习题课

1. 设函数 $f\left(x\right)$ 满足 $x^2 f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}, f\left(2\right)=\dfrac{e^2}{8}$，则 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$（　　）

（A）有极大值，无极小值　　（B）有极小值，无极大值

（C）既有极大值又有极小值　　（D）既无极大值也无极小值

【解】 $x^2 f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x} \Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{e^x-2x^2 f(x)}{x^3}$

令 $g(x)=e^x-2x^2 f(x)(x>0)$，则

$$g'(x)=e^x-[2x^2 f'(x)+4xf(x)]=e^x-2x^2\times\frac{e^x-2x^2 f(x)}{x^3}-4xf(x)=\frac{e^x(x-2)}{x}$$

显然，$x>2$ 时，$g'(x)>0,\ g(x)$ 单调递增；$0<x<2$ 时，$g'(x)<0,\ g(x)$ 单调递减，

所以，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\geq g_{\min}(x)=g(2)=e^2-2\times2^2\times f(2)=0$，

从而 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}\geq 0$，所以 $f(x)$ 单调递增，

正确选项为 D

2. 已知 $a<0$，函数 $f(x)=x^{a+1}\bullet e^x+a\ln x$，若 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为

A. $-\sqrt{e}-1$　　B. $1-e$　　C. $-\dfrac{1}{e}$　　D. $-e$

【解】 此题显然可以利用同构的思想。

$$f\left(x\right)\geq 0\Rightarrow x^{a+1}\bullet e^x+a\ln x\geq 0\Rightarrow x^{a+1}\bullet e^x\geq -a\ln x=\ln\frac{1}{x^a}$$

$$\Rightarrow x\bullet e^x\geq\frac{1}{x^a}\ln\frac{1}{x^a}=e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}$$，即 $x\bullet e^x\geq e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}$

构造函数 $g\left(x\right)=x\bullet e^x$，显然 $g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时单调递增，故

$x\bullet e^x\geq e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\dfrac{1}{x^a}\Rightarrow g\left(x\right)\geq g\left(\ln\dfrac{1}{x^a}\right)\Rightarrow x\geq\ln\dfrac{1}{x^a}=-a\ln x\Rightarrow a\geq-\dfrac{x}{\ln x}$ 恒成立，

故 $a\geq\left(-\dfrac{x}{\ln x}\right)_{\max}$，易得 $\left(-\dfrac{x}{\ln x}\right)_{\max}=-e$，故 $a\geq -e$，选 D。

3. 已知函数 $f(x)=2\ln x-1(\frac{1}{e}<x<e^2), g(x)=mx$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像上存在关于直线 $y=0$ 对称的点，则实数 m 的取值范围是（ ）

A．$[-\frac{2}{e},2e)$　　B．$(-e^{-2},3e]$　　C．$[-2e^{-\frac{3}{2}},3e)$　　D．$(-3e^{-2},3e]$

【解】 问题等价于 $f(x)=-g(x)$ 有解，也即 $2\ln x-1=-mx$ 在 $(\frac{1}{e},e^2)$ 上有解。

由 $2\ln x-1=-mx$ 得 $m=\frac{1-2\ln x}{x}$，

令 $h(x)=\frac{1-2\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{2\ln x-3}{x^2}$，

易知 $e^{\frac{3}{2}}$ 为 $h(x)$ 的极小点，且 $h(e^{\frac{3}{2}})=-2e^{-\frac{3}{2}}$，

又，$h(\frac{1}{e})=3e$，$h(e^2)=-\frac{3}{e^2}$，故 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e},e^2)$ 上的值域为 $[-2e^{-\frac{3}{2}},3e)$，故 $m\in[-2e^{-\frac{3}{2}},3e)$，选 C。

4. （全国卷）设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为（ ）

$(A)\ 1-\ln 2$　　$(B)\ \sqrt{2}(1-\ln 2)$　　$(C)\ 1+\ln 2$　　$(D)\ \sqrt{2}(1+\ln 2)$

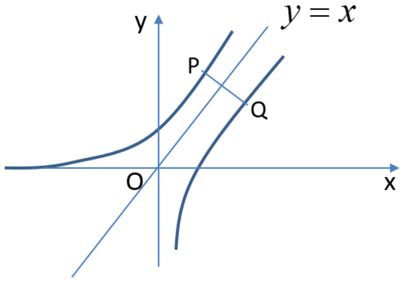
【解析】 函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，其图象关于 $y=x$ 对称;

$y=\frac{1}{2}e^x$ 图像上的点 $P(x,\frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$，

设函数 $g(x)=\frac{1}{2}e^x-x$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$，$\ln 2$ 为 $g(x)$ 的极小点

故，$g(x)_{\min}=1-\ln 2\Rightarrow d_{\min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$

由图象关于 $y=x$ 对称得：$|PQ|_{\min}=2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$



5. 已知实数a,b满足$[a-(e+\frac{1}{e})]^2+b^2=1$,则$\sqrt{(a-c)^2+(b-\ln c)^2}\,(c>0)$的最小值为（　）

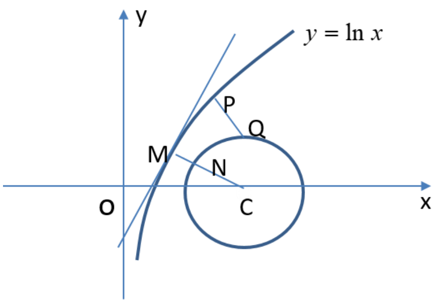
A．$\dfrac{e-\sqrt{e^2-1}}{e}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2e^2+1}-e}{e}$　　C．$\dfrac{\sqrt{e^2+1}-e}{e}$　　D．$e+\dfrac{1}{e}-1$

【解】 问题等价于求圆$C:[x-(e+\frac{1}{e})]^2+y^2=1$上的点$Q(a,b)$到曲线$y=\ln x$上的点$P(c,\ln c)$的距离的最小值.可考虑圆心$C(e+\frac{1}{e},0)$到曲线$y=\ln x$上的点距离的最小值。

设$M\left(t,\ln t\right)$为曲线$y=\ln x$上一点，过M的切线垂直于MC时，令MC与圆C交于N，MN即为所求。

由$y=\ln x$知$y'=\frac{1}{x}$，所以$M(t,\ln t)$处切线的斜率$k=\frac{1}{t}$，因此时切线与MC垂直，故

$$\frac{\ln t-0}{t-(e+\frac{1}{e})}\times\frac{1}{t}=-1, \text{即} \ln t+t^2-(e+\frac{1}{e})t=0 \quad (*)$$



结合图像知 $1<t<e+\dfrac{1}{e}$

设$g\left(x\right)=\ln x+x^2-(e+\frac{1}{e})x(1<x<e+\frac{1}{e})$，则

$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+2x-(e+\dfrac{1}{e})$，　$g''\left(x\right)=2-\dfrac{1}{x^2}>0$

故 $g'(x)$ 单调递增，考虑到 $g'(1)<0,g'(2)>0$，

故，$g'(x)$ 在 $(1,2)$ 上有唯一零点 x_0，

易知 x_0 为 $g(x)$ 的极小点，

考虑到 $g(1)<0$，故 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上无零点，

因 $g(x)$ 在 $x>x_0$ 单增，且显然有 $g(e)=0$

故，$g(x)$ 在 $(1,e+\frac{1}{e})$ 上有唯一零点 e，从而得 $M(e,1)$，

故，$|PQ|_{\min}=|MC|-1=\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}-1=\frac{\sqrt{1+e^2}-e}{e}$，

故选 C.

6. 已知函数 $f(x)=e^{2x}+e^{x+2}-e^4$，$g(x)=x^2-3ae^x$，$A=\{x\,|\,f(x)=0\}$，$B=\{x\,|\,g(x)=0\}$，如存在 $x_1\in A,x_2\in B$，使得 $|x_1-x_2|<1$，则 a 的取值范围为（　　）

【解】显然，$f'(x)=2e^{2x}+e^{x+2}>0$，故 $f(x)$ 单调递增，又 $f(2)=0$，故 $f(x)$ 有唯一一个零点 2，即 $A=\{2\}$，

因此 $x_1=2$，$|x_1-x_2|<1\Rightarrow|2-x_2|<1\Rightarrow 1<x_2<3$

问题转化为：函数 $g(x)$ 在 $(1,3)$ 上存在零点；

由 $g(x)=x^2-3ae^x=0\Rightarrow 3a=\frac{x^2}{e^x}$

令 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}(x\in(1,3))$，由 $h'(x)=\frac{2xe^x-e^xx^2}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$

易知 2 为 $h(x)$ 的极大值点，$h(2)=\frac{4}{e^2}$

又，$h(1)=\frac{1}{e},\ h(3)=\frac{9}{e^3}$

故，$h(x)$ 在 $(1,3)$ 上的值域为 $(\frac{9}{e^3},\frac{4}{e^2}]$

由 $\frac{9}{e^3}<3a\le\frac{4}{e^2}$，从而 $\frac{3}{e^3}<a\le\frac{4}{3e^2}$

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\ge0$ 时，$f'(x)-f(x)>0$，若 $\exists x\in R$，使不等式 $f[e^x(x^2-2x+2)]\le f(ae^x+x)$ 成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A. $1-\frac{1}{e}$　　B. $1+\frac{1}{e}$　　C. $1+e$　　D. e

【解】易知 $f(0)=0$，令 $g(x)=f(x)e^{-x}$，

因 $g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]>0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $g(x)=f(x)e^{-x}>g(0)=0\Rightarrow f(x)>0$，

从而在 $[0,+\infty)$ 上，$f'(x)>f(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

故，$f[e^x(x^2-2x+2)]\le f(ae^x+x)\Leftrightarrow e^x(x^2-2x+2)\le ae^x+x$

即不等式 $a\ge x^2-2x+2-xe^{-x}$ 有解

令 $h(x)=x^2-2x+2-xe^{-x}$，则 $a\ge h(x)_{\min}$；

因 $h'(x)=\frac{(x-1)(2e^x+1)}{e^x}$，显然，1 为 $h(x)$ 的极小点，

故 $h(x)_{\min}=h(1)=1-\frac{1}{e}$，选 A。

8.　函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒有 $xf'(x)>2f(x)$，其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，若 α,β 为锐角三角形的两个内角，则（　　）

A．$\sin^2\beta f(\sin\alpha)>\sin^2\alpha f(\sin\beta)$　　B．$\cos^2\beta f(\sin\alpha)>\sin^2\alpha f(\cos\beta)$

C．$\cos^2\beta f(\cos\alpha)>\cos^2\alpha f(\cos\beta)$　　D．$\sin^2\beta f(\cos\alpha)>\sin^2\alpha f(\cos\beta)$

【解】令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，

由题意知：$x\in(0,1)$，$g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增.

又，由题意有 $\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta$，$\alpha,\frac{\pi}{2}-\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$

所以，$\sin\alpha>\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$，即 $\sin\alpha>\cos\beta$，

易知 $\sin\alpha,\cos\beta\in(0,1)$，所以 $g(\sin\alpha)>g(\cos\beta)$，即 $\frac{f(\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}>\frac{f(\cos\beta)}{\cos^2\beta}$，

所以 $\cos^2\beta f(\sin\alpha)>\sin^2\alpha f(\cos\beta)$.

9.　已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$，且 $f(\frac{1}{2})=0$，当 $0<x<1$ 时，不等式 $(\frac{1}{x}-x)f'(x)\ln(1-x^2)>2f(x)$ 恒成立，那么不等式 $f(x)<0$ 的解集为

A．$\{x|-\frac{1}{2}<x<0\text{或}\frac{1}{2}<x<1\}$　　　　B．$\{x|-1<x<-\frac{1}{2}\text{或}\frac{1}{2}<x<1\}$

C．$\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\text{且}x\neq 0\}$　　　　D．$\{x|-1<x<-\frac{1}{2}\text{或}0<x<\frac{1}{2}\}$

【巧解】将 $x=\frac{1}{2}$ 带入 $(\frac{1}{x}-x)f'(x)\ln(1-x^2)>2f(x)$ 知 $f'(\frac{1}{2})<0$，故 $f(x)$ 在 $\frac{1}{2}$ 处递减，

因此，$f(x)<0$ 的解集中一定含有稍微大于 $\frac{1}{2}$ 的数，

答案锁定在 A，B 两个选项。

考虑到 $f(x)$ 是偶函数，因此稍微小于 $-\frac{1}{2}$ 的数也适合，

因此只能选 B。

【　法二】 $0<x<1$ 时，$(\frac{1}{x}-x)f'(x)\ln(1-x^2)>2f(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x}f'(x)\ln(1-x^2)>2f(x)\Leftrightarrow f'(x)\ln(1-x^2)-\frac{2xf(x)}{1-x^2}>0$

令 $g(x)=f(x)\ln(1-x^2)$，易知 $g(x)$ 为偶函数

且 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；此时 $g(x)$ 单调递增；

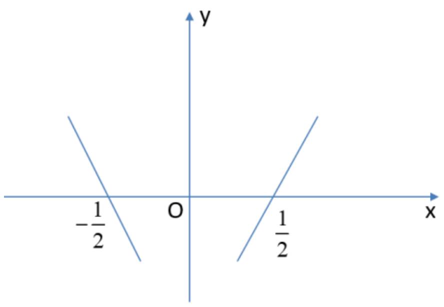
故 $x\in(-1,0)$ 时，　$g(x)$ 单调递减；

由于 $f(\frac{1}{2})=0$，故 $g(\frac{1}{2})=g(-\frac{1}{2})=0$。

考虑到 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$\ln(1-x^2)<0$

故，$f(x)<0\Leftrightarrow f(x)\ln(1-x^2)>0\Leftrightarrow g(x)>0$

而 $g(x)>0$ 的解集为 $(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$，故，选 B。



10. 若存在 $a\in[1,2]$，使得关于 x 的方程 $(x^2-a)=\frac{(a^2+a)t}{|x|}$ 有 4 个实数根，则 t 的取值范围是_____

【解】：由题意知： $t=\dfrac{(x^2-a)|x|}{a^2+a}(x\neq 0)$

令 $f(x)=\dfrac{(x^2-a)|x|}{a^2+a}(x\neq 0)$，显然 $f(x)$ 为偶函数，

问题等价于直线 $y=t$ 与 $f(x)$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个不同的交点；下面仅考虑 $(0,+\infty)$ 的情况，此时 $f(x)=\dfrac{x(x^2-a)}{a^2+a}$， $f'(x)=\dfrac{3x^2-a}{a^2+a}$

易知 $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 为 $f(x)$ 的极小点，且 $f(x)_{\min}=-\dfrac{2\sqrt{3}a}{9(a+1)}$，

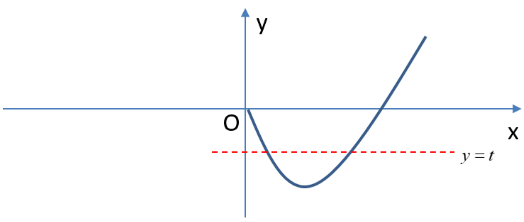
数形结合，知 $f(x)_{\min}<t<0$

令 $h(a)=f(x)_{\min}$，则需 $h(a)<t<0$，

由题意知：只需 $h(a)_{\min}<t<0$

而 $h(a)=-\dfrac{2\sqrt{3}a}{9(a+1)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}(-1+\dfrac{1}{a+1})$，

故 $h(a)_{\min}=h(2)=-\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$，故 $t\in(-\dfrac{4\sqrt{3}}{27},0)$



11. 已知函数 $f(x)=x\ln x-kx+1$ 在区间 $[\dfrac{1}{e},e]$ 上恰有一个零点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\{k\,|\,k=1或k>e-1\}$　　B. $\{k\,|\,1\le k\le 1+\dfrac{1}{e}或k>e-1\}$

C. $\{k\,|\,k\ge 1\}$　　D. $\{k\,|\,1+\dfrac{1}{e}<k\le e-1或k=1\}$

【解】 $x\ln x-kx+1=0\Rightarrow k=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

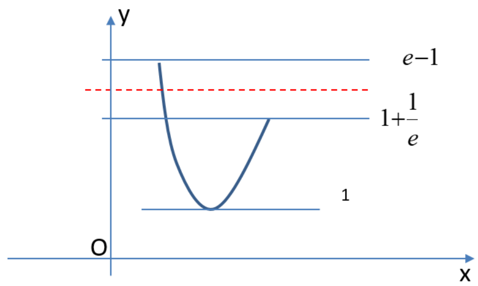
令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，问题等价于直线 $y=k$ 与函数 $y=g(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e},e]$ 上的图像有唯一一个交点。

因 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

易知1为 $g(x)$ 的极小点，且 $g(1)=1$，

又，$g(\dfrac{1}{e})=e-1,\ g(e)=1+\dfrac{1}{e}$，$g(x)$ 的图像如图所示。由图像知：

直线 $y=k$ 与 $g(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e},e]$ 上的图像有唯一一个交点，需 $k=1$ 或 $1+\dfrac{1}{e}<k\le e-1$，选 D.



12. 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，$f(x)$ 不是常数函数，且 $(x+1)f(x)+xf'(x)\ge 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，则下列不等式一定成立的是(　　)

A. $f(1)<2ef(2)$　　B. $ef(1)<f(2)$　　C. $f(1)<0$　　D. $ef(e)<2f(2)$

【巧解】 取 $f(x)=x$，它显然满足题目要求。显然 B、C、D 三个选项均错，选 A。

【法二】 题中不等式 $\Leftrightarrow [f(x)+xf'(x)]+xf(x)\ge 0 \Leftrightarrow [xf(x)]'+xf(x)\ge 0$

令 $g(x)=xf(x)$，则题中不等式转化为 $g(x)+g'(x)\ge 0$；

再令 $h(x)=e^xg(x)$，则 $h'(x)=e^x(g(x)+g'(x))\ge 0$，故 $h(x)$ 单调递增；

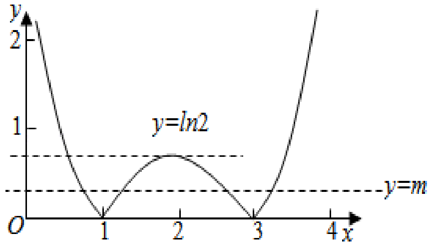
从而 $h(2)>h(1)\Rightarrow e^2g(2)>eg(1)\Rightarrow eg(2)>g(1)\Rightarrow e\times 2f(2)>f(1)$，选 A.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & 0<x\le 2\\ f(4-x), & 2<x<4\end{cases}$，若方程 $f(x)=m$ 有四个不等实根 x_1，x_2，x_3，$x_4\,(x_1<x_2<x_3<x_4)$ 时。

（1）求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的值

（2）若不等式 $kx_3x_4+x_1^2+x_2^2\ge k+11$ 恒成立，求实数 k 的最小值。

【解】 (1)易知 $f(x)$ 的图像在 $(0,4)$ 上关于直线 $x=2$ 对称，其图象如图所示。故 $f(x)=m$ 之四个根 x_1，x_2，x_3，x_4 满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=4\times 2=8$。



(2)由题意知：$-\ln x_1=\ln x_2$，故$x_1x_2=1$

由对称性知：$x_3=4-x_2, x_4=4-x_1$

另，由图像可知：$1<x_2<2$

故，$x_3x_4=(4-x_2)(4-x_1)=16-4(x_1+x_2)+x_1x_2=17-4(x_1+x_2)$

$kx_3x_4+x_1^2+x_2^2\geq k+11\Rightarrow k\geq\dfrac{11-\left(x_1^2+x_2^2\right)}{x_3\cdot x_4-1}=\dfrac{11-\left(x_1+x_2\right)^2+2x_1x_2}{16-4\left(x_1+x_2\right)}=\dfrac{13-\left(x_1+x_2\right)^2}{16-4\left(x_1+x_2\right)}$，

即$k\geq\dfrac{13-t^2}{16-4t}$恒成立，其中$t=x_1+x_2=\dfrac{1}{x_2}+x_2\in(2,\dfrac{5}{2})$

令$f(t)=\dfrac{t^2-13}{4t-16}(t\in(2,\dfrac{5}{2}))$，则$k\geq f_{\max}(t)$

由$f'(t)=\dfrac{t^2-8t+13}{4(t-4)^2}=0$，解得$t=4-\sqrt{3}$（$t=4+\sqrt{3}$舍去）

易知$4-\sqrt{3}$为$f(t)$的极大点，

故，$f_{\max}(t)=f(4-\sqrt{3})=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$k\geq2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

综上，k的最小值为$2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

14. 已知曲线$f(x)=\dfrac{\ln^2 x+a\ln x+a}{x}$在点$(e, f(e))$处的切线与直线$2x+e^2y=0$平行，$a\in R$.

（1）求a的值；

（2）求证：$a=3$时，$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{3}{e^x}$.

【解】:（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{-\ln^2 x+(2-a)\ln x}{x^2}$，

由题意得：$f'(\mathrm{e})=\dfrac{-1+2-a}{\mathrm{e}^2}=-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\Rightarrow a=3$

（Ⅱ）$a=3$时，$f(x)=\dfrac{\ln^2 x+3\ln x+3}{x}$，由 $f'(x)=\dfrac{-\ln x(\ln x+1)}{x^2}=0$ 得 $x_1=\dfrac{1}{e},x_2=1$

易知$\dfrac{1}{e}$为 $f(x)$ 的极小点，1为 $f(x)$ 的极大点。

①当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\ge f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}$，而$(\dfrac{3x}{\mathrm{e}^x})'=\dfrac{3(1-x)}{\mathrm{e}^x}$，故$\dfrac{3x}{\mathrm{e}^x}$在$(0,1)$上递增，

$\therefore\dfrac{3x}{\mathrm{e}^x}<\dfrac{3}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}$，$\therefore f(x)>\dfrac{3x}{\mathrm{e}^x}$ 即$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}$；

②当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln^2 x+3\ln x+3\geqslant 0+0+3=3$，

$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{3}{e^x}\Leftrightarrow \ln^2 x+3\ln x+3\ge\dfrac{3x^2}{e^x}$

令 $g(x)=\dfrac{3x^2}{\mathrm{e}^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{3(2x-x^2)}{\mathrm{e}^x}$

故 $g(x)$ 在$[1,2)$上递增，$(2,+\infty)$ 上递减，$\therefore g(x)\leqslant g(2)=\dfrac{12}{\mathrm{e}^2}<3$，

$\therefore \ln^2 x+3\ln x+3>\dfrac{3x^2}{\mathrm{e}^x}$，即$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}$；

综上，$a=3$时，对任意 $x>0$，均有$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x-bx-3(a\in R$ 且 $a\ne 0)$

（1）若 $a=b$，求函数 $f\left(x\right)$的单调区间；

（2）当 $a=1$ 时，设 $g(x)=f(x)+3$，若 $g(x)$ 有两个相异零点 x_1，x_2，求证：$\ln x_1+\ln x_2>2$.

【解】（1）易知 $f'\left(x\right)=\dfrac{b(1-x)}{x}$，所以

当 $b>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$的单调增区间是$\left(0,1\right)$，单调减区间是$\left(1,+\infty\right)$，

当 $b<0$ 时，函数 $f\left(x\right)$的单调增区间是$\left(1,+\infty\right)$，单调减区间是$\left(0,1\right)$.

（2）设 $g(x)$ 的两个相异零点为 x_1，x_2，设 $x_1>x_2>0$，

$\because g(x_1)=0$，$g(x_2)=0$，$\therefore \ln x_1-bx_1=0$，$\ln x_2-bx_2=0$，

$\therefore \ln x_1-\ln x_2=b(x_1-x_2)$，$\ln x_1+\ln x_2=b(x_1+x_2)$，

要证$\ln x_1+\ln x_2>2$，即证$b(x_1+x_2)>2$，即$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，即$\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，

设$t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$，上式转化为$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$（$t>1$），

设$g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(t)>g(1)=0$，$\therefore \ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$.

16. 已知函数$f(x)=x^2+ax+2\ln x$（a为常数）

（Ⅰ）若$f(x)$是定义域上的单调函数，求a的取值范围；

（Ⅱ）若$f(x)$存在两个极值点x_1,x_2，且$|x_1-x_2|\le\dfrac{3}{2}$，求$|f(x_1)-f(x_2)|$的最大值.

【解】（Ⅰ）易得$f'(x)=\dfrac{2x^2+ax+2}{x},x\in(0,+\infty)$

设$g(x)=2x^2+ax+2$，$x\in(0,+\infty)$

易知$f(x)$单调，也只能是单调递增，此等价于$g(x)\ge 0$恒成立，即

$-\dfrac{a}{4}\le 0$或$\begin{cases}-\dfrac{a}{4}>0\\a^2-16\le 0\end{cases}$；解得$a\ge -4$

（Ⅱ）由（I）函数$f(x)$的两个极值点x_1,x_2满足$2x^2+ax+2=0$，

所以$x_1\cdot x_2=1,x_1+x_2=-\dfrac{a}{2}$

不妨设$0<x_1<1<x_2$，则$f(x)$在(x_1,x_2)上是减函数，

故$|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2+a(x_1-x_2)+2\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=x_1^2-x_2^2-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=x_2^2-x_1^2+2\ln\dfrac{x_1}{x_2}=x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2}+2\ln\dfrac{1}{x_2^2}=x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2}-2\ln x_2^2$

令$t=x_2^2$，$h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\quad(t>1)$

因为$h'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}\ge 0$，所以$h(t)$在$(1,+\infty)$上为增函数.

由$|x_1-x_2|=x_2-\dfrac{1}{x_2}\le\dfrac{3}{2}$，即$2{x_2}^2-3x_2-2\le 0$，解得$1<x_2\le 2$，

故$1<{x_2}^2\le 4$，$|f(x_1)-f(x_2)|\le h(4)=\dfrac{15}{4}-2\ln 4$

所以$|f(x_1)-f(x_2)|$的最大值为$\dfrac{15}{4}-2\ln 4$

17. 已知函数$f(x)=e^x(-x^2+ax-2)$（$a\in R$）.

(1) 若$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$不单调，求a的取值范围；

(2) 设$g(x)=x^2e^x+b(x+2)^2,F(x)=f(x)+g(x)$，若$a=1$，$b\in(0,\dfrac{1}{4})$时，$x\in(0,+\infty)$时，$F(x)$有最小值，求最小值的取值范围。

【解】(1) $f'(x)=e^x(-x^2+ax-2)+e^x(-2x+a)=e^x[-x^2+(a-2)x+a-2]$，

$\because x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$不单调，$\therefore -x^2+(a-2)x+a-2=0$在$(0,+\infty)$上有解，

$\therefore a-2=\dfrac{x^2}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}-2>0$，$\therefore a>2$.

(2) $F(x)=e^x(x-2)+b(x+2)^2$，$F'(x)=e^x(x-1)+2b(x+2)$.

设$\varphi(x)=e^x(x-1)+2b(x+2)$，则$\varphi'(x)=xe^x+2b$，又$x\in(0,+\infty)$，

$\because \varphi'(x)>0$，$\therefore F'(x)$单调递增，

又$F'(1)=6b>0$，$F'(0)=4b-1<0$，

$\therefore$存在$t\in(0,1)$，使得$F'(t)=0$，即$e^t(t-1)+2b(t+2)=0$.

$x\in(0,t)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，$x\in(t,+\infty)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

$\therefore F(x)_{\min}=F(t)=e^t(t-2)+b(t+2)^2=e^t(t-2)+\dfrac{e^t(t-1)}{-2(t+2)}(t+2)^2=e^t(-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{t}{2}-1)$

设$h(t)=e^t(-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{t}{2}-1)$，则$h'(t)=e^t(-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2})$

$\because h'(t)<0$，$\therefore h(t)$单调递减，

又$h(0)=-1,h(1)=-e$，$\therefore F(x)_{\min}\in(-e,-1)$.

18. （极值点偏移问题）已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x(a\in \mathrm{R})$有最大值$-\dfrac{1}{2}$，$g(x)=x^2-2x+f(x)$,且$g'(x)$是$g(x)$的导数.

（1）求a的值;

（2）证明:当 $x_1 < x_2, g(x_1)+g(x_2)+3=0$ 时，$g'(x_1+x_2) > \frac{1}{2}$

【解】（1）$f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{2ax^2+1}{x}$.

当 $a \geq 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值，不合题意,舍去

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$,

当 $x \in \left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增

当 $x \in \left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}$

所以 $-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}=-\frac{1}{2}$,所以 $a=-\frac{1}{2}$.

（2）.由（1）可知，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x$，$\therefore g'(x)=x+\frac{1}{x}-2$

$\because x+\frac{1}{x} \geq 2, \therefore g'(x) \geq 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

又 $\because x_1<x_2$，$g(x_1)+g(x_2)=-3$ 且 $g(1)=-\frac{3}{2}$，$\therefore 0<x_1<1<x_2$,

$\because g''(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}, \therefore$ 当 $x>1$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增

要证 $g'(x_1+x_2)>\frac{1}{2}$，即 $g'(x_1+x_2)>g'(2)$，只要证 $x_1+x_2>2$，即 $x_2>2-x_1$.

$\because x_1<1$，$\therefore 2-x_1>1$,

所以需证 $g(2-x_1)<g(x_2)=-3-g(x_1) \Leftrightarrow g(x_1)+g(2-x_1)<-3$，　　（*）

设 $G(x)=g(x)+g(2-x)=x^2-2x-2+\ln x+\ln(2-x)$（其中 $0<x<1$）,

$\therefore G'(x)=2x-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}=\frac{2(x-1)^3}{x(x-2)}>0$，$\therefore G(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数

$\therefore G(x)<G(1)=-3$，故（*）式成立。从而 $g'(x_1+x_2)>\frac{1}{2}$.

19. **（隐零点问题）**已知函数 $f(x)=ae^{2x}-ae^{x}-xe^{x}$（$a\geq 0$，$e=2.718\cdots$，$e$ 为自然对数的底数），若 $f(x)\geq 0$ 对于 $x\in R$ 恒成立.

（1）求实数 a 的值;

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一极大值点 x_0，且 $\frac{\ln 2}{2e}+\frac{1}{4e^2}\leq f(x_0)<\frac{1}{4}$.

【解】:（1）由 $f(x)=e^{x}(ae^{x}-a-x)\geq 0$ 可得 $g(x)=ae^{x}-a-x\geq 0$，

因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)\geq g(0)$，从而 $x=0$ 是 $g(x)$ 的一个极小值点

由于 $g'(x)=ae^{x}-1$，所以 $g'(0)=a-1=0$，即 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$g(x)=e^{x}-1-x$，$g'(x)=e^{x}-1$，

$\because$ $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单减，

$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单增;

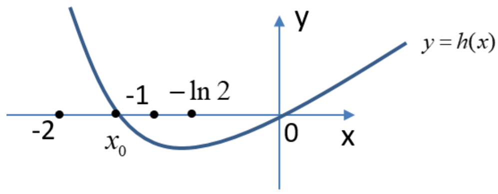
$\therefore$ $g(x)\geq g(0)=0$，故 $a=1$.

（2）由（1）知：$f(x)=e^{2x}-e^{x}-xe^{x}$，$f'(x)=e^{x}(2e^{x}-x-2)$.

令 $h(x)=2e^{x}-x-2$，则 $h'(x)=2e^{x}-1$，

$\because$ $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减;

$x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，



由于 $h(-1)<0$，$h(-2)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in(-2,-1)$ ，

$\because$ $h(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上为减函数，

$\therefore$ $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，

$x\in(x_0,-\ln 2)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单减，

故，x_0 为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上的唯一极大值点;

$x\in(-\ln 2,0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单减，

$x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，

故 $f(x)$ 在 $(-\ln 2,+\infty)$ 上有唯一一个极小值点 0，

综上， $f(x)$ 在 R 上存在唯一极大值点 $x_0 \in (-2,-1)$.

$\because h(x_0)=0$ ， $\therefore 2e^{x_0}-x_0-2=0$ ，所以

$$f(x_0)=e^{2x_0}-e^{x_0}-x_0e^{x_0}=(\frac{x_0+2}{2})^2-(\frac{x_0+2}{2})(x_0+1)=-\frac{{x_0}^2+2x_0}{4}, \quad x_0 \in (-2,-1),$$

$\because x \in (-2,-1)$ 时， $-\frac{x^2+2x}{4}<\frac{1}{4}$ ， $\therefore f(x_0)<\frac{1}{4}$ ；

$\because \ln\frac{1}{2e} \in (-2,-1)$ ， $\therefore f(x_0) \geq f(\ln\frac{1}{2e})=\frac{\ln 2}{2e}+\frac{1}{4e^2}$ ；

综上知： $\frac{\ln 2}{2e}+\frac{1}{4e^2} \leq f(x_0)<\frac{1}{4}$.