§ 7.3 空间直线、平面平行的判定定理和性质定理

7.3.1 相关概念

学习目标

1、掌握空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判断定理和性质定理，

2、能熟练运用上述定理解答相关的立体几何问题。

一、相关定理

1．直线与平面平行

判定定理：平面外一条直线与平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.（“线线平行，则线面平行”）

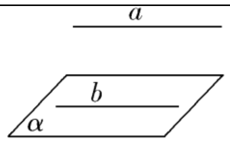
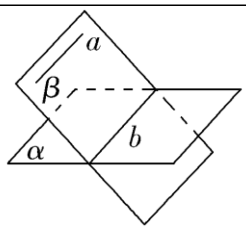
性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行（“线面平行，则线线平行”）

2.平面与平面平行

判定定理：如果一个平面内的两条相交直线都和另一个平面平行，那么这两个平面平行.（“线面平行，则面面平行”）

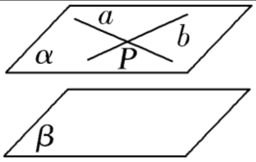
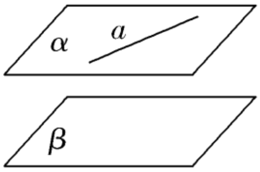
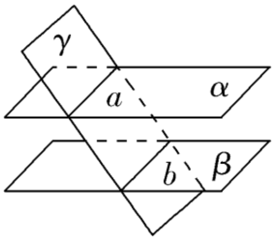
性质定理：两个平行平面同时和第三个平面相交，则其交线平行.（“面面平行，则线线平行”）

二、直线与平面平行的判定定理与性质定理符号表示

	文字语言	图形表示	符号表示
判定定理	平面外一条直线与平面内一条直线平行，则这条直线与这个平面平行		$a\not\subset\alpha,b\subset\alpha,a//b$ $\Rightarrow a//\alpha$
性质定理	条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面与这个平面相交，则这条直线与交线平行		$a//\alpha,a\subset\beta,\alpha\cap\beta=b$ $\Rightarrow a//b$

三、平面与平面平行的判定定理与性质定理的符号表示

	文字语言	图形表示	符号表示

判定定理	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行		$a\subset\alpha,b\subset\alpha$，$a\cap b=P$，$a//\beta$，$b//\beta$，则$\alpha//\beta$
性质定理	两平面平行，则其中一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面		$\alpha//\beta$，$a\subset\alpha$ 则 $a//\beta$
	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行		$\alpha//\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，则$a//b$

【注意】平行关系中的三个重要结论

(1)垂直于同一条直线的两个平面平行，即若$a\perp\alpha,a\perp\beta$，则$\alpha//\beta$。

(2)平行于同一平面的两个平面平行，即若$\alpha//\beta,\beta//\gamma$，则$\alpha//\gamma$。

(3)垂直于同一个平面的两条直线平行，即若$a\perp\alpha,b\perp\alpha$，则$a//b$.

7.3.2 典型例题

例 1.下列命题中正确的是(　　)

A.若a,b是两条直线，且$a//b$，那么a平行于经过b的任何平面

B.若直线a和平面β满足$a//\beta$，那么a与β内的任何直线平行

C.平行于同一条直线的两个平面平行

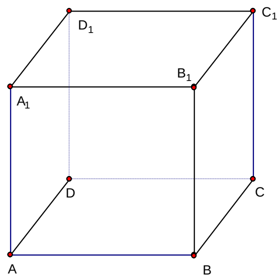
D.若直线a,b和平面β满足$a//b$，$a//\beta$，$b\not\subset\beta$，则$b//\beta$。

【解析】A：明显错，a,b确定的平面就是反例。

B：明显错。参考右图。

C：两平面相交，在空间中找一条与交线平行，但不在两个平面内的直线，就构成反例。参考右图。

D：令a,b确定的平面为γ，如果$\gamma//\beta$，则自然有$b//\beta$；若γ与β相交，令交线为l，因$a//\beta$，故$a//l$，又因$a//b$，故$b//l$，进而$b//\beta$。综上，选 D。



例 2.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)若一条直线和平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.(　　)

(2)若直线a // 平面α， $P\in\alpha$，则过点P且平行于直线a的直线有无数条.(　　)

(3)如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.(　　)

(4)如果两个平面平行，那么分别在这两个平面内的两条直线平行或异面.(　　)

【解析】（1）这条直线可能在平面内，故(1)错误.

（2）过点P且平行于a的直线只有一条，故(2)错误.

（3）应该是：一个平面内的两条**相交直线**平行于另一个平面，则这两个平面平行，故(3)错误.

（4）明显正确（因为这样的两条直线显然不可能重合或相交，只能是平行或异面了）.

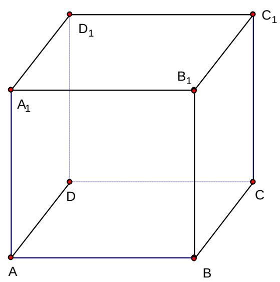
例 3．设θ,β是两个不同的平面，m是直线且$m\subset\theta$，则.“$m//\beta$”是“$\theta//\beta$”的(　　)

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【解析】必要性显然成立。两平面平行，则一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面；充分性显然不成立。如图，取$\theta=$平面$ABCD$，$m=AD$，$\beta=$平面BCC_1B_1，显然$m\subset\theta,m//\beta$，但β,θ相交。

综上，选 B。



例 4．下列说法正确的个数是________.

(1)若直线l上有两点到平面θ的距离相等，则l // 平面θ；

(2)若直线l与平面θ平行，则l与平面θ内的任意一条直线平行；

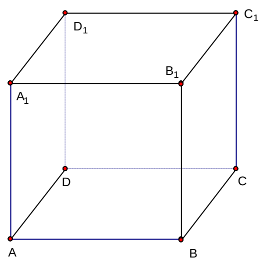
(3)两条平行线中的一条直线与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行．

【解析】：直线l与平面θ相交时，直线l上也有两个点到平面θ的距离相等，故(1)不正确；

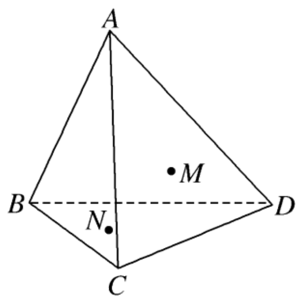
若直线l与平面θ平行，则l与平面θ内的直线可能平行也可能异面，故(2)不正确；

(3)明显错．

答案：0 个



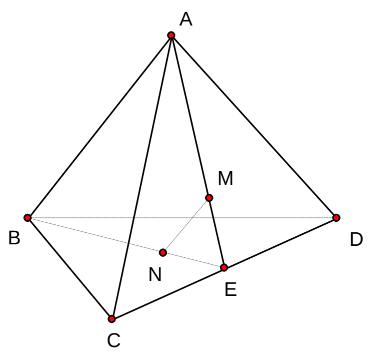
例 5.如图所示，在四面体$ABCD$中，M,N分别是$\triangle ACD,\triangle BCD$的重心，则四面体的四个面中与$MN$平行的是________．



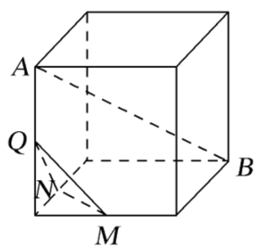
【解析】：设E为CD的中点，连接AE,BE。由于三角形的重心是三角形三条中线的交点，因此N在BE上，M在AE上，且由$\dfrac{EM}{MA}=\dfrac{EN}{NB}=\dfrac{1}{2}$，故$MN//AB$.

因此，$MN//$平面ABC，$MN//$平面ABD.

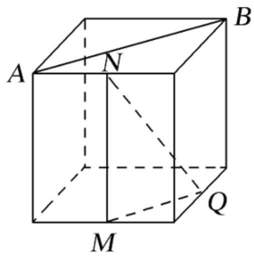
答案：平面ABC、平面ABD。



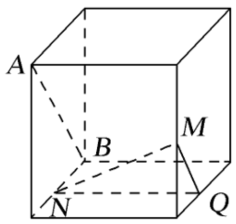
例 6．如图，在下列四个正方体中，A,B为正方体的两个顶点，M,N,Q为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线AB与平面MNQ不平行的是(　　)



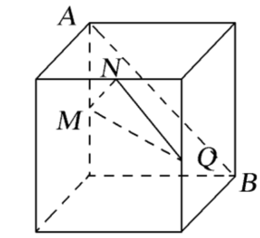
A



B



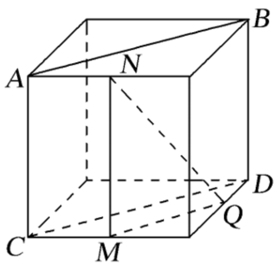
C



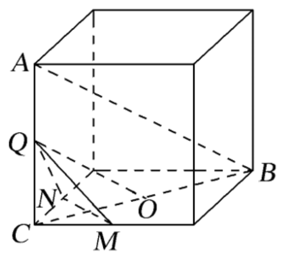
D

【解析】对于选项 B，如图(1)所示，连接CD，因为$AB//CD$，M,Q分别是所在棱的中点，所以$MQ//CD$，所以$AB//MQ$，又$AB\not\subset$平面MNQ，$MQ\subset$平面MNQ，所以AB ∥平面MNQ。

同理可证选项 C，D 中均有AB ∥平面MNQ。因此 A 项中直线AB与平面MNQ不平行.选 A。



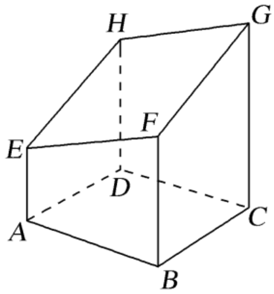
图（1）



图(2)

对于选项 A，其中O为BC的中点(如图(2)所示)，连接OQ，则$OQ//AB$，因为OQ与平面MNQ有交点，所以AB与平面MNQ有交点，即AB与平面MNQ不平行.选 A。

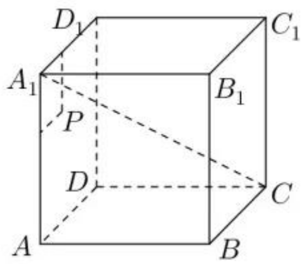
例 7.如图是长方体被一平面所截得的几何体，四边形$EFGH$为截面，则四边形$EFGH$的形状为__



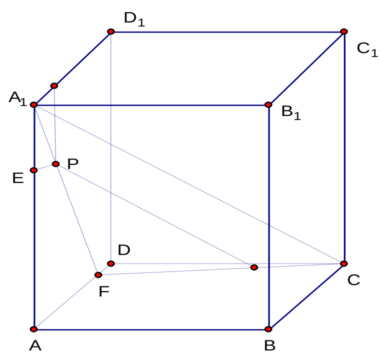
【解析】两平面平行，同时和第三个平面相交，则交线平行，故 $EF//GH, EH//GF$，因此，四边形 $EFGH$ 为平行四边形。

例 8. 在棱长为 10 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点，且 P 到 A_1D_1 的距离为 3，到 AA_1 的距离为 2，则过 P 且与 A_1C 平行的直线相交的面是(　　)

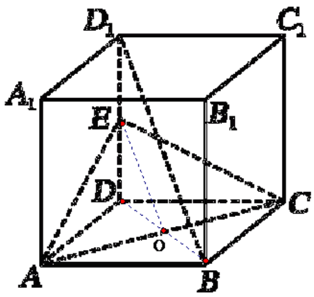
A．$ABCD$　　B．BB_1C_1C　　C．CC_1D_1D　　D．AA_1B_1B



【解析】: 不妨设 $PE \perp AA_1$ 于 E，显然，$\tan\angle EA_1P=\frac{2}{3}<1$，故 A_1P 的延长线必与 AD 相交，令交点为 F，则满足要求的直线必在 A_1FC 平面上，即，满足要求的直线必与平面 $ABCD$ 相交，选 A.



例 9.如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点，则 BD_1 与平面 AEC 的位置关系为___.



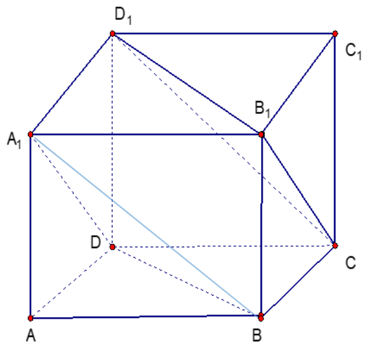
【解析】连接BD，设$BD\cap AC=O$，连接EO，

在$\triangle BDD_1$中，O为BD的中点，E为DD_1的中点，所以EO为$\triangle BDD_1$的中位线，则$BD_1//EO$，而$BD_1\not\subset$平面AEC，$EO\subset$平面AEC，所以平面AEC。

例 10（全国 I）平面α过正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A，$\alpha//$平面CB_1D_1，$\alpha\cap$平面$ABCD=m$，$\alpha\cap$平面$ABB_1A_1=n$，则m,n所成角的正弦值为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

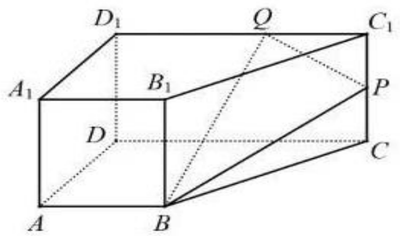
【解析】如图，根据平行特性的传递性，可将平面A_1BD视为α，从而$n=A_1B,m=BD$，其夹角为60°，选 A。



例 11（多选）如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是梯形，$AB//CD,AD\perp DC$，$BC=CD=4,DD_1=AB=2$，P为CC_1的中点，Q是棱C_1D_1上一动点（不包含端点），则（　　）

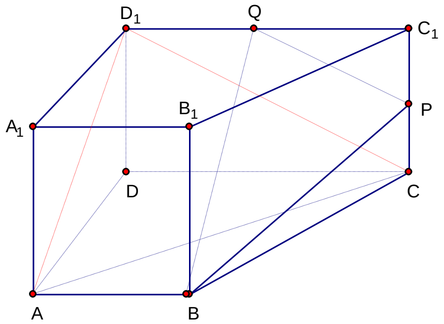
A．AC与平面BPQ有可能平行　　B．B_1D_1与平面BPQ有可能平行

C．$\triangle BPQ$周长的最小值为$\sqrt{17}+\sqrt{29}$　　D．三棱锥$A-BPQ$的体积为定值



【解析】对于 A，当Q为C_1D_1的中点时，易知平面ACD_1//平面BPQ，故AC//平面BPQ，A 正确；

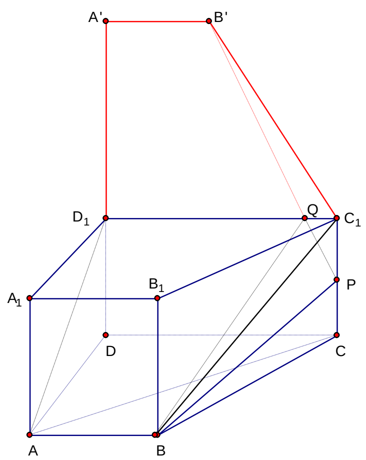
对于 B，$B_1D_1//BD$，又$D\notin$平面BPQ，BD与平面BPQ只能相交，所以B_1D_1与平面BPQ只能相交，故 B 错；



对于 C，$BP=\sqrt{17}$，把ABC_1D_1沿C_1D_1展开，与CDD_1C_1在同一平面（如图），则当B',P,Q共线时，$BQ+PQ$有最小值$B'P$，由$AD_1=4$可得$B'P=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，所以$\triangle BPQ$周长的最小值为$\sqrt{17}+\sqrt{29}$，故 C 正确；

对于 D，$V_{A-BPQ}=V_{Q-ABP}$，因$S_{\triangle ABP}$为定值，又$C_1D_1//AB$，故C_1D_1//平面ABP，故Q到平面ABP的距离为定值，所以V_{A-BPQ}为定值；

综上，选 ACD。

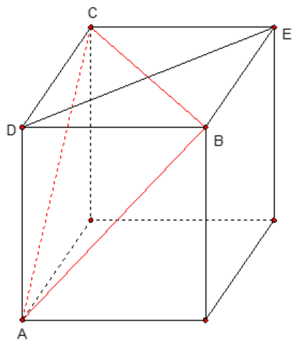


例 12（全国 I）已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面α所成的角相等，则α截此正方体所得截面面积的最大值为

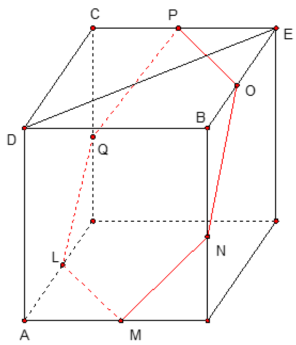
A．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】：如图一，易知$D-ABC$为正三棱锥，平面ABC与PA,PB,PC所成的角都相等，进而与正方体的 12 条棱所成角均相等，但此时的截面为$\triangle ABC$，其面积未必最大，

参考图二，将$\triangle ABC$所在平面沿DE方向平移，使其与BE之交点为BE的中点时，平面与正方体的其他相关的棱也必交于该棱的中点，此时，截面多边形为边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正六边形$LMNOPQ$，易知其面积为$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}$，选 A。

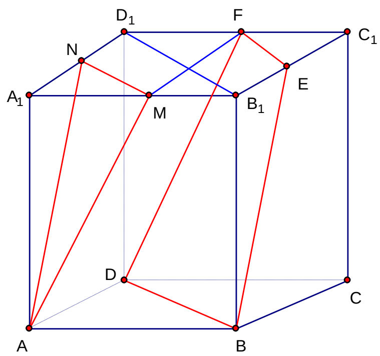


图一



图二

例 13.如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N,E,F分别为棱$A_1B_1,A_1D_1,B_1C_1,C_1D_1$的中点，求证：平面$AMN$//平面$DBEF$。



【证明】：如图，连接MF,B_1D_1，

易知：$EF//B_1D_1,MN//B_1D_1$，所以$MN//EF$，

又因为$MN\not\subset$平面$DBEF$，$EF\subset$平面$DBEF$，

所以，$MN//$平面$DBEF$　　　①

易知：$MF \underset{=}{//} A_1D_1, AD \underset{=}{//} A_1D_1$，故 $MF \underset{=}{//} AD$，故四边形 $MFDA$ 为平行四边形，

故 $MA//FD$，

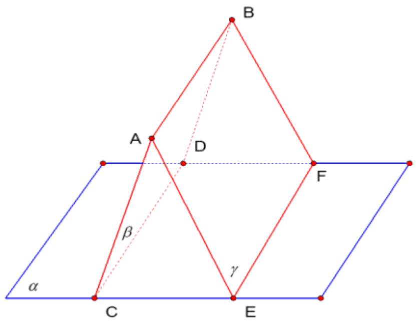
又因 $MA \not\subset$ 平面 $DBEF$， $DF \subset$ 平面 $DBEF$，

所以，$MA//$ 平面 $DBEF$　　　②

又因为 MA、$MN \subset$ 平面 AMN， $MA \cap MN = M$，

结合①,②知：平面 $AMN//$ 平面 $DBEF$。

例 14.如图， $\alpha \cap \beta = CD, \alpha \cap \gamma = EF, \beta \cap \gamma = AB, AB//\alpha$，求证：$CD//EF$。



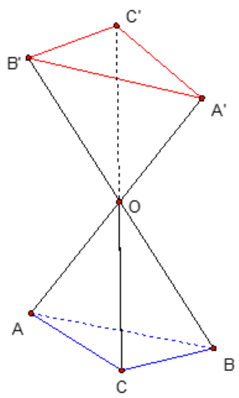
【证明】：因为 $AB//\alpha$， $AB \subset \beta$， $\alpha \cap \beta = CD$，所以 $AB//CD$，

同理可证： $AB//EF$，

所以，$CD//EF$。

【注意】定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行（“线面平行，则线线平行”）

例 15.如图，直线 AA',BB',CC' 相交于点 O， $AO = A'O, BO = B'O, CO = C'O$，求证：平面 $ABC//$ 平面 $A'B'C'$。



【证明】：由题意知： A,B,A',B',O 共面，且由题意知 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$，

故 $\angle ABO = \angle A'B'O$，故 $A'B'//AB$

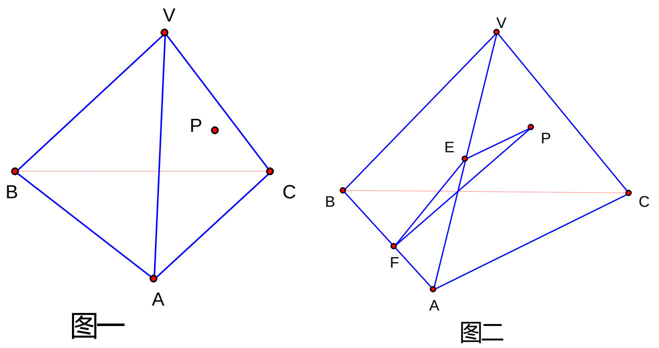
又因 $AB\subset$ 平面 ABC， $A'B'\not\subset$ 平面 ABC，故 $A'B'//$ 平面 ABC，

同理可证： $A'C'//$ 平面 ABC，

又， $A'C'\cap A'B'=A'$， $A'C'$、$A'B'\subset$ 平面 $A'B'C'$，

故平面 $ABC//$ 平面 $A'B'C'$。

例 16. 一木板如图所示，点 P 在平面 VAC 内，过 P 将木板锯开，使截面平行于直线 VB 和 AC，在木板表面应该怎样画线。

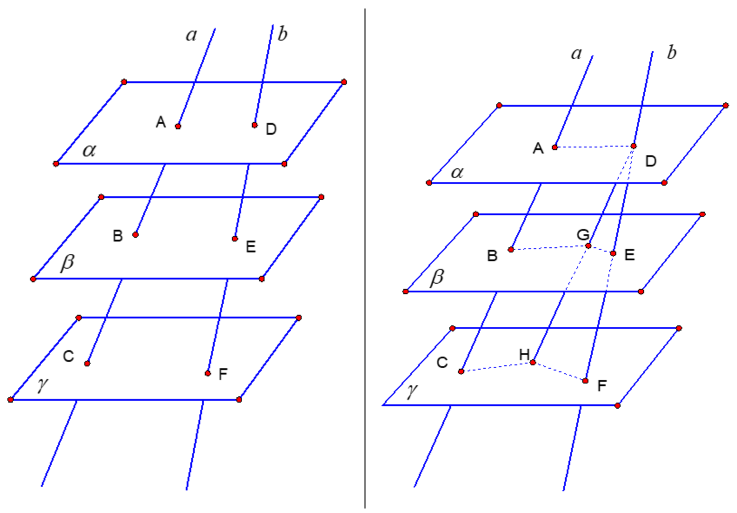


【解析】：在平面 VAC 内，过 P 作直线 $PE//AC$，交 VA 于 E；在平面 VAB 内，过 E 作直线 $EF//VB$，交 BA 于 F。

由作法知：VB 和 AC 均平行于平面 PEF，所以，沿 PE，EF 画线即可。

例 17. 如图，$\alpha//\beta//\gamma$，直线 a 和直线 b 分别交 α,β,γ 于点 A,B,C 和点 D,E,F，

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$。



【证明】：参看图二，过 D 作直线 $DH//a$，交平面 β,γ 分别于 G,H，连接 AD,BG,CH,GE,HF，记平面 $ADHC$ 为 λ。

由于 $\alpha//\beta//\gamma$， $AD=\alpha\cap\lambda, BG=\beta\cap\lambda$， $CH=\gamma\cap\lambda$，

故，$AD//BG//CH$，从而四边形$ADGB$、$BGHC$均为平行四边形，

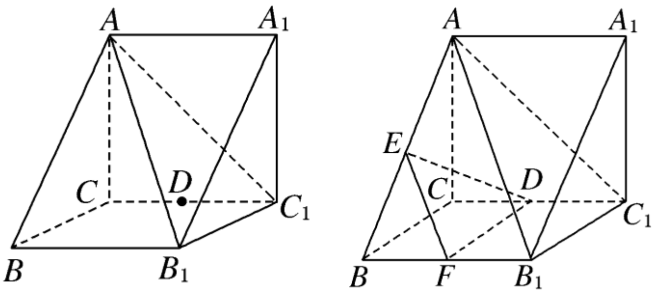
故$DG=AB,GH=BC$。

又$\beta//\gamma$，平面$DHF\cap\beta=GE$，平面$DHF\cap\gamma=HF$，

故$GE//HF$，因此$\frac{DG}{GH}=\frac{DE}{EF}$。

结合$DG=AB,GH=BC$得$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$。

例 18.如图所示：$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$ABC//$平面$A_1B_1C_1$，若D是棱CC_1的中点，在棱AB上是否存在一点E，使$DE//$平面AB_1C_1？证明你的结论



【解析】：AB的中点E满足要求，证明如下：

如图，取BB_1的中点F，连EF,FD,DE，

$\because E,F$分别为AB,BB_1的中点，$\therefore EF//AB_1$，

$\because AB_1\subset$平面AB_1C_1，$EF\not\subset$平面AB_1C_1，$\therefore EF//$平面AB_1C_1.

又因平面$ABC//$平面AB_1C_1，$BC=$平面$ABC\cap$平面BB_1C_1C，B_1C_1=平面$A_1B_1C_1\cap$平面BB_1C_1C

所以，$BC//B_1C_1$.

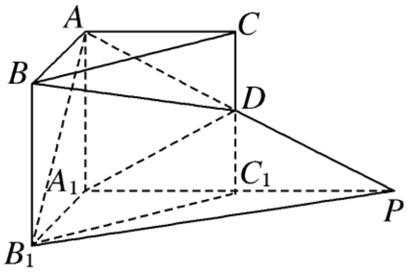
又因为D,F分别是CC_1,BB_1的中点，因此 $FD//B_1C_1$，

$\because B_1C_1\subset$平面AB_1C_1，$FD\not\subset$平面AB_1C_1，$\therefore FD//$平面AB_1C_1.

$\because EF\cap FD=F,EF,FD\subset$平面$EFD$，$\therefore$平面$EFD//$平面$AB_1C_1$.

$\because DE\subset$平面EFD. $\therefore DE//$平面AB_1C_1.

例 19.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D是棱CC_1上的一点，P是AD的延长线与A_1C_1的延长线的交点，且$PB_1//$平面BDA_1。求证：$CD=C_1D$。



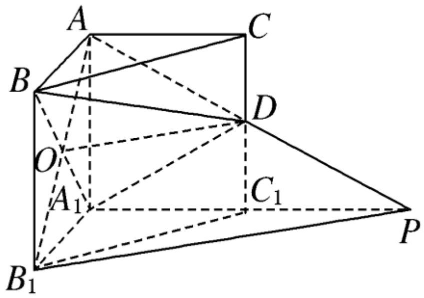
证明： 如图，连接 AB_1，设 AB_1 与 BA_1 交于点 O，连接 OD.

$\because PB_1//$ 平面 BDA_1，$PB_1 \subset$ 平面 AB_1P，平面 $AB_1P \cap$ 平面 $BDA_1 = OD$，$\therefore OD//PB_1$。

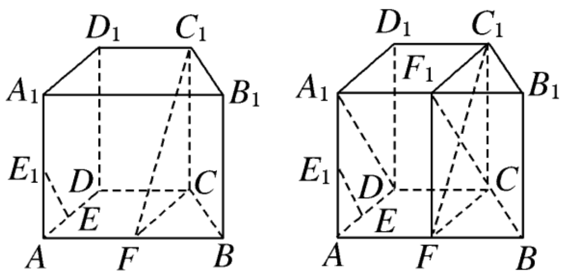
又 $AO = B_1O$，$\therefore AD = PD$。

又 $AC//C_1P$，$\therefore \angle CAD = \angle DPC_1$

又因为 $\angle ADC = \angle PDC_1$，$\therefore \triangle ADC \cong \triangle PDC_1$，$\therefore CD = C_1D$.



例 20. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB//CD, AB=2CD$，E, E_1 分别是棱 AD, AA_1 的中点，设 F 是棱 AB 的中点，证明：直线 $EE_1//$ 平面 FCC_1.



证明： 如图，取 A_1B_1 的中点为 F_1，连接 FF_1, C_1F_1，

$\because FF_1//BB_1//CC_1$，$\therefore C_1, C, F, F_1$ 四点共面，

连接 A_1D, F_1C，

$\because A_1F_1 \underline{\underline{//}} D_1C_1 \underline{\underline{//}} DC$，$\therefore A_1DCF_1$ 为平行四边形，$\therefore A_1D//F_1C$.

又 $EE_1//A_1D$，得 $EE_1//F_1C$

而$EE_1 \not\subset$平面FCC_1， $F_1C \subset$平面FCC_1。

故$EE_1 // $平面$FCC_1$。