第 5 章 平面向量及其应用

§ 5.1 平面向量基本概念

5.1.1 相关概念

学习目标

1、理解平面向量的相关概念

2、掌握平面向量的加、减法法则

3、掌握平面向量的数量积，并能进行基本的运算

1．向量的有关概念

(1)向量：既有大小又有方向的量叫向量；向量的大小叫做向量的**长度**或**模**。初期可这样理解：**向量是指有长度和方向的线段，线段的长度叫向量的模**

(2)零向量：长度等于 0 的向量，其方向是任意的．

(3)单位向量：长度等于 1 个单位的向量．

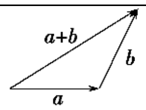
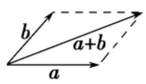
(4)平行向量：方向相同或相反的**非零向量**，又叫共线向量，规定：零向量与任一向量平行．

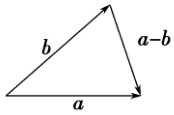
(5)相等向量：长度相等且方向相同的向量．

(6)相反向量：长度相等且方向相反的向量．

(7) 两个向量的夹角：已知**两个非零向量** $\vec{a},\vec{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB=\theta(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，当 $\theta=0^\circ$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；当 $\theta=180^\circ$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向；如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 90°，我们说 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$

2．向量的加法法则

向量运算	定　义	法则(或几何意义)	运算律
加法	求两个向量的和	 三角形法则  平行四边形法则	(1) 交换律： $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. (2)结合律： $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

减法	求两个向量的差 【注意】减法可以转化为加法	 三角形法则	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$

3.向量的数乘运算及其几何意义

(1)定义：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$，它的长度与方向规定如下：

①$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

②$\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；$\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$

(2)运算律：设 λ,μ 是两个实数，则

①$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；　　②$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；　　③ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

4．共线向量定理

向量 $\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在唯一一个实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

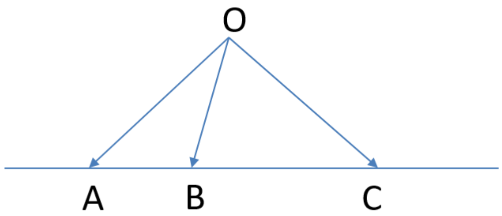
一般地，首尾依次相连的多个向量的和等于从第一个向量起点指向最后一个向量终点的向量.

注意：向量共线的充要条件中规定"$\vec{a}\neq\vec{0}$"，否则 λ 可能不存在，也可能有无数个.

5．关于三点共线问题

设 A,B,C,O 为空间中 4 个不同的点，且该 4 个点不同时在一条直线上，如图，则 A,B,C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ，使得 $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OC}$。

注意：也可描述成：存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OC}$，其中 $\lambda+\mu=1$，反之亦然。

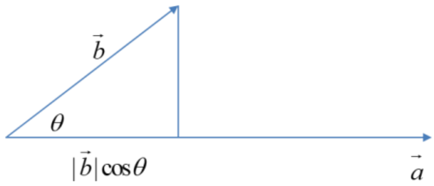


6．两个向量的数量积

已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，它们的夹角为 θ，则数量 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，规定零向量与任一向量的数量积为 0，即 $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$

7．向量数量积的几何意义

数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$\vec{a}$的长度$|\vec{a}|$与$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影$|\vec{b}|\cos\theta$之积



8．向量数量积的性质

设$\vec{a}$、$\vec{b}$都是非零向量， θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角．则

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

(2)当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，特别的，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$或者$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；

(3) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$；　　(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

9．向量数量积的运算律

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；　　(2) $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；　　(3) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

10.投影向量

对于向量设$\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}$为非零向量），我们称向量$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$为$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量。

5.1.2 典型例题

例 1．判断下列命题，哪些是正确的?

（1） $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$　　（2） $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$　　（3） $0\cdot\overrightarrow{AB}=0$

（4）对任意向量$\vec{a},\vec{b}$，都有$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

（5）对任意向量$\vec{a},\vec{b}$，都有$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|-|\vec{b}|$

【解析】（1）错，应为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

（2）错，应为$\overrightarrow{CB}$

（3）错，应为$0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

（4）对，三角不等式。 “三角形”两边之和大于第三边;

（5）错，三角不等式。 “三角形”两边之差小于第三边;

例 2.下列命题中正确的是(　　).

A．$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{b}$与$\vec{c}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{c}$也共线

B．任意两个相等的非零向量的始点与终点是一个平行四边形的四个顶点

C．向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$都是非零向量

D．有相同起点的两个非零向量不平行

【解析】

（A）错，比如$\vec{b}=\vec{0}$，由于零向量与任一向量都共线

（B）两个相等的非零向量可以在同一直线上，而此时就构不成四边形，所以 B 不正确；

(C) 对。因为，零向量与任何向量共线。

（D）显然错。

例 3. 给出下列命题:

① 若A,B,C,D是不共线的四点，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$是四边形$ABCD$为平行四边形的充要条件；

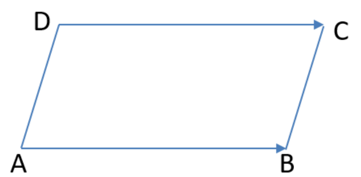
② 若$\vec{a}=\vec{b},\vec{b}=\vec{c}$，则$\vec{a}=\vec{c}$；

③ $\vec{a}=\vec{b}$的充要条件是$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}//\vec{b}$；

④ 若$\vec{a}$与$\vec{b}$均为非零向量，则$|\vec{a}+\vec{b}|$与$|\vec{a}|+|\vec{b}|$一定相等.

其中正确命题的序号是________.

【解析】 ①②正确， ③错，比如$\vec{a}=-\vec{b}$ ④错，比如$\vec{a}=-\vec{b}$



例 4（1）．已知$\vec{a},\vec{b}$是两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\ \overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b},\ \overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，则

（A） A,B,D三点共线　　（B） A,B,C三点共线

（C） B,C,D三点共线　　（D） A,C,D三点共线

（2）设$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个不共线向量，且向量$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$共线，则$\lambda=$________.

【解析】(1) 易知$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}=\vec{a}+5\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}$，故$A,B,D$三点共线，选A。

(2) 由题意知：存在实数k，使得$\vec{a}+\lambda\vec{b}=k(2\vec{a}-\vec{b})$，所以有$\begin{cases}1=2k\\ \lambda=-k\end{cases}$，解得

$k=\frac{1}{2},\lambda=-\frac{1}{2}$。

例 5.已知$\vec{a},\vec{b}$是不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R)$，那么$A,B,C$三点共线的充要条件是(　　).

A．$\lambda+\mu=2$　　B．$\lambda-\mu=1$　　C．$\lambda\mu=-1$　　D．$\lambda\mu=1$

【解析】　由A,B,C三点共线$\Leftrightarrow$存在实数t，使得$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$，

即$\lambda\vec{a}+\vec{b}=t(\vec{a}+\mu\vec{b})=t\vec{a}+t\mu\vec{b}$，即$(\lambda-t)\vec{a}+(1-t\mu)\vec{b}=\vec{0}$

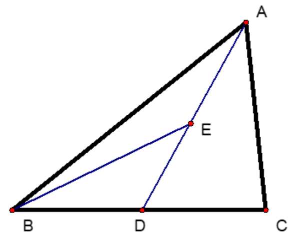
因$\vec{a},\vec{b}$不共线，故$\begin{cases}\lambda-t=0\\1-t\mu=0\end{cases}$，所以$\lambda\mu=1$，选 D.

例 6（1）（全国 I）在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EB}=$

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(2) 在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，$|\overrightarrow{AM}|=1,\ \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$,则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=$________.

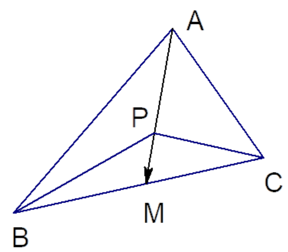


图一

【解析】（1）由题意知:

$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，选 A。

（2）如图二，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=2\times(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AM})=-\frac{4}{9}\overrightarrow{AM}^2=-\frac{4}{9}$。



图二

例 7.若$\odot O$的弦$AB=2$，求$\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AB}$的值。

【解析】如图，设 M 是 AB 的中点，则 $OM \perp AB$，于是 $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$，

所以，$\overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MO}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{MO} \bullet \overrightarrow{AB} = 2$

【法二】$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$。

例 8.若 $\triangle ABC$ 是半径为 1 的圆 O 的内接三角形，且 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$，求 $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{AB}$ 的值。

【解析】变形得 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = -5\overrightarrow{OC}$，平方得 $9\overrightarrow{OA}^2 + 24\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} + 16\overrightarrow{OB}^2 = 25\overrightarrow{OC}^2$；圆 O 的半径为 1，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$，故 $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 0$，

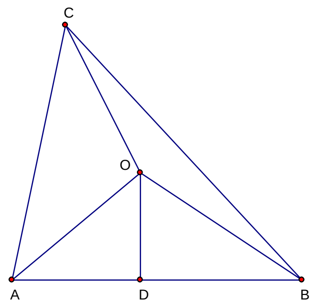
所以 $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = -\frac{1}{5}\left(-3\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OB}^2\right) = -\frac{1}{5}$

【法二】易知 $|AB| = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{OC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AO} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BO}$，

故，$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$= \frac{3}{5}|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle OAB - \frac{4}{5}|\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cos \angle OBA$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|^2 = \frac{6}{10} - \frac{8}{10} = -\frac{1}{5}$$



例 9.在四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}, \overrightarrow{DA} = \vec{d}$，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a}$，判断四边形形状。

【解析】：由题意 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$，则 $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} - \vec{d}$，平方得

$\vec{a}^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{c}^2 + 2\vec{c} \bullet \vec{d} + \vec{d}^2$，即 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2 + \vec{d}^2$，

同理得 $\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{d}^2$，

代换得 $\vec{a}^2 = \vec{d}^2$ 即 $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{d}\right|$，

同理得$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{b}|=|\vec{d}|$，即四边形是菱形；

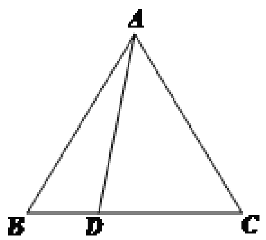
四边形对角线$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$，则

$\overrightarrow{AC}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2,\overrightarrow{BD}^2=\vec{b}^2+2\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}^2$，故$\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BD}^2$，所以四边形是矩形；

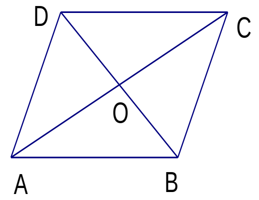
综上，四边形是正方形。

例 10（1）.如图一：在ΔABC中，若$AB=AC=3,\cos\angle BAC=\frac{1}{2},\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$_______

（2）如图二，在菱形$ABCD$中，若$AC=4$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$________.



图一



图二

【解析】(1)：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-3+\frac{1}{3}\times|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=-3+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$。

（2）易知，$\angle AOB=90^\circ$，

故$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAC=-|\overrightarrow{AC}||AO|=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=-8$

注意：$|\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAC$事实上就是$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影，这里等于$|AO|$（要注意，投影也可能是负的）

例 11（1）已知A,M,B三点共线，$m\vec{OA}-3\vec{OM}+\vec{OB}=\vec{0}$，若$\vec{AM}=t\vec{BA}$，则实数$t$的值为______

（2）平面上的向量$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$满足$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2=4$，且$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=0$，若向量$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$，则$|\overrightarrow{PC}|$的最大值为_______

【解析】(1)由题设知：$\overrightarrow{OM}=\frac{m}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，因$A,M,B$三点共线，故$\frac{m}{3}+\frac{1}{3}=1$，解得$m=2$，

从而知 M 为线段 AB 上靠近 A 的一个三等分点，故 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，从而 $t=-\frac{1}{3}$

（2）$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}\Rightarrow|\overrightarrow{PC}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{PA}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{PB}|^2=\frac{1}{9}(4-|\overrightarrow{PB}|^2)+\frac{4}{9}|\overrightarrow{PB}|^2$

$$=\frac{4}{9}+\frac{3}{9}|\overrightarrow{PB}|^2\le\frac{16}{9}$$

故 $|\overrightarrow{PC}|\le\frac{4}{3}$；易知等号可取，故 $|\overrightarrow{PC}|$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$。

例 12．如非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足：$(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则三角形 ABC 为（　　）

A.三边均不相等的三角形　　　　B.直角三角形

C.底边和腰不相等的等腰三角形　　　　D.等边三角形

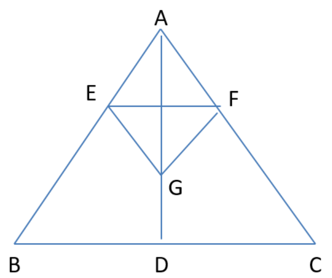
【解析】 显然 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别是 AB,AC 上的两个单位向量，

如图，不妨令 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AE},\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$，

易知 AG 为 $\angle A$ 的平分线。

由 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 知 $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

由 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$ 知 $\angle A=60^\circ$。故 $\triangle ABC$ 为等边三角形，选 D.



例 13.已知 O,N,P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|,\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 O,N,P 依次是 $\triangle ABC$ 的（　　　　）

A．重心、外心、垂心　　　　B．重心、外心、内心

C．外心、重心、垂心　　　　D．外心、重心、内心

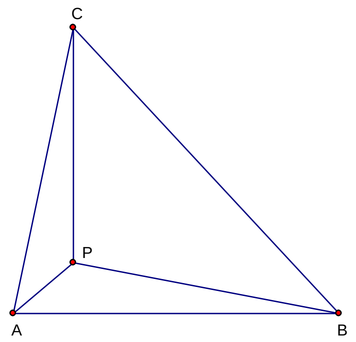
【解析】: .由 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ 知：O 为 $\triangle ABC$ 的外心；

由 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ 知：N 为$\triangle ABC$ 的重心；

由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\Rightarrow\overrightarrow{PB}(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0\Rightarrow\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

同理：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，故，$P$ 为$\triangle ABC$ 的垂心；

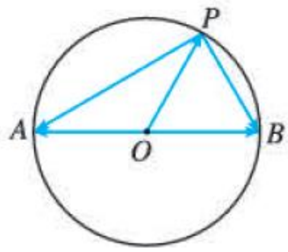
综上，选 C。



例 14.用向量法证明：直径所对的圆周角是直角。

【证明】：如图，点 P 是$\odot O$ 上一点，连接 OP，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OP}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=-\vec{a}$，且 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=-\vec{a}-\vec{b}$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$，因此 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，即 $\angle APB=90^\circ$。



例 15.$\triangle ABC$ 的三条边分别为 a,b,c，边 BC,CA,AB 上的中线分别记为 m_a,m_b,m_c，利用余弦定理证明：

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},\ m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

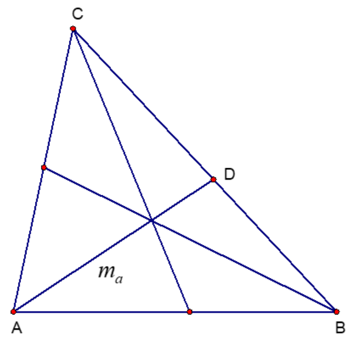
【证明】：由余弦定理的推论得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

所以 $m_a{}^2=(\frac{a}{2})^2+c^2-2\times\frac{a}{2}\times c\times\cos B$

$$=(\frac{a}{2})^2+c^2-2\times\frac{a}{2}\times c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=(\frac{1}{2})^2[2(b^2+c^2)-a^2],$$

故，$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$，

同理，$m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$



例 16. 已知$\triangle ABC$的三个角A,B,C的对边分别为a,b,c，设$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，求证：

（1）$\triangle ABC$的面积$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$；

（2）若r为三角形的内切圆半径，则$r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$；

（3）把BC,CA,AB上的高分别记为h_a,h_b,h_c，则$h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

$h_b=\dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$h_c=\dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

【证明】（1）由余弦定理的推论得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}$

所以，$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ac\sqrt{1-(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)}$$

$$=\sqrt{p(p-c)(p-b)(p-a)}$$

（2）由于$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}r\times 2p=pr$，所以

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

（3）由于$S=\frac{1}{2}ah_a$，所以$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

同理，$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

例 17．非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\left|\vec{b}\right|=2$，且对$\forall\lambda>0$，且$\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$恒成立，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$(　　)

A、4　　　B、$2\sqrt{3}$　　　C、2　　　D、$\sqrt{3}$

【解析】 $\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\Rightarrow\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}\lambda+\lambda^2\vec{b}^2\geq\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$

$\Rightarrow 2\lambda^2-\vec{a}\vec{b}\lambda+\vec{a}\vec{b}-2\geq 0\Rightarrow(\vec{a}\vec{b})^2-8(\vec{a}\vec{b}-2)\leq 0$

$\Rightarrow(\vec{a}\vec{b}-4)^2\leq 0\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=4$

例 18．已知向量$\vec{a},\vec{b},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，若对任意单位向量$\vec{e}$，均有$|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\leq\sqrt{6}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值是________.

【解析】由已知可得：$\sqrt{6}\geq|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\geq|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}|=|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|$恒成立，

故，$\sqrt{6}\geq|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|_{\max}$；

又，$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|=|(\vec{a}+\vec{b})|\cdot|\vec{e}|\cos\alpha\leq|\vec{a}+\vec{b}|$，故$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|_{\max}=|\vec{a}+\vec{b}|$

$\therefore\sqrt{6}\geq|\vec{a}+\vec{b}|$，$\therefore 6\geq(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=5+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

所以，$\vec{a}\cdot\vec{b}\leq\frac{1}{2}$。

例 19.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3,\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=6,\vec{a}^2+\vec{a}\bullet\vec{b}-2\vec{b}^2=-9$，则$\left|\vec{b}\right|=$_____。

【解析】由条件，知$\vec{a}^2+\vec{a}\bullet\vec{b}-2\vec{b}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=-9$，

所以$\left|3\vec{b}\right|=\left|\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=\sqrt{\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2}$

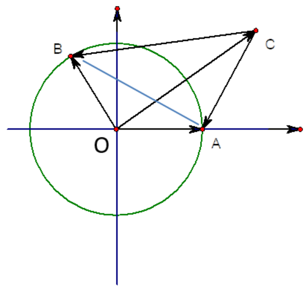
$$=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2-2\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

所以$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{7}$

例 20(全国 I)设向量a，b，c满足$|a|=|b|=1$，$a\cdot b=-\frac{1}{2}$，$\langle a-c,b-c\rangle=60^\circ$，则$|c|$的最大值等于（　　）

(A) 2　　　(B) $\sqrt{3}$　　　(C) $\sqrt{2}$　　　(D) 1

【解析】不妨令向量a，b，c就是图中的$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$。由题意知O、A、B、C四点共圆（$\triangle OAB$的外接圆），因此$|c|$为该圆的直径时取得最大值，此时$|c|=2R=\dfrac{|a|}{\sin 30^\circ}=2$，选A。



例 21.用向量法证明：$\triangle ABC$的三条高交于一点（这一点称为三角形的垂心）

【证明】如图，设BE,CD分别为$\triangle ABC$的两条高，其交点为F，只需证明$AF\perp BC$；

由$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CF}\Rightarrow(\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FA})\bullet\overrightarrow{CF}=0\Rightarrow\overrightarrow{FB}\bullet\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{CF}=0$

同理，由$AC\perp BF\Rightarrow(\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{FA})\bullet\overrightarrow{BF}=0\Rightarrow\overrightarrow{FC}\bullet\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{BF}=0$;

故，$\overrightarrow{FB}\bullet\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}\bullet\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{BF}$，即$\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{BF}$，

故$\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{BF}=0\Rightarrow\overrightarrow{FA}\bullet(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BF})=0\Rightarrow\overrightarrow{FA}\bullet(\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FC})=0$,

即$\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{CB}=0$，即$FA\perp CB$