§ 7.4 空间直线、平面垂直的判定定理和性质定理

7.4.1 相关概念

学习目标

1、掌握直线与平面、平面与平面垂直的判定定理和性质定理

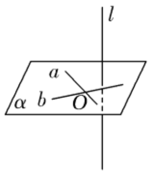
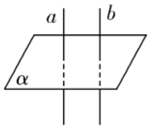
2、能熟练运用上述定理解决相关的立体几何问题。

1.直线与平面垂直

(1)直线和平面垂直的定义

如果一条直线l与平面α内的任意直线都垂直，就说直线l与平面α垂直.

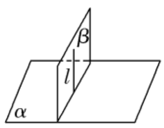
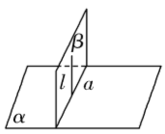
(2)判定定理和性质定理

	文字语言	图形表示	符号表示
判定定理	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直		$\left.\begin{array}{l} l\perp a \\ l\perp b \\ a\cap b=O \\ a,b\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线互相平行		$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow a//b$

2.平面与平面垂直

(1)平面与平面垂直的定义：两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

(2)平面与平面垂直的判定定理和性质定理

	文字语言	图形表示	符号表示
判定定理	一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直		$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ l\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面互相垂直，则在一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面		$\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=a \\ l\subset\beta \\ l\perp a \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$

7.4.2 典型例题

例 1.判断下列命题是否正确，正确的说明理由，错误的举例说明。

（1）一条直线平行于一个平面，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线互相垂直；

（2）如果平面$\alpha//$平面α_1，平面$\beta//$平面β_1，那么平面α与平面β所成的二面角和平面α_1与平面β_1所成的二面角相等或互补；

（3）如果平面$\alpha\perp$平面β，平面$\beta\perp$平面γ，那么平面$\alpha\perp$平面γ。

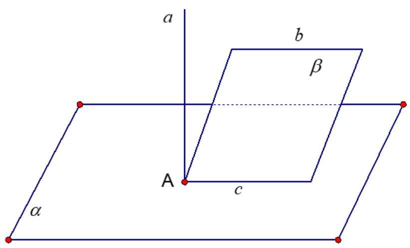
【解析】（1）正确。如图，不妨设直线$a\perp$平面α，直线$b//$平面α，

设$a\cap\alpha=A$，β为过A、b的平面。$\beta\cap\alpha=c$

由于$b\subset\beta$，$b//\alpha$，$\beta\cap\alpha=c$，故$b//c$

又，$a\perp\alpha, c\subset\alpha$，故$a\perp c$，即$a$与$c$成$90^{\circ}$角，

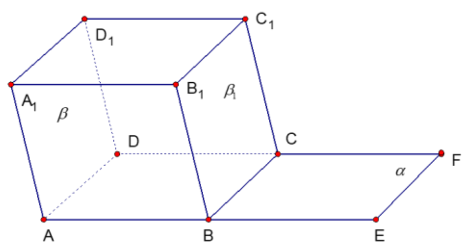
因$b//c$，故a与b也成90°角，即$a\perp b$。

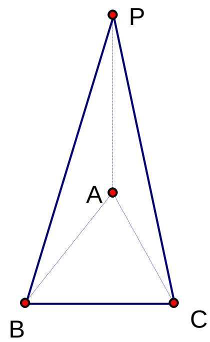


（2）正确。由于平移并不改变角的大小，因此，可将题中的$\alpha//\alpha_1$改成α,α_1重合，于是问题变为：考察β与α所成的二面角和β_1与α所成的二面角之间的关系。

如图，不妨设$\angle A_1AE$为β与α所成二面角的一个平面角，$\angle B_1BE$为β_1与α所成二面角的一个平面角，显然我们有$\angle A_1AE=\angle B_1BE, \angle A_1AE+\angle B_1BA=180^{\circ}$

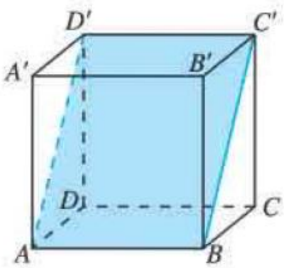
（3）错。如图，$PAB\perp ABC, PAC\perp ABC$，但$PAB$和$PAC$不互相垂直。





例 2.如图，正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，平面$ABC'D'$与正方体的各个面所在的平面所成

的二面角的大小分别是多少?

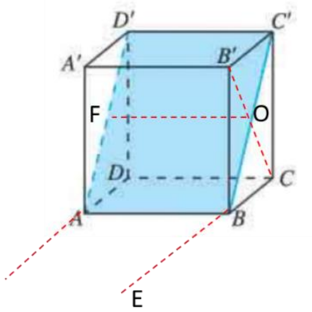


【解析】注意：两个平面所成的二面角有四个（类比于两条直线相交的情况），但从大小来看有两个，它们是互补的关系。

$ABC'D'$与正方体左右两个平面都垂直，因此它与左右两个面所在平面所成的二面角为90°。

$ABC'D'$与正方体的下底面**所在的平面**所成的二面角有四个，但从大小来看有两个，一个45°，另一个135°，如图所示。

同理，$ABC'D'$与正方体的上底面、前后面所在平面所成的二面角的大小，一个45°，一个135°。



例 3.下列命题中错误的是(　　)

A.如果平面$\alpha\perp$平面β，那么平面α内一定存在直线平行于平面β

B.如果平面α不垂直于平面β，那么平面α内一定不存在直线垂直于平面β

C.如果平面$\alpha\perp$平面γ，平面$\beta\perp$平面γ，$\alpha\cap\beta=l$，那么$l\perp$平面γ

D.如果平面$\alpha\perp$平面β，那么平面α内所有直线都垂直于平面β

【解析】参考墙角模型，易知 A 对;

对于 B，如这样的直线存在，则$\alpha\perp\beta$，此与α,β不互相垂直矛盾，因此这样的直线不存在，B 正确。

对于 C，两个平面同时与第三个平面垂直，则这两个平面的交线垂直于第三个平面，正确。

至于 D，参考墙角模型，显然错误。

综上，选 D。

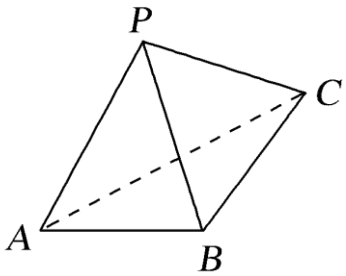
例 4.已知P为$\triangle ABC$所在平面外一点，且PA,PB,PC两两垂直，有下列结论：①$PA\perp BC$；②$PB\perp AC$；③$PC\perp AB$；④$AB\perp BC$。其中正确的是(　　)

A.①②③　　　　B.①②④　　　　C.②③④　　　　D.①②③④

【解析】如图，因为$PA\perp PB,PA\perp PC,PB\cap PC=P$，且$PB\subset$平面$PBC$，$PC\subset$平面$PBC$，所以$PA\perp$平面$PBC$。又$BC\subset$平面$PBC$，所以$PA\perp BC$。

同理可得$PB\perp AC,PC\perp AB$，故① ② ③正确。

从题目所给条件不可能得出结论④，因此选 A



例 5.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CD的中点，则(　　)

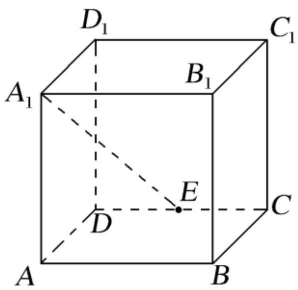
A. $A_1E\perp DC_1$　　B. $A_1E\perp BD$　　C. $A_1E\perp BC_1$　　D. $A_1E\perp AC$

【解析】如图，由题设知，$A_1B_1\perp$平面BCC_1B_1且$BC_1\subset$平面BCC_1B_1，从而$A_1B_1\perp BC_1$，

又$B_1C\perp BC_1$，且$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，所以$BC_1\perp$平面A_1B_1CD，

又$A_1E\subset$平面A_1B_1CD，所以$A_1E\perp BC_1$。

选 C



三垂线定理（解答题不能用）：平面内的一条直线如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它就和这条斜线垂直，反之亦然。

例 6（全国 II）α,β是两个平面，m,n是两条直线，有下列四个命题：

（1）如果$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，那么$\alpha\perp\beta$

（2）如果$m\perp\alpha$，$n//\alpha$，那么$m\perp n$.

（3）如果$\alpha // \beta$，$m \subset \alpha$，那么$m // \beta$

（4）如果$m // n$，$\alpha // \beta$，那么m与α所成的角和n与β所成的角相等.

其中正确的命题有________.(填写所有正确命题的编号）

【解析】②③④

【提醒】头脑里面随时都要装一个长方体

例 7.设m,n是两条不同的直线，α,β,γ是三个不同的平面，给出下列四个命题:

①若$m \subset \alpha, n // \alpha$，则$m // n$；

②若$\alpha // \beta$，$\beta // \gamma$，$m \perp \alpha$，则$m \perp \gamma$；

③若$\alpha \cap \beta = n$，$m // n$，$m // \alpha$，则$m // \beta$；

④若$m // \alpha$，$n // \beta$，$m // n$，则$\alpha // \beta$.

其中是真命题的是___(填上正确命题的序号).

【解析】 ①$m // n$或m,n异面，故①错误;

易知②正确;

③$m // \beta$或$m \subset \beta$，故③错误;

④$\alpha // \beta$或α与β相交，故④错误.

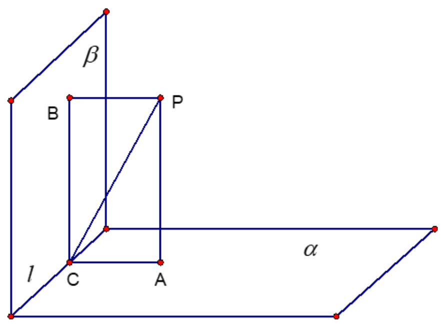
例 8．在空间中，过点A作平面π的垂线，垂足为B，记$B = f_{\pi}(A)$。设α,β是两个不同的平面，对空间任意一点P，$Q_1 = f_{\beta}[f_{\alpha}(P)], Q_2 = f_{\alpha}[f_{\beta}(P)]$,恒有$PQ_1 = PQ_2$，则

A．平面α与平面β垂直　　　　B. 平面α与平面β所成的（锐）二面角为45^0

C. 平面α与平面β平行　　　　D.平面α与平面β所成的（锐）二面角为60^0

【解析】本题跟垂直有关，可重点考察选项 A，

如图，假设$\alpha \perp \beta$，它们的交线为l，P在α上的投影为A，在β上的投影为B，设平面PAB与l交于点C，易知$Q_1 = f_{\beta}[f_{\alpha}(P)] = f_{\beta}(A) = C$，$Q_2 = f_{\alpha}[f_{\beta}(P)] = f_{\alpha}(B) = C$，恒有$PQ_1 = PQ_2 = PC$，满足要求，选 A。



例 9（全国 I）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E,F 分别是 PA,AB 的中点，$\angle CEF=90^{\circ}$，则球 O 的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$

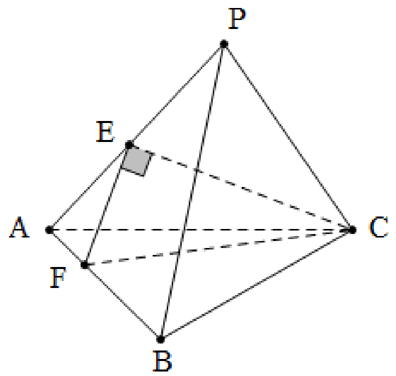
【解析】易知 $EF//PB$，而 $EF\perp CE$，故 $CE\perp PB$；由题意知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，故 $PB\perp AC$，故 $PB\perp$ 平面 PAC，进而 $PB\perp PA,PB\perp PC$，

由对等性知：PA,PB,PC 互相垂直。

又，$PA=PB=PC=\sqrt{2}$，

设球 O 的半径为 R，则 $3\times(\sqrt{2})^2=(2R)^2$，故 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

故，球 O 的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\sqrt{6}\pi$，选 D。



例 10.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp AB,PA=4,AB=3$，二面角 $P-AB-C$ 的大小为 30°，在侧面 $\triangle PAB$ 内（含边界）有一动点 M，满足 M 到 PA 的距离与 M 到平面 ABC 的距离相等，则 M 的轨迹的长度为______。

【解析】如图，过 M 作 $MN\perp PA$ 于 N，$MO\perp$ 平面 ABC 于 O，

过 O 作 $OQ\perp AB$ 于 Q，连接 MQ，则 $\angle MQO$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，

由 $\angle MQO=30^{\circ}$ 得 $MQ=2MO$，又 $MO=MN$，所以 $MO=2MN$，

在$\triangle PAB$中，以AB所在直线为x轴，AP所在直线为y轴建立平面直角坐标系，则直线AM的方程为$y=2x$，直线PB的方程为$4x+3y-12=0$，

所以直线AM与PB的交点坐标为$R\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$，

所以M的轨迹为线段AR，长度为$\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$。

例 11. 已知矩形$ABCD, AB=1, BC=\sqrt{2}$。将$\triangle ABD$沿矩形的对角线BD所在的直线进行翻折，在翻折过程中，(　　)

A.存在某个位置，使得直线AC与直线BD垂直

B.存在某个位置，使得直线AB与直线CD垂直

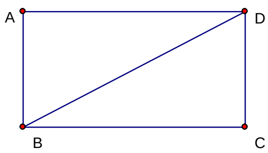
C.存在某个位置，使得直线AD与直线BC垂直

D.对任意位置，三对直线“AC与BD”，“AB与CD”，“AD与BC”均不垂直

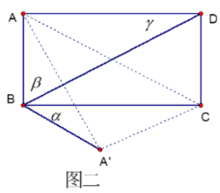
【解析】由于本题在翻折过程中，一般会得到一个如图三所示的四面体 ，而该四面体的六条棱中，有 5 条棱的长度已知，故易想到利用斯坦纳定理来帮忙。

我们先看两个极限情况：未翻折时，$AC=\sqrt{3}$；按题中要求翻折180°，参考图二，易算得此时$AC=A'C=\frac{\sqrt{3}}{3}$

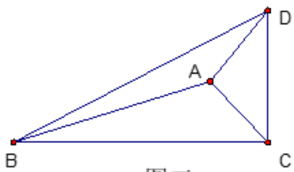
针对本题，翻折过程中，AC的取值范围为$[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$



图一



图二



图三

下面我们利用斯坦纳定理判断相关角的大致范围。参看图三

$$\cos(AC,BD)=\frac{|(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)|}{2AC\times BD}=\frac{|2-4|}{2AC\times BD}=\frac{2}{2AC\times BD}\neq 0,$$

故，翻折过程中，AC,BD不可能垂直，A 错。

同理，$\cos(AB,CD)=\frac{|(AC^2+BD^2)-(AD^2+BC^2)|}{2AB\times CD}=\frac{|AC^2+3-4|}{2AC\times BD}=\frac{|AC^2-1|}{2AC\times BD}$，

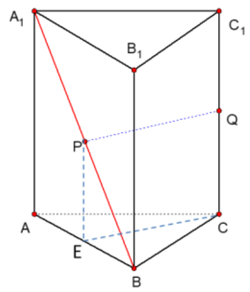
由于$AC\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$，存在$AC=1$的位置，此时$AB\perp CD$，B 对 D 错。

$$\cos(AD,BC)=\frac{|(AC^2+BD^2)-(AB^2+CD^2)|}{2AD\times BC}=\frac{|AC^2+3-2|}{2AD\times BC}=\frac{|AC^2+1|}{2AC\times BD}\neq 0,$$

故，翻折过程中，AD,BC不可能垂直，C 错。

例 12.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CA=CB,P$为A_1B的中点，Q为棱C_1C的中点，求证：

（1）$PQ\perp AB$；（2）$PQ\perp C_1C$；（3）$PQ\perp A_1B$



【证明】(1) 令E为AB的中点，连接CE,PE。

因$CA=CB$，故$CE\perp AB$；

又，$PE\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}A_1A,A_1A\underline{\underline{//}}C_1C$，$QC=\frac{1}{2}C_1C$，

故$PE\underline{\underline{//}}QC$，故$CEPQ$为平行四边形，故$PQ//CE$，

因$CE\perp AB$，故$PQ\perp AB$，证毕。

(2)因$AA_1\perp$平面ABC，而$CE\subset$平面ABC，故$AA_1\perp CE$，因$AA_1//CC_1$，故$CE\perp CC_1$；

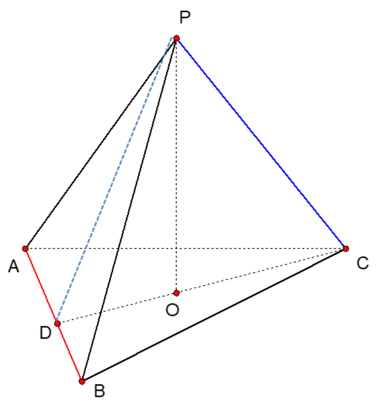
由（1）知$PQ//CE$，故$PQ\perp CC_1$，证毕。

(3)：由（2）知$PQ\perp CC_1$，而$CC_1//AA_1$，故，$PQ\perp AA_1$，

由（1）知$PQ\perp AB$，而$AB\cap AA_1=A$，

故$PQ\perp$平面AA_1B，又$A_1B\subset$平面AA_1B，故$PQ\perp A_1B$，证毕。

例 13.如图，在三棱锥$P-ABC$中，$CD\perp AB$，垂足为D，$PO\perp$底面ABC，垂足为O，且O在CD上，求证：$AB\perp PC$。

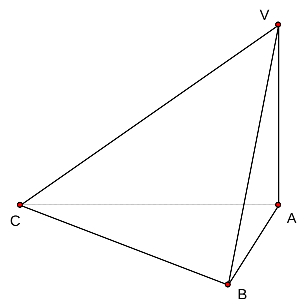


【证明】连接PD，因$PO\perp$底面ABC，$AB\subset$底面ABC，故$PO\perp AB$

又，$CD\perp AB$，$CD\cap PO=O$，CD、$PO\subset$平面PDC

故$AB\perp$平面PDC，又$PC\subset$平面PDC，故$AB\perp PC$。

例 14.如图，在直三棱锥$V-ABC$中，已知$\angle VAB=\angle VAC=\angle ABC=90^{\circ}$，判断平面$VAB$与平面$VBC$的位置关系，并说明理由。



【证明】由题意知：$VA\perp$平面ABC

又$BC\subset$平面ABC，故$VA\perp BC$

又$BC\perp AB$，而AB、$VA\subset$平面VAB,$VA\cap AB=A$

故，$BC\perp$平面VAB。

又，$BC\subset$平面VBC，故平面$VBC\perp$平面VAB。

例 15.已知平面α,β,γ，且$\alpha\perp\gamma,\beta//\alpha$，求证：$\beta\perp\gamma$

【证明】设$\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b$，在$b$上任取一点$P$，过$P$作$PA\perp a$，垂足为$A$。在$\alpha$内过$A$任作一条异于$a$的直线$c$，设$PA$与$c$确定的平面与$\beta$的交线为$c'$。

因$\alpha//\beta$，故由上面的作法知：$a//b,c//c'$

又：$\gamma\perp\alpha$，$PA\subset\gamma$，$\alpha\cap\gamma=a$，所以，$PA\perp\alpha$

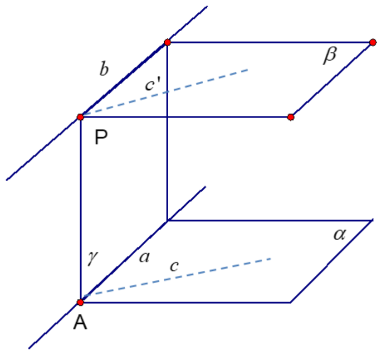
因$c\subset\alpha$，故$PA\perp c$，

又因$c//c'$，故$PA\perp c'$

由于$PA\perp a$，$a//b$，故$PA\perp b$，

由于b、$c'\subset\beta$，$b\cap c'=P$相交，故$PA\perp\beta$，

由于$PA\subset\gamma$，所以$\gamma\perp\beta$。



例 16.已知平面α,β,γ，且$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=l$，求证：$l\perp\gamma$

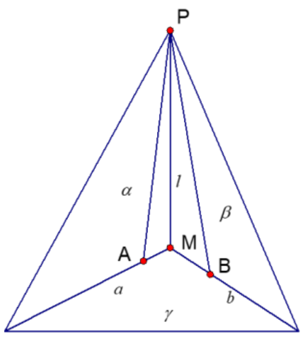
【证明】不妨设设$\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b$，在$l$上任取一点$P$（$P\notin\gamma$），过$P$作$PA\perp a,PB\perp b$，垂足分别为$A,B$。

因$\alpha\perp\gamma$，$PA\subset\alpha$，$\alpha\cap\gamma=a$，$PA\perp a$，所以，$PA\perp\gamma$

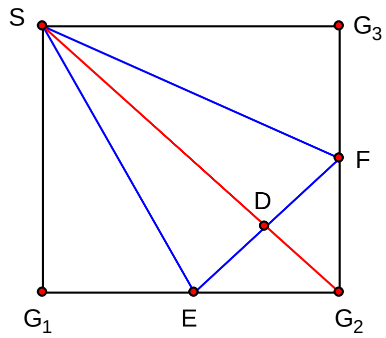
同理，$PB\perp\gamma$

由于过平面外一点，有且只有一条直线与γ垂直，因此A,B重合，不妨设其为M，显然$M\in\alpha\cap\beta$，从而$M\in l$，

由$PM\perp\gamma$知，$l\perp\gamma$，证毕。



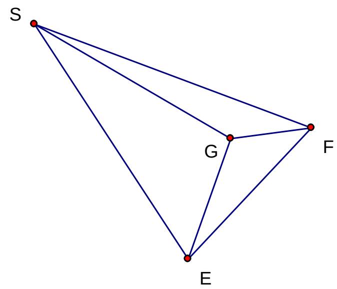
例 17.如图，在正方形$SG_1G_2G_3$中，E,F分别是G_1G_2,G_2G_3的中点，D是EF的中点，若沿SE,SF及EF把正方形折成一个四面体，使G_1,G_2,G_3三点重合，重合后的点记为G，则在四面体$S-EFG$中，哪些棱与面互相垂直?



【解析】所得四面体如图所示，不妨设原正方形的边长为 2，易得 $GS=2, GE=GF=1, EF=\sqrt{2}, SE=SF=\sqrt{5}$ ，

由勾股定理知：GS, GE, GF 互相垂直，从而有：

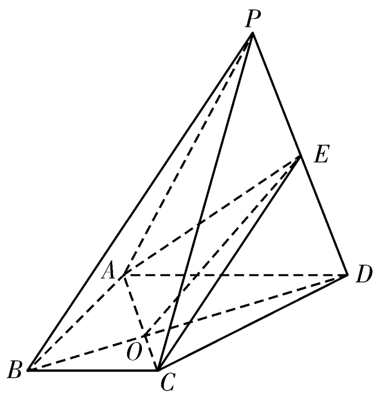
$GS\perp$面GEF，$GE\perp$面GSF，$GF\perp$面GSE，以及面GEF，面GSF，面GSE互相垂直。



例 18.如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AB=AD=2BC=2, BC//AD, AB\perp AD$，$\triangle PBD$为正三角形．且$PA=2\sqrt{3}$．

(1)证明：平面$PAB\perp$平面PBC；

(2)若点P到底面$ABCD$的距离为 2，E是线段PD上一点，且$PB//$平面ACE，求四面体$A-CDE$的体积．



(1)证明：$\because AB\perp AD, AB=AD=2$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$，

又$\triangle PBD$为正三角形，所以$PB = PD = BD = 2\sqrt{2}$

又$\because AB = 2, PA = 2\sqrt{3}$，所以$AB \perp PB$，

又$\because AB \perp AD$，$BC // AD$，$\therefore AB \perp BC$，而$PB \cap BC = B$，

所以$AB \perp$平面PBC，又因为$AB \subset$平面PAB，

所以平面$PAB \perp$平面PBC.

⑵【解析】如图，连接AC交BD于点O，因为$BC // AD$，且$AD = 2BC$，所以$OD = 2OB$，连接OE，

因为$PB //$平面ACE，所以$PB // OE$，则$DE = 2PE$，

因点P到平面$ABCD$的距离为2，

所以点E到平面$ABCD$的距离为$h = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$，

所以$V_{A-CDE} = V_{E-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

即四面体$A - CDE$的体积为$\frac{8}{9}$.

例 19.如图，在三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中，每个侧面均为正方形，D为底边AB的中点，E为侧棱CC_1的中点。

（1）求证：$CD //$平面A_1EB；

（2）求证：$AB_1 \perp$平面A_1EB；

（3）求直线B_1E与平面AA_1C_1C所成角的正弦值。

【证明】:（1）设AB_1和A_1B的交点为O，连接EO，OD，

因为O为AB_1的中点，D为底边AB的中点，所以$OD // BB_1$且$OD = \frac{1}{2} BB_1$，

又E为CC_1的中点，所以$EC // BB_1$且$EC = \frac{1}{2} BB_1$，所以$EC // OD$且$EC = OD$

所以，四边形$ECOD$为平行四边形。所以$EO // CD$。

又$CD \not\subset$平面A_1BE，$EO \subset$平面A_1BE，所以$CD //$平面A_1BE

⑵因为三棱柱各侧面都是正方形，所以$BB_1 \perp AB, BB_1 \perp BC$，所以$BB_1 \perp$平面$ABC$。

因为$CD \subset$平面ABC，所以$BB_1 \perp CD$。

由已知得$AB = BC = AC$，所以$CD \perp AB$，

所以$CD \perp AB$平面A_1ABB_1。

由（1）可知$EO//CD$，所以$EO \perp$平面A_1ABB_1。

所以$EO \perp AB_1$。

因为侧面是正方形，所以$AB_1 \perp A_1B$

又$EO \cap A_1B = O$，$EO \subset$平面A_1EB，$A_1B \subset$平面A_1EB，所以$AB_1 \perp$平面A_1BE。

(3)解：取A_1C_1中点F，连接B_1F, EF。在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为$BB_1 \perp$平面ABC，故，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，

所以侧面$ACC_1A_1 \perp$底面$A_1B_1C_1$。

因为底面$A_1B_1C_1$是正三角形，且F是A_1C_1的中点，

所以$B_1F \perp A_1C_1$，所以$B_1F \perp$侧面ACC_1A_1。

所以EF是B_1E在平面ACC_1A_1上的射影。

所以$\angle FEB_1$即为B_1E与平面AA_1C_1C所成角，

易得，$\sin \angle FEB_1 = \dfrac{B_1F}{B_1E} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$。