第 8 章 直线与圆的方程

§ 8.1 直线方程

8.1.1 相关概念

学习提纲

1、了解直线倾斜角和斜率等概念

2、了解直线方程的五种表示形式

3、了解两点间的距离公式以及点到直线的距离公式

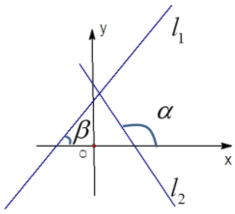
4、了解并会判断两条直线之间的位置关系

1．直线的倾斜角和斜率

定义：直线l与x轴正向(x轴为始边，反时针方向旋转)的夹角称为直线l的倾斜角，当直线l与x轴平行或重合时，规定它的倾斜角为0°，因此，倾斜角的取值范围：$[0,\pi)$

2．直线的斜率

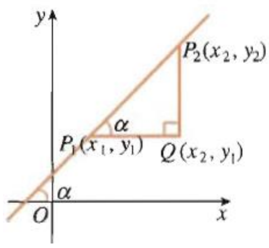
为了更好刻画直线的倾斜程度，我们把直线倾斜角$\alpha\neq 90^\circ$时的正切值叫做这条直线的斜率，斜率通常用小写字母k表示，即$k=\tan\alpha$；倾斜角为90°的直线，其斜率不存在.



3、经过两点的直线的斜率：

由斜率的定义知，经过两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$的直线的斜率为：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



4．直线的方程

如果知道直线l的斜率为k，以及l上一点$P_0(x_0,y_0)$，则直线上任意一点$P(x,y)$，它的纵、

横坐标 y 和 x 之间会有什么关系呢？根据直线斜率的定义，我们有 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ ，即

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

我们把此方程称为直线 l 的点斜率式方程。

顾名思义，点斜式，就是用直线 l 的一个已知点的坐标和斜率来表示的直线方程式。

5．直线的斜截式方程

如果直线 l 与 x 轴和 y 轴分别相交与 $A(a,0),B(0,b)$ 两点，则称 a,b 分别为直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距**（注意：截距可以为 0，也可以是负数）。**

如果知道直线 l 在 y 轴上的截距 b ，以及直线 l 的斜率 k ，则直线 l 的方程可以写成

$y-b=k(x-0)$ ，整理即得 $y=kx+b$

我们把此方程称为直线 l 的斜截式方程。

顾名思义，斜截式，就是用直线 l 的斜率和 l 在 y 轴上的截距来表示的直线方程式。

如果知道直线 l 上的两个点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ ，利用斜率的定义，则直线 l 的方程可如下表示

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

此方程称为直线 l 的两点式方程。

（1）若 $x_1=x_2$ ，此时直线垂直于 x 轴，方程为 $x=x_1$ 。

（2）若 $x_1\neq x_2$ ，且 $y_1=y_2$ 时，此时直线垂直于 y 轴，方程简化为 $y=y_1$ 。

如果知道直线 l 上的两个特殊点 $A(a,0),B(0,b)(ab\neq 0)$ ，由两点式，可得直线 l 的方程为 $\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}$ ，整理即得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

这就是直线 l 的截距式方程。

直线的标准方程：

前面，我们得到了直线 l 的四种方程，很明显，它们都可以统一成如下的方程

$$Ax+By+C=0$$

我们把这个方程称为直线 l 的标准方程或直线的一般方程。

6、 直线的方向向量

如直线方程为： $Ax+By+C=0$ ，则向量 $(-B,A)$ 称为直线的方向向量。

求直线的方向向量很简单，在直线上任取两个不同的点 P_1,P_2，则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 就是直线的方向向量。

7、 过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系

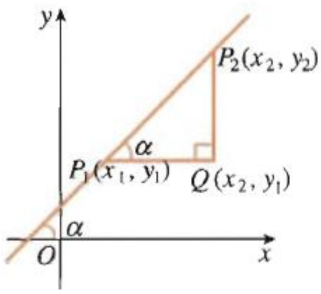
过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程: $y-y_0=k(x-x_0)$ (除直线 $x=x_0$),其中 k 是待定的系数；或 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$,其中 A,B 是待定的系数。

8、 两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，如图，则 $Q(x_2,y_1)$，因此

$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|P_2Q|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，即 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

这个公式称为两点间的距离公式。



9、 点到直线的距离

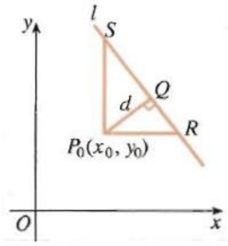
设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0(A\neq0,B\neq0)$， $P_0(x_0,y_0)$， P_0 到直线 l 的距离为 d；易知直线 l 与 x 轴和 y 轴都相交；过 $P_0(x_0,y_0)$ 分别作 x 轴和 y 轴的平行线，交直线 l 于 R 和 S，则直线 P_0R 的方程为 $y=y_0$，直线 P_0S 的方程为 $x=x_0$；

易求得 $R(-\dfrac{By_0+C}{A},y_0)$， $S(x_0,-\dfrac{Ax_0+C}{B})$，故 $|P_0R|=|-\dfrac{By_0+C}{A}-x_0|=|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A}|$，

$|P_0S|=|-\dfrac{Ax_0+C}{B}-y_0|=|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{B}|$

从而，$|RS|=\sqrt{|P_0R|^2+|P_0S|^2}=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{|A||B|}|Ax_0+By_0+C|$

由三角形面积公式得：$d\cdot|RS|=|P_0R|\cdot|P_0S|$，从而得：$d=\dfrac{|P_0R|\cdot|P_0S|}{|RS|}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$



由此，我们得到了点$P_0(x_0,y_0)$到直线l： $Ax+By+C=0(A\neq 0,B\neq 0)$的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

容易验证：$A=0$或$B=0$时，上面的公式也成立。

10、两条直线平行与垂直的判定

(1)两条直线平行

对于两条不重合的直线l_1,l_2，其斜率分别为k_1,k_2，则$l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$，特别地，当直线$l_1,l_2$的斜率都不存在时，$l_1$与$l_2$的关系为平行.

(2)两条直线垂直

①如果两条直线l_1,l_2的斜率存在，设为k_1,k_2，则$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$。

②如果l_1,l_2中有一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为0时，l_1与l_2的关系为垂直.

11、两直线相交（斜率不存在的情况特殊处理）

直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$与直线$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$

$A_1B_2-A_2B_1\neq 0\Leftrightarrow l_1$与$l_2$相交

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow l_1$与$l_2$平行

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow l_1$与$l_2$重合。

针对上面三种情况，方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$

分别有唯一一组解（交点的坐标）、无解、无穷多组解。

12、直线$l_1:y=k_1x+b_1$与$l_2:y=k_2x+b_2$ $(k_1k_2\neq -1)$的夹角α满足：$\tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$

13、两类常用的直线系方程

(1)过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程:$y-y_0=k(x-x_0)$(除直线$x=x_0$),其中k是待定的系数；或$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$,其中A,B是待定的系数。

(2)过两直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$交点的直线系方程:

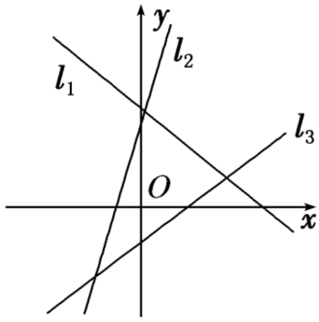
$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(除$l_2$外)，其中$\lambda$是待定系数。

8.1.2 典型例题

例 1.如图，直线l_1,l_2,l_3的斜率分别为k_1,k_2,k_3，则k_1,k_2,k_3的大小关系为________.

【解析】: 设l_1,l_2,l_3的倾斜角分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，由题图易知$0^\circ<\alpha_3<\alpha_2<90^\circ<\alpha_1<180^\circ$，

$\therefore \tan\alpha_2>\tan\alpha_3>0>\tan\alpha_1$，即$k_2>k_3>k_1$。



例 2. 直线$x\sin\theta+\sqrt{3}y+2=0$的倾斜角的取值范围是（　　）

A．$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$　　B．$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　　C．$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$　　D．$[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi)$

【解析】: 设直线的倾斜角为α，由题意知：$\tan\alpha=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$

由于$-1\le\sin\theta\le1$，故$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan\alpha<0$，解得$\alpha\in[\frac{5\pi}{6},\pi)$

由$0\le\tan\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得$\alpha\in[0,\frac{\pi}{6}]$

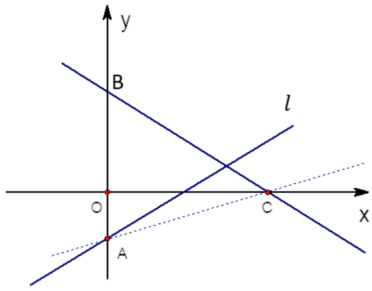
综上，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$，选 C。

例 3.若直线$l: y=kx-\sqrt{3}$与直线$2x+3y-6=0$的交点位于第一象限，则直线l的倾斜角的取值范围是(　　).

A. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$　　B. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　C. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　　D. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

【解析】　如图，易知直线l过定点$A(0,-\sqrt{3})$，直线$2x+3y-6=0$与x的交点$C(3,0)$

易知 AC 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，故 l 倾斜角的取值范围为 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$



例 4. 已知线段 PQ 两端点的坐标分别为 $P(-1,1)$ 和 $Q(2,2)$，若直线 $l: x+my+m=0$ 与线段 PQ 有交点，则

（1）实数 m 的取值范围是________.

（2）直线 l 的斜率的取值范围为______

【解析】 如图所示，直线 $l: x+my+m=0$ 过定点 $A(0,-1)$，

当 $m\neq 0$ 时，$k_{QA}=\frac{3}{2}, k_{PA}=-2, k_l=-\frac{1}{m}$，

l 与线段 PQ 有交点，需 $-\frac{1}{m}\leq -2$ 或 $-\frac{1}{m}\geq \frac{3}{2}$，

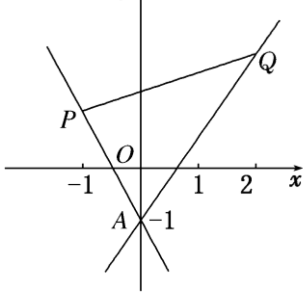
解得 $0<m\leq \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}\leq m<0$；

当 $m=0$ 时，直线 l 为 y 轴，它显然与线段 PQ 有交点.

综上，实数 m 的取值范围为 $[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}]$。

（2）如果 $m\neq 0$，则 l 得斜率为 $-\frac{1}{m}$，因此，由（1）知：l 的斜率的取值范围为

$(-\infty,-2]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$



例 5．直线 l： $y=(3k-1)x+6k+3$ 恒过定点 P，则 P 的坐标为（　　）

【解析】：显然，$x=-2$时，$y=-2(3k-1)+6k+3=5$，故P点的坐标为$(-2,5)$

【法二】：将直线方程$y=(3k-1)x+6k+3$重新整理得$(3x+6)k-x-y+3=0$，

由题意，上面的方程对任意$k\in R$都成立，因此，必有

$\begin{cases}3x+6=0\\-x-y+3=0\end{cases}$，解得$x=-2, y=5$，即直线过定点$(-2,5)$

【法三】：由题意知，不管k取何值，直线$y=(3k-1)x+6k+3$均过定点，那分别取$k=0$和$k=\dfrac{1}{3}$，得直线$y=-x+3$和$y=5$

求得二直线的交点为$(-2,5)$，此即为要求得定点$P(-2,5)$

例 6（1）.求经过点$P(3,2)$，且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程。

（2）直线l经过点$A(1,2)$，在x轴上的截距的取值范围是$(-3,3)$，则其斜率的取值范围是（　　）.

A．$-1<k<\dfrac{1}{5}$　　B．$k>1$或$k<\dfrac{1}{2}$　　C．$k>\dfrac{1}{5}$或$k<1$　　D．$k>\dfrac{1}{2}$或$k<-1$

【解析】（1）设直线l在x,y轴上的截距均为a，

若$a=0$，设l的方程为$y=kx$，由题意知：$2=3k$，故$k=\dfrac{2}{3}$，故l的方程为$2x-3y=0$

若$a\neq 0$，设l的方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，由题意知：$\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a}=1$，$a=5$，故$l$的方程为$x+y-5=0$

综上可知，直线l的方程为$2x-3y=0$或$x+y-5=0$。

（2）设直线的斜率为k，则直线方程为$y-2=k(x-1)$，直线在x轴上的截距为$1-\dfrac{2}{k}$，

解$-3<1-\dfrac{2}{k}<3$得$k>\dfrac{1}{2}$或$k<-1$，选 D。

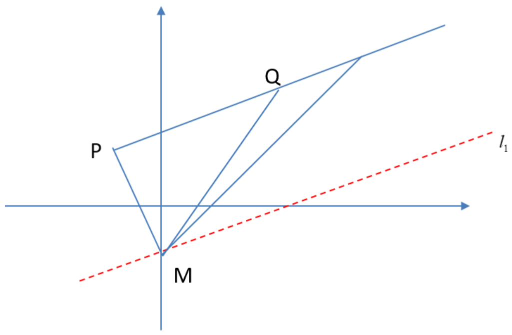
例 7. 已知有向线段PQ的起点P和终点Q的坐标分别为$(-1,1)$和$(2,2)$，若直线$l:x+my+m=0$与PQ的延长线相交，则m的取值范围为（　　　　）

【解析】：易知$k_{PQ}=\dfrac{2-1}{2-(-1)}=\dfrac{1}{3}$，且直线$l$过定点$M(0,-1)$，

过M作直线$l_1//PQ$，则$k_{l_1}=k_{PQ}=\dfrac{1}{3}$

又因$k_{MQ}=\dfrac{2-(-1)}{2-0}=\dfrac{3}{2}$，$PQ$的延长线要与$l$相交，$l$必须夹在$l_1$与$MQ$之间，

即 $\frac{1}{3}<-\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$，解得 $-3<m<-\frac{2}{3}$



例 8. 若点 $A(4,3),B(5,a),C(6,5)$ 三点共线，则 a 的值为_______，该直线的方向向量为（　　）（写出一个即可）

【解析】 因 $k_{AC}=\frac{5-3}{6-4}=1,k_{AB}=\frac{a-3}{5-4}=a-3$ 且 A,B,C 三点共线，

所以 $k_{AC}=k_{AB}$，即 $a-3=1$，故 $a=4$.

该直线的一个方向向量为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2,2)$

【注】 如直线方程为 $y=kx+b$，则 $(1,k)$ 即为该直线的一个方向向量，本题中，$k_{AC}=1$，故 $(1,1)$ 也是该直线的一个方向向量。

例 9（1）原点到直线 $x+2y-5=0$ 的距离为（　　）；

（2）直线 $x+2y-5=0$ 关于 x 轴的对称直线之方程为（　　　　　　　）；

（3）直线 $x+2y-5=0$ 关于直线 $y=x$ 的对称直线之方程为（　　）

【解析】（1）原点 $O(0,0)$，所以 $d=\frac{|1\times0+2\times0-5|}{\sqrt{1+2^2}}\frac{|-5|}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{5}$

（2）直线 $x+2y-5=0$ 关于 x 轴的对称直线为：$x-2y-5=0$

（3）直线 $x+2y-5=0$ 关于 $y=x$ 轴的对称直线为：$y+2x-5=0$，即 $2x+y-5=0$

例 10． 点 (a,b) 关于直线 $x+y+1=0$ 的对称点是（　　）.

A．$(-a-1,-b-1)$　　B．$(-b-1,-a-1)$　　C．$(-a,-b)$　　D．$(-b,-a)$

【解析】 设 $A(a,b)$，它关于题中直线的对称点为 $B(x',y')$，则 AB 的中点 $M(\frac{a+x'}{2},\frac{b+y'}{2})$ 在题中直线上，故 $\begin{cases}\frac{y'-b}{x'-a}\times(-1)=-1\\ \frac{x'+a}{2}+\frac{y'+b}{2}+1=0\end{cases}$，解得：$x'=-b-1,y'=-a-1$。选 B。

【巧解】 取 $(a,b)=(0,0)$，它关于题中直线的对称点显然不可能还在原点，故排除 C、D；

再取$(a,b)=(-1,0)$，它在题中直线上，因此对称点应该不变，故只能选 B。

例 11(1)已知两条直线$y=ax-2$和$y=(a+2)x+1$互相垂直，则实数$a=$________.

(2)"$ab=4$"是直线$2x+ay-1=0$与直线$bx+2y-2=0$平行的(　　).

A．充分必要条件　　　　　　　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

【解析】(1)由题意知$(a+2)a=-1$，所以$a^2+2a+1=0$，则$a=-1$.

(2)直线$2x+ay-1=0$与直线$bx+2y-2=0$平行的充要条件是$\frac{2}{b}=\frac{a}{2}\neq\frac{-1}{-2}$，即$ab=4$且$a\neq1$，

故，"$ab=4$"是"直线$2x+ay-1=0$与直线$bx+2y-2=0$平行"的必要而不充分条件.

例 12.已知直线$l_1:x+my+6=0$，$l_2:(m-2)x+3y+2m=0$，求m的值，使得:

(1) l_1与l_2相交；　(2) $l_1\perp l_2$；　(3) $l_1//l_2$；　(4) l_1,l_2重合.

【解析】易知l_1,l_2的方向向量分别为$\vec{a}=(-m,1),\vec{b}=(-3,m-2)$

(1) l_1,l_2相交，等价于$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，即$-m(m-2)\neq-1\times3$，解得$m\neq-1$且$m\neq3$.

(2)问题等价于$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$-m\cdot(-3)+1\cdot(m-2)=0$，解得$m=\frac{1}{2}$

(3): $m=0$时，l_1,l_2显然不平行，因此，问题等价于$\frac{m-2}{1}=\frac{3}{m}\neq\frac{2m}{6}$，解得$m=-1$

(4):结合（3），需$\frac{m-2}{1}=\frac{3}{m}=\frac{2m}{6}$，解得$m=3$

【注意】在利用斜率时，要先讨论斜率是否存在，本题在相关的地方用方向向量，避免了这种讨论

例 13.已知直线$l_1:ax+by+c=0,l_2:ax+by+c'=0$和$l:Ax+By+C=0$。设$l$被$l_1,l_2$截得的线段长为$d$，求$d$

【解析】易求得l与l_1的交点$P(\frac{Bc-bC}{Ab-Ba},\frac{Ca-cA}{Ab-Ba})$；

l与l_2的交点坐标为$Q(\frac{Bc'-bC}{Ab-Ba},\frac{Ca-c'A}{Ab-Ba})$

故，$d^2=|PQ|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\frac{B^2(c-c')^2}{(Ab-Ba)^2}+\frac{A^2(c-c')^2}{(Ab-Ba)^2}=\frac{(A^2+B^2)(c-c')^2}{(Ab-Ba)^2}$

从而，$d=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}\,|c-c'|}{|Ab-Ba|}$

例 14. 已知直线 $y=mx+b$ 和 $3x-2y+5=0$ 的交角为 30°，则 $m=$（　　）

【解析】 设直线 $y=mx+b$ 和直线 $3x-2y+5=0$ 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1=m,k_2=\dfrac{3}{2}$，

由 $\tan 30^\circ=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_2k_1}\right|\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\left|\dfrac{\frac{3}{2}-m}{1+\frac{3}{2}m}\right|$，即 $\dfrac{2m-3}{3m+2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

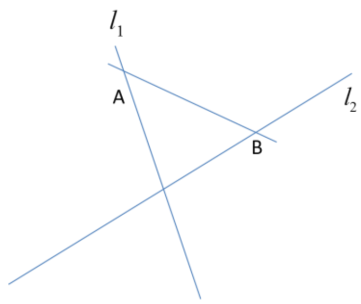
解得 $m=\dfrac{24+13\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=\dfrac{24-13\sqrt{3}}{3}$

例 15. 直线 l 被两条直线 $l_1:4x+y+3=0$ 和 $l_2:3x-5y-5=0$ 截得的线段的中点为 $P(-1,2)$，求直线 l 的方程.

【解析】 设直线 l 与 l_1 的交点为 $A(x_0,y_0)$，则直线 l 与 l_2 的交点为 $B(-2-x_0,4-y_0)$

并且满足 $\begin{cases}4x_0+y_0+3=0\\3(-2-x_0)-5(4-y_0)-5=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=-2\\y_0=5\end{cases}$

因此直线 l 的方程为 $\dfrac{y-2}{5-2}=\dfrac{x-(-1)}{-2-(-1)}$，即 $3x+y+1=0$

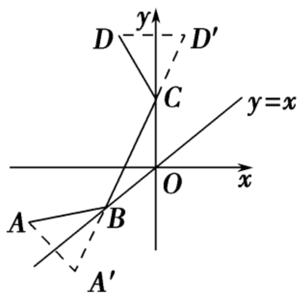


例 16. 光线从 $A(-4,-2)$)点射出，到直线 $y=x$ 上的 B 点后被直线 $y=x$ 反射到 y 轴上 C 点，又被 y 轴反射，这时反射光线恰好过点 $D(-1,6)$，求 BC 所在的直线方程.

【解析】 作出草图，如图所示．设 A 关于直线 $y=x$ 的对称点为 A'，D 关于 y 轴的对称点为 D'，易得 $A'(-2,-4),D'(1,6)$．

由入射角等于反射角可得 $A'D'$ 所在直线经过点 B 与 C。故 BC 所在的直线方程为

$\dfrac{y-6}{6+4}=\dfrac{x-1}{1+2}$，即 $10x-3y+8=0$。



例 17.已知直线$l: x-y-1=0, l_1: 2x-y-2=0$，若直线$l_2$与$l_1$关于$l$对称，则$l_2$的方程是（　　）.

A．$x-2y+1=0$　　B．$x-2y-1=0$　　C．$x+y-1=0$　　D．$x+2y-1=0$

【解析】由题意知l与l_1的交点$A(1,0)$在l_2上.

又，$P(0,-2)$为l_1上一点，设其关于l的对称点为$Q(x,y)$，则P,Q的中点$M(\frac{x}{2},\frac{y-2}{2})$

在l上，故$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y-2}{2}-1=0\\ \frac{y+2}{x}\times 1=-1\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

即$(1,0),(-1,-1)$为l_2上两点，可得l_2方程为$x-2y-1=0$