好题欣赏——2025 年第 4 期

1. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为（　　）

A．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　　　B．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

【解析】由 $f(x)$ 为奇函数可知 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\dfrac{2f(x)}{x}<0$，而 $f(1)=0$，则 $f(-1)=-f(1)=0$，

当 $x>0$ 时，$\dfrac{2f(x)}{x}<0\Rightarrow f(x)<0\Leftrightarrow f\left(x\right)<f(1)\Rightarrow 0<x<1$

当 $x<0$ 时，$\dfrac{2f(x)}{x}<0\Rightarrow f(x)>0\Leftrightarrow f\left(x\right)>f(-1)$，易知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也为增函数，从而得 $-1<x<0$。

综上，选 D。

2. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（　　）

A．$a^2+b^2\leqslant 1$　　B．$a^2+b^2\geqslant 1$　　C．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$

【解析】由题意知 $\dfrac{\cos\alpha}{a}+\dfrac{\sin\alpha}{b}=1$，由柯西不等式得

$1=\dfrac{\cos\alpha}{a}+\dfrac{\sin\alpha}{b}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$，故 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$，选 D。

3. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

【解析】由题意知三棱锥 A_1-ABC 为正四面体，设棱长为 a，则 $AB_1=\sqrt{3}a$，棱柱的高 $A_1O=\sqrt{a^2-AO^2}=\sqrt{a^2-(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$（即点 B_1 到底面 ABC 的距离），故 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\dfrac{A_1O}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

另解：设 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 为空间向量的一组基底，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 的两两间的夹角为 60^0

长度均为 a，平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{2}{3}a^2, \left|\overrightarrow{OA_1}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}, \left|\overrightarrow{AB_1}\right|=\sqrt{3}$

则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\left|\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1O}\right|\left|\overrightarrow{AB_1}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4. 若样本空间 Ω 中的事件 A_1,A_2,A_3 满足 $P(A_1)=P(A_1|A_3)=\frac{1}{4}$， $P(A_2)=\frac{2}{3}$,

$P(\overline{A_2}|A_3)=\frac{2}{5}$， $P(\overline{A_2}|\overline{A_3})=\frac{1}{6}$，则 $P(A_1\overline{A_3})=$（　　）

A．$\frac{1}{14}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．$\frac{2}{7}$　　D．$\frac{5}{28}$

【解】 由 $P(A_1)=P(A_1|A_3)=\frac{P(A_1A_3)}{P(A_3)}\Rightarrow P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，故 A_1,A_3 相互独立，从而 $A_1,\overline{A_3}$ 也相互独立，

又，$P(\overline{A_2})=P(\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_2}\overline{A_3})=P(A_3)P(\overline{A_2}|A_3)+P(\overline{A_3})P(\overline{A_2}|\overline{A_3})$

$=P(A_3)P(\overline{A_2}|A_3)+(1-P(A_3))P(\overline{A_2}|\overline{A_3})$,

即 $\frac{1}{3}=P(A_3)\times\frac{2}{5}+(1-P(A_3))\times\frac{1}{6}$，解得 $P(A_3)=\frac{5}{7}$,

故 $P(\overline{A_3})=\frac{2}{7}$，从而 $P(A_1\overline{A_3})=P(A_1)P(\overline{A_3})=\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$，选 D。

5. （多选题） A,B 是一个随机试验中的两个事件，且

$P(A)=\frac{3}{5},P(A|B)=\frac{2}{5},P(A+\overline{B})=\frac{7}{10}$，则下列错误的是（　　）

A．$P(B)=\frac{1}{2}$　　B．$P(A\overline{B})=\frac{2}{5}$　　C．$P(\overline{A}B)=\frac{3}{5}$　　D．$P(B|A)=\frac{1}{3}$

【解】 因 $\overline{(A+\overline{B})}=\overline{A}B$，故 $P(\overline{A}B)=1-P(A+\overline{B})=\frac{3}{10}$，故 C 错；选 C。

进一步，$P(A|B)=\frac{2}{5}\Rightarrow P(\overline{A}|B)=\frac{3}{5}$，从而由 $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$,

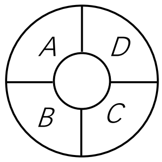
故 A 对；

进而 $P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{2}$，由 $P\left(A+\overline{B}\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\overline{B}\right)=\frac{7}{10}\Rightarrow P\left(A\overline{B}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$，B 对。

$P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$，D 对。

6. 如图，一环形花坛分成 A，B，C，D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）

A．96　　B．84　　C．60　　D．48



【解析】分三类：种两种花有 A_4^2 种种法；种三种花有 $2A_4^3$ 种种法；种四种花有 A_4^4 种种法.共有 $A_4^2+2A_4^3+A_4^4=84$.

【另解】：按 $A-B-C-D$ 顺序种花，可分 A、C 同色与不同色有 $4\times3\times(1\times3+2\times2)=84$

7. $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是（　　）

A．-4　　B．-3　　C．3　　D．4

【解析】$C_6^0\times C_4^2+C_6^1\left(-1\right)\times C_4^1+C_6^2\left(-1\right)^2\times1=-3$，选 B。

【另解】$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4=(1-\sqrt{x})^4(1+\sqrt{x})^4(1-\sqrt{x})^2=\left(1-x\right)^4(1-\sqrt{x})^2$，故其展开式中 x 的系数为：$C_4^1\left(-1\right)\times1+1\times C_2^2\left(-1\right)^2=-3$

8. 若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图像分别交于 M，N 两点，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【解析】在同一坐标系中作出 $f_1(x)=\sin x$ 及 $g_1(x)=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 的图象，由图象知，当 $x=\frac{3\pi}{4}$，即 $a=\frac{3\pi}{4}$ 时，得 $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore|MN|=|y_1-y_2|=\sqrt{2}$

9. 等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x+y-2=0$ 与 $x-7y-4=0$，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为（　　）

A．3　　B．2　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【解析】$l_1: x+y-2=0, k_1=-1$，$l_2: x-7y-4=0, k_2=\frac{1}{7}$，设底边为$l_3: y=kx$

由题意，l_3到l_1所成的角等于l_2到l_3所成的角于是有$\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}\Rightarrow\frac{k+1}{k-1}=\frac{7k-1}{7+3}$

再将 A、B、C、D 代入验证得正确答案是 A

10. 已知球的半径为 2，相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆．若两圆的公共弦长为 2，则两圆的圆心距等于（　　）

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

【解析】设两圆的圆心分别为O_1、O_2，球心为O，公共弦为 AB，其中点为 E，则OO_1EO_2为矩形，于是对角线$O_1O_2=OE$,而$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore O_1O_2=\sqrt{3}$

11. 已知圆的方程为$x^2+y^2-6x-8y=0$．设该圆过点$(3,5)$的最长弦和最短弦分别为AC和BD，则四边形$ABCD$的面积为（　　）

A．$10\sqrt{6}$　　　　B．$20\sqrt{6}$　　　　C．$30\sqrt{6}$　　　　D．$40\sqrt{6}$

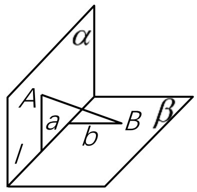
【解析】化成标准方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$，过点$(3,5)$的最长弦为$AC=10,$

最短弦为$BD=2\sqrt{5^2-1^2}=4\sqrt{6},\quad S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=20\sqrt{6}.$

12. 如图，$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，A，B到l的距离分别是a和b，AB与α，β所成的角分别是θ和φ，AB在α，β内的射影分别是m和n，若$a>b$，则（　　）

A．$\theta>\varphi$，$m>n$　　　　B．$\theta>\varphi$，$m<n$

C．$\theta<\varphi$，$m<n$　　　　D．$\theta<\varphi$，$m>n$



【解析】由勾股定理$a^2+n^2=b^2+m^2=AB^2$，又$a>b$，$\therefore m>n$

$\sin\theta=\frac{b}{AB}$，$\sin\phi=\frac{a}{AB}$,而$a>b$，所以$\sin\theta<\sin\phi$，得$\theta<\phi$

13. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$（x，$y\in\mathbf{R}$），$f(1)=2$，则$f(-3)$等于（　　）

A．2　　　B．3　　　C．6　　　D．9

【解析】令$x=y=0\Rightarrow f(0)=0$，令$x=y=1\Rightarrow f(2)=2f(1)+2=6$；

令$x=2, y=1\Rightarrow f(3)=f(2)+f(1)+4=12$，再令$x=3, y=-3$得

$0=f(3-3)=f(3)+f(-3)-18\Rightarrow f(-3)=18-f(3)=6$

14. 为提高信息在传输中的抗干扰能力，通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信

息．设定原信息为$a_0a_1a_2, a_i \in \{0,1\}$（$i=0,1,2$），传输信息为$h_0a_0a_1a_2h_1$，其中$h_0=a_0\oplus a_1$，$h_1=h_0\oplus a_2$，$\oplus$运算规则为：$0\oplus0=0$，$0\oplus1=1$，$1\oplus0=1$，$1\oplus1=0$，例如原信息为 111，则传输信息为 01111．传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错，则下列接收信息一定有误的是（　　）

A．11010　　B．01100　　C．10111　　D．00011

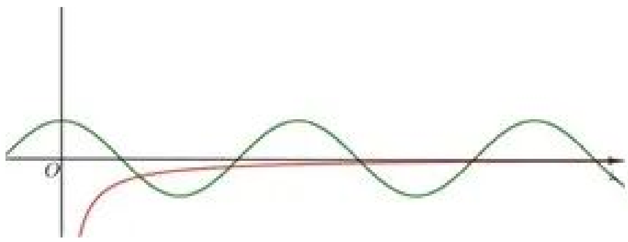
【解析】C 选项传输信息 110，$h_0=0\oplus1=1$，$h_1=h_0\oplus a_2=1\oplus1=0$应该接收信息 10110。

15. （杭州二中）已知函数$f(x)=\sin x+\ln x$，将$f(x)$的所有极值点按照从小到大的顺序排列,得到数列$\{x_n\}$，对于正整数n，下列说法正确的是(　　)。

A．$(n-1)\pi<x_n<n\pi$　　B．$x_{n+1}-x_n<\pi$

C．$\left\{\left|x_n-\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right|\right\}$为递减数列　　D．$f(x_{2n})>-1+\ln\dfrac{(4n-1)\pi}{2}$

【解析】$f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\cos x=-\dfrac{1}{x}$，数形结合，参考下图



显然，$f(x)$的极值点为$y=\cos x$和$y=-\dfrac{1}{x}$图像之交点，从图像看：

$x_1\in(0,\pi),x_2\in(\pi,2\pi),x_3\in(2\pi,3\pi),x_4\in(3\pi,4\pi),\cdots,x_n\in((n-1)\pi,n\pi)$

对于 A，显然对；

对于 B，显然$x_3-x_2>\pi$，故 B 错；

对于 C，从图像上看，x_n与$\cos x$的第n个零点之间的距离越来越小，故 C 对；

对于 D，从图像上看，x_{2n}为$f(x)$的极小值点，$f(x)$在$(x_{2n},2n\pi)$上单调递增，在$(x_{2n},2n\pi)$上有$\cos x$的零点$2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$，故$f(x_{2n})<f\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

因$f\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)+\ln\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+\ln\dfrac{(4n-1)\pi}{2}$，故 D 错。

综上，选 AC。

16. （插空法）10 个节目中有 6 个演唱 4 个舞蹈，要求每两个舞蹈之间至少安排一个演唱，有多少种不同的安排节目演出顺序的方式?

【解析】: 先将 6 个演唱节目任意排成一列有 A_6^6 种排法，再从演唱节目之间和前后一共 7 个位置中选出 4 个安排舞蹈有 A_7^4 种方法，故共有 $A_6^6\times A_7^4$=604800 种方式。

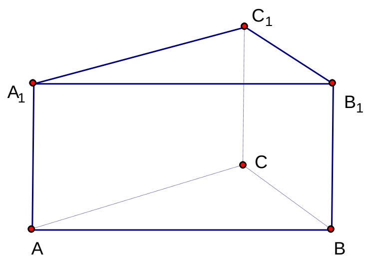
17. 将 20 本不同的书分 6 堆，其中每堆 4 本的有 3 堆，每堆 3 本有 2 堆，剩下的为 1 堆，则共有______种不同的分法。

【解析】 $\dfrac{C_{20}^4C_{16}^4C_{12}^4C_8^3C_5^3}{A_3^3A_2^2}$

18. 马路上有编号为 1 到 9 的九盏路灯，现要关掉其中的 3 盏，要求首尾两盏不能关，且不能同时关掉相邻的 2 盏或 3 盏，则共有______种不同的方法 （用数字作答）

【解析】关掉 3 盏灯，还有 6 盏亮着，其中首尾两盏始终亮着，因此中间还有 4 盏亮着，这 4 盏灯形成 5 个空格，从中任选 3 个空格各插入一盏关着的灯即可满足要求，故，总的关灯方式有: $C_5^3=10$ 种

19. 某人有 4 种颜色的灯泡（每种颜色的灯泡足够多），要在如图所示的 6 个点 A、B、C、A_1、B_1、C_1 上各装一个灯泡，要求同一条线段两端的灯泡不同色，则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有________种（用数字作答）.



【巧解】先染 A,B,C，有 $A_4^3=24$ 种，现考察其中一种，比如 $A=1,B=2,C=3$ 的情况，此时，

如 $A_1=2$，则 $B_1=1$ 时，C_1 有 1 种；$B_1=3$ 时，C_1 有 2 种；$B_1=4$ 时，C_1 有 1 种；共 4 种；

如 $A_1=3$，仿上，染 B_1、C_1 共有 4 种方法

如 $A_1=4$，染 B_1、C_1 共有 3 种方法

以上共有 $24\times11=264$ 种；

但其中显然包含只用了三种颜色的情况，因此需减掉；

易知：只用三种颜色的情况有 $A_4^3\times2=48$ 种；

综上，共有 $264-48=216$ 种

20. 电影院一排有八个座位，甲、乙、丙、丁四位同学相约一起看电影，他们要求坐在同一排，问恰好有两个连续的空座位的情况有______种。

【解析】显然，空座位有 4 个，由于要求有两个连续的空座位，因此，我们捆绑两个空座位，并采用插空法。

先排甲、乙、丙、丁四位同学，有 A_4^4 种排法，对其中每一种排法，产生 5 个空格，现将 3 个元素插入，有 A_5^3 种插法，注意插入的 3 个元素，有一个是捆绑在一起的两个空座位，另两个元素分别是两个空座位，由于这两个空座位交换顺序并不产生新排列，因此，总的座法有

$\dfrac{A_4^4A_5^3}{A_2^2}=720$ 种。

21. （鞋子问题）从 6 双不同的鞋中任取 4 只，其中至少有 1 双的选法有多少种?

【提示】:（1）4 只鞋恰好组成 2 双，有 $C_6^2=15$ 种;（2）4 只鞋恰好组成 1 双，先选 1 双完整的，再从剩下 5 双中任选 2 双，然后再这 2 双中各选 1 只，共有 $C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1=240$ 种；因此，总共有 255 种选法。

22. 将两个 a 和两个 b 共 4 个字母填入 4×4 的方格表内，每格至多填一个字母，则相同字母既不同行又不同列的填法种数是______。

【解析】如图

3	2	2	3
2	***a***	1	2
2	1	***a***	2
3	2	2	3

如果只考虑两个 a，显然有 $\dfrac{C_{16}^1C_9^1}{C_2^2}=72$ 种填法；同样，两个 b 也有 72 种填法，因此一共有 72^2 种填法，现减掉其中不合要求的；一是两个 b 都填在两个 a 的位置，有 72 种；另一种情况是恰有一个 b 填在了 a 的位置，有 $C_{16}^1A_9^2$ 种；

综上，符合要去的填法有 $72^2-72-C_{16}^1A_9^2=3960$ 种。

23. （全国 II）$(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 $a=$（　　）

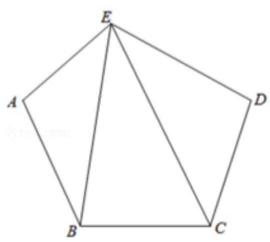
【解析】设奇数次幂项和偶数次幂项的系数分别为 A 和 B，则 $\begin{cases}A+B=2^4(a+1)\\B-A=0\\A=32\end{cases}$，解得 $a=3$。

24. 对于$\left(x+y+z+w\right)^{10}$，其展开后有_____项，展开式中$x^3y^4z^2w$的系数为______。

【解析】: 由于$\left(x+y+z+w\right)^{10}$展开后的每一项，不看系数，都可写成$x^iy^jz^kw^l$ 的形式，其中$i+j+k+l=10$，因此，$\left(x+y+z+w\right)^{10}$展开后有多少项，就等价于方程$i+j+k+l=10$有多少组不同的非负整数解，易知该方程有$C_{13}^3=286$组非负整数解，因此$\left(x+y+z+w\right)^{10}$展开后有286 项。

$\left(x+y+z+w\right)^{10}$表示 10 个$\left(x+y+z+w\right)$相乘，从中任取 3 个括号，让其贡献$x$；从剩下的 7 个括号中任取 4 个括号，让其贡献y；再从剩下的 3 个括号中任取 2 个括号贡献z；最后一个括号贡献w，因此$x^3y^4z^2w$的系数为$C_{10}^3C_7^4C_3^2=12600$。

25. 如图，给 7 条线段的 5 个端点涂色，要求同一条线段的两个端点不能同色，现有 4 种不同的颜色可供选择，则不同的涂色方法有_______种。



【解析】先给 B,C,E 涂色，有$A_4^3=24$种不同的涂法，此后图 A、D，各有 2 种不同的涂法。最终，有$24\times2\times2=96$种不同的涂法。

26. 已知复数z_1,z_2满足$|z_1|=2,|z_2|=3$，若它们所对应向量的夹角为 60°，则$\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=$____

【解析】由余弦定理得$|z_1+z_2|=\sqrt{19},|z_1-z_2|=\sqrt{7}$，故$\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{133}}{7}$

27. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n且$S_8-2S_4=6$，则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为

_____

【解析】易知$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8$；由$S_8-2S_4=6$可得$S_8-S_4=S_4+6$,由等比数列的性质可得$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$成等比数列,则$S_4\left(S_{12}-S_8\right)=\left(S_8-S_4\right)^2=(S_4+6)^2$

综上可得：$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8=\dfrac{(S_4+6)^2}{S_4}=\dfrac{S_4^2+12S_4+36}{S_4}$

$=S_4+\frac{36}{S_4}+12\ge 2\sqrt{S_4\times\frac{36}{S_4}}+12=24$

当且仅当 $S_4=6$ 时等号成立.综上可得,则 $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$ 的最小值为 24.

28. 已知实数 x_1,y_1,x_2,y_2 满足 $x_1^2+y_1^2=4,x_2^2+y_2^2=9$，$x_1x_2+y_1y_2=x_1+x_2-1$，则 $\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2$ 的最大值为________。

【解析】由题意可知 $\left(x_1+x_2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2=11+2\left(x_1+x_2\right)\ge\left(x_1+x_2\right)^2$

解得 $1-2\sqrt{3}\le x_1+x_2\le 1+2\sqrt{3}$

又，$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=15-2\left(x_1-x_2\right)\le 15-2\left(1-2\sqrt{3}\right)=13+4\sqrt{3}$

当 $x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}},x_1+x_2=1-2\sqrt{3},y_1+y_2=0$ 时取等号。

故，$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2$ 的最大值为 $13+4\sqrt{3}$。

【法二】$x_1x_2+y_1y_2=x_1+x_2-1\Rightarrow\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=0$,

令 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),P\left(1,0\right)$，则 $\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=0\Rightarrow\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=0$，也即 $PA\perp PB$，

作矩形 $APBQ$，由矩形大法知：$OA^2+OB^2=OP^2+OQ^2$（空间中任意一点到矩形一条对角线两端点的距离之平方和等于该点到矩形另一条对角线两端点距离的平方和），从而得

$4+9=1+OQ^2\Rightarrow OQ^2=12\Rightarrow OQ=2\sqrt{3}$,

由于 $AB=PQ\le PO+OQ=1+2\sqrt{3}$（矩形两条对角线相等，三角形两边之和大于第三边），得

$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=AB^2\le\left(1+2\sqrt{3}\right)^2=13+4\sqrt{3}$。

29. **(重庆八中 2025 届高三下 2 月第二次周考)**、已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公比 $q>1,a_1+a_2+a_3=14$，a_2+1 是 a_1,a_3 的等差中项，等差数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $2b_1=a_2,b_4=a_3$。

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\frac{b_n}{a_n}\left(n\in N^*\right)$，求数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和；

（3）将数列 $\left\{a_n\right\}$ 和 $\left\{b_n\right\}$ 的所有项按照从小到大的顺序排列成一个新的数列，求此新数列的前 2^n 项和。

【解】（1）$a_n=2^n,b_n=2n$，过程略。

（2） $c_n=\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$，属于差比数列求前 n 项和，易得 $S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$。过程略。

（3）我们先分析一下，找找规律，比如，取 $n=3$，则考虑新数列中前 8 项，易知 $\{a_n\}$ 出了 3 项，最大的为 $a_3=8$，$\{b_n\}$ 出 5 项，最大的为 $b_5=2\times5=10$，此时的 $b_5=10<a_4=16$，看样子没什么问题；取 $n=4$，考虑 $\{a_n\}$ 先出 4 项，最大的为 $a_4=2^4=16$，那 $\{b_n\}$ 得出 12 项，最大的为 $b_{12}=24<a_5=32$，也好求；

于是猜测，新数列的前 2^n 项中，数列 $\{a_n\}$ 出 n 项，最大的一项为 $a_n=2^n$，则数列 $\{b_n\}$ 需出 2^n-n 项，$\{b_n\}$ 中最大的一个为 $b_{2^n-n}=2(2^n-n)=2^{n+1}-2n$，我们希望 $2^n\le a_n\le b_{2^n-n}=2^{n+1}-2n\le a_{n+1}=2^{n+1}$，如何这样的话，新数列的前 2^n 项和就非常好求，但这要求 $2^n\le 2^{n+1}-2n\le 2^{n+1}$，后一不等式显然成立，由于 $2^{n+1}-2n\ge 2^n\Leftrightarrow 2^{n+1}-2^n\ge 2n\Leftrightarrow 2^n\ge n$，显然也没有问题。

因此，新数列的前 2^n 项和为

$$S=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{2^n-n}b_k=\sum_{k=1}^{n}2^k+\sum_{k=1}^{2^n-n}2k=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+2\times\frac{2^n-n}{2}(1+2^n-n)$$

$$=2^{n+1}-2+(2^n-n)(2^n-n+1)=4^n-(2n-3)\cdot2^n+n^2-n-2。$$

30. **（重庆八中 2025 届高三下 2 月第二次周考）**、乒乓球比赛有两种赛制，其中就有“5 局 3 胜制”和“7 局 4 胜制”，“5 局 3 胜制”指 5 局中胜 3 局的一方取得胜利，“7 局 4 胜制”指 7 局中胜 4 局的一方取得胜利。

(1)甲、乙两人进行乒乓球比赛，若采用5局3胜制，比赛结束算一场比赛，甲获胜的概率为0.8；若采用7局4胜制,比赛结束算一场比赛，甲获胜的概率为0.9.已知甲、乙两人采用两种赛制各共进行了 $m(m\in N^*)$ 场比赛,请根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的 K^2 独立性检验，来推断赛制是否对甲获胜的场数有影响。

(2)若甲、乙两人采用5局3胜制比赛，设甲每局比赛的胜率均为 p，没有平局.记事件“甲只要取得 3 局比赛的胜利比赛结束且甲获胜”为 A，事件“两人赛满5局，甲至少取得3局比赛胜利且甲获胜”为 B，试证明：$P(A)=P(B)$.

(3)甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局比赛甲的胜率都是 $p(p>0.5)$，没有平局。若采用“赛满 $2n-1$ 局，胜方至少取得 n 局胜利”的赛制，甲获胜的概率记为 $P(n)$。若采用“赛满 $2n+1$

局，胜方至少取得$n+1$局胜利”的赛制，甲获胜的概率记为$P(n+1)$，试比较$P(n)$与$P(n+1)$的大小。

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$

$P(K^2\ge k_0)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

【解析】(1) 由题设，赛制与甲获胜情况的2×2列联表如下：

	甲获胜场数	乙获胜场数	
5 局 3 胜	$0.8m$	$0.2m$	m
7 局 4 胜	$0.9m$	$0.1m$	m
	$1.7m$	$0.3m$	$2m$

$K^2=\dfrac{2m\left(0.08m^2-0.18m^2\right)^2}{1.7m\times0.3m\times m\times m}=\dfrac{2m}{51}$，如$\dfrac{2m}{51}\ge6.635\Rightarrow m\ge169.1925$，故

当$m\ge170$时，赛制对甲获胜的场数有影响；

当$m\le169$时，赛制对甲获胜的场数无影响；

(2) 显然，事件A由“连胜 3 局”，“4 打 3 胜”和“5 打 3 胜”三个事件组成，故

$P(A)=p^3+C_3^2p^2(1-p)p+C_4^2p^2(1-p)^2p=6p^5-15p^4+10p^3$；

易知$P(B)=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5=6p^5-15p^4+10p^3$

故$P(A)=P(B)$，证毕。

(3) 我们寻求$P(n+1)$的递推关系式。对于赛满$2n+1$局的情况，我们将前$2n-1$比赛看成第一阶段，后 2 局比赛看成第二阶段。

如果第一阶段获胜，也即甲至少胜n局，概率为$P(n)$。但至少胜n局包含刚好胜n局和至少胜$n+1$局，如果至少胜$n+1$局，当然能保证赛满$2n+1$局时甲获胜；但刚好胜n局则不能保证赛满$2n+1$局时甲仍获胜，那就是第二阶段的 2 局均输掉的情况，因此这种情形的概率为$P(n)-C_{2n-1}^np^n(1-p)^{n-1}(1-p)^2=P(n)-C_{2n-1}^np^n(1-p)^{n+1}$；

如果第一阶段输掉，但要想赛满$2n+1$局时甲获胜，则第一阶段甲必须赢$n-1$局，且第二阶段的 2 局必须连胜，这种情形的概率为$C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n p^2=C_{2n-1}^np^{n+1}(1-p)^n$，

综上，我们得到

$$p(n+1)=P(n)-C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n+1}+C_{2n-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^{n}$$

故 $p(n+1)-P(n)=C_{2n-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^{n}-C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n+1}=C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n}(2p-1)$

因为 $p>\frac{1}{2}$，故 $p(n+1)-P(n)=C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n}(2p-1)>0$，即 $p(n+1)>P(n)$。