习题课

1、几个补充知识点

定理 1：平行四边形两条对角线的平方和=四条边的平方和（可用余弦定理轻松证明）

推论：如图一，设 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，则

$$AD^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-BD^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-CD^2$$

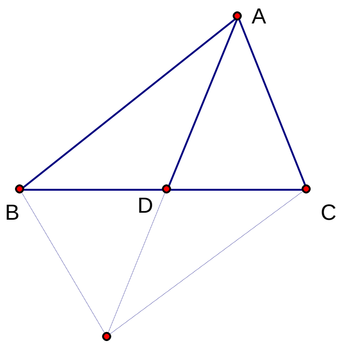
定理 2：如图二，设 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上任意一点，则

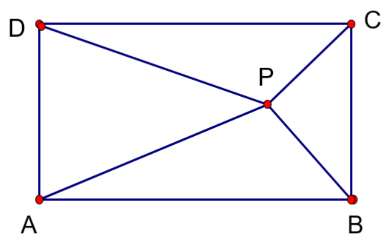
（1） $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ （2） $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$

定理 3：如图一，设 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，则

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$，

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2-BD^2=AD^2-CD^2$





图一 **图二**

定理 4：柯西不等式：

（1）对任意 $x_1,y_1,x_2,y_2\in R$，有 $x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$

（2）对任意非负实数 x_1,y_1,x_2,y_2，有 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ge(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2})^2$

证明：（1）构造向量 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，令 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 α，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\cos\alpha\le\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$。

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$，

故 $x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$，证毕。

很明显，等号成立 $\Leftrightarrow\cos\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=0\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}$ 而且方向相同。

（2）在（1）中，将 x_1, y_1, x_2, y_2 分别换成 $\sqrt{x_1}, \sqrt{y_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{y_2}$，则得

$(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}) \le \sqrt{x_1+y_1}\sqrt{x_2+y_2}$

上市两边平方并交换一下得：$(x_1+y_1)(x_2+y_2) \ge (\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2})^2$，证毕。

注意：三维空间中的柯西不等式：

（3）对任意的 $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 \in R$，有

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \times \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

（4）对任意的非负实数 $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$，有

$$(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) \ge (\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}+\sqrt{x_3y_3})^2$$

证明方法跟前面的类似，也可用初中一元二次函数的知识证明，略。

2、三角形的四心：记 a, b, c 为角 A, B, C 所对边的边长，则

（1）O 为 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ **（三条中线的交点）**

（2）O 为 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$ **（三条边的垂直平分线的交点，外接圆圆心）**

（3）O 为 ΔABC 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ **（三条高的交点）**

（4）O 为 ΔABC 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ **（三个内角平分线的交点，内切圆圆心）**

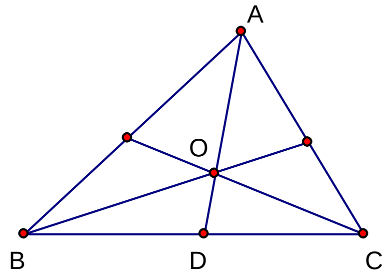
证明：（1）如 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，设 D 为 BC 的中点，由于重心到顶点的距离为其到对边中点距离的 2 倍，所以

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \qquad ①$$

同理可得 $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$　　②

$$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) \qquad ③$$

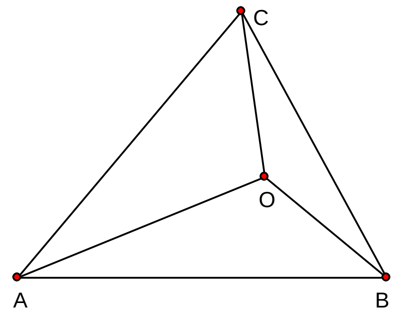
①+②+③得 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}$,



即：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

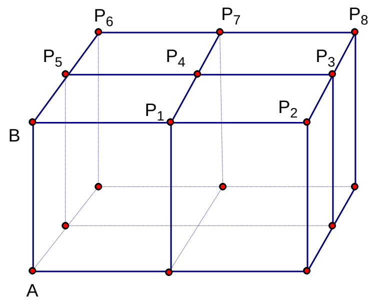
另外三个结论清自行证明。最起码要能记住且会用。

3、**奔驰定理**：设O为ΔABC内任意一点，则$S_{\vartriangle BOC}\bullet\overrightarrow{OA}+S_{\vartriangle COA}\bullet\overrightarrow{OB}+S_{\vartriangle AOB}\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$



1.　**（上海高考）**．如图，四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱，AB是一条侧棱，$P_i(i=1,2,...)$是上底面上其余的八个点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2...)$的不同值的个数为（　　）

（A）1　　(B)2　　(C)4　　(D)8



【解】 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AP_i}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AP_i}\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP_i})=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，选 A

2.　平面上O,A,B三点不共线，设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\vartriangle OAB$的面积等于

(A) $\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\bullet\vec{b})^2}$　　(B) $\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+(\vec{a}\bullet\vec{b})^2}$

(C) $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\bullet\vec{b})^2}$　　(D) $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+(\vec{a}\bullet\vec{b})^2}$

【解】　三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a},\vec{b})}$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，选 C。

3. （全国 II）已知$\triangle ABC$是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值为（　）

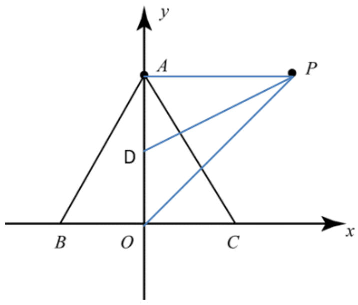
A、-2　　B、$-\frac{3}{2}$　　C、$-\frac{4}{3}$　　D、-1

【解】 建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A\left(0，\sqrt{3}\right)$，$B(-1，0)$，$C(1，0)$.

设 $P(x，y)$，则 $\overrightarrow{PA}=\left(-x，\sqrt{3}-y\right)$，则 $\overrightarrow{PB}=(-1-x，-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x，-y)$，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2x^2-2\sqrt{2}y+2y^2=2\left[x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$，

故，$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$的最小值为$-\frac{3}{2}$



【法二】 令 O,D 分别为 BC,AO 的中点，则

$$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=2(\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{DO}^2)\geq-2\overrightarrow{DO}^2=-2\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=-\frac{3}{2}$$

仅当 P,D 重合时取等号，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$的最小值为$-\frac{3}{2}$。

4. 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=2,$ 则点集$\left\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leq1,\lambda,\mu\in R\right\}$所表示的区域的面积是(　　)

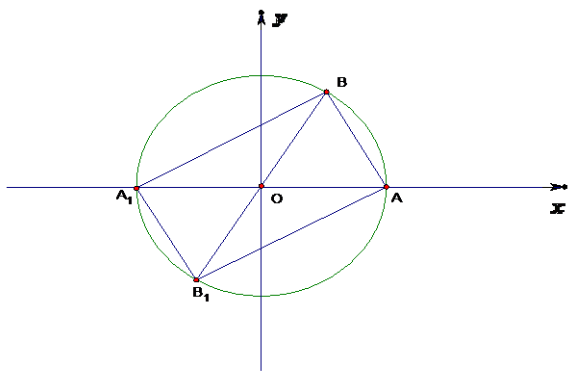
A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

【解】 由题设，所围区域的边界为$\left\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|=1,\lambda,\mu\in R\right\}$。

当 $\lambda\geq0,\mu\geq0$时，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，　$\lambda+\mu=1$，

P 的轨迹为线段 AB，如图。

当 $\lambda \ge 0, \mu \le 0$ 时，$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA} + (-\mu)\overrightarrow{OB_1}$，



$|\lambda| + |\mu| = 1 \Rightarrow \lambda + (-\mu) = 1$，$P$ 的轨迹为线段 AB_1；

其他两种情况类似，因此，所围区域的边界为矩形 ABA_1B_1，如图

因此，所求面积为 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$，选 D

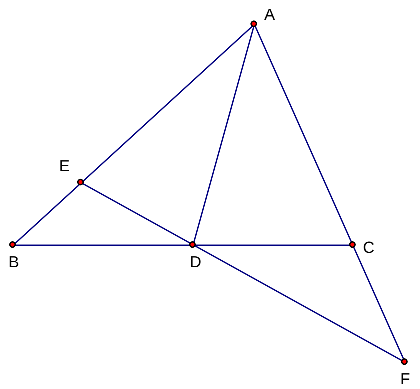
5. 已知 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边的中点，过点 D 的直线分别交直线 AB、AC 于点 E、F，若 $AE = \lambda AB$，$AF = \mu AC$，其中 $\lambda > 0,\ \mu > 0$，则 $\lambda\mu$ 的最小值是

A、1　　B、$\dfrac{1}{2}$　　C、$\dfrac{1}{3}$　　D、$\dfrac{1}{4}$

【解】如图，由题意知：$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2\mu}\overrightarrow{AF}$

因 E, D, F 三点共线，故 $\dfrac{1}{2\lambda} + \dfrac{1}{2\mu} = 1$，即 $\lambda + \mu = 2\lambda\mu \ge 2\sqrt{\lambda\mu} \Rightarrow \lambda\mu \ge 1$，

仅当 $\lambda = \mu = 1$ 时取等号，选 A。



6. 已知 C 为线段 AB 上一点，P 为直线 AB 外一点，满足 $|\overrightarrow{PA}| - |\overrightarrow{PB}| = 2$，

$\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=2\sqrt{5}$, $\dfrac{\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|}$ ， I 为 PC 上一点，

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}\right)(\lambda>0)$，则 $\dfrac{\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}$ 的值为（　　）

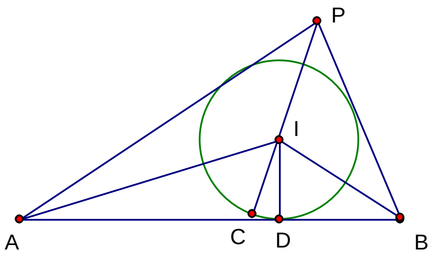
（A）1　　　　（B）2　　　　（C）$\sqrt{5}-1$　　　　（D）$\sqrt{5}$

【解】 $\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow|\overrightarrow{BA}|=2\sqrt{5}$ ，如图，由题意知：

$$\frac{|\overrightarrow{PA}|\bullet|\overrightarrow{PC}|\cos\angle APC}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|\bullet|\overrightarrow{PC}|\cos\angle BPC}{\left|\overrightarrow{PB}\right|}\Rightarrow\cos\angle APC=\cos\angle BPC$$

$\Rightarrow\angle APC=\angle BPC$，

故 I 在 $\angle APB$ 的角平分线上



$$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}\right)$$

而 $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$、$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}$ 均为单位向量，故 I 在 $\angle PAB$ 的角平分线上，故 I 为 $\vartriangle APB$ 的内心

令 $\odot I$ 为 $\vartriangle APB$ 的内切圆， $\odot I$ 切 AB, AP, BP 分别于 D, E, F，

则 $ID\perp AB$，且

$PA-PB=2\Rightarrow AE-BF=2\Rightarrow AD-BD=2$，　　　　（1）

又，$AD+BD=2\sqrt{5}$，　　　　（2）

（1）、（2）联立，解得 $BD=\sqrt{5}-1$

故 $\dfrac{\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\dfrac{|\overrightarrow{BI}|\bullet|\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABI}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=|BI|\cos\angle ABI=BD=\sqrt{5}-1$，选 C。

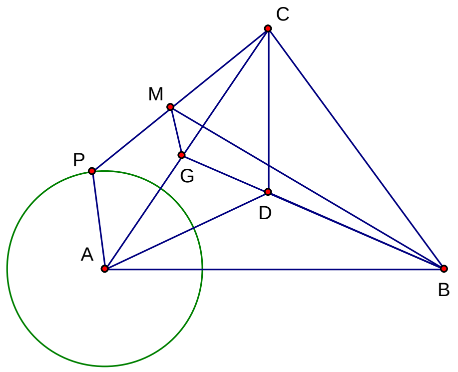
7. 在平面内，定点 A, B, C, D 满足 $\left|\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$，$\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DC}=$

$\overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DA}=-2$，动点 P,M 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，则 $\overrightarrow{BM}^2$ 的最大值是

（A）$\dfrac{43}{4}$　　（B）$\dfrac{49}{4}$　　（C）$\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$　　（D）$\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

【解】 如图，易知 D 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120^\circ$，$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形。令 G 为 AC 的中点，连接 BG,GM，

则 $|GM|=\dfrac{1}{2}|AP|=\dfrac{1}{2}$，故



$$\overrightarrow{BM}^2=(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM})^2=3^2+2\overrightarrow{BG}\bullet\overrightarrow{GM}+(\frac{1}{2})^2\le\frac{37}{4}+2|\overrightarrow{BG}|\bullet|\overrightarrow{GM}|=\frac{49}{4}$$

当且仅当 B,G,M 三点共线时取等号。故选 B。

8. 已知实数 $a>0,b>0$，$0<m<4$，且 $a+b=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{(4-m)b}+\dfrac{4}{mb}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．$\dfrac{9}{2}$　　C．5　　D．6

【解】 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{(4-m)b}+\dfrac{4}{mb}=\dfrac{4}{4a}+\dfrac{4}{(4-m)b}+\dfrac{4}{mb}$（注意到三个分母相加为常数 4）

$$=\frac{4}{4a+4b}[\frac{1}{4a}+\frac{1}{(4-m)b}+\frac{1}{mb}][4a+(4-m)b+mb]\ge\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1})^2=\frac{9}{2},$$

当且仅当 $\dfrac{1}{4a}:\dfrac{1}{(4-m)b}:\dfrac{1}{mb}=4a:(4-m)b:mb$，也即 $m=2,a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{4}{3}$ 时取等号，

故选 B。

【注意】 我们利用了柯西不等式

9. **（北大博雅）** 已知 $a+b+c=1$，则 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$ 的最大值和最小值的乘积属于区间（　　）

A．$[10,11)$　　B. $[11,12)$　　C. $[12,13)$　　D. 前三个答案都不对

【解】令 $x=\sqrt{4a+1}, y=\sqrt{4b+1}, z=\sqrt{4c+1}$，

则 $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$， $x^2+y^2+z^2=7$。

问题转化为求 $x+y+z$ 最大值与最小值乘积之范围。

令 $\vec{a}=(1,1,1), \vec{b}=(x,y,z)$，则

$x+y+z=\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{21}$，仅当 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ 时取等号

故，$x+y+z$ 的最大值为 $\sqrt{21}$

又 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq x^2+y^2+z^2=7$，

即 $x+y+z\geq\sqrt{7}$，取 $x=y=0, z=\sqrt{7}$ 就可取等号，

因此，$x+y+z$ 最大值与最小值之积为 $\sqrt{21}\times\sqrt{7}=\sqrt{147}$，选 C。

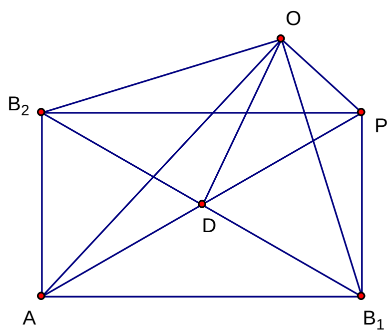
10. 在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$，若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\dfrac{1}{2}$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是（　　　）

A、$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　B、$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$　　C、$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D、$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

【解】由题意知四边形 AB_1PB_2 为矩形，由矩形的性质知：$OA^2+OP^2=OB_1^{\ 2}+OB_2^{\ 2}=2$，

因此 $\overrightarrow{OA}^2=2-\overrightarrow{OP}^2$，又题意知 $\overrightarrow{OP}^2\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right)$，

故 $\overrightarrow{OA}^2=2-\overrightarrow{OP}^2\in\left(\dfrac{7}{4},2\right]$，从而 $\left|\overrightarrow{OA}\right|\in\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$，选 D。



注意：也可用平行四边形性质：两条对角线的平方和等于四条边的平方和

11. 若平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=1$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+1$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大

值为（　　）

A. $3\sqrt{2}-1$　　　　B. $3\sqrt{2}+1$　　　　C. $2\sqrt{3}-1$　　　　D. $2\sqrt{3}+1$

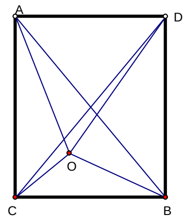
【巧解】 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+1 \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}^2 \Rightarrow (\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$,

如下图，在矩形 $ACBD$ 中，由 $OA^2+OB^2=OC^2+OD^2$ 得 $OD=2\sqrt{3}$,

故 $|\vec{a}-\vec{b}|=|AB|=|CD|\le|OC|+|OD|=1+2\sqrt{3}$,

当 O,C,D 三点共线时取等号。

故 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为 $1+2\sqrt{3}$，选 D。



【法二】 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=13-2\vec{a}\cdot\vec{b}$;

又，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+1 \Rightarrow -|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}+1\le|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$

即 $-|\vec{a}+\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}+1\le|\vec{a}+\vec{b}|$

故，$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1\le\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$;

得 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le12$，解得 $-2\sqrt{3}\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le2\sqrt{3}$

故 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13-2\vec{a}\cdot\vec{b}}\le\sqrt{13+4\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+1$,

易知等号可取，选 D。

12. （全国 I）已知圆 O 的半径为 1，PA,PB 为该圆的两条切线，A,B 为俩切点，则 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的最小值为

(A) $-4+\sqrt{2}$　　　(B) $-3+\sqrt{2}$　　　(C) $-4+2\sqrt{2}$　　　(D) $-3+2\sqrt{2}$

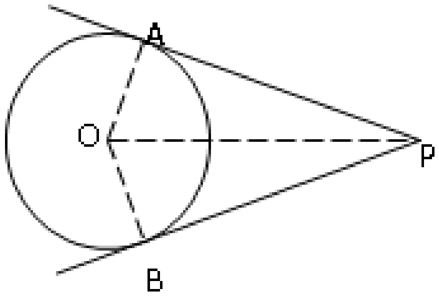
【解】 如图，设 $PA=PB=x\ (x>0)$，$\angle APO=\alpha$，则 $\angle APB=2\alpha$，$PO=\sqrt{1+x^2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

$$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos2\alpha=x^2(1-2\sin^2\alpha)=\frac{x^2(x^2-1)}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4-x^2}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)^2-3(x^2+1)+2}{x^2+1}=(x^2+1)+\frac{2}{x^2+1}-3\ge2\sqrt{2}-3,$$

当且仅当 $x^2+1=\dfrac{2}{x^2+1}$，也即 $x^2=\sqrt{2}-1$ 是取等号，

故 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-3$。



13. 点 O 为 ΔABC 内一点，满足 $\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 O 为 $\triangle ABC$ 的（　　）

A．内心　　B．外心　　C．重心　　D．垂心

【解】 题目中出现了二倍角，联想到圆心角与圆周角的关系，试探 O 为外心，此时

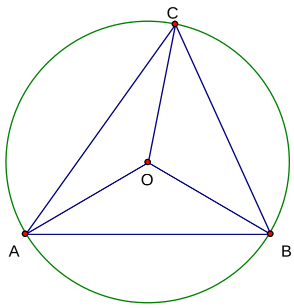
由 $s_{\triangle BOC}\cdot\overrightarrow{OA}+s_{\triangle AOC}\cdot\overrightarrow{OB}+s_{\triangle AOB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle BOC\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle AOC\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle AOB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Rightarrow\sin\angle BOC\cdot\overrightarrow{OA}+\sin\angle AOC\cdot\overrightarrow{OB}+\sin\angle AOB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Rightarrow\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$,

对比题目，确定 O 确为 $\triangle ABC$ 的外心，选 B



14. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}+5\overrightarrow{HC}=\vec{0}$，则 $\cos\angle BHC$ 的值为_____

【解】 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，故 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$,

不妨令 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=t$

用 $\overrightarrow{HB}$ 乘 $3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}+5\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ 两边，得 $|\overrightarrow{HB}|^2=-2t(t<0)$，即 $|\overrightarrow{HB}|=\sqrt{-2t}$；

用 $\overrightarrow{HC}$ 乘 $3\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}+5\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ 两边，得 $|\overrightarrow{HC}|^2=-\dfrac{7t}{5}$，即 $|\overrightarrow{HC}|=\sqrt{-\dfrac{7t}{5}}$；

故$\cos\angle BHC=\dfrac{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{HB}|\cdot|\overrightarrow{HC}|}=\dfrac{t}{\sqrt{-2t}\times\sqrt{-\dfrac{7t}{5}}}=\dfrac{\sqrt{70}t}{14|t|}=-\dfrac{\sqrt{70}}{14}$

15. （清华自招）若O在$\triangle ABC$内部，且$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COA}=4:3:2$，设$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda=$______，$\mu=$______

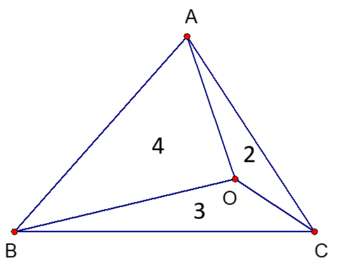
【解】$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\lambda(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+\mu(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$\Rightarrow(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ （*）

由题意及奔驰定理知：

$3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$， 对照（*），得

$\dfrac{1-\lambda-\mu}{3}=\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{\mu}{4}$，解得$\lambda=\dfrac{2}{9},\mu=\dfrac{4}{9}$



16. 已知$f(x)=x^2+(b-\sqrt{4-a^2})x+3a-b$是偶函数，则函数图像与$y$轴交点的纵坐标的最大值是______。

【解】$\because f(x)$是偶函数，$\therefore b=\sqrt{4-a^2}$，

所以，$f(x)$的图像与y轴交点的纵坐标为$3a-b=3a-\sqrt{4-a^2}$（$-2\le a\le 2$）

构造向量$\vec{\alpha}=(3,-1),\ \vec{\beta}=(a,\sqrt{4-a^2})$，

则$3a-\sqrt{4-a^2}=\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=\sqrt{10}\sqrt{4}=2\sqrt{10}$

当且仅当$\dfrac{3}{a}=\dfrac{-1}{\sqrt{4-a^2}}$，即$a=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$时取等号。

17. 三角形ABC中一点O满足$|OA|=|OB|=|OC|$，AB的长度为1，BC边上的中点M与O的连线分别交BC,AC于点M,D，若$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=3$，则$AC$的长度为______。

【解】易知O为$\triangle ABC$的外心，故$OA=OB=OC$

$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}=3$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}\bullet(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=3\Rightarrow -\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=3$$

$$\Rightarrow -\frac{\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AC}^2}{2}+\frac{\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{AB}^2}{2}=3$$

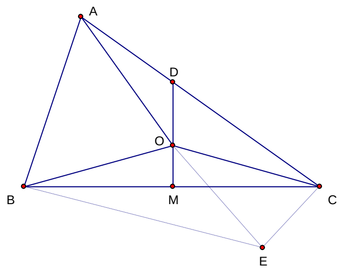
$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AC}^2}{2}-\frac{1}{2}=3\Rightarrow AC=\sqrt{7}$$

【法二】易知O为$\triangle ABC$的外心，设其外接圆半径为R，延长AO至E，使$|AO|=|OE|$，

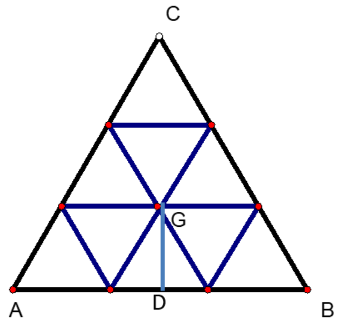
则$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}=3\Rightarrow \overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BC}=6$,

由斯坦纳定理知：$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BC}=\dfrac{(AC^2+BE^2)-(AB^2+CE^2)}{2}$,

即$6=\dfrac{(AC^2+4R^2-1)-(1+4R^2-AC^2)}{2}\Rightarrow AC^2=7\Rightarrow |AC|=\sqrt{7}$



18. 等边$\triangle ABC$的边长为 2，取各边的三等分点并连线，可以将$\triangle ABC$分成如图所示的 9 个全等的小正三角形，记这 9 个小正三角形的重心分别为$G_1,G_2,G_3,\cdots,G_9$，则$\left|\left(\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_1}\right)+\left(\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{BG_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{AG_9}+\overrightarrow{BG_9}\right)\right|=$_____



【解】令$\triangle ABC$的重心为G，O为原点，则$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}\overrightarrow{OG_i}$，

从而$\sum\limits_{i=1}^{9}\overrightarrow{AG_i}=\sum\limits_{i=1}^{9}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG_i})=9\overrightarrow{AO}+9\overrightarrow{OG}=9\overrightarrow{AG}$；

同理，$\sum_{i=1}^{9}\overrightarrow{BG_i}=9\overrightarrow{BG}$

令 D 为 AB 的中点，

故$|\sum_{i=1}^{9}(\overrightarrow{AG_i}+\overrightarrow{BG_i})|=9|\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}|=18|\overrightarrow{GD}|=18\times\frac{1}{3}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2)=6\sqrt{3}$

19. 如图，在同一个平面内，向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$的模分别为$1,1,\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$\alpha$，且$\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$45^\circ$。若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$，则$m+n=$____

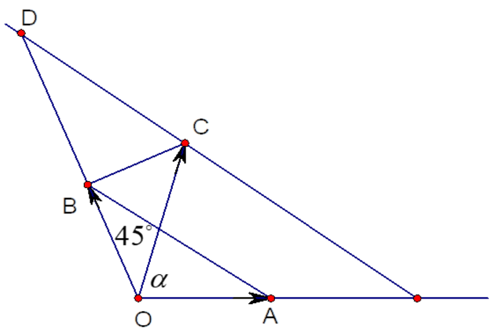
【解】过C作AB的平行线，交OB延长线于D，令$\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{OB}$，则$m+n=y$

由题意有$\angle D=\frac{1}{2}[180^\circ-(\alpha+45^\circ)]=90^\circ-\frac{\alpha+45^\circ}{2}$

易知$BC\perp OD$，且$BC=1$

$BD=BC\cdot\cot\angle D=\cot(90^\circ-\frac{\alpha+45^\circ}{2})=\tan\frac{\alpha+45^\circ}{2}$

由于$\tan(\alpha+45^\circ)=\frac{\tan\alpha+\tan 45^\circ}{1-\tan\alpha\tan 45^\circ}=-\frac{4}{3}$，利用公式$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$，



可解得$\tan\frac{\alpha+45^\circ}{2}=2$或$\tan\frac{\alpha+45^\circ}{2}=-\frac{1}{2}$（舍去）

故$BD=2$，故$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$，即 $m+n=3$

【法二】连接A,B，令OC,AB相交于D，令$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OD}$，

故，由$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\Rightarrow\lambda\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OD}=\frac{m}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{\lambda}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\frac{m}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}=1\Rightarrow m+n=\lambda$，

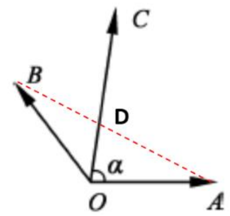
因此，求出λ即可；考虑到$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OD}$，故求出$OD$长度即可；

不妨设$\angle BOC=\beta$，则$\beta=45$，

利用$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOD}$，

即$\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}OA\times OD\times\sin\alpha+\frac{1}{2}OB\times OD\times\sin\beta$

由该式可求得$OD=\frac{\sqrt{2}}{3}$，故$m+n=\lambda=\frac{OC}{OD}=3$

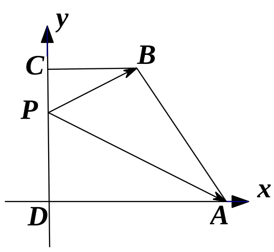


20. 已知直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle ADC=90°$，$AD=2$，$BC=1$，P是腰DC上的动点，则$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$的最小值为________.

【解】以D为坐标原点，DA所在直线为x轴，DC所在直线为y轴，建立如图所示的直角坐标系．由题设$A(2,0)$，设$C(0,c)$，$P(0,y)$，则$B(1,c)$．$\overrightarrow{PA}=(2,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(1,c-y)$，$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=(5,3c-4y)$.

故$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{5^2+(3c-4y)^2}\geq 5$，

当且仅当$y=\frac{3c}{4}$时取等号，故，$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$有最小值$5$.



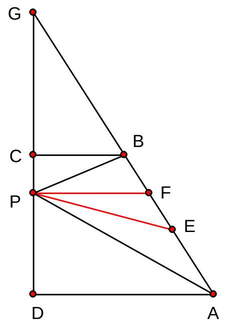
【法二】令AB,DC之延长线交于G，并设E为AB的中点，F为BE的中点，显然，

$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|=\left|(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+2\overrightarrow{PB}\right|=|2\overrightarrow{PE}+2\overrightarrow{PB}|=4|\overrightarrow{PF}|$

显然，只需$|\overrightarrow{PF}|$最小，故应有$PF\perp DC$，此时，

易知$4PF=4\times\frac{5}{8}AD=4\times\frac{5}{8}\times 2=5$，

即$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$的最小值为$5$。



21. 证明：对于任意的$a,b,c,d\in R$，恒有不等式$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

证明： 设$\vec{x}=(a,b),\vec{y}=(c,d)$，

则$\vec{x}\bullet\vec{y}=ac+bd,|\vec{x}|=\sqrt{a^2+b^2},|\vec{y}|=\sqrt{c^2+d^2}$

因$\vec{x}\bullet\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$，

故，$-|\vec{x}||\vec{y}|\le\vec{x}\bullet\vec{y}\le|\vec{x}||\vec{y}|$，即$|\vec{x}\bullet\vec{y}|\le|\vec{x}||\vec{y}|$

即$|ac+bd|\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$

$\therefore(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

【注】 上面的不等式也叫**柯西不等式**。