\frac{5}{2}c\Rightarrow e=\frac{6}{5}$，选 A。



例 5. 设P为双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上且在第一象限内的点，$F_1,F_2$分别是双曲线的左、右焦点，$PF_2\perp F_1F_2$，$x$轴上有一点$A$且$AP\perp PF_1,E$是$AP$的中点，线段$EF_1$与$PF_2$交于点$M$．若$|PM|=2|MF_2|$，则双曲线的离心率是

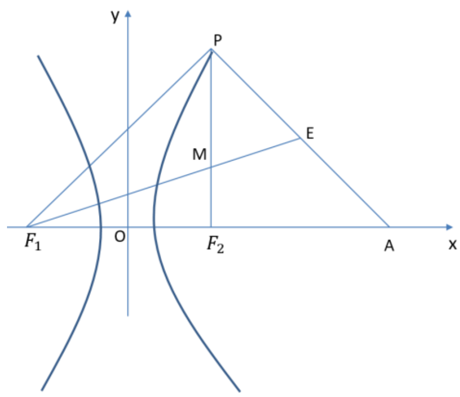
（A）$1+\sqrt{2}$　　（B）$2+\sqrt{2}$　　（C）$3+\sqrt{2}$　　（D）$4+\sqrt{2}$

【巧解】 $\triangle PF_2A$的三条边被直线F_1E所截，分点分别是M,F_1,E，由梅氏定理有

$$\frac{PM}{MF_2}\cdot\frac{F_2F_1}{F_1A}\cdot\frac{AE}{EP}=1,$$

将 $PM=2MF_2, AE=EP$ 带入上式，得 $\frac{F_2F_1}{F_1A}=\frac{1}{2}$，这说明 F_2 是 F_1A 的中点，

故 $PF_2=\frac{b^2}{a}=2c\Rightarrow e=\sqrt{2}+1$



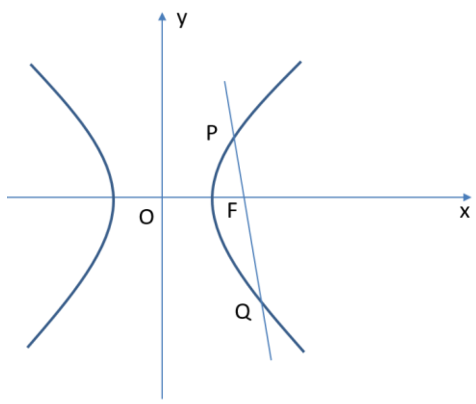
例 6．过双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 105° 的直线，交双曲线于 P、Q 两点，则 $|FP||FQ|$ 的值为（　　　）

【解】 不妨设 FP 与 x 轴正向夹角为 $\theta=105^0$，

则 $|FP|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|FQ|=\frac{b^2}{a-c\cos(\theta+\pi)}=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

故 $|FP||FQ|=\frac{b^4}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{4}{1-2\cos^2 105^\circ}=\frac{4}{-\cos 210^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【常规解法】 写出 PQ 的直线方程，再与双曲线方程联立，求得 P,Q 两点的坐标，进而获取结果，运算量太大，留给读者。



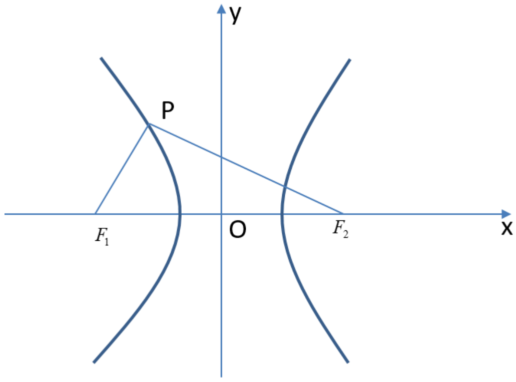
例 7．已知双曲线的左、右焦点分别为 F_1、F_2，且双曲线上存在异于顶点的一点 P，满足

$\tan\frac{\angle PF_1F_2}{2}=3\tan\frac{\angle PF_2F_1}{2}$，则该双曲线离心率为（　　）

A、2　　　　B、3　　　　C、$\sqrt{3}$　　　　D、$\sqrt{5}$

【解】利用焦点三角形的性质，由 $\frac{e+1}{e-1}=\tan\frac{\angle PF_1F_2}{2}\cot\frac{\angle PF_2F_1}{2}=3$，解得 $e=2$，选 A。

【注意】大角配正切，小角配余切。



例 8、已知双曲线 M：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$ 的左右焦点为 F_1，F_2，若双曲线的右支上存在点 P，使得 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{3c}{\sin\angle PF_2F_1}$，则双曲线 M 的离心率的取值范围是（　　）

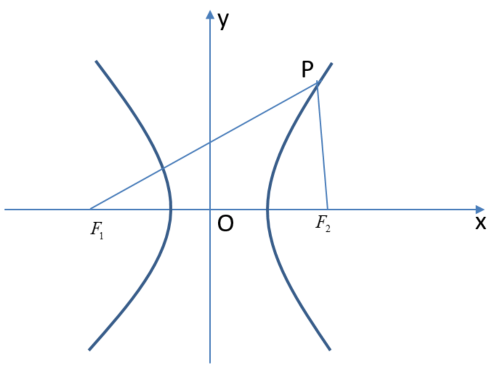
A. $(1,\frac{2+\sqrt{7}}{3})$　　　　B. $(1,\frac{2+\sqrt{7}}{3}]$　　　　C. $(1,2)$　　　　D. $(1,2]$

【解】 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{3c}{\sin\angle PF_2F_1}\Rightarrow\frac{PF_2}{a}=\frac{PF_1}{3c}$，

令 $\frac{PF_2}{a}=\frac{PF_1}{3c}=t$，则 $PF_2=at,PF_1=3ct$，

由 $PF_1-PF_2=2a\Rightarrow t=\frac{2a}{3c-a}$，再由 $t>\frac{c-a}{a}$ 得 $\frac{2a}{3c-a}>\frac{c-a}{a}$，解得 $e<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$，

选 A。



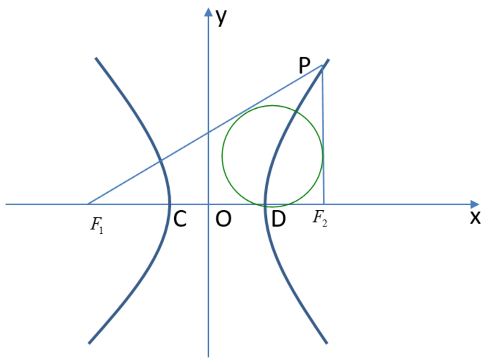
例9、已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，$P$为双曲线右支上一点(异于右顶点)，$\triangle PF_1F_2$的内切圆与$x$轴切于点$(2,0)$，过$F_2$作直线$l$与双曲线交于$A,B$两点，若使$|AB|=b^2$的直线$l$恰有三条，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A. $(1,\sqrt{2})$　　　　B. $(1,2)$　　　　C. $(\sqrt{2},+\infty)$　　　　D. $(2,+\infty)$

【解】 由于P在右支，故焦点三角形$\triangle PF_1F_2$的内切圆切于双曲线的右顶点D，故$a=2$。

由题意知：三条AB中，必有且仅有一条为右焦点弦，且只能是通径（否则，由$b^2>\dfrac{2b^2}{a}\Rightarrow a>2$），因此 有$|AB|>|CD|$，由$b^2>2a\Rightarrow b>2\Rightarrow c>2\sqrt{2}$，

故，$e=\dfrac{c}{a}>\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，选C。



例10.已知M、N是等轴双曲线$x^2-y^2=a^2(a>0)$上关于原点对称的两点，P是双曲线上的动点，且直线PM,PN的斜率分别为$k_1,k_2,k_1k_2\neq 0$，则$|k_1|+|k_2|$的最小值为（　　）

A．2　　　　B．1　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\sqrt{5}$

【解】 等轴双曲线的离心率$e=\sqrt{2}$，由斜率积定理知$k_1\cdot k_2=e^2-1=1$，

故$|k_1|+|k_2|\geq 2\sqrt{|k_1k_2|}=2$，易知等号可取，故选A.

例 11. 已知直线l_1与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$交于$A$，$B$两点，且$AB$中点$M$的横坐标为$b$，过$M$且与直线$l_1$垂直的直线$l_2$过双曲线$C$的右焦点，则双曲线的离心率为(　　　)

A. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$　　C. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$

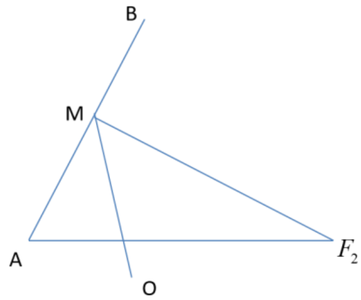
【巧解】 设$M(b,h)$，双曲线的右焦点为$F_2(c,0)$，

则 $k_{OM}=\dfrac{h}{b}, k_{MF_2}=k_{l_2}=\dfrac{h}{b-c}$；

因 l_1 与 l_2 垂直，故 $k_{l_1}=-\dfrac{1}{k_{l_2}}=-\dfrac{b-c}{h}$；

由 $k_{OM}\times k_{l_1}=e^2-1 \Rightarrow \dfrac{h}{b}\times(-\dfrac{b-c}{h})=e^2-1 \Rightarrow \dfrac{c}{b}=e^2$

$\Rightarrow \dfrac{c^2}{c^2-a^2}=e^4 \Rightarrow \dfrac{e^2}{e^2-1}=e^4 \Rightarrow e=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$，选 B。

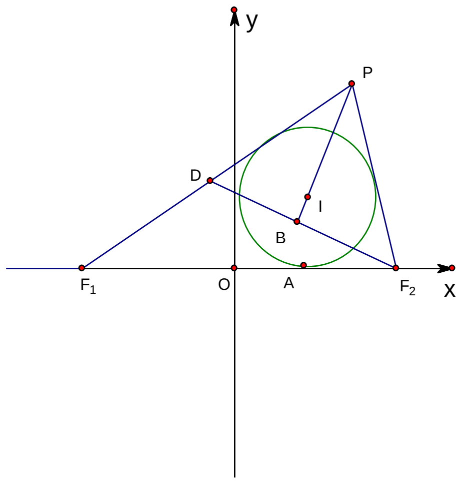


例12.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 左右焦点分别为 F_1, F_2，O 为双曲线中心，P 是双曲线右支上的一点，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 I，且圆 I 与 x 轴相切于点 A，过 F_2 作直线 PI 的垂线，垂足为 B，若 e 为双曲线的离心率，则（ ）

A. $|OB|=e|OA|$　　B. $|OA|=e|OB|$　　C. $|OB|=|OA|$　　D. $|OA|$ 与 $|OB|$ 关系不确定

【解】如图，延长 F_2B，设其交 PF_1 于 D，由题意知：$PF_2=PD$，且 B 为 F_2D 之中点，

故 $OB=\dfrac{1}{2}F_1D=\dfrac{1}{2}(PF_1-PD)=\dfrac{1}{2}(PF_1-PF_2)=\dfrac{1}{2}\times 2a=a=OA$，选 C。



例 13.双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点相同，若过右焦点$F$且倾斜角为$60^\circ$的直线与双曲线的右支有两个不同交点，则此双曲线实半轴长的取值范围是

A．（2，4）　　B．（2，4]　　C．[2，4）　　D．（2，＋∞）

【解】椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的半焦距$c=4$，故双曲线的$c=4$，要使题中直线与双曲线右支有两个交点，需$tan60^\circ>\frac{b}{a}$，　即$b<\sqrt{3}a$

$\therefore c^2-a^2<3a^2$，$\therefore a>2$

又$a<c$，则此双曲线实半轴长的取值范围是$(2,4)$，选 A。

【法二】令目标直线的方程为$y=\sqrt{3}(x-4)$，带入双曲线方程化简得：$(b^2-3a^2)x^2+24a^2x-48a^2-a^2b^2=0$，

由题意知：$\begin{cases}\Delta>0\\x_1x_2=\frac{-48a^2-a^2b^2}{b^2-3a^2}>0\end{cases}$

考虑到$c=4,b^2=c^2-a^2$，解上面的不等式组直接得到$2<a<4$。

故，双曲线实半轴长的取值范围是$(2,4)$

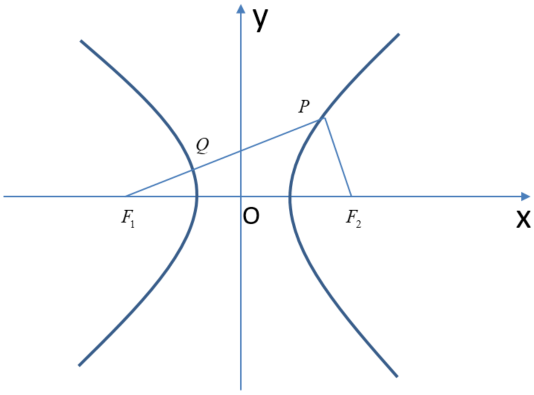
例 14.设F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右两个焦点，$P$为双曲线右支上一点，$PF_1$交双曲线左支于点$Q$，且$|PQ|=2|QF_1|$，$PF_1\perp PF_2$，则双曲线的离心率为_______

【解】设PF_1与x轴正向夹角为α，则$F_1P=\frac{-b^2}{a-c\cos\alpha}$，$F_1Q=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，

由题意知$\frac{-b^2}{a-c\cos\alpha}=3\times\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，解之得$\cos\alpha=\frac{2a}{c}$

又$PF_1\perp PF_2$，故$F_1P=2c\cos\alpha=4a$，从而$F_2P=4a-2a=2a$

故$(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$，解得$e=\sqrt{5}$



例 15. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支上的一点$P$，经过点$P$的直线与双曲线$C$的两条渐近线分别相交于$A$，$B$两点.若点$A$，$B$分别位于第一，四象限，$O$为坐标原点.当$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}$时，$\Delta AOB$的面积为$2b$，则双曲线$C$的实轴长为（　　）

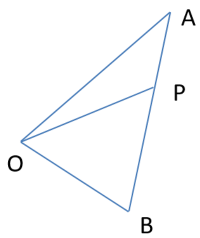
A．$\dfrac{32}{9}$　　　B．$\dfrac{16}{9}$　　　C．$\dfrac{8}{9}$　　　D．$\dfrac{4}{9}$

【解】 令$A(m,\dfrac{b}{a}m),B(n,-\dfrac{b}{a}n)$，易知$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=(\dfrac{2m+n}{3},\dfrac{b}{3a}(2m-n))$

P在双曲线上，得$\dfrac{1}{a^2}\times(\dfrac{2m+n}{3})^2-\dfrac{1}{b^2}\times[\dfrac{b}{3a}(2m-n)]^2=1\Rightarrow 8mn=9a^2$

又$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{1}{2}|m\times(-\dfrac{b}{a}n)-m\times(\dfrac{b}{a}n)|=\dfrac{b}{a}mn=2b\Rightarrow mn=2a$

故$9a^2=8mn=16a\Rightarrow a=\dfrac{16}{9}\Rightarrow 2a=\dfrac{32}{9}$



例 16．若点O和点$F(-2,0)$分别是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的中心和左焦点，点$P$为双曲线右支上的任意一点,则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$的取值范围为（　　）

A. $[3-2\sqrt{3},+\infty)$　　B. $[3+2\sqrt{3},+\infty)$　　C. $[-\dfrac{7}{4},+\infty)$　　D. $[\dfrac{7}{4},+\infty)$

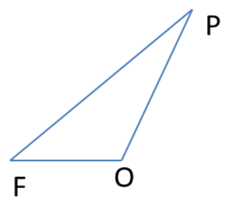
【解】：因为$F(-2,0)$是已知双曲线的左焦点，所以$a^2+1=4$，即$a^2=3$，所以双曲线方

程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，设点$P(x_0,y_0)$，则有$\dfrac{{x_0}^2}{3}-{y_0}^2=1$，解得${y_0}^2=\dfrac{{x_0}^2}{3}-1$，

因为$\overrightarrow{FP}=(x_0+2,y_0)$，$\overrightarrow{OP}=(x_0,y_0)$，

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0(x_0+2)+{y_0}^2=x_0(x_0+2)+\dfrac{{x_0}^2}{3}-1=\dfrac{4{x_0}^2}{3}+2x_0-1$，

此二次函数对应的抛物线的对称轴为$x_0=-\dfrac{3}{4}$，因为$x_0\ge\sqrt{3}$，所以当$x_0=\sqrt{3}$时$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$取得最小值$\dfrac{4}{3}\times3+2\sqrt{3}-1=3+2\sqrt{3}$，故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$的取值范围是$[3+2\sqrt{3},+\infty)$，选 B。



例 17.已知椭圆C_1的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线C_2的左、右焦点分别是C_1的左、右顶点，而C_2的左、右顶点分别是C_1的左、右焦点.

(1)求双曲线C_2的方程;

(2)若直线$l:y=kx+\sqrt{2}$与双曲线C_2恒有两个不同的交点A和B，且$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}>2$ (其中O为原点)，求k的取值范围.

【解】(1)设双曲线C_2的方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

则$a=\sqrt{3},c=2$，再由$a^2+b^2=c^2$得$b^2=1$，

故C_2的方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$。

(2)将$y=kx+\sqrt{2}$代入$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，得$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$.

由直线l与双曲线C_2交于不同的两点，

得$\begin{cases}1-3k^2\neq0\\ \Delta=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0\end{cases}$

所以$k^2\neq\dfrac{1}{3}$且$k^2<1$　　　　①

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{-9}{1-3k^2}$

所以，$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})$

$$=(k^2+1)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2=\frac{3k^2+7}{3k^2-1}$$

又因为$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}>2$，所以$\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1}>2$，即$\dfrac{k^2-3}{3k^2-1}<0$，

解得$\dfrac{1}{3}<k^2<3$　　　　②

综合①②，的 k 的取值范围为$(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$