第 13 章 概率统计

§ 13.1 概率

13.1.1 事件与概率

事件

自然界中发生的现象称为事件。在一定条件下必然会发生的事件称为必然事件；在一定条件下，不可能发生的事件称为不可能事件。事件常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示。我们常用 $\overline{A}$ 表示事件 A 的对立事件。比如 $A=\{$明天会雨$\}$，则 $\overline{A}=\{$明天不会下雨$\}$。通常，一个事件是否会发生是随机的，我们称这样的事件为随机事件。

随机试验

我们对随机现象（事件）的实现和对它的观察称为随机试验，常用字母 E 表示。

样本点和样本空间

我们把随机试验 E 的每一个可能的基本结果称为样本点，样本点常用 ω 表示。全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间，常用 Ω 表示。中学阶段，我们只研究样本空间中只有有限个样本点的情况，如果样本空间 Ω 中只有有限个样本点，不妨设其为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，则称 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 为有限样本空间。

例 1（1）抛一枚硬币，观察它落地时哪一面朝上，写出试验的样本空间。

（2）一个袋子里装有大小和质地相同的 4 个球，其中两个红球分别标号 1 和 2，两个蓝球分别标号 3 和 4.现依次从中任取两个球，观察两次所取球的情况，写出试验的样本空间。

【解】（1）由于硬币落地时有且只有正面朝上或反面朝上两种结果，如用“z”表示正面朝上，“f”表示反面朝上，则样本空间 $\Omega=\{z, f\}$。

（2）我们用数组 (x_1, x_2) 表示模球的结果，其中 x_1 表示第一次摸得的球的编号，x_2 表示第二次摸得的球的编号，则样本空间

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$，容量为 12.

概率

我们将一个随机事件发生的可能性大小称为该事件发生的概率。对于事件 A，我们用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，并规定：如 A 为必然事件，则 $P(A)=1$；如 A 为不可能事件，则 $P(A)=0$。显然，对任意事件 A，必有 $0 \le P(A) \le 1$

频率与概率

(1)在相同的条件 S 下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的

次数 n_A 为事件 A 出现的频数，称事件 A 出现的比例 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率..

(2)对于给定的随机事件 A，如果随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 将稳定在某个常数上，这个常数就是事件 A 的概率。因此，必要时，我们也用频率替代概率。

事件的关系与运算

	定义	符号表示
包含关系	如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，这时称事件 B 包含事件 A(或称事件 A 包含于事件 B)	$B\supseteq A$(或 $A\subseteq B$)
相等关系	若 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$	$A=B$
并事件	若某事件发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生，称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件(或和事件)	$A\cup B$(或 $A+B$)
交事件	某事件发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A,B 同时发生，则称此事件为 A,B 的交事件，用 $A\cap B$ 或 AB 表示	$A\cap B$ 或 AB
互斥事件	若 $A\cap B$ 为不可能事件，则成 A,B 为互斥的事件。	$A\cap B=\varnothing$
对立事件	若 $A\cap B$ 为不可能事件，$A\cup B$ 为必然事件，则称 A,B 为对立事件。	$A\cap B=\varnothing$，$P(A\cup B)=1$

根据事件的定义，我们显然有

（1）对立事件一定互斥，反之则不一定。

（2）对同一试验中的两个事件 A 或 B，我们有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

（3）如果 $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$

相互独立事件

在两个不同的试验中，事件 A 的发生对事件 B 的发生没有任何影响，那么，我们称 A 和 B 为两个相互独立的事件。

如果 A 和 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，反之亦然。

类似地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

【注意】相互独立事件是针对不同试验中的事件而言的，而对立事件和互斥事件都是针对同一试验中的不同事件而言的。例如，抛两枚质地均匀的硬币，$A=$“第一枚硬币正面朝上”，$B=$“第二枚硬币反面朝上”。显然 A 和 B 互不影响，因此事件 A 和 B 相互独立。

基本事件

在一次试验中，可能发生的且不能再分的基本结果，称为基本事件。很明显

（1）任何两个基本事件是互斥的

（2）任何一个事件（不可能事件除外）都可以表示为一系列基本事件的和。

古典概型

我们把具有如下两个特点的概率模型称为古典概型。

（1）试验中，所有可能出现的基本事件只有有限个

（2）每个基本事件出现的可能性相等。

古典概型的概率公式

任何事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{m}{n}$ （n 为基本事件的总数，m 为事件 A 包含的基本事件个数）

几何概型

如果每个事件发生的概率只与构成事件区域的区间长度、面积或体积成比例，则我们称这样的概率模型为几何概型。

13.1.2 条件概率与贝叶斯公式

条件概率：我们先看如下的例子。

例 2：袋中装有 10 个大小相同的球，其中 7 个白球，3 个黑球，每次从袋子中随机摸出 1 个球，模出的球不放回，求

（1）在第 1 次摸到白球的条件下，第 2 次摸到白球的概率；

（2）两次都摸到白球的概率。

【解】 记 $A_1=\{$第 1 次摸到白球$\}$，$A_2=\{$第 2 次摸到白球$\}$。显然，基本事件的总数为10×9个；其中 A_1 含有 7×9 个基本事件，A_1A_2 含有 7×6 个基本事件。

（1）第 1 次摸到白球的条件下，第 2 次摸到白球的概率为：$\dfrac{7\times6}{7\times9}=\dfrac{2}{3}$；

（2）两次都摸到白球的概率为 $P(A_1A_2)=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$

一般地，如果某一随机试验 E 含有 n 个等可能的基本事件 $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n$，事件 A,B 分别含有 n_A,n_B 个基本事件，而事件 AB 含有 n_{AB} 个基本事件，则我们称 $P\left(A|B\right)$ 为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。显然有

$$P\left(A|B\right)=\frac{n_{AB}}{n_B}=\frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}}=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}$$

对于上面例 1 中的问题（1），显然求的是条件概率 $P(A_2 | A_1)$，易知 $P(A_1)=\frac{7\times9}{10\times9}=\frac{7}{10}$，利用条件概率公式得：$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{10}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$。

对于条件概率，我们有：$P(\Omega|A)=1$，$P\left((A_1\cup A_2)|B\right)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

特别地，如果 A_1,A_2 是两个互斥事件，则 $P\left((A_1\cup A_2)|B\right)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

显然，$P\left(\overline{A}|B\right)=1-P(A|B)$

乘法公式

若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

样本空间的划分

若 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为 E 的一组事件，且

（1） $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

（2） $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$

则称 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分。

例 3.抛 10 次硬币，观察出现正面这一事件。令 A_1 表示出现 0 次正面，A_2 表示出现 1 次正面，…，A_{11} 表示出现 10 次正面，则 $A_1,A_2,\ldots,A_{11}$ 即为样本空间 Ω 的一个划分。

全概率公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对 E 的任一事件 B，我们有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

事实上，

上式右边$=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)=P((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)B)=P(\Omega B)=P(B)$。

特别地，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

全概率公式的本质

事件 B 的发生有各种可能的情形 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，事件 B 发生的可能性，就是各种可能情形 A_i 发生的可能性与在 A_i 发生的条件下事件 B 发生的可能性的乘积之和。很多时候，很难直接求得事件 B 发生的概率，因此我们可以分析事件 B 发生的各种可能情形，化整为零地分解事件 B，借

助全概率公式求出事件 B 的概率。

贝叶斯公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间，B 为 E 的一个事件，$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$P(B)>0$，则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+\cdots+P(B\mid A_n)P(A_n)}$$

此公式称为贝叶斯公式。

事实上，上式右边的分子为 $P(A_iB)$，分母就是 $P(B)$。

如果我们把 $P(A)$ 称为先验概率，则条件概率 $P(A\mid B)$ 则称为后验概率。贝叶斯公式的本质是：通过先验概率计算后验概率，也就是说：根据事件发生的结果去寻找事件发生的原因，分析各种可能的原因导致该事件发生的概率大小（各原因对结果的贡献大小）。

13.1.3 典型例题

例 1.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)事件发生的频率与概率是相同的.(　　)

(2)在大量的重复实验中，概率是频率的稳定值.(　　)

(3)若随机事件 A 发生的概率为 $P(A)$，则 $0\le P(A)\le 1$。(　　)

(4)6 张奖券中只有一张有奖,甲、乙先后各抽取一张,则甲中奖的概率小于乙中奖的概率.(　　)

【解】 (1)×　(2)√　(3)√　(4)×

对于（4），不管谁先抽，获奖的概率均为 $\frac{1}{6}$

例 2.袋中装有 3 个白球，4 个黑球，从中任取 3 个球，则：①恰有 1 个白球和全是白球；②至少有 1 个白球和全是黑球；③至少有 1 个白球和至少有 2 个白球；④至少有 1 个白球和至少有 1 个黑球.

在上述事件中，是对立事件的为(　　)

A.①　　B.②　　C.③　　D.④

【解】 ① 全是白球的对立事件应该是“至少有 1 个黑球”；

② 至少有 1 个白球和全是黑球不同时发生，但一定有一个发生，故它们是对立事件。

③、④ 中的两个事件，都明显不是对立事件。

综上，选 B。

例 3.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)“种下一粒种子观察它是否发芽”属于古典概型，其基本事件是“发芽与不发芽”.(　　)

(2)掷一枚硬币两次，出现“两个正面”、“一正一反”、“两个反面”，这三个结果是等可能事件.(　　)

(3)从－3，－2，－1，0，1，2 中任取一数，取到的数小于 0 与不小于 0 的可能性相同.(　　)

(4)利用古典概型的概率可求“在边长为 2 的正方形内任取一点，这点到正方形中心距离小于或等于 1”的概率.(　　)

【解】对于(1)，发芽与不发芽不一定等可能，所以(1)不正确；

对于(2)，三个事件不是等可能，其中“一正一反”应包括正反与反正两个基本事件，所以(2)不正确；

对于（3）：所取数小于 0 的概率为$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，所取数不小于 0 的概率也为$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，故（3）对。

对于(4)，应利用几何概型求概率，所以(4)不正确.

综上，　(1)×　(2)×　(3)√　(4)×

例 4.口袋里装有 1 红，2 白，3 黄共 6 个形状相同的小球，从中取出 2 球，事件$A=$“取出的 2 球同色”，　$B=$“取出的 2 球中至少有 1 个黄球”，$C=$“取出的 2 球至少有 1 个白球”，$D=$“取出的 2 球不同色”，$E=$“取出的 2 球中至多有 1 个白球”.下列判断中正确的序号为____.

① A与D为对立事件；　② B与C是互斥事件；　③ C与E是对立事件；

④ $P(C\cup E)=1$；　⑤ $P(B)=P(C)$.

【解】显然A与D是对立事件，①正确；

当取出的 2 个球中一黄一白时，B与C都发生，②不正确；

当取出的 2 个球中恰有一个白球时，事件C与E都发生，则③不正确；

因$\overline{C}\subseteq E$，故$C\cup E$一定为必然事件，故$P(C\cup E)=1$，④正确；

由于$P(B)=1-\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{4}{5},P(C)=1-\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$，所以⑤不正确。

综上，①④正确。

例 5.袋中有大小相同的 5 个白球，3 个黑球和 3 个红球，每球有一个区别于其他球的编号，从

中摸出一个球.

⑴有多少种不同的摸法？如果把每个球的编号看作一个基本事件建立概率模型，该模型是不是古典概型?

⑵若按球的颜色为划分基本事件的依据，有多少个基本事件？以这些基本事件建立概率模型，该模型是不是古典概型?

【解】⑴由于共有 11 个球，且每个球有不同的编号，故共有 11 种不同的摸法.

又因为所有球大小相同，因此每个球被摸中的可能性相等，

故以球的编号为基本事件的概率模型为古典概型.

（2）以颜色划分，则共有 3 个基本事件，分别记为 A:“摸到白球”，B：“摸到黑球”，C：“摸到红球”；显然 $P(A)=\dfrac{5}{11}, P(B)=P(C)=\dfrac{3}{11}$，三个事件不是等可能事件，因此不是古典概型。

例 6（1）甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是$\frac{1}{2}$，甲获胜的概率是$\frac{1}{3}$，则甲不输的概率为(　　)

A.$\frac{5}{6}$　　B.$\frac{2}{5}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{3}$

(2) 投掷一枚骰子和一枚硬币，计算骰子出现 2 或 4 点，硬币正面朝上的概率。

【解】（1）设“两人下成和棋”为事件 A，“甲获胜”为事件 B.事件 A 与 B 是互斥事件，所以甲不输的概率 $p=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$，选 B。

(2) 用 A 表示“骰子出现 2 或 4 点”这一事件，B 表示“硬币正面朝上”这一事件，则 AB 表示“骰子出现 2 或 4 点，且硬币正面朝上”这一事件，显然，事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$)，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，故 $P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$。

例 7．我国高铁发展迅速，技术先进.经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为__________.

【解】设所有车次的平均正点率为 x，则由 $40x=10\times0.97+20\times0.98+10\times0.99$，解得 $x=0.98$，即经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为 0.98。

例 8 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概

率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是_____

【解】显然，甲要以 $4:1$ 获胜，则前 4 场比赛中需要输 1 场，第 5 场赢。分两种情形

情形一：前 4 场中，在客场输 1 场，概率为 $C_2^1\times0.5\times0.5\times0.6^3=0.108$

情形二：前 4 场中，在主场输 1 场，概率为 $C_2^1\times0.4\times0.6^2\times0.5^2=0.072$

综上，甲队以 $4:1$ 获胜　概率是 $p=0.108+0.072=0.18$

例 9.口袋内有一些大小、形状完全相同的红球、黄球和白球，从中任意摸出一球，摸出的球是红球或黄球的概率为 0.4，摸出的球是红球或白球的概率为 0.9，那么摸出的球是黄球的概率为________；是白球的概率为________.

【解】设摸出红球为事件 A，摸出黄球为事件 B，摸出白球为事件 C，显然 A,B,C 互斥，

且 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=1$，

由题意知：$P(A)+P(B)=0.4$, $P(A)+P(C)=0.9$

故，　$P(B)=1-[P(A)+P(C)]=0.1$，$P(C)=1-[P(A)+P(B)]=0.6$

答：0.1　0.6

例 10 (1)袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球，其中有 10 个白球，5 个红球.从袋中任取 2 个球，所取的 2 个球中恰有 1 个白球，1 个红球的概率为(　　)

A.$\frac{5}{21}$　　　B.$\frac{10}{21}$　　　C.$\frac{11}{21}$　　　D.1

(2)将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有 1，2，3，4，5，6 个点的正方体玩具)先后抛掷 2 次，则出现向上的点数之和小于 10 的概率是________.

【解】(1)：从袋中任取 2 个球共有 $C_{15}^2=105$ 种取法，其中恰好 1 个白球 1 个红球共有 $C_{10}^1C_5^1=50$ 种取法，所以所取的球恰好 1 个白球 1 个红球的概率为 $\frac{50}{105}=\frac{10}{21}$。

(2)将一颗质地无均匀的骰子先后抛掷 2 次，所有等可能的结果有 36 种，其中点数之和不小于 10 的有(6，6)，(6，5)，(6，4)，(5，6)，(5，5)，(4，6)，共 6 种，故所求概率为 $1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.

例 11．某市 A、B 两所中学的学生组队参加辩论赛，A 中学推荐了 3 名男生、2 名女生，B 中学推荐了 3 名男生、4 名女生，两校所推荐的学生一起参加集训.由于集训后队员水平相当，从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1)求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率；

(2)某场比赛前，从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛，求参赛女生人数不少于 2 人的概

率.

【解】⑴由题意，参加集训的男、女生各有 6 名.

参赛学生全从 B 中学抽取(等价于 A 中学没有学生入选代表队)的概率为 $\frac{C_3^3C_4^3}{C_6^3C_6^3}=\frac{1}{100}$

因此，A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率为：$1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

⑵设“参赛的 4 人中女生不少于 2 人”为事件 A，记“参赛女生有 2 人”为事件 B，“参赛女生有 3 人”为事件 C，显然 B,C 互斥，且 $A=B+C$

因 $P(B)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\frac{3}{5},P(C)=\frac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\frac{1}{5}$

由互斥事件的概率加法，得 $P(A)=P(B)+P(C)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

例 12．投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试。已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为

（A）0.648　　（B）0.432　　（C）0.36　　（D）0.312

【解】:　要通过，则需投中 2 次或 3 次；

投中 3 次，概率为 0.6^3；

投中 2 次，概率为 $C_3^2\times0.6^2\times0.4$；

因此，通过的概率为：$P=0.6^3+C_3^2\times0.6^2\times0.4=0.648$，选 A

例 13.将一枚骰子先后抛掷两次，若第一次朝上一面的点数为 a，第二次朝上一面的点数为 b，则函数 $y=ax^2-2bx+1$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 上为减函数的概率是（　　）

A、$\frac{1}{4}$　　B、$\frac{3}{4}$　　C、$\frac{1}{6}$　　D、$\frac{5}{6}$

【解】: 易知，抛物线的对称轴为 $x=\frac{b}{a}$，要使函数 $y=ax^2-2bx+1$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 上为减函数，需 $\frac{b}{a}\geq\frac{1}{2}$，即 $a\leq2b$；

考虑 $a>2b$ 的情况

$a=3$ 或 4 时，b 有 1 种取法，共 2 种

$a=5$ 或 6 时，b 有 2 种取法，共 4 种

因此$a>2b$有 6 种可能；而总的可能有 36 种，所求概率为$1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$，选 D。

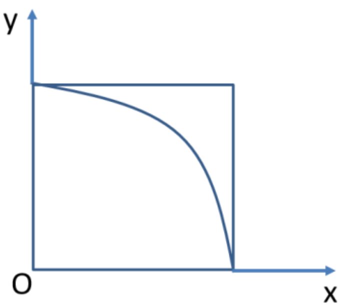
例 14．从区间$\left[0,1\right]$随机抽取$2n$个数$x_1,x_2,\cdots,x_n$， $y_1,y_2,\cdots,y_n$，构成n个数对$\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$，⋯，$\left(x_n,y_n\right)$，其中两数的平方和小于 1 的数对共有m个，则用随机模拟的方法得到的圆周率π 的近似值为

（A）$\frac{4n}{m}$　　（B）$\frac{2n}{m}$　　（C）$\frac{4m}{n}$　　（D）$\frac{2m}{n}$

【解】 由几何概型知：在正方形$[0,1]\times[0,1]$任扔一点$\left(x,y\right)$，满足$x^2+y^2<1$的概率为

$p=\frac{\pi}{4}:1=\frac{\pi}{4}$

另一方面：$p\approx\frac{m}{n}$个，从而$\frac{\pi}{4}\approx\frac{m}{n}$，即$\pi\approx\frac{4m}{n}$，选 C。

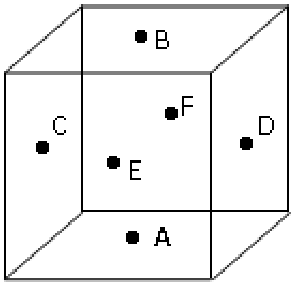


例 15. 考察正方体 6 个面的中心，甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线，乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线，则所得的两条直线相互平行但不重合的概率等于

（A）$\frac{1}{75}$　　（B）$\frac{2}{75}$　　（C）$\frac{3}{75}$　　（D）$\frac{4}{75}$

【解】 如图，甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线，乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线，共有$C_6^2C_6^2=15\times15=225$种不同取法，其中所得的两条直线相互平行但不重合有$AC//DB,AD//CB,AE//BF$，$AF//BE,CE//FD,CF//ED$共 12 对，所以所求概率为

$p=\frac{12}{225}=\frac{4}{75}$，选 D



例 16.一袋中有红、黄、蓝三种颜色的小球各一个，每次从中取出一个，记下颜色后放回，当三种颜色的球全部取出时停止取球，则恰好取 5 次球时停止取球的概率为(　　)

A．$\dfrac{5}{85}$　　B．$\dfrac{14}{81}$　　C．$\dfrac{22}{81}$　　D．$\dfrac{25}{81}$

【解】显然，前面 4 次必须且仅需取出 2 种颜色，第 5 次取出第 3 种颜色，方可符合要求。

那么，前 4 次取出两种颜色有多少种取法呢?

我们先从 3 种颜色中取 2 种出来，有 C_3^2 种取法；

设取出的两种颜色为 a,b，现将 a,b 分配到 4 次取球过程中去，很明显有 $1a3b,\ 2a2b,\ 3a1b$ 三种情况，对应的取法分别有 C_4^1,C_4^2,C_4^3 种，因此满足要求的取法有 $C_3^2(C_4^1+C_4^2+C_4^3)=42$ 种，

故最终的概率为 $\dfrac{42}{3^5}=\dfrac{14}{81}$，选 B。

例 17．11 分制乒乓球比赛，每赢一球得 1 分，当某局打成 10:10 平后，每球交换发球权，先多得 2 分的一方获胜，该局比赛结束。甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为 0.5，乙发球时甲得分的概率为 0.4，各球的结果相互独立.在某局双方 10:10 平后，甲先发球，两人又打了 X 个球该局比赛结束.

（1）求 $P(X=2)$；　　　　（2）求事件“$X=4$且甲获胜”的概率.

【解】（1）$X=2$等价于甲连赢2球，或者乙连赢2球，

因此 $P(X=2)=P(\text{甲甲})+P(\text{乙乙})=0.5\times0.4+(1-0.5)(1-0.4)=0.5$

（2）$X=4$且甲获胜，就是10：10平后，两人又打了4个球比赛结束，且这4个球的得分情况为：前两球是甲、乙各得1分，后两球均为甲得分。因此所求概率为

$$p=[P(\text{甲乙})+P(\text{乙甲})]P(\text{甲甲})=[0.5\times(1-0.4)+(1-0.5)\times0.4]\times0.5\times0.4=0.1$$

例 18.甲、乙两市均位于长江下游，根据多年来的气象记录，得知一年中雨天的比例甲市为 20%，乙市为 18%，两市同时下雨的比例为 12%。若以事件 A 记甲市出现雨天，事件 B 记乙市出现雨天，则有 $P(A)=0.20$，$P(B)=0.18$，$P(AB)=0.12$。求 $P(A|B)$，$P(B|A)$。

【解】:　由条件概率公式知

$P\left(A|B\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\dfrac{0.12}{0.18}=0.67$，$P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{0.12}{0.20}=0.60$。

例 19.甲乙两人同时向一目标射击，已知甲命中目标的概率为0.6，乙命中目标的概率为0.5。已知目标至少被命中 1 次，求甲命中目标的概率。

【解】设$A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$目标至少命中 1 次$\}$；

显然，$P(C)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-0.4\times 0.5=0.8$，

由于$A\subseteq C$，故$P(AC)=P(A)=0.6$，

所求概率为条件概率$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{0.6}{0.8}=0.75$

例 20.两批同种规格的产品，第一批占40%，次品率为5%，第二批占60%，次品率为4%。将两批产品混合，从混合产品中任取 1 件。

（1）求这件产品是合格品的概率；

（2）已知取到的是合格品，求它取自第一批产品的概率。

【解】.设$A_i(i=1,2)=\{$产品取自第i批$\}$，$B=\{$所取产品为合格品$\}$，由题意知：

$P(A_1)=0.4,\ P(A_2)=0.6,\ P(\overline{B}\,|\,A_1)=0.05,\ P(\overline{B}\,|\,A_2)=0.04$，故

$P(B\,|\,A_1)=0.95,\ P(B\,|\,A_2)=0.96$

（1）$P(B)=P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)=0.4\times 0.95+0.6\times 0.96=0.956$

（2）$P(A_1\,|\,B)=\dfrac{P(B\,|\,A_1)P(A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.95\times 0.4}{0.956}=\dfrac{95}{239}$,

例 21 在A,B,C三个地区爆发了流感，这三个地区分别有$6\%,5\%,4\%$的人患了流感，假设这三个地区的人口数之比为$5:7:8$，现从这三个地区中任意选取 1 人。

（1）求这个人患流感的概率；

（2）如果此人患流感，求此人选自A地区的概率。

【解】由题意知：$P(A)=\dfrac{5}{20},\ P(B)=\dfrac{7}{20},\ P(C)=\dfrac{8}{20}$，记$X=\{$所选之人患流感$\}$，则

$P(X\,|\,A)=6\%,\ P(X\,|\,B)=5\%,\ P(X\,|\,C)=4\%,$

（1）$P(X)=P(A)P(X\,|\,A)+P(B)P(X\,|\,B)+P(C)P(X\,|\,C)$

$=\dfrac{5}{20}\times\dfrac{6}{100}+\dfrac{7}{20}\times\dfrac{5}{100}+\dfrac{8}{20}\times\dfrac{4}{100}=0.0485$

（2）$P(A|X)=\dfrac{P(A)P(X|A)}{P(X)}=\dfrac{\frac{5}{20}\times 6\%}{4.85\%}=\dfrac{30}{97}$.

例 22.某人忘记了电话号码的最后一位数字，只好随意拨号。

（1）求他拨号不超过3次而接通电话的概率?

（2）如他记得最后一位是偶数，求他拨号不超过3次而接通电话的概率?

【解】设 $A=\{$拨号不超过3次且接通电话$\}$，$A_i=\{$拨号i次并接通电话$\}$，$i=1,2,3$；

则 $A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，显然 $A_1,\overline{A_1}A_2,\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 互斥，

（1）$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{10}$

(2) 设 $B=\{$拨偶数$\}$，则所求概率为 $P(A|B)$，由公式得

$$P(A|B)=P(A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3|B)=P(A_1|B)+P(\overline{A_1}A_2|B)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3|B)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

例 23.假设某市场供应的智能手机中，市场占有率和优品率信息如下表，在该市场随机购买一部手机，求买到优品手机的概率。

品牌	甲	乙	其他
市场占有率	50%	30%	20%
优品率	95%	90%	70%

【解】用 A_1,A_2,A_3 分别表示买到的手机为甲品牌、乙品牌和其他品牌，B 表示买到的手机为优质品，则 $P(A_1)=0.5,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_3)=0.2$，且

$P(B|A_1)=0.95,\ P(B|A_2)=0.9,\ P(B|A_3)=0.7$，

由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.5\times 0.95+0.3\times 0.9+0.2\times 0.7=0.885$$

例 24.有朋友自远方来访，坐火车来的概率为 $\dfrac{3}{10}$，乘船、乘汽车、乘飞机来的概率分别为 $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{2}{5}$。若他乘火车来，迟到的概率为 $\dfrac{1}{4}$，若他乘船来，迟到的概率为 $\dfrac{1}{3}$，若他乘汽车来，迟到的概率为 $\dfrac{1}{12}$，若他乘飞机来，便不会迟到。在结果迟到的情况下，求其乘火车来的概率?

【解】令 B 表示迟到这一事件，A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示事件“乘火车来”、“乘船来”、“乘汽车来”、“乘飞机来”。由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0}=\frac{1}{2}$$

例 25.某地居民肝癌的发病率为 0.0004，通过对血清甲胎蛋白进行检验可以检测一个人是否患有肝癌，但这种检测方法可能出错，具体是：患有肝癌但检测显示正常的概率为 0.01，未患肝癌但检测显示有肝癌的概率为 0.05。因为目前情况下，肝癌的致死率比较高，肝癌发现得越早，治疗越有效，因此有人主张对该地区的居民进行普查，以尽早发现肝癌患者，请问这个主张是否合适，并说明理由。

【解】该主张是否合适，取决于如下事实：检测显示有肝癌，而患者又确实患有肝癌的概率大小。

设 A= {检测者患有肝癌}，B= {检测结果显示患有肝癌}。则 $P(A)$=0.0004，$P(\overline{B}|A)=0.01$，$P(B|\overline{A})=0.05$

从而，$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.0004=0.9996$，$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-0.01=0.99$，

由贝叶斯公式：检测显示有肝癌的居民确实又患有肝癌的概率为

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.0004\times 0.99}{0.0004\times 0.99+0.9996\times 0.05}\approx 0.0079$$

显然，此概率太低，也即：检测显示有肝癌但被检测者大概率并未患肝癌，因此对该地区居民进行普查不合适。