第 7 章 立体几何与空间向量

§ 7.1 空间几何体基础

7.1.1 相关概念

学习目标

1.认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征；

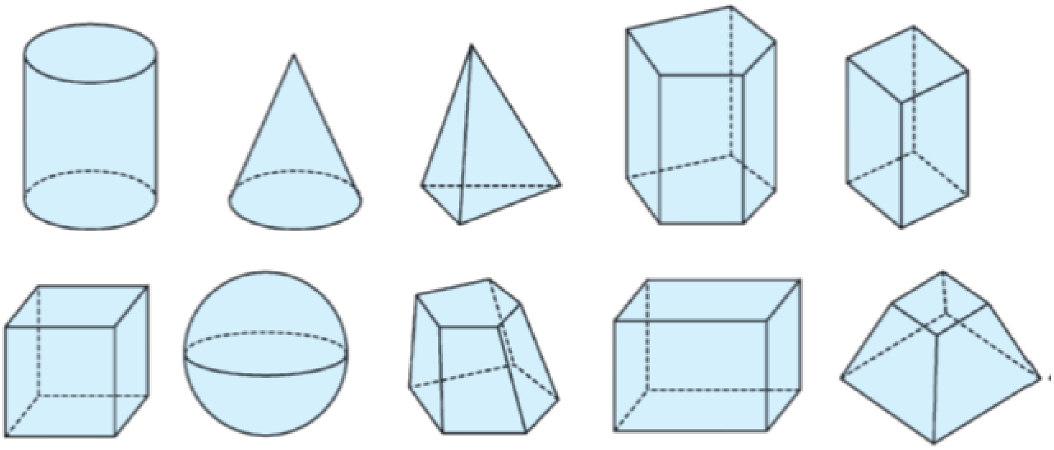
2.会用斜二测画法画出简单空间几何体的直观图；

3、会求常见空间几何体的表面积和体积。

1、多面体

定义：由平面多边形围成的几何体叫多面体，这些多边形称为多面体的面，其中每个多边形的边称为多面体的棱，每个多边形的顶点，即每条棱的端点，称为多面体的顶点。

例：下面这些几何体，哪些是多面体



2、棱柱

有两个面互相平行，其余各面都是同时与这两个面相邻的平行四边形的多面体叫棱柱。

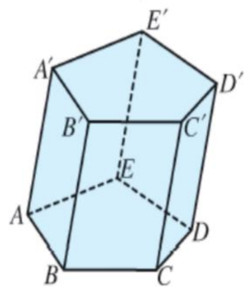
两个互相平行的面叫棱柱的底面。其余各面叫棱柱的侧面，相邻两个侧面的公共边叫棱柱的侧棱，所有的侧棱互相平行，既不在同一底面上也不在同一侧面上的两个顶点的连线叫做棱柱的对角线。

侧面平行四边形是矩形的棱柱叫直棱柱。

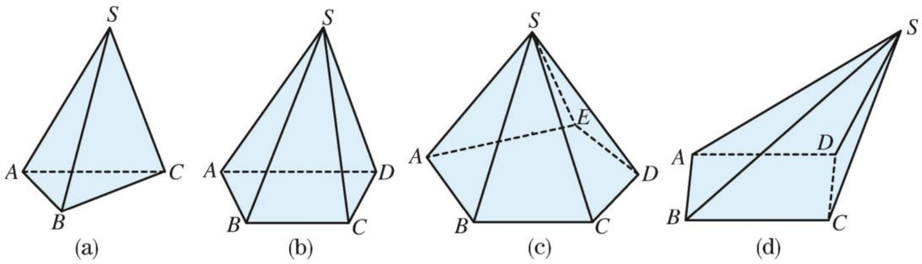
棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形等，这样的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱等，

如果棱柱的底面和侧面都是矩形，这样的棱柱叫长方体；所有棱长都相等的长方体叫正方体。

如果棱柱的底面是平行四边形，则这样的棱柱叫平行六面体。



3、棱锥



(a) (b) (c) (d)

看上面的几个几何体，它们的共同点是有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，像这样的多面体叫棱锥。这个公共顶点叫棱锥的顶点，有公共顶点的三角形面叫侧面，剩下的一个多边形面叫棱锥的底面，相邻两个侧面的公共边叫棱锥的侧棱。

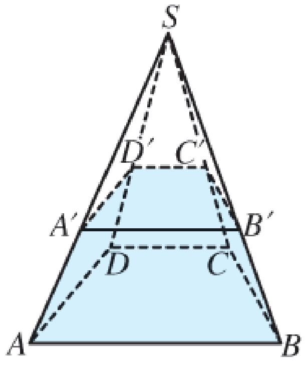
棱锥的底面可以是三角形、四边形、五边形等，这样的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥等。棱锥可以用顶点和底面各顶点的字母来表示。如上图（C）中的棱锥，表示为 $S-ABCDE$ 。

(1)正棱柱：侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱，底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱．反之，正棱柱的底面是正多边形，侧棱垂直于底面，侧面是矩形．

(2)正棱锥：底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面正多边形的中心的棱锥叫做正棱锥．特别地，各棱均相等的正三棱锥叫正四面体．

4、棱台

过棱锥的任一侧棱上不与侧棱端点重合的一点，作一个平行于底面的平面去截棱锥，截面和原棱锥底面之间的部分叫做棱台。截面和原棱锥底面分别叫棱台的上底面和下底面，其余各面叫棱台的侧面。棱台的侧面都是梯形。相邻侧面的公共边叫棱台的侧棱，既不在同一个底面上，也不在同一个侧面上的两个顶点的连线叫棱台的对角线。

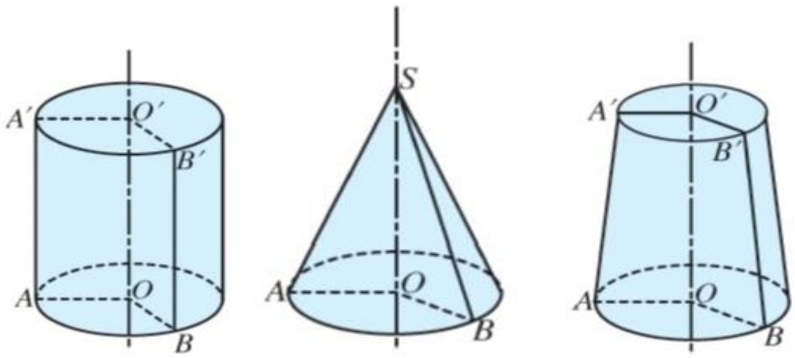


5、圆柱和圆锥

以矩形的一条边所在直线为旋转轴，其余三边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫圆柱。旋转轴叫做圆柱的轴，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；平行于轴的边旋转而成的曲面叫圆柱的侧面，无论旋转到什么位置，平行于轴的边都叫做圆柱侧面的母线。如图所示的圆柱，通常记作圆柱 $O'O$。

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫圆锥。仿照圆柱，圆锥也有的轴、底面、侧面和母线。如图所示的圆锥，通常记作圆锥 SO。

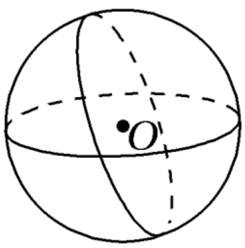
用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫做圆台，与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面和母线。圆台也用表示其轴的字母来表示，如图所示的圆台，常记作圆台 $O'O$。



6、球

半圆以其直径所在直线为旋转轴，旋转一周形成的曲面叫球面，球面所围成的旋转体叫球体，简称球。半圆的圆心叫做球心，连接球心和球面任意一点的线段角球的半径，连接球面上连点，且经过球心的线段叫球的直径。球常用表示球心的字母来表示，比如图中的球，记作球 O。

棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、棱台、圆台和球，是最常见的简单几何体，其中，棱柱和圆柱统称柱体，棱锥和圆锥统称锥体，棱台和圆台统称台体。



7、空间几何体的直观图

空间几何体的直观图常用斜二测画法来画，基本步骤是：

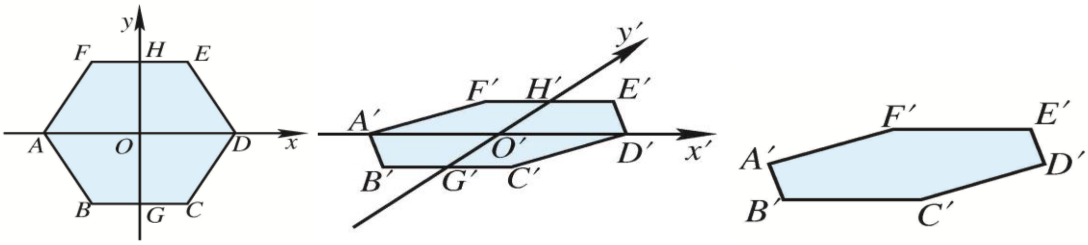
(1)画几何体的底面

在已知图形中取互相垂直的 x 轴、y 轴，两轴相交于点 O，画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴、y' 轴，两轴相交于点 O'，且使 $\angle x'O'y' = \underline{45^\circ \text{ 或 } 135^\circ}$，已知图形中平行于 x 轴、y 轴的

线段，在直观图中平行于x'轴、y'轴．已知图形中平行于x轴的线段，在直观图中长度不变，平行于y轴的线段，长度变为原来的一半.

(2)画几何体的高

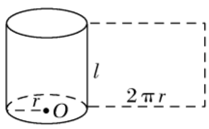
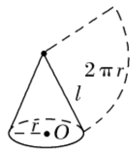
在已知图形中过O点作z轴垂直于xOy平面，在直观图中对应的z'轴则过O'且与$O'x'$垂直，已知图形中平行于z轴的线段，在直观图中平行于z'轴且长度不变．



8、空间几何体的表（侧）面积

多面体的各个面都是平面，则多面体的侧面积就是所有侧面的面积之和，**表面积**是侧面积与底面面积之和.

（1）圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{圆柱侧}=2\pi rl$	$S_{圆锥侧}=\pi rl$	$S_{圆台侧}=\pi(r_2-r_1)l$

（2）柱、锥、台和球的表面积和体积

	表面积	体积
柱体(棱柱和圆柱)	$S_{表面积}=S_{侧}+2S_{底}$	$V=Sh$
锥体(棱锥和圆锥)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{底}$	$V=\frac{1}{3}Sh$
台体(棱台和圆台)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$	$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$
球	$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

7.1.2 典型例题

例 1（1）关于空间几何体的结构特征，下列说法不正确的是(　　)

A.棱柱的侧棱长都相等　　B.棱锥的侧棱长都相等

C.三棱台的上、下底面是相似三角形　　　　　　　　　　D.有的棱台的侧棱长都相等

（2）下列说法正确的是(　　).

A．有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱

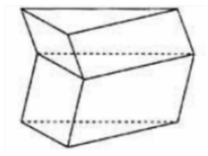
B．有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

C．有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫棱锥

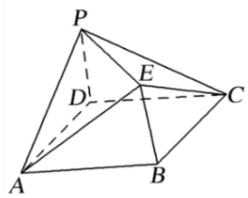
D．棱台各侧棱的延长线交于一点

【解析】（1）根据棱锥的结构特征知，棱锥的侧棱长不一定都相等。选 B

（2）D．



（2）中A、B的反例



（2）中C的反例

例 2.下列结论正确的是(　　)

A.各个面都是三角形的几何体是三棱锥

B.夹在圆柱的两个平行截面间的几何体还是一个旋转体

C.棱锥的侧棱长与底面多边形的边长相等，则此棱锥可能是六棱锥

D.圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线都是母线

【解析】A 不正确. 如图 1;

B 不正确，如图 2;

C：此时的六棱锥必为正六棱锥，底面为正六边形，但此时侧棱长必然要大于底面边长，C 错误.

D：由母线的概念知，选项 D 正确.

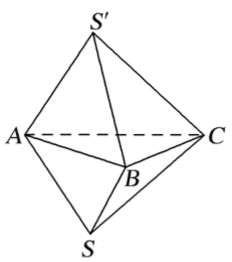


图1

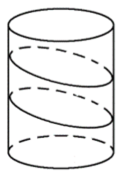
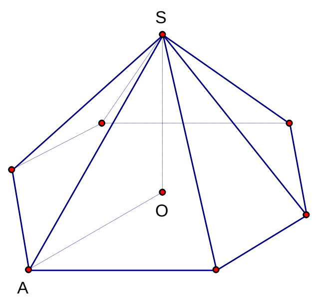


图2



例 3.下列命题正确的是(　　)

A.两个面平行，其余各面都是梯形的多面体是棱台

B.两个面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台

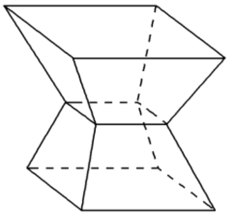
C.以直角梯形的一条直角腰所在的直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体是

圆台

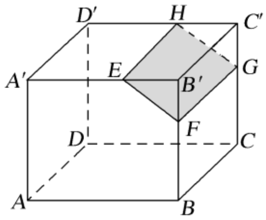
D.用平面截圆柱得到的截面只能是圆和矩形

【解析】如图所示，可排除 A，B 选项.只有截面与圆柱的母线平行或垂直，则截得的截面为矩形或圆，否则为椭圆或椭圆的一部分.

综上，选 C。



例 4.如图，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被截去一部分，其中 $EH//A'D'$.剩下的几何体是(　　)



A.棱台　　　B.四棱柱　　　C.五棱柱　　　D.六棱柱

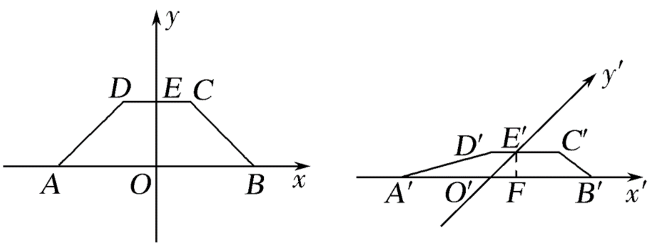
【解析】由几何体的结构特征，剩下的几何体为五棱柱，选 C。

例 5.已知等腰梯形 $ABCD$，上底 $CD=1$，腰 $AD=CB=\sqrt{2}$，下底 $AB=3$，以下底所在直线为 x 轴，则由斜二测画法画出的直观图 $A'B'C'D'$ 的面积为________.

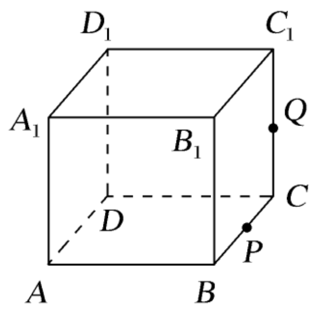
【解析】如图所示，作出等腰梯形 $ABCD$ 的直观图:

因为 $OE=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$，所以 $O'E'=\frac{1}{2}, E'F=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

则直观图 $A'B'C'D'$ 的面积 $S'=\frac{3+1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

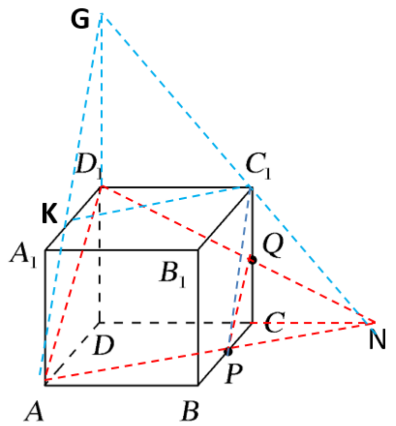


例 6.如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点(异于 C 点)，过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面记为 M 。当 $CQ=$________时(用数值表示)，M 为等腰梯形；当 $CQ=4$ 时，M 的面积为________.



【解析】当Q为CC_1的中点，即$CQ=2$时，M为等腰梯形。理由如下：连接AP，设其交DC延长线于N，连接D_1N，则D_1N必过点CC_1的中点Q，易知Q也为D_1N的中点，因此$PQ//AD_1$，截面M为四边形$APQD_1$，它首先为梯形，又，$AP=D_1Q=\sqrt{20}$，故M为等腰梯形；

当$CQ=4$时，设NQ交DD_1延长线于G，连接AG，设其交A_1D_1于K，易知K为A_1D_1的中点，截面M为四边形APC_1K，易知四边形APC_1K的四条边长均为$\sqrt{20}$，故M为菱形。易知M两条对角线长分别为$4\sqrt{3}$和$4\sqrt{2}$，故其面积为$\frac{1}{2}(4\sqrt{3})(4\sqrt{2})=8\sqrt{6}$。



例7.求证：直三棱柱任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积。

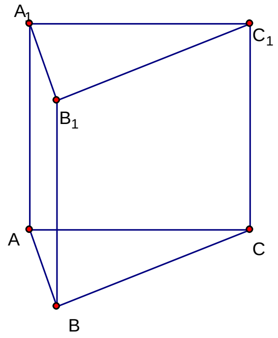
【证明】：如图，令$AB=c,BC=a,AC=b,BB_1=d$，

则$S_{ABB_1A_1}+S_{BCC_1B_1}=cd+ad=d(a+c)>db=S_{ACC_1A_1}$

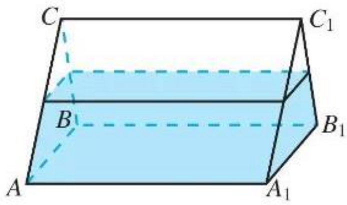
同理可证：$S_{ABB_1A_1}+S_{ACC_1A_1}>S_{BCC_1B_1}$

$S_{BCC_1B_1}+S_{ACC_1A_1}>S_{ABB_1A_1}$。

综上，直三棱柱任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积，证毕。



例 8.如图，一个三棱柱形容器中盛有水，侧棱 $AA_1=8$，若侧面 AA_1B_1B 水平放置时，水面恰好过 AC,BC,A_1C_1,B_1C_1 的中点，那么，当底面 ABC 水平放置时，水面高为多少?



【解析】易知，水的体积为 $V=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}\times AA_1=6S_{\triangle ABC}$，

设底面 ABC 水平放置时，高为 h，则由 $hS_{\triangle ABC}=6S_{\triangle ABC}$ 得 $h=6$。

故，底面 ABC 水平放置时，高为 6。

例 19(天津高考)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E,F,G,H,M (如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为________.

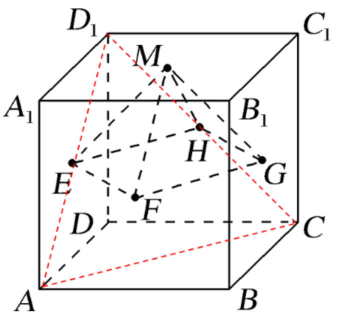
【解析】连接 AD_1,CD_1,DB ,易知 E,H 分别为 AD_1,CD_1 的中点，所以 $EH=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

同理：四棱锥 $M-EFGH$ 的其他棱长也为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

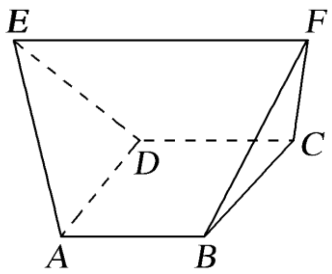
考虑到 $EH//AC,EF//BD,AC\perp BD$，

故四棱锥 $M-EFGH$ 为正四棱锥，且 M 到底面 $EFGH$ 的高显然为 $\frac{1}{2}$，故

$$V_{M-EFGH}=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$



例 10.如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $\triangle ADE,\triangle BCF$ 均为正三角形，$EF//AB,EF=2$，则该多面体的体积为(　　)



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

【解析】如图，分别过点 A,B 作 EF 的垂线，垂足分别为 G,H，连接 DG,CH，

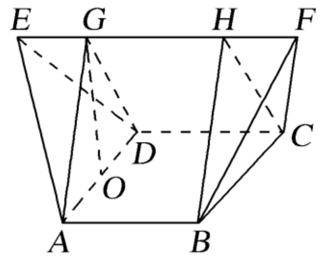
容易求得 $EG=HF=\dfrac{1}{2},AG=GD=BH=HC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

取 AD 的中点 O，连接 GO，易得，$GO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle AGD}=S_{\triangle BHC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$ 多面体的体积 $V=V_{三棱锥E-ADG}+V_{三棱锥F-BCH}+V_{三棱柱AGD-BHC}$

$=2V_{三棱锥E-ADG}+V_{三棱柱AGD-BHC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{1}{2}\times 2+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故选 A.



例 11 (多选) 设动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上（含内部），且 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}$，当 $\angle APC$ 为锐角时，实数 λ 可能的取值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

【解析】设 $AP=x,D_1P=t$，设正方体的棱长为 1，则 $AC=\sqrt{2}$，在 $\triangle APC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle APC=\dfrac{x^2+x^2-2}{2x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$，

若 $\angle APC$ 为锐角，则 $\dfrac{x^2-1}{x^2}>0$，则 $x^2>1$，

在$\triangle AD_1P$中，$AD_1=\sqrt{2},\cos\angle AD_1P=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

于是，由余弦定理得$x^2=2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

于是$2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}>1$，即$3t^2-4\sqrt{3}t+3>0$

解之得：$t>\sqrt{3}$或$t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由于$D_1B=\sqrt{3}$,故$t>\sqrt{3}$（舍去），

只能取$t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而$\lambda=\dfrac{D_1P}{D_1B}<\dfrac{1}{3}$，只能选 C、D

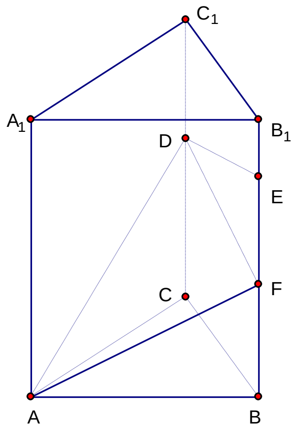
例 12（全国 I）一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上．已知正三棱柱的底面边长为 2，则该三角形的斜边长为____________.

【解析】由于斜边最长，通过平移，总可使斜边的一个顶点位于正三棱柱的一个顶点，如图所示。不妨设$\triangle AFD$为等腰直角三角形，AD为斜边，其长为x，过D作$DE\perp BB_1$，垂足为B_1，设$BF=b$，

易知$EF=b$，从而$DC=2b$；

由$AD^2=AC^2+DC^2=2AF^2$得$x^2=4+4b^2=2(4+b^2)$，

解得$b=\sqrt{2}$，从而$x=2\sqrt{3}$



例 13.已知正四面体$A-BCD$的棱长为 2，则该四面体内切球半径为（　　）

【解析】设正四面体的棱长为a，高为h，则底面积$S_{\triangle BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，高$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，

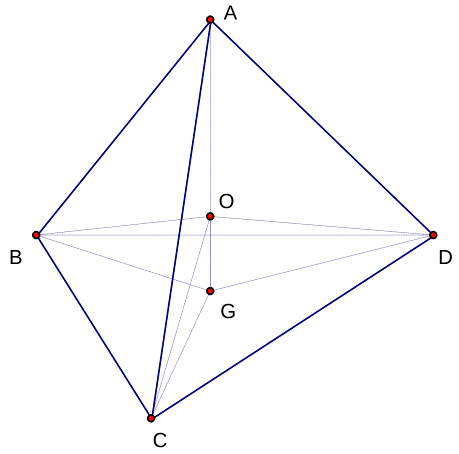
故，$V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}h=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

另一方面，设$A-BCD$内切球球心为O，半径为r，

$V_{A-BCD}=4V_{O-BCD}$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=4\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times r$

则 $r=\frac{\sqrt{2}a}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{12}a=\frac{\sqrt{6}}{12}\times 2=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

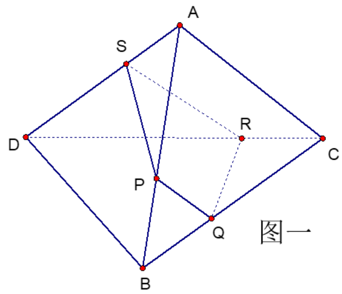
【注意】本题中的四面体也属于等腰四面体，有公式：$h=4r$



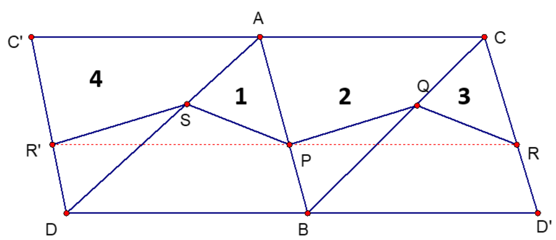
例 14.如图，四面体 $A-BCD$ 中，$AB=CD=a,\ AC=BD=b,\ AD=BC=c$，平面 α 分别截 AB、BC、CD、DA 于点 P、Q、R、S，则四边形 $PQRS$ 周长的最小值为（　　）

【解析】先处理 B 点处的三个面（注意，以 B 为顶点的三个面角之和为 180°）。将棱 DC 剪开，先将 $\triangle ABD,\triangle ABC$ 压在一个平面上，如图二中的区域 1，2；再将原四面体的底面 $\triangle BDC$ 在保持 BC 不动的基础上，将 D 点往右下拉伸在区域 1，2 所在平面，得到区域 3；最后将 $\triangle ADC$ 在保持 DC 不动的基础上，将 C 点往左上拉伸在区域 1，2，3 所在的平面，得到区域 4。

显然，四边形 $PQRS$ 的周长为图中折线段 $R'SPQR$ 的长，其最小值为线段 $R'R$ 的长，即 $2b$。



图一



图二

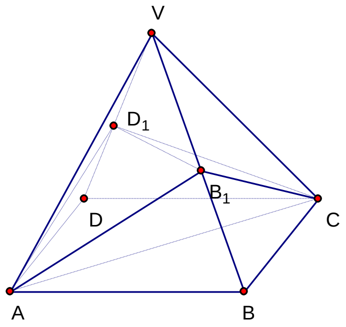
例 15（清华自招）在四棱锥 $V-ABCD$ 中，B_1,D_1 分别是棱 VB,VD 的中点，则四面体 $A-B_1CD_1$ 的体积与四棱锥 $V-ABCD$ 的体积之比为（　　）

A．$1:6$　　B．$1:5$　　C．$1:4$　　D．$1:3$

【解析】不妨设 $V_{V-ABCD}=1$，易知 $V_{B_1-ABC}=V_{D_1-ACD}=\frac{1}{4}$，$V_{D_1-B_1CV}=\frac{1}{4}V_{D-BCV}=\frac{1}{8}$；

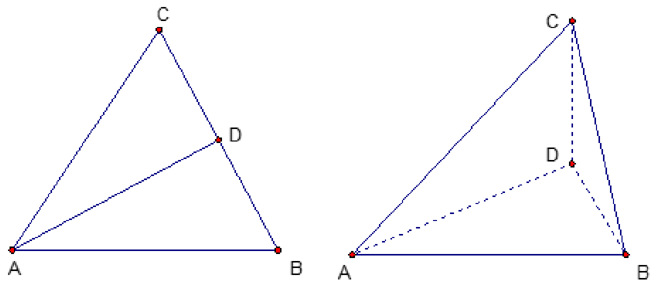
同理，$V_{D_1-B_1AV}=\frac{1}{8}$

故$V_{A-B_1CD_1}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，选 C。



例 16.已知边长为 2 的等边$\triangle ABC$，D为BC的中点，沿AD进行折叠，使折叠后的$\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，则过A,B,C,D四点的球的表面积为(　　)

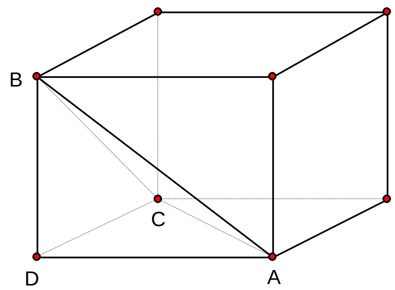
A. 3π　　　B. 4π　　　C. 5π　　　D. 6π



【解析】由题意知：DA,DB,DC两两垂直，因此，可将三棱锥$C-ABD$扩充为长方体，该长方体与三棱锥$C-ABD$有相同的外接球，长方体的体对角线即为外接球的直径。

易知$DA=\sqrt{3},DB=DC=1$，

故，三棱锥$C-ABD$外接球的表面积为：$4\pi R^2=((\sqrt{3})^2+1^2+1^2)\pi=5\pi$



例 17.如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC=2,\angle ABC=120^\circ$.若平面$ABC$外的点$P$和线段$AC$上的点$D$，满足$PD=DA,PB=BA$，则四面体$PBCD$的体积的最大值是________.

【解析】设$PD=DA=x$，

在$\triangle ABC$中，$AB=BC=2,\angle ABC=120^\circ$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC}=\sqrt{4+4-2\times2\times2\cdot\cos120^\circ}=2\sqrt{3}$，

$\therefore CD=2\sqrt{3}-x$，且$\angle ACB=30^\circ$，

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DC\sin\angle ACB=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-x\right)$

设P到平面BCD的距离为h，显然有$h\le x$，

故，$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times h\le\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times x=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-x)x=\frac{1}{6}[-(x-\sqrt{3})^2+3]\le\frac{1}{2}$

仅当$x=\sqrt{3}$时取等号，

因$0<x<2\sqrt{3}$，等号可以取得，

故四面体$P-BCD$体积的最大值为$\frac{1}{2}$