习题课

1. (1)为了得到函数 $y=\lg\frac{x+3}{10}$ 的图像，只需把函数 $\lg x$ 的图像上的所有点（　　）

A． 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度;

B. 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度;

C. 向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度;

D. 向右平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度.

(2).函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}+e^{x-2}-e^{4-x}+2$ 在 $[-2,8]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 N，则 $M+N=$______

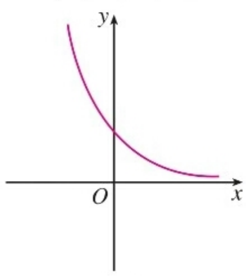
【解】（1）因 $\lg\frac{x+3}{10}=\lg(x+3)-\lg 10=\lg(x+3)-1$，因此，为得到 $y=\lg\frac{x+3}{10}$ 的图像，只需将 $y=\lg x$ 的图像向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度；选 C。

（2）$\frac{2x+1}{x-3}$ 的图像关于点 $(3,2)$ 对称，$e^{x-2}-e^{4-x}+2$ 的图像也关于点 $(3,2)$ 对称，故 $f(x)$ 的图像关于点 $(3,2)$ 对称；又，区间 $[-2,8]$ 的中点为 3，故 $M+N=4$

2. （1）已知 $f(x)=2^x+x, g(x)=\log_2 x+x, h(x)=x^3+x$ 的零点分别为 a,b,c，则 a,b,c 的大小顺序为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

（2）指数函数 $y=(\frac{b}{a})^x$ 的图像如图所示，则二次函数 $y=ax^2+bx$ 图像顶点的横坐标的取值范围_____



【解】（1）由 $2^a+a=0$ 知 $a<0$；由 $\log_2 b+b=0$ 知 $0<b<1$；由 $c^3+c=0$ 知 $c=0$；综上，$b>c>a$，选 B。

（2）由图像知：$0<\frac{b}{a}<1$，故，二次函数 $y=ax^2+b$ 图像顶点的横坐标为:

$-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}\times\frac{b}{a}\in(-\frac{1}{2},0)$

3. 若函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(ax^2+2x+8)$ 的值域为 $[-2,+\infty)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为（　　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-2,1]$　　C. $[1,4)$　　D. $(4,+\infty)$

【解】 令 $t=ax^2+2x+8$，因 $\log_{\frac{1}{3}}t$ 递减，由 $f(x)$ 的值域为 $[-2,+\infty)$ 知 $t\le 9$，

即 $ax^2+2x-1\le 0$ 恒成立，且 ax^2+2x-1 能取到 0，

故 $\begin{cases}a<0\\ \Delta=4+4a=0\end{cases}$，解得 $a=-1$，从而 $ax^2+2x+8=-x^2+2x+8$，其对称轴为直线 $x=1$，$f(x)$ 要递增，则 $-x^2+2x+8$ 应递减，故 $x\ge 1$；

考虑到 $-x^2+2x+8>0$，则 $-2<x<4$，综合之，得 $1\le x<4$，选 C。

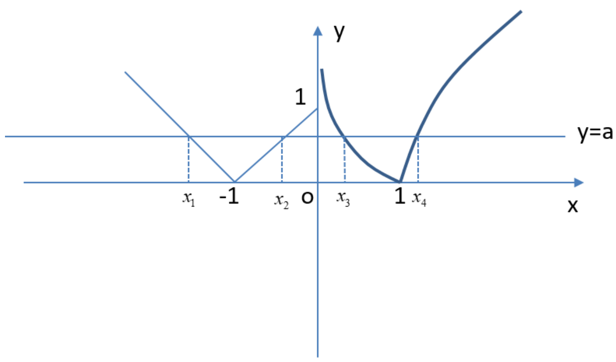
【本题是好题】 很多同学读不懂题。

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & x\le 0\\ |\log_2 x|, & x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1，x_2，x_3，x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_3(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围是（　　）

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-1,1]$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $[-1,1)$

【解】 由题意知，$f(x)=\begin{cases}-x-1, & (x\le -1)\\ x+1, & (-1<x\le 0)\\ -\log_2 x, & (0<x\le 1)\\ \log_2 x, & (x>1)\end{cases}$，

从图像上看，$f(x)=a$ 要有四个不同的根，需有 $a\in(0,1]$，此时，有 $x_1+x_2=-2, -\log_2 x_3=\log_2 x_4=a$，从而 $x_3x_4=1$，且 $x_3=2^{-a}, x_4=2^a$



所以， $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{{x_3}^2x_4}=-2x_3+\dfrac{1}{x_3}=-2\times 2^{-a}+2^a(a\in(0,1])$

令 $g(a)=-2\times 2^{-a}+2^a(a\in(0,1])$，显然 $g(a)$ 为关于 a 的单调递增函数，故其值域为 $(-1,1]$，

即 $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{{x_3}^2x_4}$ 的取值范围为 $(-1,1]$，选 B。

5. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\dfrac{a^x}{a^x-1}\left(a>0且a\neq 1\right)$，若 $f\left(\lg\left(\log_2 3\right)\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $f\left(\lg\left(\log_3 2\right)\right)=$（　　）

A．0　　　B．$\dfrac{1}{3}$　　　C．$\dfrac{2}{3}$　　　D． 1

【解】令 $x_0=\lg(\log_2 3)$，则 $f(x_0)=\dfrac{1}{3}$，又 $\lg(\log_3 2)=\lg(\dfrac{1}{\log_2 3})=-\lg(\log_2 3)=-x_0$

因 $f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\dfrac{a^{-x}}{a^{-x}-1}=\ln(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x})+\dfrac{1}{1-a^x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\dfrac{-1}{a^x-1}$，

显然， $f(x)+f(-x)=1$，故，由 $f(x_0)=\dfrac{1}{3}$ 知 $f(-x_0)=\dfrac{2}{3}$，即 $f(\lg(\log_3 2))=\dfrac{2}{3}$，选 C。

6. 设函数 $f(x)=e^x+2x-a$ （$a\in R,e$ 为自然对数的底数），若存在实数 $b\in[0,1]$ 使 $f\left(f(b)\right)=b$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[0,\ e]$　　　B．$[1,1+\mathrm{e}]$　　　C．$[1,2+e]$　　　D．$[0,1]$

【解】令 $f(b)=\lambda$，则 $f(\lambda)=b$，易知 $f(x)$ 单调递增，

如 $\lambda>b$，则 $f(\lambda)>f(b)$，即 $b>\lambda$，矛盾

如 $\lambda<b$，则 $f(\lambda)<f(b)$，即 $b<\lambda$，也矛盾

故，$\lambda=b$，即 $f(b)=b$，从而 $e^b+2b-a=b\Rightarrow a=e^b+b$，

因 $b\in[0,1]$，故 $e^b+b\in[1,e+1]$，选 B。

7. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数， $f(x)=[x]$ 为取整函数， x_0 是方程 $e^x-\dfrac{4}{x}=0$ 的根($e=2.718...$，为自然对数的底数)，则 $f(x_0)$ 等于（　　）

A．4　　　B．3　　　C．2　　　D．1

【解】令 $g(x)=e^x-\dfrac{4}{x}$，显然， $x<0$ 时， $g(x)=0$ 无解

而$x>0$时，易知$g(x)$单调递增，故$g(x)$如有零点，则仅有一个，

因$g(1)=e-4<0, g(2)=e^2-2>0$，故$g(x)$有唯一零点$x_0\in(1,2)$，从而

$f(x_0)=[x_0]=1$，选D。

8. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3,x\le 0\\ \left(x-2\right)^2,x>0\end{cases}$，则函数$g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2-f\left[f\left(x\right)\right]$的所有零点之和为（　）

A．2　　B．3　　C．0　　D．1

【解】令$f\left(x\right)=t$，则$g\left(x\right)=0\Rightarrow t^2-f\left(t\right)=0\Rightarrow f\left(t\right)=t^2$，显然$t\ne 0$；

如$t>0$，则$f\left(t\right)=t^2\Rightarrow\left(t-2\right)^2=t^2\Rightarrow t=1$，

此时，$f\left(x\right)=1$有$x_1=-1,x_2=1,x_3=3$三个根；

如$t<0$，则$f\left(t\right)=t^2\Rightarrow 2t+3=t^2\Rightarrow t=-1$，

此时，$f\left(x\right)=-1$有$x_4=-2$一个根；

综上，$g\left(x\right)$的所有零点之和为1，选D。

9. （2024年1月清华大学中学生标准学术能力测试）若不等式$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-8x+17}\le 4$的解集为$\left[a,b\right]$，则$a+b$的值为（　）

A．5　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．7

【解】原不等式变形为$\sqrt{\left(x-2\right)^2+1}+\sqrt{\left(4-x\right)^2+1}\le 4$，

令$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$，则原不等式为$f\left(x-2\right)+f\left(4-x\right)\le 4$。

由于函数$g\left(x\right)=f\left(x-2\right)+f\left(4-x\right)$的图像关于直线$x=3$对称，故$g\left(x\right)\le 4$的解集$\left[a,b\right]$一定关于3对称，因此$a+b=6$，选C。

【法二】由题意得$\sqrt{x^2-4x+5}\le 4-\sqrt{x^2-8x+17}$，两边平方并化简得

$2\sqrt{x^2-8x+17}\le 7-x$，两边在平方，并化简得$3x^2-18x+19\le 0$，

由题意知：$x=a,x=b$一定为方程$3x^2-18x+19=0$的两个根，故由韦达定理得

$a+b=\dfrac{18}{3}=6$，选C。

10. （2022年全国乙卷）已知函数$f\left(x\right),g\left(x\right)$的定义域均为$R$，且$f\left(x\right)+g\left(2-x\right)=5,g\left(x\right)-f\left(x-4\right)=7$，若$y=g\left(x\right)$的图像关于直线$x=2$对称，$g\left(2\right)=4$，

则$\sum_{k=1}^{22} f(k)=$

A-21　　B.-22　　C.-23　　D.-24

【解】 由题意得$\begin{cases} f(x)+g(2-x)=5 \\ g(2-x)-f(-2-x)=7 \end{cases} \Rightarrow f(x)+f(-2-x)=-2$,

故$f(x)$的图像关于点$(-1,-1)$中心对称;

因$g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，故

$f(x)+g(2-x)=5 \Rightarrow f(-x)+g(2+x)=5 \Rightarrow f(-x)+g(2-x)=5 \Rightarrow f(x)=f(-x)$,

故$f(x)$为偶函数，且周期为 4。

由$g(2)=4$得$f(0)=1$；由$f(-1)=-1$得$f(1)=-1$,

利用$f(x+2)=-2-f(x)$，得：$f(2)=-3, f(3)=-1$，$f(4)=1$,

故$\sum_{k=1}^{22} f(k)=\sum_{k=1}^{20} f(k)+f(21)+f(22)=-24$，选 D。

11. 以$\max M$表示数集M中最大的数。设$0<a<b<c<1$，已知$b \geq 2a$或$a+b \leq 1$，则$\max\{b-a, c-b, 1-c\}$的最小值为______。

【解】 令$\max\{b-a, c-b, 1-c\}=y$

如果$b \geq 2a$，即$a \leq \frac{b}{2}$，则$y=\max\{b-a, c-b, 1-c\} \geq \max\left\{\frac{b}{2}, c-b, 1-c\right\}$

因此：$y \geq \frac{b}{2} \Rightarrow 2y \geq b$，$y \geq c-b$，$y \geq 1-c$,

三式相加得：$4y \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{4}$，当且仅当$\frac{b}{2}=c-b=1-c$，即$(a,b,c)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$时取等号。

如$a+b \leq 1$，即$a \leq 1-b$，则$y=\max\{b-a, c-b, 1-c\} \geq \max\{2b-1, c-b, 1-c\}$

故$y \geq 2b-1 \Rightarrow \frac{y}{2} \geq b-\frac{1}{2}, y \geq c-b, y \geq 1-c$,

三式相加得$\frac{5}{2}y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y \geq \frac{1}{5}$，当且仅当$2b-1=c-b=1-c$，即$(a,b,c)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$取等号。

综上，$\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$。

12. （1）已知实数 x_1,x_2 满足 $x_1e^{x_1}=e^3,x_2(\ln x_2-2)=e^5$，则 $x_1x_2=$______

（2）已知实数 a,b 满足 $a^3-3a^2+5a=1,b^3-3b^2+5b=5$，则 $a+b=$______

【解析】（1）利用同构的思想。题中两式两边取对数得 $\begin{cases}x_1+\ln x_1=3\\ \ln x_2+\ln(\ln x_2-2)=5\end{cases}$，

也即 $\begin{cases}x_1+\ln x_1-3=0\\ (\ln x_2-2)+\ln(\ln x_2-2)-3=0\end{cases}$，

令 $f(x)=x+\ln x-3$，则 $f(x)$ 单调递增，且 $f(x_1)=f(\ln x_2-2)=0$，故 $x_1=\ln x_2-2$，

从而，由 $\ln x_2+\ln(\ln x_2-2)=5$ 得 $\ln x_2+\ln x_1=5$，即 $\ln x_1x_2=5$，得 $x_1x_2=e^5$

（2）由题意知：$a^3-3a^2+5a-3=-2$，$b^3-3b^2+5b-3=2$

令 $f(x)=x^3-3x^2+5x-3$，则 $f(a)=-2,f(b)=2$

又，易知 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，故 $a+b=2$。

【注意】三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像关于 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$ 中心对称。

13. （1）不等式 $\frac{8}{(x+1)^3}+\frac{10}{x+1}-x^3-5x>0$ 的解集为_____

（2）若 x_1 满足 $2x+2^x=5$，x_2 满足 $2x+2\log_2(x-1)=5$，则 $x_1+x_2=$（　　）.

A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{7}{2}$　　D.4

【解】（1）原不等式 $\Leftrightarrow(\frac{2}{x+1})^3+5\cdot\frac{2}{x+1}>x^3+5x$，

令 $f(x)=x^3+5x$，则 $f(x)$ 单调递增，且原不等式等价于 $f(\frac{2}{x+1})>f(x)$，故 $\frac{2}{x+1}>x$，

解得其解集为 $\{x\,|\,x<-2或-1<x<1\}$

（2）**【巧解】**由题意知：$2x_1+2^{x_1}=5$ 知，故 $1<x_1<\frac{3}{2}$；

同理，$2<x_2<\frac{5}{2}$，故 $3<x_1+x_2<4$，只能选 C。

【法二】仍然利用同构的思想。由题意知

$$\begin{cases}2x_1+2^{x_1}=5\\2x_2+2\log_2(x_2-1)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2^{x_1-1}=\dfrac{5}{2}\\x_2+\log_2(x_2-1)=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x_1-1)+2^{x_1-1}=\dfrac{3}{2}\\(x_2-1)+\log_2(x_2-1)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2^{x_1-1}+\log_2 2^{x_1-1}=\dfrac{3}{2}\\(x_2-1)+\log_2(x_2-1)=\dfrac{3}{2}\end{cases},$$

令 $f(x)=x+\log_2 x$，则 $f\left(2^{x_1-1}\right)=f(x_2-1)=\dfrac{3}{2}$，

易知 $f(x)$ 为单调递增函数，故 $2^{x_1-1}=x_2-1$，从而 $\log_2(x_2-1)=x_1-1$，

故 $(x_2-1)+\log_2(x_2-1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow(x_2-1)+(x_1-1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{7}{2}$

14. 设函数 $f_k(x)=2^x+(k-1)2^{-x}(x\in R,k\in Z)$。若 $2m+f_1(m)=5,\ \log_2 f_1(2n)+2\log_2(n-1)=5$，则 $m+n=$_______。

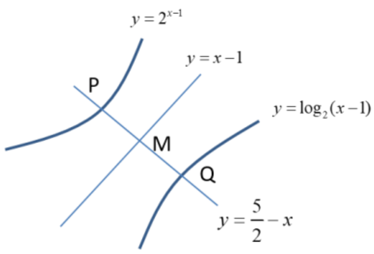
【解】 $2m+f_1(m)=5\Rightarrow 2m+2^m=5\Rightarrow 2^{m-1}=\dfrac{5}{2}-m$

$\log_2 f_1(2n)+2\log_2(n-1)=5\Rightarrow\log_2 2^{2n}+2\log_2(n-1)=5$

$\Rightarrow 2n+2\log_2(n-1)=5\Rightarrow\log_2(n-1)=\dfrac{5}{2}-n$

因 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数，其图像关于直线 $y=x$ 对称，因此 $y=2^{x-1}$ 与 $y=\log_2(x-1)$ 的图像关于直线 $y=x-1$ 对称；

又，易知点 $P(m,\dfrac{5}{2}-m),\ Q(n,\dfrac{5}{2}-n)$ 分别为曲线 $y=2^{x-1}$、$y=\log_2(x-1)$ 与直线 $y=\dfrac{5}{2}-x$ 的交点；而直线 $y=\dfrac{5}{2}-x$ 与直线 $y=x-1$ 垂直，



故 $P(m,\dfrac{5}{2}-m),\ Q(n,\dfrac{5}{2}-n)$ 的中点 $M(x_0,y_0)$ 即为直线 $y=\dfrac{5}{2}-x$ 与直线 $y=x-1$ 的交点

解$\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}-x \\ y=x-1 \end{cases}$得$x_0=\dfrac{7}{4}$，故$m+n=2x_0=\dfrac{7}{2}$

【解法二】（同构的思想）前面相同，易知：$2^{m-1}=\dfrac{5}{2}-m$，$\log_2(n-1)=\dfrac{5}{2}-n$，即

$2^{m-1}+(m-1)-\dfrac{3}{2}=0$　　　　①

$\log_2(n-1)+(n-1)-\dfrac{3}{2}=0$，　　②

②变形，得$\log_2(n-1)+2^{\log_2(n-1)}-\dfrac{3}{2}=0$　　③

令$f(x)=2^x+x-\dfrac{3}{2}$，显然$f(x)$单调递增，

由① ③知$f(m-1)=f\left(\log_2(n-1)\right)$，故$m-1=\log_2(n-1)$，

由②知$\log_2(n-1)=\dfrac{3}{2}-(n-1)$，代入上式得

故$m-1=\dfrac{3}{2}-(n-1)$，整理即得$m+n=\dfrac{7}{2}$

15. （**2023年重庆高联赛**）若实数x,y满足$4x^2-2xy+2y^2=1$，则$3x^2+xy+y^2$的最大值与最小值之和为______。

【分析】本题有好几种方法，比如这样变形$3x^2+xy+y^2=\dfrac{3x^2+xy+y^2}{4x^2-2xy+2y^2}$，然后求解；这里，我们应用另一种齐次化思想，并结合判别式法完成

【解】齐次化思想。令$3x^2+xy+y^2=k$，则$3x^2+xy+y^2=k\left(4x^2-2xy+2y^2\right)$，整理成关于$x$的方程，得$(4k-3)x^2-(4k+1)xy+(2k-1)y^2=0$，

由于k不可能恒为$\dfrac{3}{4}$，上面方程可看成是关于x的一元二次方程，由于其有解，故

$\Delta=(4k+1)^2y^2-4(4k-3)(2k-1)y^2\geq 0$，

由于y不可能恒为0，由上面不等式得$-16k^2+48k-11\geq 0$，解得$\dfrac{1}{4}\leq k\leq\dfrac{11}{4}$，且均能取等，

从而$3x^2+xy+y^2$的最大值与最小值之和为3。

16. （1）.若函数$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的单调函数，且对任意的实数x都有$f\left[f\left(x\right)+\frac{2}{2^x+1}\right]=\frac{1}{3}$，则$f\left(\log_2 3\right)=$______

（2）若对于满足$-1\le t\le 3$的一切实数t，不等式$x^2-(t^2+t-3)x+t^2(t-3)>0$恒成立，则$x$的取值范围为____

【解】（1）由$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的单调函数知：存在唯一实数t，使得$f\left(t\right)=\frac{1}{3}$，于是$f\left(x\right)+\frac{2}{2^x+1}=t$，

即$f\left(x\right)=t-\frac{2}{2^x+1}$，从而$f\left(t\right)=t-\frac{2}{2^t+1}=\frac{1}{3}$，

因$f(t)=t-\frac{2}{2^t+1}$关于t单调递增，且$f(1)=\frac{1}{3}$，故，$t=1$，即$f\left(x\right)=1-\frac{2}{2^x+1}$

故$f\left(\log_2 3\right)=\frac{1}{2}$

（2）原不等式化为$(x-t^2)[x-(t-3)]>0$，$(x-t^2)[x-(t-3)]=0$之二根为$x_1=t^2,x_2=t-3$。

$\because x_1-x_2=(t-\frac{1}{2})^2+3-\frac{1}{4}>0$，$\therefore x<t-3$或$x>t^2$，

$\therefore x<(t-3)_{\min}=-4$或$x>\{t^2\}_{\max}=9$

17. （全国高联赛）若实数a,b,c满足$2^a+4^b=2^c$，$4^a+2^b=4^c$，则c的最小值是______

【解】设$2^a=x,2^b=y,2^c=z$，则$x,y,z>0$，由条件知$x+y^2=z$，$x^2+y=z^2$

故$z^2-y=x^2=\left(z-y^2\right)^2=z^2-2y^2z+y^4$

故$z=\frac{y^4+y}{2y^2}=\frac{1}{4}\left(2y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{2}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

当且仅当$2y^2=\frac{1}{y}$，即$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，z的最小值为$\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

由于$c=\log_2 z$，故c的最小值为$\log_2\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}=\log_2 3-\frac{5}{3}$

18. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{4^x+k\cdot 2^x+1}{4^x+2^x+1}$，若对于任意的实数$x_1,x_2,x_3$均存在以$f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),f\left(x_3\right)$为三边长的三角形，则实数$k$的取值范围是________

【解】 $f\left(x\right)=\frac{4^x+k\cdot 2^x+1}{4^x+2^x+1}=\frac{4^x+2^x+1+(k-1)2^x}{4^x+2^x+1}=1+\frac{k-1}{2^x+\frac{1}{2^x}+1}=1+(k-1)g(x)$,

其中 $g\left(x\right)=\frac{1}{2^x+\frac{1}{2^x}+1}\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$

首先，我们要保证对 $\forall x\in R$，有 $f(x)>0$；

$k\geq 0$ 时显然，如 $k<0$，则需 $1+\frac{k-1}{3}>0$，即 $k>-2$；

综上，我们有 $k>-2$。

当 $k\geq 1$ 时，$1<f\left(x\right)\leq\frac{k+2}{3}$，当且仅当 $x=0$ 时取等号

因 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_3\right)$ 对任意的 x_1,x_2,x_3 恒成立，故 $2\geq\frac{k+2}{3}$，所以 $1\leq k\leq 4$

当 $k<1$ 时，$\frac{k+2}{3}\leq f\left(x\right)<1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，由 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_3\right)$ 对任意 x_1,x_2,x_3 恒成立，知 $2\cdot\frac{k+2}{3}\geq 1$，解得 $-\frac{1}{2}\leq k<1$

综上可得，$-\frac{1}{2}\leq k\leq 4$

19. 若正数 a,b 满足 $\log_2 a+\log_4 b=8,\log_4 a+\log_8 b=2$，则 $\log_8 a+\log_2 b=$ _____。

【解】由题意

$\log_2 a+\log_4 b=8\Rightarrow 3\log_8 a+\frac{1}{2}\log_2 b=8$ ①

$\log_4 a+\log_8 b=2\Rightarrow\frac{3}{2}\log_8 a+\frac{1}{3}\log_2 b=2$ ②

由①②解得 $\log_8 a=\frac{20}{3},\log_2 b=-24$

故，$\log_8 a+\log_2 b=-\frac{52}{3}$

20. (北京大学夏令营)若 $4x^2+2xy+y^2-2ax-ay+2\geq 0$ 对任意的 $x,y\in R$ 恒成立，则 a 的最大值为 ____

【解】将题目所给不等式看成是关于 x 的一元二次不等式，即 $4x^2+(2y-2a)x+y^2-ay+2\geq 0$,

因其恒成立，故$\Delta_1=(2y-2a)^2-16(y^2-ay+2)\le 0$，化简得$3y^2-2ay-a^2+8\ge 0$，

由于此不等式也恒成立，故$\Delta_2=4a^2-12(-a^2+8)\le 0$，解得$-\sqrt{6}\le a\le \sqrt{6}$，

故，a的最大值为$\sqrt{6}$。

【注意】本题中，我们两次利用了判别式法，足见该法的重要性

21.（2024年中科大强基计划）函数$f:R\to R$满足$\forall x,y\in R, f\left(x+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+y$，且$f\left(1\right)=2024$，则$f\left(2024\right)=$______。

【解析】令$x=0$，可得$f\left(f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(0\right)\right)+y$，　　　(*)

从而$f\left(f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(f\left(0\right)\right)+f\left(y\right)$；

另一方面，$f\left(f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left[f\left(f\left(0\right)\right)+y\right]=f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(0\right)$，因此

$f\left(f\left(0\right)\right)+f\left(y\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(0\right)=f\left(f\left(0\right)\right)+y+f\left(0\right)$，

即$f\left(y\right)=y+f\left(0\right)$，令$y=1$得$f\left(0\right)=2023$，故$f\left(2024\right)=2024+2023=4047$

22. 设函数$f(x)=|\lg(x+1)|$，实数$a,b(a<b)$满足$f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，$f(10a+6b+21)=4\lg 2$，求$a,b$的值.

【解】因为$f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，

所以，$|\lg(a+1)|=|\lg(-\dfrac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg(\dfrac{1}{b+2})|=|\lg(b+2)|$，

所以$a+1=b+2$或$(a+1)(b+2)=1$，

又因为$a<b$，所以$a+1\ne b+2$，

所以$(a+1)(b+2)=1$　　　　　①

易知$a+1>0$，故$a+1<1,b+2>1$，故$10a+6b+22=10\left(a+1\right)+6\left(b+2\right)>1$

从而$f(10a+6b+21)=4\lg 2\Rightarrow\left|\lg\left(10a+6b+22\right)\right|=\lg 16\Rightarrow 10a+6b+22=16$

$\Rightarrow 5a+3b=-3$　　　　②

联立①②解得：$a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{1}{3}$或$a=0$，$b=-1$，与$a<b$矛盾，舍去。

综上，$a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{1}{3}$。

23. 已知函数$g\left(x\right)=ax+b,h\left(x\right)=x^2+1,f\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{h\left(x\right)}$，若曲线$g\left(x\right)$与$h\left(x\right)$恰有一个交点且交点横坐标为 1.

（1）求a,b的值及$f\left(x\right)$；

（2）判断函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上的单调性，并利用定义证明你的结论；

（3）已知$\forall x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且$x_1<x_2$，若$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，试证：$x_1+x_2>2$

【解】（1）由题意知方程$g\left(x\right)=h\left(x\right)$有唯一一根$x=1$，即$x^2-ax-b+1=0$有唯一一根$x=1$，由韦达定理得$\begin{cases}a=2\\-b+1=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$，故$f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}\left(x\in R\right)$

（2）函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上单调递增，证明如下：

假设$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$，$1-x_1x_2>0$。故

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{2x_1}{x_1^2+1}-\frac{2x_2}{x_2^2+1}=2\frac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}=2\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(1-x_1x_2\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}<0,$$

（3）由（2）可得：函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，

因$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，且$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，$x_1<x_2$，故$x_1\in\left(0,1\right),x_2\in\left(1,+\infty\right),2-x_1\in\left(1,+\infty\right)$，

要证$x_1+x_2>2$，即证$x_2>2-x_1$，只需证明$f\left(x_2\right)<f\left(2-x_1\right)$，由于$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，故只需证明$f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$

又，$f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow\dfrac{2x_1}{x_1^2+1}<\dfrac{2\left(2-x_1\right)}{\left(2-x_1\right)^2+1}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{2-x_1}{\left(2-x_1\right)^2+1}<0$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1\left[\left(2-x_1\right)^2+1\right]-\left(2-x_1\right)\left(x_1^2+1\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left[\left(2-x_1\right)^2+1\right]}<0\Leftrightarrow\frac{2\left(x_1-1\right)^3}{\left(x_1^2+1\right)\left[\left(2-x_1\right)^2+1\right]}<0,$$

由于$x_1\in\left(0,1\right)$，上面不等式显然成立，故$f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$，即$x_1+x_2>2$，证毕。

(3) 另证：记$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=t$，则$x_1,x_2$是方程$f\left(x\right)=t$，也即$tx^2-2x+t=0$的两个正根，显然$t\neq0$，由韦达定理得$x_1x_2=1$，由于$x_1\neq x_2$，故$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$。证毕。