习题课

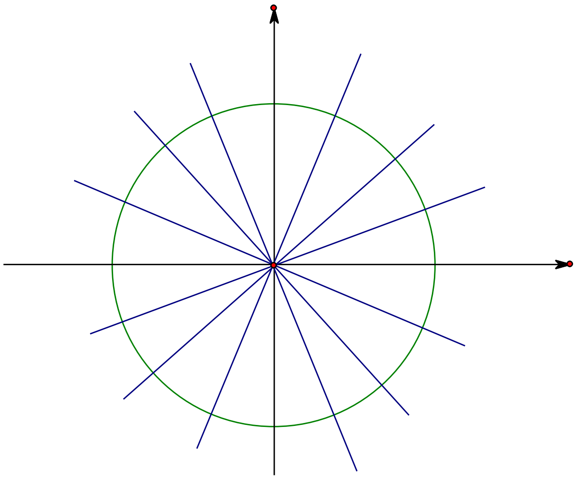
1. 若$S_n=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{2\pi}{8}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{8}$（$n\in N^*$），则在$S_1,S_2,\cdots,S_{2015}$中，正数的个数是（　）

A. 882　　B. 756　　C.750　　D. 378

【解】易知：$S_1\sim S_6>0$，$S_7=0, S_8\sim S_{15}<0, S_{16}=0$，

$S_{17}=S_1>0$，显然 16 为一个周期，一个周期内有 6 个为正，由于$2015=125\times16+15$，

故$S_1\sim S_{2015}$中，正数的个数为：$125\times6+6=756$个，选 B。



2. 一只蜜蜂从蜂房 A 出发向右爬，每次只能爬向右侧相邻的两个蜂房（如图），例如：从蜂房 A 只能爬到 1 号或 2 号蜂房，从 1 号蜂房只能爬到 2 号或 3 号蜂房……以此类推，用a_n表示蜜蜂爬到n号蜂房的方法数，则$a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

【解】由题意可得$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=5,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\left(n\in N^*,n\geq2\right)$，

$\therefore n\geq2$时，$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n\left(a_{n+1}+a_n\right)-a_{n+1}^2=a_na_{n+1}+a_n^2-a_{n+1}^2$

$=a_n^2+a_{n+1}\left(a_n-a_{n+1}\right)=a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=-\left(a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2\right)$，

$\because a_1a_3-a_2^2=-1$，$\therefore$数列$\left\{a_na_{n+2}-a_{n+1}^2\right\}$是以$-1$为首项，$-1$为公比的等比数列，

$\therefore a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2=(-1)\times(-1)^{2021}=1-1$，故正确选项为 A。

3. （全国 I）几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件，为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动，这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，…，其中第一项是2^0，接下来的两项是2^0，2^1，在接下来的三项是2^0，2^1，2^2，依次类推，求满足如下条件的最小整数N：$N>100$且该数列的前N项和为2的整数幂．那么该款软件的激活码是（　　）

A．440　　B．330　　C．220　　D．110

【解】将题中的数排成如下三角形：

2^0　　1 个数

$2^0\ \ 2^1$　　2 个数

$2^0\ \ 2^1\ \ 2^2$　　3 个数

……………………

$2^0\ \ 2^1\ \ 2^2\cdots 2^{k-1}$　　k 个数

$2^0\ \ 2^1\ \ 2^2\cdots 2^{k-1}\ 2^k$　　$k+1$个数

显然每行为一个等比数列，以第k行为例，其和为2^k-1

前面k行共有$\frac{k(k+1)}{2}$个数，由$\frac{k(k+1)}{2}>100$知$k\geq 14$；

假设第N个数出现在第$k+1$行的第m个数，则前面k行的$\frac{k(k+1)}{2}$个数之和为

$$\sum_{i=1}^{k}(2^i-1)=\frac{2(1-2^k)}{1-2}-k=2^{k+1}-2-k$$

而第$k+1$行的前m个数之和为

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{m-1}=2^m-1$$

因此，前N项和为

$$s=(2^{k+1}-2-k)+(2^m-1)=2^{k+1}+2^m-3-k,$$

由于它是2的整数次幂，故应取适当的m,k，使$2^m-3-k=0$，$N=\frac{k(k+1)}{2}+m>100$但最小。

由$2^m-3-k=0$知，$2^m=3+k$，

因$k\geq 14$，故$2^m\geq 17$，故$m\geq 5$；

取 $m=5$，得 $k=29$，此时

$N=\dfrac{29\times(1+29)}{2}+5=440$，故选 A

4. 已知函数 $f(x)=x^3+x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{13}{27}$，等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{99})=11$，则下列可以作为 $\{a_n\}$ 的通项公式的是（　　）

A、$\dfrac{n}{3}-17$　　B、$\dfrac{2n}{3}-33$　　C、$\dfrac{n}{2}-45$　　D、$49-n$

【解】易知 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9})$ 中心对称，而数列 $a_1,a_2,...,a_{99}$ 关于 a_{50} 对称，

故如 $a_{50}=-\dfrac{1}{3}$，则 $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{99})=\dfrac{99}{2}\times\dfrac{2}{9}=11$ 与题意相符，

故 $a_{50}=-\dfrac{1}{3}$，只能选 A。

【补充】 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq0)$ 的图像关于点 $(-\dfrac{b}{3a},f(-\dfrac{b}{3a}))$ 中心对称。

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{4}{3}$，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$ 且 $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，则 S_n 的整数部分的所有可能值构成的集合是（　）.

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,2\}$

【解】易得 $a_2=\dfrac{13}{9}$，$a_3=\dfrac{133}{81}$，又

$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n(a_n-1)}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$，故，

$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=(\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_2-1})+(\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1})$

$=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=3-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$

易知 $[S_1]=[\dfrac{3}{4}]=0$，故 $[S_2]=[\dfrac{75}{52}]=1$，考虑到 $a_{n+1}-1>0$，也即 $S_n<3$，故只能选 A。

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_{19}>0,S_{20}<0$，则 $\dfrac{S_1}{a_1},\dfrac{S_2}{a_2},\dfrac{S_3}{a_3},\cdots,\dfrac{S_{19}}{a_{19}}$ 中最大项为（　　　）

A．$\dfrac{S_8}{a_8}$　　B．$\dfrac{S_9}{a_9}$　　C．$\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$　　D．$\dfrac{S_{11}}{a_{11}}$

【解】根据所给条件知等差数列$\left\{a_n\right\}$单调递减，且

由$S_{19}=19a_{10}>0$知$a_{10}>0$，

由$S_{20}=\dfrac{20}{2}\left(a_{10}+a_{11}\right)<0$知$a_{11}<0$。

易知$a_1>0$，$d<0$；

故$a_1>a_2>\cdots>a_8>a_9>a_{10}>0>a_{11}$，$S_1<S_2<\cdots<S_8<S_9<S_{10}>S_{11}$，

故$\dfrac{S_1}{a_1}<\dfrac{S_2}{a_2}<\dfrac{S_3}{a_3}<\cdots<\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$

而当$11\le n\le 19$时，$\dfrac{S_n}{a_n}<0$，

故$\dfrac{S_1}{a_1},\dfrac{S_2}{a_2},\dfrac{S_3}{a_3},\cdots,\dfrac{S_{19}}{a_{19}}$中最大项为$\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$，选 C。

7.　**（多选题）**已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=-\dfrac{2}{3}$，等差数列$\{b_n\}$的首项$b_1=12$，若$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，则以下结论正确的有(　　)

A．$a_9a_{10}<0$　　B．$a_9>a_{10}$　　C．$b_{10}>0$　　D．$b_9>b_{10}$

【解】因等比数列$\{a_n\}$的公比$q=-\dfrac{2}{3}<0$，故$a_na_{n+1}<0$，从而$a_9a_{10}<0$，A 对。

如$a_1>0$，则$a_9>0,a_{10}<0$；考虑到$a_{10}>b_{10}$，故$b_{10}<0$，此时 BD 对，C 错；

如$a_1<0$，则$a_9<0,a_{10}>0$，故$a_9<a_{10}$，B 错。

考虑到$a_9>b_9$，故$b_9<0$，从而$\{b_n\}$递减，故$b_9>b_{10}$，D 对；

综上，选 AD。

8.　在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，若$S_{2023}=2023$，且$\dfrac{S_{2021}}{2021}-\dfrac{S_{20}}{20}=2001$，则$a_1$等于（　　）

A. -2021　　B. -2020　　C. -2019　　D. -2018

【解】由于S_n是等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，故数列$\left\{b_n\right\}=\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列，设其公差为$d$，

则由$\frac{S_{2021}}{2021}-\frac{S_{20}}{20}=2001\Rightarrow 2001d=2001$，故$d=1$

由题意: $b_{2023}=1\Rightarrow b_1+2022\times1=1\Rightarrow b_1=-2021$，

从而得$a_1=b_1=-2021$，选 A。

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=\frac{12}{5}$，$a_4a_5=-\frac{2}{5}$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_8}=$（　　）

A. -6　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{14}{5}$　　D. 2

【解】 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_8}$

$$=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_8}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_7}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_6}\right)+\left(\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}\right)$$

$$=\frac{a_1+a_8}{a_1a_8}+\frac{a_2+a_7}{a_2a_7}+\frac{a_3+a_6}{a_3a_6}+\frac{a_4+a_5}{a_4a_5}$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{a_4a_5}=-6$$

10. 数列$\{a_n\}$是公比为$-\frac{2}{3}$的等比数列，$\{b_n\}$是首项为 12 的等差数列. 现已知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，则以下结论中一定成立的是__________（请填上所有正确选项的序号）

① $a_9a_{10}<0$；　② $b_{10}>0$；　③ $b_9>b_{10}$；　④ $a_9>a_{10}$

【解】 因为数列$\{a_n\}$是公比为$-\frac{2}{3}$的等比数列，所以该数列的奇数项与偶数项异号，即:

当$a_1>0$时，$a_{2k-1}>0,a_{2k}<0$；当$a_1<0$时，$a_{2k-1}<0,a_{2k}>0$；所以$a_9a_{10}<0$是正确的；

当$a_1>0$时，$a_{10}<0$，又$a_{10}>b_{10}$，所以$b_{10}<0$，结合数列$\{b_n\}$是首项为 12 的等差数列，此时数列的公差$d<0$，数列$\{b_n\}$是递减的. 故知: $b_9>b_{10}$

当$a_1<0$时，$a_9<0$，又$a_9>b_9$，所以$b_9<0$，结合数列$\{b_n\}$是首项为 12 的等差数列，此时数列的公差$d<0$，数列$\{b_n\}$是递减的. 故知: $b_9>b_{10}$

综上可知，①③一定是成立的.

11. 已知数列$x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\frac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$，则$x_n=$______。

【解】已知数列 $x_{n+2}=\frac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{x_{n+2}}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2x_nx_{n+1}}=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{x_n}$

令 $y_n=\frac{1}{x_n}$，则 $y_{n+2}=\frac{1}{2}y_{n+1}+\frac{1}{2}y_n$。

故 $y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)\Rightarrow y_{n+2}-y_{n+1}=(-\frac{1}{2})^n(y_2-y_1)=(-\frac{1}{2})^{n+1}$

$\Rightarrow y_n-y_{n-1}=(-\frac{1}{2})^{n-1}$

故 $y_n=y_1+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\cdots+(y_n-y_{n-1})$

$=1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

故 $x_n=\frac{3}{2+(-\frac{1}{2})^{n-1}}$

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=0,S_n=a_{n+1}-2$，若 $\frac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$，则 n 的最小值为______

【解】$S_n+2=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\Rightarrow S_{n+1}=2S_n+2\Rightarrow S_{n+1}+2=2\left(S_n+2\right)$

故，$\left\{S_n+2\right\}$ 是公比为 2 的等比数列。

又 $S_1+2=a_1+2=2$，故 $S_n+2=2^n$，即 $S_n=2^n-2$，

故 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

故，$\frac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}\Rightarrow\frac{2^{n+1}-2}{2^{2n}-2}<\frac{1}{8}$，化简得

$2^{2n}-16\cdot2^n+14>0$，解得 $2^n>8+5\sqrt{2}$ 或 $2^n<8-5\sqrt{2}$；

由 $2^n>8+5\sqrt{2}$ 解得 $n_{\min}=4$

13. 已知数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}$，则其前 n 项和 $T_n=$______。

【解】$T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}$，$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+2}}$

两式挫项相减得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}$

$\therefore T_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$。

14. 设$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$，$b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|$，$n\in N^*$，则数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=$____.

【解】易知$b_1=\left|\dfrac{a_1+2}{a_1-1}\right|=4$，

又$b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|=\left|\dfrac{\dfrac{2}{a_{n-1}+1}+2}{\dfrac{2}{a_{n-1}+1}-1}\right|=2\left|\dfrac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-1}\right|=2b_{n-1}$，

故$\{b_n\}$是以$b_1=4$为首项，2为公比的等比数列，故$b_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

【巧解】易知$b_1=4$，$b_2=8$，$b_3=16$，可猜$b_n=2^{n+1}$

15. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n且$S_8-2S_4=6$，则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为____.

【解】易知$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8$；由$S_8-2S_4=6$可得$S_8-S_4=S_4+6$，由等比数列的性质可得$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$成等比数列，则$S_4\left(S_{12}-S_8\right)=\left(S_8-S_4\right)^2=(S_4+6)^2$

综上可得：$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_8=\dfrac{(S_4+6)^2}{S_4}=\dfrac{S_4^2+12S_4+36}{S_4}=S_4+\dfrac{36}{S_4}+12$

$\geq 2\sqrt{S_4\times\dfrac{36}{S_4}}+12=24$

当且仅当$S_4=6$时等号成立.综上可得,则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为24.

【提醒】$\dfrac{(S_4+6)^2}{S_4}$也可这样处理：$\dfrac{(S_4+6)^2}{S_4}\geq\dfrac{(2\sqrt{6S_4})^2}{S_4}=\dfrac{24S_4}{S_4}=24$，易验证等号可取。

故$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为24。

16. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$a_{2n}=n-a_n$，$a_{2n+1}=a_n+1$，则$S_{100}=$（用数字作答）

【解】：$a_{2n}+a_{2n+1}=n+1$，故

$a_2+a_3=2$

$a_4+a_5=3$

$a_6+a_7=4$

……

$a_{98}+a_{99}=50$

故，$a_2+a_3+\cdots+a_{98}+a_{99}=2+3+\cdots+50=1274$，

$a_{100}=50-a_{50}=25+a_{25}=26+a_{12}=32-a_6=29+a_3=30+a_1=31$，则 $S_{100}=1306$。

17. 若在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列，现将数列 2，3 进行构造，第 1 次得到数列 2，5，3；第 2 次得到数列 2，7，5，8，3；依次构造，第 $n\left(n\in N^*\right)$ 次得到数列 $2,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k,3$；记 $a_n=2+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+3$，则 $a_3=$____，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$______。

【解】 易知 $a_1=2+5+3=10$，

由于 $a_n=2+x_1+x_2+\cdots+x_k+3$，不妨令

$a_{n+1}=2+y_1+x_1+y_2+x_2+\cdots+x_{k-1}+y_k+x_k+y_{k+1}+3$

则 $a_{n+1}=\left(2+x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+3\right)+\left(y_1+y_2+\cdots+y_k+y_{k+1}\right)$

$$=a_n+\left[\left(2+x_1\right)+\left(x_1+x_2\right)+\cdots+\left(x_{k-1}+x_k\right)+\left(x_k+3\right)\right]$$

$$=a_n+\left[2+2x_1+2x_2+\cdots+2x_k+3\right]$$

$$=a_n+\left[2\left(2+x_1+x_2+\cdots+x_k+3\right)-5\right]=3a_n-5$$

即 $a_n=3a_{n-1}-5\left(n>1\right)$

因此 $a_n-\frac{5}{2}=3(a_{n-1}-\frac{5}{2})=\cdots=(a_1-\frac{5}{2})3^{n-1}$，得 $a_n=\frac{5}{2}(3^n+1)$，

故 $a_3=70$，$S_n=\frac{5n}{2}+\frac{15(3^n-1)}{4}$

18. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2.3]=2,[-1.2]=-2$ 等等。已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1,\ a_{n+1}={a_n}^2+a_n$，则 $\left[\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_{2023}}{a_{2023}+1}\right]=$______。

【解】 $a_{n+1}={a_n}^2+a_n\Rightarrow a_{n+1}=a_n\left(a_n+1\right)\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n\left(a_n+1\right)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$

$\Rightarrow\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

累加可得：$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2024}}=1-\frac{1}{a_{2024}}$，

另外，由题意知：$a_{n+1}-a_n={a_n}^2>0$（由题目所给递推关

系知$a_n>0$），故$\{a_n\}$单调递增，因此$\dfrac{1}{a_{2024}}<\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$，

故$\left[\dfrac{a_1}{a_1+1}+\dfrac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\dfrac{a_{2023}}{a_{2023}+1}\right]=\left[\left(1-\dfrac{1}{a_1+1}\right)+\cdots+\left(1-\dfrac{1}{a_{2023}+1}\right)\right]$

$=\left[2023-\left(\dfrac{1}{a_1+1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2023}+1}\right)\right]=\left[2023-\left(1-\dfrac{1}{a_{2024}}\right)\right]=\left[2022+\dfrac{1}{a_{2024}}\right]=2022$

19. 已知数列$\{a_n\}$的各项都是正数，$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n\left(n\in N^*\right)$，若数列$\{a_n\}$为单调递增数列，则首项$a_1$的取值范围是________________；当$a_1=\dfrac{2}{3}$时，记$b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n-1}$，若$k<b_1+b_2+\cdots+b_{2021}<k+1$，则整数$k=$________。

【解】由于数列各项为正，故由$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$解得$a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{1+4a_n}}{2}$，

因数列$\{a_n\}$为单调递增数列，故$a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{1+4a_n}}{2}>a_n$，解得$0<a_n<2$，

故$0<a_1<2$；

当$a_1=\dfrac{2}{3}$时，由$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n\Rightarrow a_{n+1}\left(a_{n+1}-1\right)=a_n\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}\left(a_{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{a_n}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}$，从而

$b_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{a_{n+1}-1}=(-1)^n\left[\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right]=(-1)^n\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{a_n}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{a_{n+1}}$

由于$0<a_n<2$，进一步，由$a_{n+1}^2-a_{n+1}\in(0,2)$可得$a_{n+1}\in(1,2)$，故$\dfrac{1}{a_{2021}}\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

故，$b_1+b_2+\cdots+b_{2021}=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{a_{2021}}\in\left(-4,-\dfrac{7}{2}\right)$，

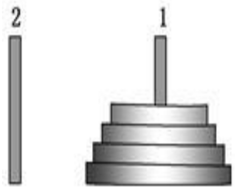
故$k=-4$。

20. 如图所示，有三根针和套在一根针上的n个金属片，按下列规则，把金属片从一根针上全部移到另一根针上．

(1)每次只能移动一个金属片；

(2)在每次移动过程中，每根针上较大的金属片不能放在较小的金属片上面．将n个金属片从

1 号针移到 3 号针最少需要移动的次数记为 $f(n)$，则 $f(n)=$________.



【解】显然，$f(1)=1, f(2)=3$，对于 $n+1$ 个的情况，先将上面的 n 个移到 2 号针上，有 $f(n)$ 种移法，将第 $n+1$ 个金属片（底面最大的那个）移到 3 号针，有 1 种移法，再将 1 号针上的 n 个金属片移到 3 号针，又有 $f(n)$ 种移法，因此，得到如下的递推关系

$f(n+1)=2f(n)+1$　　　　（1）

从而 $f(n)=2f(n-1)+1$　　　（2）

（1）-（2）得 $f(n+1)-f(n)=2[f(n)-f(n-1)]=\cdots=2^{n-1}(f(2)-f(1))=2^n$

采用累加法，得 $f(n)-f(1)=2+2^2+\cdots+2^{n-1}$，故 $f(n)=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

【巧解】显然，$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=7$，…，猜测 $f(n)=2^n-1$

例 6．若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in N^*)$，则 $a_{20}=$____。

【解析】令 $a_n=\tan b_n$，则 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}\Rightarrow\tan b_{n+1}=\dfrac{\tan b_n-\tan 60^\circ}{1+\tan b_n\tan 60^\circ}=\tan\left(b_n-60^\circ\right)$，

因此，可认为：$b_{n+1}=b_n-60^\circ$，从而 $b_{20}=b_1-19\times 60^\circ=-\dfrac{19\pi}{3}$，从而

$a_{20}=\tan b_{20}=\tan(-\dfrac{19\pi}{3})=\tan(-\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$

21.　（广东高考）一条直线可将平面分成 2 个部分，2 条直线最多可将平面分成 4 个部分，则 100 条直线最多可将平面分成（　　　　）个部分。

【解】设 n 条直线最多可将平面分成 a_n 个部分，则 $a_1=2, a_2=4$；下面我们寻找 a_n 与 a_{n+1} 的关系。显然第 $n+1$ 条直线最多与前面的 n 条直线产生 n 个交点，这 n 个交点将第 $n+1$ 条直线分成了 $n+1$ 个部分，非常明显，这 $n+1$ 个部分就是新增加的，

因此 $a_{n+1}=a_n+n+1$，即 $a_n-a_{n-1}=n$，采用累加法得 $a_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$

因此，$a_{100}=1+\dfrac{100(100+1)}{2}=5051$

22. 数列$\{a_n\}$的通项$a_n = n^2(\cos^2\frac{n\pi}{3} - \sin^2\frac{n\pi}{3})$，其前$n$项和为$S_n$.

(1) 求S_n;

(2) $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n}$, 求数列｛$b_n$｝的前$n$项和$T_n$.

【解】(1) 由于$\cos^2\frac{n\pi}{3} - \sin^2\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3}$,故$a_n = n^2\cos\frac{2n\pi}{3}$，所以

$$S_{3k} = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$$

$$= (-\frac{1^2 + 2^2}{2} + 3^2) + (-\frac{4^2 + 5^2}{2} + 6^2) + \cdots + (-\frac{(3k-2)^2 + (3k-1)^2}{2} + (3k)^2)$$

$$= \frac{13}{2} + \frac{31}{2} + \cdots + \frac{18k-5}{2} = \frac{k(9k+4)}{2},$$

$$S_{3k-1} = S_{3k} - a_{3k} = \frac{k(4-9k)}{2},$$

$$S_{3k-2} = S_{3k-1} - a_{3k-1} = \frac{k(4-9k)}{2} + \frac{(3k-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - k = -\frac{3k-2}{3} - \frac{1}{6},$$

故，$S_n = \begin{cases} -\frac{n}{3} - \frac{1}{6}, & n = 3k-2 \\ \frac{(n+1)(1-3n)}{6}, & n = 3k-1 \\ \frac{n(3n+4)}{6}, & n = 3k \end{cases}$ （$k \in N^*$）

(2) $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n} = \frac{9n+4}{2 \cdot 4^n}$, $T_n = \frac{1}{2}[\frac{13}{4} + \frac{22}{4^2} + \cdots + \frac{9n+4}{4^n}]$,

$4T_n = \frac{1}{2}[13 + \frac{22}{4} + \cdots + \frac{9n+4}{4^{n-1}}]$, 两式相减得:

$$3T_n = \frac{1}{2}[13 + \frac{9}{4} + \cdots + \frac{9}{4^{n-1}} - \frac{9n+4}{4^n}]$$

$$= \frac{1}{2}[13 + \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{9n+4}{4^n}] = 8 - \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{9n}{2^{2n+1}}$$

故，$T_n = \frac{8}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-3}} - \frac{3n}{2^{2n+1}}$.

23. 已知$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in N^*$.

（Ⅰ）求b_1,b_2,b_3的值；

（Ⅱ）设$c_n=b_nb_{n+1},S_n$为数列$\{c_n\}$的前n项和，求证：$S_n\ge 17n$；

（Ⅲ）求证：$|b_{2n}-b_n|<\frac{1}{64}\bullet\frac{1}{17^{n-2}}$．

【解】（Ⅰ）$\because a_2=4,a_3=17,a_4=72$，所以$b_1=4.b_2=\frac{17}{4},b_3=\frac{72}{17}$

（Ⅱ）由$a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n$得$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=4+\frac{a_n}{a_{n+1}}$即$b_{n+1}=4+\frac{1}{b_n}$

所以当$n\geqslant 2$时，$b_n>4$于是$c_1=b_1b_2=17,c_n=b_nb_{n+1}=4b_n+17>17(n\ge 2)$

所以$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n\ge 17n$

（Ⅲ）当$n=1$时，结论$|b_2-b_1|=\frac{1}{4}<\frac{17}{64}$成立

当$n\geqslant 2$时，有$|b_{n+1}-b_n|=|4+\frac{1}{b_n}-4-\frac{1}{b_{n-1}}|=|\frac{b_n-b_{n-1}}{b_nb_{n-1}}|\leqslant\frac{1}{17}|b_n-b_{n-1}|$

因此，$|b_{n+1}-b_n|\le(\frac{1}{17})^{n-1}|b_2-b_1|=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{17})^{n-1}(n\ge 2)$，

所以，$|b_{2n}-b_n|=|(b_{2n}-b_{2n-1})+(b_{2n-1}-b_{2n-2})+(b_{2n-2}-b_{2n-3})+\cdots+(b_{n+1}-b_n)|$

$\le|b_{2n}-b_{2n-1}|+|b_{2n-1}-b_{2n-2}|+|b_{2n-2}-b_{2n-3}|+\cdots+|b_{n+1}-b_n|$

$$=\frac{1}{4}[(\frac{1}{17})^{2n-2}+(\frac{1}{17})^{2n-3}+\cdots+(\frac{1}{17})^{n-1}]=\frac{1}{4}\cdot\frac{(\frac{1}{17})^{n-1}(1-(\frac{1}{17})^n)}{1-\frac{1}{17}}<\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{17^{n-2}},$$

综上，对任意$n\in N^*$，都有$|b_{2n}-b_n|<\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{17^{n-2}}$，证毕。

例4.已知正数数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{13a_n-25}{a_n+3}(n\in N^*)$。

(1) 若$a_1=5$，求a_n；

(2) 若$a_1=3$，求a_n；

(3) a_1取哪些值时，无穷数列$\{a_n\}$不存在。

【解】(1) 我们采用待定系数法进行变形

令$a_{n+1}-\lambda=\frac{\mu(a_n-\lambda)}{a_n+3}$，对照$a_{n+1}=\frac{13a_n-25}{a_n+3}$，得$\lambda=5,\ \mu=8$，

故 $a_{n+1}-5=\dfrac{8(a_n-5)}{a_n+3}$

显然，若 $a_1=5$，由 $a_{n+1}-5=\dfrac{8(a_n-5)}{a_n+3}$ 知，对任意 $n\in N^*$，都有 $a_n=5$。

（2）由 $a_{n+1}-5=\dfrac{8(a_n-5)}{a_n+3}$ 知：显然 $a_n\neq 5$（否则 $a_1=5$）

故，$\dfrac{1}{a_{n+1}-5}=\dfrac{a_n+3}{8(a_n-5)}=\dfrac{(a_n-5)+8}{8(a_n-5)}=\dfrac{1}{a_n-5}+\dfrac{1}{8}$，

也即 $\dfrac{1}{a_n-5}-\dfrac{1}{a_{n-1}-5}=\dfrac{1}{8}$，故，$\dfrac{1}{a_n-5}=(\dfrac{1}{a_n-5}-\dfrac{1}{a_{n-1}-5})+(\dfrac{1}{a_{n-1}-5}-\dfrac{1}{a_{n-2}-5})+$

$\cdots+(\dfrac{1}{a_2-5}-\dfrac{1}{a_1-5})+\dfrac{1}{a_1-5}=\dfrac{1}{a_1-5}+\dfrac{1}{8}(n-1)$，

即 $\dfrac{1}{a_n-5}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}(n-1)$；显然该式左边不为 0，而该式右边当 $n=5$ 时为 0。

故 $n\geq 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的项都不存在；

而 $n\leq 4$ 时，由 $\dfrac{1}{a_n-5}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}(n-1)$ 解得 $a_n=\dfrac{5n-17}{n-5}$，考虑到 $a_n>0$，所以 $n\neq 4$

综上，$a_n=\dfrac{5n-17}{n-5}\left(n\leq 3, n\in N^*\right)$

（3）由（2）知：$\dfrac{1}{a_n-5}=\dfrac{1}{a_1-5}+\dfrac{1}{8}(n-1)$，

同样，上面式子的左边不为 0，现令右边为 0，即 $\dfrac{1}{a_1-5}+\dfrac{1}{8}(n-1)=0$，解得

$a_1=\dfrac{5n-13}{n-1}$，

考虑到 $a_1>0$，故 $n\geq 3$，

$a_1\in\{x\mid x=\dfrac{5n-13}{n-1}, n\geq 3, n\in N^*\}$ 时，无穷数列 $\{a_n\}$ 不存在（**它只有有限项**）