第 10 章 数列

§ 10.1 数列的基本概念

10.1.1 相关概念

学习提纲与学习目标

1、数列的定义、通项公式和前 n 项和公式

2、数列前 n 项和公式与通项公式的关系

3、数列前 n 项和公式和通项公式的求法

1．数列的定义及其表示

按照一定顺序排列的一列数称为数列．数列的一般形式为：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$，其中$a_n$称为数列的第$n$项。项数有限的数列称为有穷数列，项数无限的数列称为无穷数列。对于数列$\{a_n\}$:

如对任意$n\in N^*$，总有$a_{n+1}>a_n$，则称$\{a_n\}$为递增数列；

如对任意$n\in N^*$，总有$a_{n+1}<a_n$，则称$\{a_n\}$为递减数列；

如对任意的$n\in N^*$，均有$a_{n+1}=a_n$，则称数列$\{a_n\}$为常数列；

如存在正数M，使$|a_n|\le M$对任意的$n\in N^*$均成立，则称$\{a_n\}$为有界数列；

如对任意正数M，总存在a_n，使得$|a_n|>M$，则称数列$\{a_n\}$为无界数列；

如存在正整数N，使得对任意的$n\in N^*$，均有$a_{n+N}=a_n$，则称数列$\{a_n\}$为周期数列。

从定义看，数列是定义域为正整数集N^*（或其子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$）的一种**特殊的函数**。

对于数列$\{a_n\}$，如果任意一项a_n均与它的前一项a_{n-1}（或前几项）之间的关系可以用一个公式来表示，则称这个公式为该数列的递推公式，这样的数列称为递推数列。例如斐波拉契数列$\{a_n\}$，其中$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\ge 3)$，事实上，我们碰到的数列大多是递推数列。

2.数列的通项公式

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间可以用一个公式来表示，则称这个公式为数列$\{a_n\}$的通项公式。例如，数列$\{a_n\}$的第n项为2^{n-1}，则$a_n=2^{n-1}$叫数列$\{a_n\}$的通项公式。

注意：（1）并非每个数列都有通项公式，如数列 1，1.4，1.41， 1.414，…；

（2）一个数列的通项公式有时是不唯一的，如数列：1，0，1，0，1，0，…它的通项公式可以是$a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，也可以是$a_n=|\cos\dfrac{n+1}{2}\pi|$.

3．数列的前 n 项和公式

对于数列$\{a_n\}$，我们称$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，如果S_n与n之间可以用一个公式来表示，则称这个公式为数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式。显然，S_n与a_n有如下关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1,\ n=1\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}。$$

4、求数列通项公式的几种方法：

(1) 累加法：对于$a_{n+1}-a_n=f(n)$型，采用累加法，此时$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

(2) 累乘法：对于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$型，采用累乘法，此时$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}\times a_1$

(3) 待定系数法：对于$a_{n+1}=pa_n+q(p\neq 0,1,\ q\neq 0)$型，采用待定系数法转化为等比数列解决.

设$a_{n+1}-r=p(a_n-r)$，比较$a_{n+1}-r=p(a_n-r)$和$a_{n+1}=pa_n+q$，知$r=\dfrac{q}{1-p}$。

（4）公式法：针对等比数列和等差数列

（5）特征根法：针对一些特殊的递推数列（数竞考，高考不考）。

5、数列前 n 项和S_n的几种方法：

（1）裂项相消。常见的有

① $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；　　② $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$；

③ $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$；　　④ $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

⑤ $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{\sqrt{n}}{n}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$

（2）错位相减；比如差比数列

（3）倒序相加；比如等差数列求和

10.1.2 典型例题

例 1．写出下列数列的一个通项公式

（1）$\dfrac{15}{2},\dfrac{24}{5},\dfrac{35}{10},\dfrac{48}{17},\dfrac{63}{26},\cdots,$

（2）$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$,

（3）$7,77,777,7777,\cdots$,

【解】（1）$a_n=\dfrac{(n+3)^2-1}{n^2+1}$；

（2）所给数列为$\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{8},\sqrt{11},\cdots$，故其通项公式为：$a_n=\sqrt{3n-1}$；

（3）所给数列为：$\dfrac{7}{9}(10-1),\dfrac{7}{9}(10^2-1),\dfrac{7}{9}(10^3-1),\cdots$，故$a_n=\dfrac{7}{9}\times 999\cdots 9=\dfrac{7}{9}(10^n-1)$

【注意】这三个数列的通项公式都不唯一。

例 2．（1）已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=2n-7$，判断$2m+7(m\in N)$是否为数列中的项?

（2）数列$\{(n+2)(\frac{7}{8})^n\}$的最大项为第k项，则$k=$（　　）

A. 5 或 6　　B. 5　　C. 6　　D. 4 或 5

【解】（1）$2m+7=2(m+7)-7$；因为$m\in N$，所以$m+7\in N^*$，满足通项公式的定义，所以$2m+7$是数列$\{a_n\}$中的项，事实上，是第$m+7$项。

（2）由选项知$n\geq 2$，所以假设a_n是最大项，则$a_{n-1}\leq a_n\geq a_{n+1}$，则

由$(n+1)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-1}\leq(n+2)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n}\geq(n+3)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n+1}$，解得$5\leq n\leq 6$，

经检验，$a_5=a_6$，故满足要求的$k=5$或6，选 A。

例 3．已知定义在R上的函数$f(x)$是奇函数，且满足$f(3-x)=f(x),f(-1)=3$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$且$a_n=n(a_{n+1}-a_n)(n\in N^*)$，则$f(a_{36})+f(a_{37})=$（　）

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

【解】$a_n=n(a_{n+1}-a_n)\Rightarrow na_{n+1}=(n+1)a_n\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}=\cdots=\dfrac{a_1}{1}=1$

故$a_n=n$；

另一方面，$f(3-x)=f(x)\Rightarrow f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{3}{2}$对称，同时$f(x)$是奇函数，因此其图像又关于原点$(0,0)$对称，因此，$f(x)$是周期$T=4|\dfrac{3}{2}-0|=6$的周期函数，故

$f(a_{36})+f(a_{37})=f(36)+f(37)=f(0)+f(1)=f(1)=-f(-1)=-3$，选 A。

例 4．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$，则通项公式$a_n=$________.

【解】由题意，

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，故

$a_2-a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ (1)

$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (2)

……

$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ (n-1)

(1)+(2)+⋯+ (n-1)，得 $a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$，即 $a_n=a_1+1-\frac{1}{n}=4-\frac{1}{n}$

例 5（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2, a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$，则其通项公式为______

（2）**（全国卷）**嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造卫星。为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$：

$b_1=1+\frac{1}{a_1}, b_2=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}, b_3=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}},\cdots\cdots$，其中$a_k\in N^*\left(k=1,2,\cdots\right)$，以此类推，则

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

【解】（1）由 $a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$，知

$a_n-a_{n-1}=\ln\frac{n}{n-1}$，$a_{n-1}-a_{n-2}=\ln\frac{n-1}{n-2}$，⋯，$a_2-a_1=\ln\frac{2}{1}$，

以上$\left(n-1\right)$个式子相加得，

$a_n-a_1=\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\frac{2}{1}=\ln n$.

又 $a_1=2$，$\therefore a_n=\ln n+2$

（2）【巧解】取 $a_n=1$，则 $b_1=2, b_2=\frac{3}{2}, b_3=\frac{5}{3}$，发现 b_n 的分子、分母成**斐波拉契**数列，故 $b_4=\frac{8}{5}, b_5=\frac{13}{8}, b_6=\frac{21}{13}$，$b_7=\frac{34}{21}, b_8=\frac{55}{34}$，显然选 D。

【常规】由数列$\{b_n\}$的定义可得：

$b_2<b_4<b_6<b_8<\cdots<b_{2n}<\cdots<b_{2m+1}<\cdots<b_7<b_5<b_3<b_1$，故选 D。

虽然一眼就可以排除 A，甚至也能很快排除 C，但要发现上面的规律并非易事。

例 6（1）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=3^n-1$，则它的通项公式为$a_n=$________.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,\ a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$，则该数列的通项公式为________

【解】（1）当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=2\bullet 3^{n-1}$；

当$n=1$时，$a_1=S_1=2$也满足$a_n=2\bullet 3^{n-1}$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\bullet 3^{n-1}$

（2）$\because a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$，$\therefore na_n=(n-1)a_{n-1}$

所以，$na_n=(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_{n-2}=\cdots=1\times a_1=1$，故$a_n=\dfrac{1}{n}$

例 7（1）数列$\{a_n\}$的前n项积为n^2，那么当$n\geq 2$时，a_n等于(　　)

A. $2n-1$　　B. n^2　　C. $\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$.　　D. $\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$

（2）（**多选**）小明爬楼梯时一次上 1 或 2 个台阶，若爬上第n个台阶的方法数为b_n，则(　　)

A．$b_7=21$　　B．$b_1+b_2+b_3+b_5+b_7=51$

C．$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=b_nb_{n+1}-1$　　D．$b_{n-2}+b_{n+2}=3b_n$

【解】（1）由题意知：$a_1a_2a_3\bullet\cdots\bullet a_n=n^2$，故

$n\geq 2$时，$a_n=\dfrac{a_1a_2\bullet\cdots\bullet a_{n-1}a_n}{a_1a_2\bullet\cdots\bullet a_{n-2}a_{n-1}}=\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$，选 D。

（2）由题意知：$b_1=1,b_2=2,b_3=3,b_4=5,b_5=8$，$\cdots$

$\therefore$当$n\geq 3$时，$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$，$\therefore b_6=13,b_7=21$，A 正确；

$b_1+b_2+b_3+b_5+b_7=1+2+3+8+21=35$，B 错；

$\because b_1^2=1,b_2^2=b_2\left(b_3-b_1\right)=b_2b_3-b_2b_1$，$\therefore b_n^2=b_n\left(b_{n+1}-b_{n-1}\right)=b_nb_{n+1}-b_nb_{n-1}$，

$\therefore b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1-b_1b_2+b_nb_{n+1}=b_nb_{n+1}-1$，C 正确；

$\because b_{n-2}=b_n-b_{n-1},b_{n+2}=b_n+b_{n+1}$，$\therefore b_{n-2}+b_{n+2}=2b_n+b_{n+1}-b_{n-1}=3b_n$，故 D 对；

综上，选 ACD。

例 8．数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，则该数列的前（　　）项之和等于$9$。

A．98　　　　B．99　　　　C．96　　　　D．97

【解】 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

所以，$S_n=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$

由$S_n=\sqrt{n+1}-1=9$得$\sqrt{n+1}=10$，解得$n=99$

例 9. $\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{2019\sqrt{2020}+2020\sqrt{2019}}=$________

【解】令$a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$，$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2019\sqrt{2020}+2020\sqrt{2019}}=S_{2019}$$

由于$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，故

原式=$S_{2019}=(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}})+(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\dfrac{1}{\sqrt{2019}}-\dfrac{1}{\sqrt{2020}})$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2020}}=1-\frac{\sqrt{2020}}{2020}$$

即所求式子的值为$1-\dfrac{\sqrt{2020}}{2020}$。

例 10.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1-5+9-13+...+(-1)^{n-1}(4n-3)$，求$S_{15}+S_{22}-S_{31}$的值。

【解】根据S_n的特点，我们对n是奇数还是偶数分开讨论。易知

$S_{2k}=(1-5)+(9-13)+\cdots+=-4k$，

$S_{2k-1}=1+(-5+9)+(-13+17)+\cdots+=4k-3$

故$S_{15}=29,\ S_{22}=-44,\ S_{31}=61$；

故，$S_{15}+S_{22}-S_{31}=-76$

例 11.设$a_1,a_2,\cdots,a_{50}$是在$-1,0,1$这三个整数中取值的数列，若$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9$且$(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2=107$，则$a_1,a_2,\cdots,a_{50}$当中取零的项共有(　　)

A.11 个　　　　B.12 个　　　　C.15 个　　　　D.25 个

【解】 $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2$

$=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{50}{}^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_{50})+50=107$

$\therefore a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{50}{}^2=39$，

$\therefore a_1,a_2,\cdots,a_{50}$ 中取零的项应为 $50-39=11$(个)，故选 A.

例 12. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且对任意的 $m,n\in N^*$ 都有：$a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2020}}=$(　　)

A $\dfrac{2019}{2020}$　　　　B. $\dfrac{2019}{1010}$　　　　C. $\dfrac{2020}{2021}$　　　　D. $\dfrac{4040}{2021}$

【解】 令 $m=1$，得 $a_{n+1}=a_1+a_n+n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=n+1$，

累加得：$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

所以 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n\left(n+1\right)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

于是：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2020}}=2[(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2021})]$

$=2(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2021})=\dfrac{4040}{2021}$，选 D。

例 13. 数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=2019,a_n-a_n\cdot a_{n+1}=1,I_n$ 表示 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项之积，则 $I_{2020}=$____

【解】 $a_n-a_n\cdot a_{n+1}=1\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n}$，故 $a_2=\dfrac{2018}{2019}$，$a_3=\dfrac{-1}{2018}$，$a_4=2019$，

因此 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列，考虑到 $a_1\cdot a_2\cdot a_3=-1$，且 $2020=673\times3+1$，

故 $I_{2020}=(-1)^{673}a_1=-2019$

【另解】 $a_n-a_n\cdot a_{n+1}=1$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{1-a_{n+1}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-a_{n+2}}}=\frac{1-a_{n+2}}{-a_{n+2}}=1-\frac{1}{a_{n+2}}=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1-a_{n+3}}}=a_{n+3}$$，解法同上。

例 14. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=\dfrac{n\bullet2^n-2^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(n^2+2n\right)}\left(n\in N_+\right)$，求 S_n？

【解】：$a_n=\dfrac{n\bullet 2^n-2^{n+1}}{(n+1)(n^2+2n)}=\dfrac{n\bullet 2^n-2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{2^n}{n+1}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{2^n}{n(n+1)}$，故

$$S_n=(\frac{2^2}{2\times3}-\frac{2}{1\times2})+(\frac{2^3}{3\times4}-\frac{2^2}{2\times3})+\cdots+(\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{2^n}{n(n+1)})=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}-1$$

例 15.设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=4,a_3=9,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3},n=4,5,\cdots$，求$a_{2021}$的值。

【解】.易知$a_2-a_1=3;\ a_3-a_2=5$，且$a_n-a_{n-1}=a_{n-2}-a_{n-3}(n\ge4)$；

故，$a_{2n}-a_{2n-1}=3,\ a_{2n+1}-a_{2n}=5$，从而$a_{2n+1}-a_{2n-1}=8$；

所以，$a_{2021}=(a_{2021}-a_{2019})+(a_{2019}-a_{2017})+\cdots+(a_3-a_1)+a_1=8\times1010+1=8081$。

例 16.已知正数数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n,a_1=1$，且点$(\sqrt{a_n+S_n},S_{n+1})$在函数$y=x^2+1$的图像上。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_{n+1}=b_n+2^{a_n}$，求证：$b_nb_{n+2}<b_{n+1}^2$

【解】（1）：由题意知：

$S_{n+1}=(\sqrt{a_n+S_n})^2+1=a_n+S_n+1\Rightarrow S_{n+1}-S_n=a_n+1\Rightarrow a_{n+1}-a_n=1$

故，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=n$，

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$

（2）证明：由（1）知：$b_{n+1}=b_n+2^n$，故

$b_nb_{n+2}<b_{n+1}^2\Leftrightarrow b_n(b_{n+1}+2^{n+1})<b_{n+1}^2\Leftrightarrow b_n(b_n+2^n+2^{n+1})<(b_n+2^n)^2$

$\Leftrightarrow b_n^2+2^nb_n+2^{n+1}b_n<b_n^2+2^{n+1}b_n+2^{2n}\Leftrightarrow 2^nb_n<2^{2n}\Leftrightarrow b_n<2^n$，下证：$b_n<2^n$；

事实上，如有某个k，使得$b_k\ge2^k$，则

$b_{k-1}=b_k-2^{k-1}\ge2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$，进而有$b_{k-2}\ge2^{k-2}$，…，$b_1\ge2^1$，也即$b_1\ge2$，此与$b_1=1$矛盾，

故，对任意$n\in N^*$，均有$b_n<2^n$；综上，原不等式成立。证毕。

例 17. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{n}{2^{n+1}}(n\in N^*)$.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式 (2)证明：$\frac{1}{2^{n-1}} \le a_n \le 1$

【解】(1)由$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{n}{2^{n+1}}$，得$2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+n$

令$b_n=2^n a_n$，则$b_{n+1}-b_n=n,$且$b_1=2a_1=2,$

所以$b_n=b_1+(b_2-b_1)+\cdots+(b_{n-1}-b_{n-2})+(b_n-b_{n-1})$

$$=2+[1+2+\cdots+(n-1)]=2+\frac{n(n-1)}{2}$$

即$2^n a_n=2+\frac{1}{2}n(n-1),$所以$a_n=(n^2-n+4)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

(2)证明：由(1)知：$a_n=(n^2-n+4)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1},$

因$n^2-n\ge 0(n\in N^*)$，故$a_n\ge 4\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{1}{2^{n-1}}$

又$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2-(n+1)+4}{2(n^2-n+4)}=\frac{n^2+n+4}{2n^2-2n+8}=1+\frac{-n^2+3n-4}{2n^2-2n+8}<1$,

故$\{a_n\}$为递减数列，故$a_n\le a_1=1$。综上，$\frac{1}{2^{n-1}}\le a_n\le 1$