好题欣赏——2025 年第 2 期

1. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子（它们的六个面分别标有点数 1、2、3、4、5、6），骰子朝上的面的点数分别为 X,Y，则 $\log_{2X} Y=1$ 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{36}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{2}$

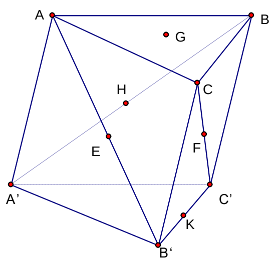
【解析】 满足 $\log_{2X} Y=1$ 的 X,Y 有(1, 2)，(2, 4)，(3, 6)这 3 种情况，而总的可能数有 36 种，所以 $P=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，故选 C.

2. 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形，从中随机取出两个三角形，则这两个三角形不共面的概率 p 为　　（　　）

A. $\frac{367}{385}$　　B. $\frac{376}{385}$　　C. $\frac{192}{385}$　　D. $\frac{18}{385}$

【解析】 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形共有 $C_8^2=56$ 个，从中随机取出两个三角形共有 C_{56}^2=28×55 种取法，其中两个三角形共面的为 $12C_4^2=12\times6$，故不共面的两个三角形共有(28×55-12×6)种取法，∴. 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形，从中随机取出两个三角形，则这两个三角形不共面的概率 p 为 $\frac{4\times367}{4\times385}=\frac{367}{385}$，选(A)

3. 如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，点 E,F,H,K 分别为 $AC',CB',A'B,B'C'$ 的中点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 从 K,H,G,B' 中取一点作为 P， 使得该棱柱恰有 2 条棱与平面 PEF 平行，则 P 为（　　）



A. K　　B. H　　C. G　　D. B′

【解析】 用排除法。

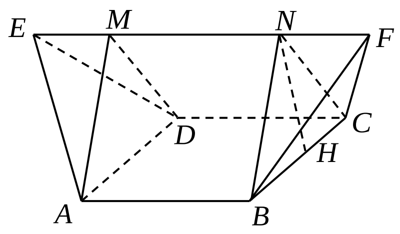
∵ $AB//$平面 KEF，$A'B'//$平面 KEF，$B'B//$平面 KEF，$AA'//$平面 KEF，否定(A)，

$AB//$平面 HEF，$A'B'//$平面 HEF，$AC//$平面 HEF，$A'C'//$平面 HEF，否定(B)，

对于平面 GEF，有且只有两条棱 AB，$A'B'$ 平面 GEF，符合要求，故(C)为本题选择支.

当 P 点选 B' 时有且只有一条棱 $AB//$平面 PEF，综上选(C)

4. **（全国Ⅰ卷）**如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 ΔADE、ΔBCF 均为正三角形，$EF//AB, EF=2$，则该多面体的体积为（　　）



（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\dfrac{4}{3}$　（D）$\dfrac{3}{2}$

【解析】过 A,B 两点分别作 AM,BN 垂直于 EF，垂足分别为 M,N，连结 DM,CN，可证得 $DM\perp EF, CN\perp EF$，多面体 $ABCDEF$ 分为三部分，多面体的体积 V 为 $V_{ABCDEF}=V_{AMD-BNC}+V_{E-AMD}+V_{F-BNC}$，

$\because NF=\dfrac{1}{2}$，$BF=1$，$\therefore BN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

作 NH 垂直于点 H，则 H 为 BC 的中点，则 $NH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\Delta BNC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot NH=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore V_{F-BNC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta BNC}\cdot NF=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$，

$V_{E-AMD}=V_{F-BNC}=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$，$V_{AMD-BNC}=S_{\Delta BNC}\cdot MN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore V_{ABCDEF}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故选 A.

【点拨】将不规则的多面体分割或补全为规则的几何体进行计算.

5.　（全国卷）当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为（　）

（A）2　（B）$2\sqrt{3}$　（C）4　（D）$4\sqrt{3}$

【解析】 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{4\sin x}{\cos x}$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{4\sin x}{\cos x}}=4$，当且仅当 $\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{4\sin x}{\cos x}$，即 $\tan x=\dfrac{1}{2}$ 时，取“$=$”，

$\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$存在 x 使 $\tan x=\dfrac{1}{2}$，这时 $f(x)_{\min}=4$，故选 C.

6.　（全国卷）在 ΔABC 中，已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$，给出以下四个论断：

①$\tan A\cdot\cot B=1$　②$0<\sin A+\sin B\leq\sqrt{2}$

③$\sin^2 A+\cos^2 B=1$　④$\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$

其中正确的是（　　）

（A）①③　　　（B）②④　　　（C）①④　　　（D）②③

【解析】∵ $\tan\frac{A+B}{2}=\tan\frac{\pi-C}{2}=\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$， $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，

∴ $\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ∴ $C=90°$，

∵ $\tan A\cdot\cot B=\tan^2 A$，∴①不一定成立，

∵ $\sin A+\sin B=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\theta)$，∴ $0<\sin A+\sin B\le\sqrt{2}$，∴②成立，

∵ $\sin^2 A+\cos^2 B=\sin^2 A+\sin^2 A=2\sin^2 A$，∴③不一定成立，

∵ $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 A+\sin^2 A=1=\sin^2 C$，∴④成立，故选 B.

7.　（全国卷）锐角三角形的内角 A 、 B 满足 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$，则有

（A） $\sin 2A-\cos B=0$　　　（B） $\sin 2A+\cos B=0$

（C） $\sin 2A-\sin B=0$　　　（D） $\sin 2A+\sin B=0$

【解析】由 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$ 得 $\tan A-\tan B=\frac{1}{\sin 2A}$，$2\sin(A-B)\sin A=\cos B$，

$\cos(2A-B)=0$，

∵ A,B 为锐角 ∴ $-\frac{\pi}{2}<2A-B<\frac{3\pi}{2}$，∴ $2A-B=\frac{\pi}{2}$，

∴ $\sin 2A-\cos B=0$，选 (A)

8.　（全国卷）设 $0\le x<2\pi$，且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$，则（　）

A　$0\le x\le\pi$　　　B　$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$　　　C　$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$　　　D　$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$

【解析】∵由 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$ 得 $|\sin x-\cos x|=\sin x-\cos x$，又 $0\le x<2\pi$，

∴ $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$，选 (C)

9.　（全国卷）$\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$（　）

A　$\tan\alpha$　　　B　$\tan 2\alpha$　　　C　1　　　D　$\frac{1}{2}$

【解析】$\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha$，选 (B)

10.　（全国卷）过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线有（　）

（A）18对　　（B）24对　　（C）30对　　（D）36对

【解析】（直接法）

①与上底面的 A_1B_1、A_1C_1、B_1C_1 成异面直线的有15对；

②与下底面的 AB、AC、BC 成异面直线的有9对（除去与上底面的）；

③与侧棱 AA_1、BB_1、CC_1 成异面直线的有6对（除去与上下底面的）；

④侧面对角线之间成异面直线的有6对；

所以异面直线总共有36对.

【解法二】（间接法）

①共一顶点的共面直线有 $6C_5^2=60$ 对；

②侧面互相平行的直线有6对；

③侧面的对角线有3对共面；

所以异面直线总共有 $C_{15}^2-60-6-3=36$ 对.

11. **（全国卷）**下面是关于三棱锥的四个命题：

①底面是等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

②底面是等边三角形，侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥.

③底面是等边三角形，侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥.

④侧棱与底面所成的角相等，且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中，真命题的编号是______________.（写出所有真命题的编号）

【解析】正确的命题为①④

12. **（全国卷）**在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E，交 CC' 于 F，则

①四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形

②四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形

③四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形

④四边形 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$

以上结论正确的为______________.（写出所有正确结论的编号）

【解析】①平面 $BFD'E$ 与相对侧面相交，交线互相平行，

$\therefore$ 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形；

②四边形 $BFD'E$ 若是正方形，则 $BE\perp ED'$，又 $AD\perp EB$，

$\therefore EB\perp$ 平面 $ADDA'$，产生矛盾；

③四边形 $BFD'E$ 在底面ABCD内的投影是正方形 $ABCD$；

④当 E,F 分别是 AA'、CC' 的中点时，$EF//AC$，又 $AC\perp$ 平面 $BB'D$，

$\therefore$四边形 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$；

13. **（全国卷）**将半径都为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个正四面体的高的最小值为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$　　（B）$2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　（C）$4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

【解析】显然 4 个钢球两两相切且每个钢球与四面体也相切时，这个正四面体的高最小。这时 4 个钢球的球心构成一个小正四面体，其底面中心到大正四面体距离是小钢球的半径 1，设小正四面体顶点距大正四面体顶点为 x，大正四面体的棱长为 a，高为 h，小正四面体的高为 m，则 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$m=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，大正四面体底面中心到底面边的距离 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，侧面斜高 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，由平几知识可得 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$=3，得 $x=3$，$h=3+1+m=4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 选(C)

14. **（全国卷）**设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V，P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点，且 $PA=QC_1$，则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为(　　)

A $\dfrac{1}{6}V$　　B $\dfrac{1}{4}V$　　C $\dfrac{1}{3}V$　　D $\dfrac{1}{2}V$

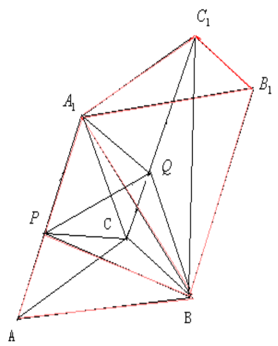
【解析】如图，$V_{A_1-ABC}=V_{B-A_1B_1C_1}=V_{B-AC_1Q}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$

$V_{B-PCQA_1}=V_{B-CQA_1}+V_{B-PCA_1}$，$\because$ AF=QC₁,

$\therefore APQC_1, APQC$ 都是平行四边形,

$\therefore V_{B-PCQA_1}=V_{B-CQA_1}+V_{B-PCA_1}=\dfrac{1}{2}(V_{B-CQA_1}+V_{B-PCA_1})$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，选(C)



15. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等，这样的平面 α 共有（　　）

A 3 个　　B 4 个　　C 6 个　　D 7 个

【解析】共有 7 个，它们是由四个定点组成的四面体的三对异面直线间的公垂线的三个中垂面；四面体的四条高的四个中垂面，选(D)

16. 已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（ ）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$　　C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

【解析】因为当 $x<3$ 时 $f\left(x\right)=x$，所以 $f\left(1\right)=1, f\left(2\right)=2$，

又因为 $f\left(x\right)>f\left(x-1\right)+f\left(x-2\right)$， $f\left(3\right)>f\left(2\right)+f\left(1\right)=3$，

$f\left(4\right)>f\left(3\right)+f\left(2\right)>5, f\left(5\right)>f\left(4\right)+f\left(3\right)>8$，

$f\left(6\right)>f\left(5\right)+f\left(4\right)>13, f\left(7\right)>f\left(6\right)+f\left(5\right)>21, f\left(8\right)>f\left(7\right)+f\left(6\right)>34$，

$f\left(9\right)>f\left(8\right)+f\left(7\right)>55, f\left(10\right)>f\left(9\right)+f\left(8\right)>89$，

$f\left(11\right)>f\left(10\right)+f\left(9\right)>144, f\left(12\right)>f\left(11\right)+f\left(10\right)>233$，

$f\left(13\right)>f\left(12\right)+f\left(11\right)>377, f\left(14\right)>f\left(13\right)+f\left(12\right)>610$，

$f\left(15\right)>f\left(14\right)+f\left(13\right)>987, f\left(16\right)>f\left(15\right)+f\left(14\right)>1597>1000$，

则依次下去可知 $f(20)>1000$。故选 B。

17. （2024 新高考 II 卷）设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$， $g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 恰有一个交点，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【解析】令 $f(x)=g(x)$，即 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得 $ax^2+a-1=\cos x$，

令 $F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x$，等价于当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

因 $F(x), G(x)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上， $F(0)=G(0)$，即 $a-1=1$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，令 $F(x)=G(x)$，可得 $2x^2+1-\cos x=0$，

因为 $x\in(-1,1)$， 则 $2x^2\geq 0, 1-\cos x\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，可得 $2x^2+1-\cos x\geq 0$，

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立， 则方程 $2x^2+1-\cos x=0$ 有且仅有一个实根 0， 即曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，所以 $a=2$ 符合题意

综上所述： $a=2$

【法二】令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x, x\in(-1,1)$，即 $h(x)$ 有且仅有一个零点，因为 $h(-x)=a(-x)^2+a-1-\cos(-x)=ax^2+a-1-\cos x=h(x)$，则 $h(x)$ 为偶函数，根据偶函数的

对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，即 $h(0)=a-2=0$，解得 $a=2$，若 $a=2$，则 $h(x)=2x^2+1-\cos x$，$x\in(-1,1)$，又因为 $2x^2\geq 0$，$1-\cos x\geq 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，可得 $h(x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意；选 D.

18. （全国卷）设 a 为第四象限的角，若 $\dfrac{\sin 3a}{\sin a}=\dfrac{13}{5}$，则 $\tan 2a=$____________.

【解析】$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，由已知得 $3-4\sin^2\alpha=\dfrac{13}{5}$，得 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$，故 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})^2}=-\dfrac{3}{4}$.

19. 设 $a>1$，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时，a 的取值的集合为________________.

【解析】由已知得 $y=\dfrac{a^c}{x}$，单调递减，所以当 $x\in[a,2a]$ 时，$y\in[\dfrac{a^{c-1}}{2},a^{c-1}]$

所以 $\begin{cases}\dfrac{a^{c-1}}{2}\geq a\\ a^{c-1}\leq a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\geq 2+\log_a 2\\ c\leq 3\end{cases}$，因为有且只有一个常数 c 符合题意，所以 $2+\log_a 2=3$，解得 $a=2$，所以 a 的取值的集合为 $\{2\}$.

20. 满足条件 $AB=2,AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值__________

【解析】设 $BC=x$，则 $AC=\sqrt{2}x$，根据面积公式得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\bullet BC\sin B=x\sqrt{1-\cos^2 B}$，根据余弦定理得

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\bullet BC}=\frac{4+x^2-2x^2}{4x}=\frac{4-x^2}{4x}，代入上式得$$

$$S_{\Delta ABC}=x\sqrt{1-\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\frac{128-\left(x^2-12\right)}{16}}$$

由三角形三边关系有 $\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\ x+2>\sqrt{2}x\end{cases}$ 解得 $2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$，

故当 $x=2\sqrt{2}$ 时取得 $S_{\Delta ABC}$ 最大值 $2\sqrt{2}$

21. 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1(x\in R)$，若对于任意的 $x\in[-1,1]$ 都有 $f(x)\geq 0$ 成立，则实数 a

的值为_____

【解析】若 $x=0$，则不论 a 取何值，$f(x)\geq 0$ 显然成立；当 $x>0$ 即 $x\in(0,1]$ 时，

$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为，$a\geq\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$

设 $g(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$，则 $g'(x)=\dfrac{3(1-2x)}{x^4}$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

上单调递减，因此 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，从而 $a\geqslant 4$；

当 $x<0$ 即 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为 $a\leq\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$，$g'(x)=\dfrac{3(1-2x)}{x^4}>0$

$g(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\text{man}}=g(-1)=4$，从而 $a\leqslant 4$，

综上 $a=4$。

22. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0(a<3)$ 相交于两点 A,B，弦 AB 的中点为（0，1），则直线 l 的方程为________.

【解析】设圆心 $O(-1,2)$，直线 l 的斜率为 k，弦 AB 的中点为 P，PO 的斜率为 k_{op}，$k_{op}=\dfrac{2-1}{-1-0}$

则 $l\perp PO$，所以 $k\cdot k_{op}=k\cdot(-1)=-1\therefore k=1$ 由点斜式得 $y=x-1$

23. $(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2})^5$ 的展开式中整理后的常数项为__________.

【解析】$T_{k+1}=C_5^k 2^{\frac{k}{2}}(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x})^{5-k}$，其中 k 满足 $0\leqslant k\leqslant 5.k\in N$，$(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x})^{5-k}$ 的通项公式为

$T_r=C_{5-k}^r x^{-r}x^{5-k-r}2^{-(5-k-r)}=C_{5-k}^r x^{5-2r-k}2^{k+r-5}$，其中 $0\leq r\leq 5-k, r\in N$，

令 $5-2r-k=0$，得 $2r+k=5$，解得 $k=1,r=2$；$k=3,r=1$；$k=5,r=0$

当 $k=1,r=2$ 时，得展开式中项为 $C_5^1C_4^2 2^{\frac{1}{2}}2^{-2}=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$；当 $k=3,r=1$ 时，得展开式中项

$C_5^3C_2^1 2\sqrt{2}\cdot 2^{-1}=20\sqrt{2}$；当 $k=5,r=0$ 时得展开式中项为 $C_5^5 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，综上 $(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2})^5$

的展开式中整理后的常数项为 $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}+20\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$。

24. （全国卷）在由数字 0，1，2，3，4，5 所组成的没有重复数字的四位数中，不能被 5 整除的数共有________个.

【解析】不能被 5 整除的有两种情况：情况 1、首位为 5 有 $P_4^1\times P_4^2$ 种，情况 2、首位不是 5 的有 $P_4^1\times P_3^1\times P_4^2$ 种，故在由数字 0，1，2，3，4，5 所组成的没有重复数字的四位数中，不能被 5 整

除的数共有 $P_4^1\times P_4^2+P_4^1\times P_3^1\times P_4^2=192$（个）.

25. 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线，l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2},-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0,\dfrac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{3},2\sqrt{2}$，用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离，则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$_________。

【解析】随机变量可能的取值为 $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$， $x_3=\dfrac{2}{3}$，$x_4=1$，它们的概率分别为 $p_1=\dfrac{2}{7}$，$p_2=\dfrac{2}{7}$，$p_3=\dfrac{2}{7}$，$p_4=\dfrac{1}{7}$，∴随机变量 ζ 的数学期望 $E\zeta=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{7}\cdot 1=\dfrac{4}{7}$

26. 已知在 ΔABC 中，$\angle ACB=90^0$，$BC=3$，$AC=4$，P 是 AB 上的点，则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是_____

【解析】P 到 BC 的距离为 d_1， P 到 AC 的距离为 d_2，则三角形的面积得 $3d_1+4d_2=12$，∴ $3d_1\cdot 4d_2\le(\dfrac{12}{2})^2=6^2=36$，∴ d_1d_2 的最大值为 3，这时 $3d_1+4d_2=12$，$3d_1=4d_2$，得 $d_1=2,d_2=\dfrac{3}{2}$

27. （**2023 年北京大学强基计划**）集合 $U=\{1,2,\cdots,10\}$，则 U 的元素两两互素的三元子集的个数为_____。

【解析】U 中 2 的倍数有 $\{2,4,6,8,10\}$，3 的倍数有 $\{3,6,9\}$，5 的倍数有 $\{5,10\}$，显然 U 的元素两两互素的三元子集包含上述每个集合中的最多一个数.

若该子集含元素 1，则对应三元子集有 $4\times 2+4\times 1+2\times 1=14$ 个；

若该子集含元素 7，则对应三元子集有 $4\times 2+4\times 1+2\times 1=14$ 个；

若该子集含元素 1．7，则对应三元子集有 8 个；

若该子集不含元素 1，7，则对应三元子集有 $3\times 2\times 1=6$ 个.

所以 U 的元素两两互素的三元子集的个数为 42.

28. （**2023 年北京大学强基计划**）集合 $U=\{1,2,\cdots,366\}$，则 U 的各元素之和为 17 的倍数且互不相交的二元子集最多有_______ 个。

【解析】$A_0=\{17,34,\cdots,21\times 17\},A_1=\{1,18,\cdots,21\times 17+1\}$，

$A_2=\{2,19,\cdots,21\times 17+2\},\cdots,A_9=\{9,26,\cdots,21\times 17+9\}$

$A_{10}=\{10,27,\cdots,20\times 17+10\},\cdots,A_{16}=\{16,33,\cdots,20\times 17+16\}$. 集合 A_0 中有 21 个元素，且 A_0 自配对，最多得到 10 个二元子集；A_1 与 A_{16} 配对，最多得到 21 个二元子集；同理 $A_2,\cdots,A_7$ 分别与 $A_{15},\cdots,A_{10}$ 配对， 各最多得到 21 个二元子集；A_8 与 A_9 配对，最多得到 22 个二元子集.

所以满足要求的二元子集最多有 $10+21\times 7+22=179$ 个.

29. （2021 新高考全国 I 卷）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n为奇数\\ a_n+2, & n为偶数\end{cases}$

（Ⅰ）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1,b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求$\{a_n\}$的前20项和。

【解析】(1)：由题意知 $a_1=1,a_2=2$，且$k>1$时，

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=(a_{2k}+2)-a_{2k-1}=(a_{2k-1}+1)+2-a_{2k-1}=3$；

同理，$a_{2k+2}-a_{2k-2}=3$；

即$\{a_n\}$的奇数项是以首项为1，公差为3的等差数列，$\{a_n\}$的偶数项是以首项为2，公差为3的等差数列

故，n为奇数时，$a_n=1+(\frac{n+1}{2}-1)\times 3=\frac{3n-1}{2}$；

故，n为偶数时，$a_n=2+(\frac{n}{2}-1)\times 3=\frac{3n-2}{2}$，

故$b_n=a_{2n}=\frac{3\times 2n-2}{2}=3n-1$，从而$b_1=3\times 1-1=2,b_2=3\times 2-1=5$，

综上，$b_1=2,b_2=5,\ b_n=3n-1$

(2)：由（1）知$\{a_n\}$的前20项和为：

$$S_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)+\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$$

$$=6\sum_{k=1}^{10}k-30=6\times\frac{10\times 11}{2}-30=300$$

30. （2023 年新高考 II 卷）$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n为奇数\\ 2a_n, n为偶数\end{cases}$，记$S_n,T_n$分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32,T_3=16$

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$。

【解析】(1) $b_1=a_1-6,b_2=2a_2,b_3=a_3-6$，则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=32\\ a_1-6+2a_2+a_3-6=16\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=32\\ a_1+2a_2+a_3=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=5\\ d=2\end{cases}$$，所以$a_n=2n+3\left(n\in N^*\right)$

【**证明**】（2）由（1）得$b_n=\begin{cases}2n-3，n为奇数\\4n+6，n为偶数\end{cases}\Rightarrow b_{2n-1}+b_{2n}=4n-5+8n+6=12n+1$，

则$T_{2n}=\dfrac{n(13+12n+1)}{2}=6n^2+7n$，于是$T_{2n-1}=T_{2n}-b_{2n}=6n^2-n-6$，

又$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，

则当$n>5$时，若n为偶数，$T_{2k}=6k^2+7k>4k^2+8k=S_{2k}\Leftrightarrow 2k^2>k$；

若n为奇数，$T_{2k-1}=6k^2-k-6>4k^2+4k-3=(2k-1)^2+4(2k-1)=S_{2k-1}$

$\Leftrightarrow 2k^2-5k-3=(2k+1)(k-3)>0\Rightarrow k>3\Leftrightarrow n>5$。

综上，当$n>5$时，$T_n>S_n$