第二章 初等函数

§2.1 函数的概念及其表示

2.1.1 相关概念

1、函数

设A,B是两个非空数集，如对于A中任意一个数x，按照某种确定的对应关系f，在B中都有唯一确定的数y和它对应，则称$f:A\to B$是从集合A到集合B的一个函数，记为$y=f(x)(x\in A)$，其中x叫自变量，x的取值范围A叫函数的定义域，与x值对应的y值叫函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数的值域。显然，值域为B的子集。

研究函数，少不了要用到区间的概念，对于两个实数a和b，且$a<b$，我们规定:

（1） 满足不等式$a\le x\le b$的实数x的集合叫做闭区间，用$[a,b]$表示;

（2） 满足不等式$a<x<b$的实数x的集合叫做开区间，用(a,b)表示;

（3） 满足不等式$a\le x<b$或$a<x\le b$的实数x的集合叫半开半闭区间,分别表示为$[a,b)$，$(a,b]$。

（4） 另外，我们把满足$x\ge a,\ x>a,\ x\le b,\ x<b$的实数$x$的集合分别记做$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$

这里的实数a，b叫做相应区间的端点，“∞”读作“无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”。

函数的三要素

从函数的定义可看出，确定一个函数需要三个要素，即定义域、对应关系和值域。由于值域是由定义域和对应关系决定的，因此，如果两个函数的定义域和对应关系分别相同，则可以看成是同一个函数

2、函数的表示法

在初中，我们已经接触过函数的三种表示法：解析法、列表法和图像法

解析法

就是用一个数学表达式(**解析式**)来表示两个变量之间的对应关系,比如$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，$y=\sqrt{x}$等。

列表法

就是用表格来表示两个变量之间的对应关系。

图像法

就是用图像来表示两个变量之间的对应关系。

上述三种方法是函数最常用的表示方法，尤其是解析法。值得一提的是：并非每个函数都有解析式。

3、函数的图像

设函数 $y=f(x)(x\in A)$，在平面直角坐标系中，所有点 $(x,f(x))$ 所构成的图形称为函数 $f(x)$ 的图像。

4、函数的最大值和最小值

设函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的值域为 B，如存在 $M\in B$，使得对任意的 $x\in A$，都有 $f(x)\le M$，则称 M 为 $y=f(x)$ 在定义域 A 上的最大值。

类似地，如存在 $m\in B$，使得对任意的 $x\in A$，都有 $f(x)\ge m$，则称 m 为 $y=f(x)$ 在定义域 A 上的最小值。

2.1.2 典型例题

例 1、判断下列各组函数是否为同一个函数

(2) $y_1=\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+3}$，$y_2=x-5$；

(2) $y_1=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$，$y_2=\sqrt{(x+1)(x-1)}$；

(3) $f(x)=1, g(x)=x^0$；

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$F(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(5)炮弹飞行高度 h 与炮弹飞行时间 t 的关系函数 $h=130t-5t^2$ 与二次函数 $y=130x-5x^2$

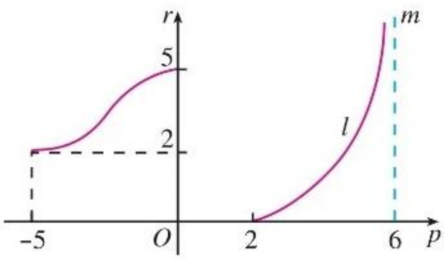
【解】（1）、（2）、（3）、（5）中的两个函数都属于定义域不同，因此不是同一个函数；

（4）定义域相同，对应关系恒等变形后也完全相同，故他们是同一个函数。

例 2、函数 $r=f(p)$ 的图像如图所示，图中曲线 l 与直线 m 无限接近

（1）函数 $r=f(p)$ 的定义域、值域各是什么?

（2）r 取何值时，只有唯一的 p 值与之对应?



【解】（1）定义域$[-5,0]\cup[2,6)$，值域为$[0,+\infty)$。

（2）由图像知：$r\in[0,2)\cup(5,+\infty)$时，只有唯一的p值与它对应。

例 3. 给定数集$A=R,B=\left(-\infty,0\right]$，方程$u^2+2v=0$，　　①

（1）任给$u\in A$，对应关系f使方程①的解v与u对应，判断$v=f\left(u\right)$是否为函数；

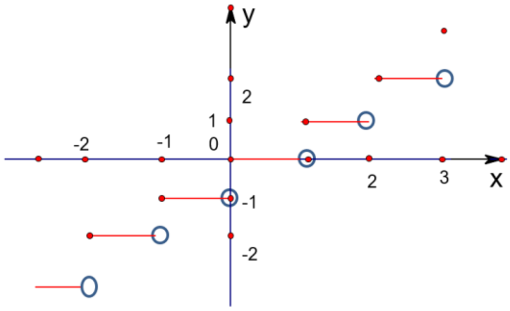
（2）任给$v\in B$，对应关系g使方程①的解u与v对应，判断$u=g\left(v\right)$是否为函数。

【解】（1）易知$v=f(u)=-\dfrac{u^2}{2}$，因此v是u的函数

（2）易知：$u=\pm\sqrt{-2v}$，对给定的v，有两个u与其对应，因此u不是关于v的函数。

例 4. 函数$f\left(x\right)=\left[x\right]$的函数值表示不超过$x$的最大整数，例如，$\left[-3.5\right]=-4,\left[2.1\right]=2$，当$x\in\left(-2.5,3\right]$时，写出函数$f\left(x\right)$的解析式，并画出函数的图像。

【解】：$f(x)=\begin{cases}-3, & x\in(-2.5,-2)\\ -2, & x\in[-2,-1)\\ -1, & x\in[-1,0)\\ 0, & x\in[0,1)\\ 1, & x\in[1,2)\\ 2, & x\in[2,3)\\ 3, & x=3\end{cases}$，图像如图所示



例 5.探究是否存在函数$f\left(x\right),g\left(x\right)$满足条件：

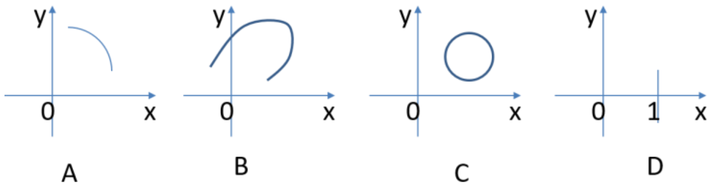
（1）定义域相同，值域相同，但对应关系不同；

（2）值域相同，对应关系相同，但定义域不同。

【解】:（1）存在，比如 $f(x)=x(x\in[0,1])$， $g(x)=x^2(x\in[0,1])$

（2）存在，比如 $f(x)=x^2(x\in[-1,0])$， $g(x)=x^2(x\in[0,1])$

例 6、对于函数 $y=f(x)$，其图像可能为下面的（　　　）



【解】: 根据函数的定义，多对一可以，一对多不行。选 A。

例 7（1）设 $f(x)=\begin{cases}x-2,(x\ge 10)\\ f[f(x+6)],(x<10)\end{cases}$ 则 $f(5)$ 的值为（　　）

A．10　　　　B．11　　　　C．12　　　　D．13

（2）已知 $f(x)=\begin{cases}x+2(x\le -1)\\ x^2(-1<x<2)\\ 2x(x\ge 2)\end{cases}$，若 $f(x)=3$，则 x 的值是（　　）

A．1　　　　B．1 或 $\dfrac{3}{2}$　　　　C．1，$\dfrac{3}{2}$ 或 $\pm\sqrt{3}$　　　　D．$\sqrt{3}$

【解】（1） $f(5)=f[f(11)]=f[9]=f[f(15)]=f[13]=11$，选 B。

（2）该分段函数的三段各自的值域为 $(-\infty,1],[0,4),[4,+\infty)$，而 $3\in[0,4)$

$\therefore\ f(x)=x^2=3, x=\pm\sqrt{3},$ 而 $-1<x<2,\ \therefore\ \ x=\sqrt{3}$；

例 8（1）设函数 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}-5$，则 $f(x)$ 的表达式是（　　）

（2）已知 $f(\dfrac{1-x}{1+x})=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　　）

A．$\dfrac{x}{1+x^2}$　　　　B．$-\dfrac{2x}{1+x^2}$　　　　C．$\dfrac{2x}{1+x^2}$　　　　D．$-\dfrac{x}{1+x^2}$

【解】（1） $x^2+\dfrac{1}{x^2}-5=(x+\dfrac{1}{x})^2-7$，故 $f(x)=x^2-7$

（2）令 $\frac{1-x}{1+x}=t,则x=\frac{1-t}{1+t},f(t)=\frac{1-(\frac{1-t}{1+t})^2}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2}=\frac{2t}{1+t^2}$，选 C。

【应试策略】在 $f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 中令 $x=0$，得 $f(1)=1$，只有选项 C 满足 $f(1)=1$，选 C。

例 9⑴已知 $f(x)$ 是二次函数，若 $f(0)=0$，且 $f(x+1)=f(x)+x+1$，试求 $f(x)$ 的表达式.

⑵已知 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$，求 $f(x)$.

【解】⑴由题意可设 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，则 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$，即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$

所以，$\begin{cases}2a+b=b+1\\a+b=1\end{cases}$，解得 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$，因此 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

⑵由已知得 $\begin{cases}f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1\\f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1\end{cases}$，消去 $f(\frac{1}{x})$，解得 $f(x)=\frac{-2x^2+x+4}{3x}$

例 10、函数 $y=\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是____________________

【解】 $\begin{cases}x\neq -1\\|x|-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x<0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

即函数 y 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

例 11（1）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0，1]$，则函数 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域为__________。

（2）已知函数 $y=f(x+1)$ 定义域是 $[-2，3]$，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是（　　）

A．$[0，\frac{5}{2}]$　　B．$[-1，4]$　　C．$[-5，5]$　　D．$[-3，7]$

【解】(1) 由题意知：$0\le\sqrt{x}-2\le 1\Rightarrow 2\le\sqrt{x}\le 3\Rightarrow 4\le x\le 9$，即 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域为 $[4,9]$

（2） $y=f(x+1)$ 定义域是 $[-2,3]\Rightarrow -2\le x\le 3\Rightarrow -1\le x+1\le 4\Rightarrow f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$

由 $-1\le 2x-1\le 4\Rightarrow 0\le 2x\le 5\Rightarrow 0\le x\le\frac{5}{2}$，即 $y=f(2x-1)$ 的定义域为 $[0,\frac{5}{2}]$，选 A。

例 12⑴已知 $f(x)$)的定义域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，求函数 $y=f(x^2-x-\frac{1}{2})$ 的定义域；

⑵已知函数 $f(3-2x)$ 的定义域为$[-1,2]$，求 $f(x)$ 的定义域.

【解】⑴由题意知：$-\frac{1}{2}\le x^2-x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$，即$\begin{cases}x^2-x\ge 0\\x^2-x-1\le 0\end{cases}$，解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le 0$或$1\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $f(x)$ 的定义域为$[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0]\cup[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

⑵ $-1\le x\le 2\Rightarrow -1\le 3-2x\le 5$，故 $f(x)$ 的定义域为$[-1,5]$.

例 13.设$0\le a<1$，函数 $f\left(x\right)=\left(a-1\right)x^2-6ax+a+1$恒为正，求 $f\left(x\right)$的定义域

【巧解】交换变元的主次地位，将a看成主元，则 $f(x)=(x^2-6x+1)a-x^2+1=g(a)$，它是关于$a$的一次函数，故可看成定义在$[0,1)$上的线段，

从而 $f(x)>0\Rightarrow\begin{cases}g(0)>0\\g(1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x^2+1>0\\-6x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,\frac{1}{3}]$，

即 $f(x)$ 的定义域为$(-1,\frac{1}{3}]$。

例 14.已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2x,g\left(x\right)=ax+2\left(a>0\right)$，若对任意$x_1\in R$，都存在$x_2\in\left[-2,+\infty\right)$，使得 $f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A、$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B、$\left(0,+\infty\right)$　　C、$\left(0,\frac{3}{2}\right)$　　D、$\left(\frac{3}{2},3\right)$

【解析】由题意知 $f\left(x\right)_{\min}>g\left(x\right)$在$\left[-2,+\infty\right)$上有解，即不等式$ax+2<-1$在$\left[-2,+\infty\right)$上有解；

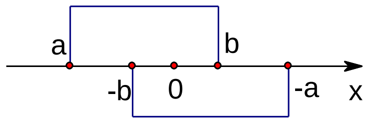
由$ax+2<-1\Rightarrow x<-\frac{3}{a}$，

因$x\in\left[-2,+\infty\right)$，故$-\frac{3}{a}>-2$，也即$a>\frac{3}{2}$，选 A。

例 15⑴已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[a,b](a<0<b,|a|>b)$，求函数$g(x)=f(x)+f(-x)$的定义域；

⑵已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$)的定义域.

【解】　⑴$\begin{cases}a\le x\le b\\a\le -x\le b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le x\le b\\-b\le x\le -a\end{cases}\Rightarrow -b\le x\le b$



（2）$\begin{cases}-1\le x+a\le 2\\ -1\le x-a\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1-a\le x\le 2-a\\ -1+a\le x\le 2+a\end{cases}$

显然，当 $2-a<-1+a$，即 $a>\dfrac{3}{2}$ 时，$[-1-a,2-a]\cap[-1+a,2+a]=\varnothing$，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 不存在；

当 $2-a\ge -1+a$，即 $0<a\le\dfrac{3}{2}$ 时，$[-1-a,2-a]\cap[-1+a,2+a]=[-1+a,2-a]$，此时 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[-1+a,2-a]$。

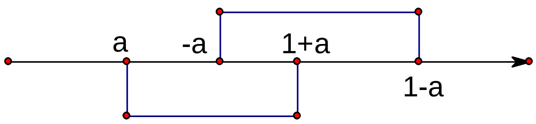
例 16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求函数 $g(x)=f(x+a)\cdot f(x-a)(a\le 0)$ 的定义域；

【解】 由题意有 $\begin{cases}0<x+a\le 1\\ 0<x-a\le 1\\ a\le 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-a<x\le 1-a\\ a<x\le 1+a\end{cases}$，所以 $-a<x\le 1+a$

（1）当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,1]$

（2）当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-a,1+a]$

（3）当 $a\le -\dfrac{1}{2}$ 时，满足 $-a<x\le 1+a$ 的 x 不存在，故函数 $g(x)$ 不存在。



（注意，此时不要说成函数 $g(x)$ 的定义域为空集，因为从函数的定义来看，定义域和值域都不能为空集）

例 17（1）函数 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ 的值域为（　　　　）

（2）函数 $y=\dfrac{3+x}{4-x}$ 的值域为（　　　　）

【解】（1）由 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ 得 $\left(x^2+1\right)y=x^2-2x+1$，即 $\left(y-1\right)x^2+2x+\left(y-1\right)$

当 $y=1$ 时，$x=0$

当 $y\neq 1$ 时，由 $\Delta=4-4\left(y-1\right)^2\geq 0$ 解得 $0\leq y\leq 2$。

故函数的值域为 $\left[0,2\right]$。

【注意】本题中用到了最常用的判别式法。

(2) $y=\dfrac{3+x}{4-x}\Rightarrow 4y-xy=x+3\Rightarrow x=\dfrac{4y-3}{y+1}\Rightarrow y\neq -1$，故值域为 $\left\{y\,|\,y\neq -1\right\}$

【解法二】$y=\dfrac{3+x}{4-x}=\dfrac{7-(4-x)}{4-x}=\dfrac{7}{4-x}-1$，

因 $\dfrac{7}{4-x}\neq 0$，故 $y\neq -1$，所以，值域为 $\left\{y\,|\,y\neq -1\right\}$

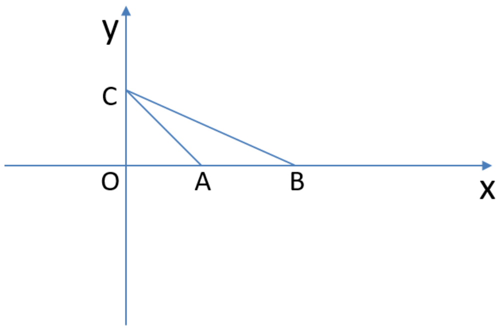
例 18、$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ 的最小值为（　　　）

【解】 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(0-1\right)^2}+|x-2|$，

因此，$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ 可看成是 x 轴上的点 $A\left(x,0\right)$ 到点 $B\left(2,0\right)$ 和点 $C\left(0,1\right)$ 的距离之和。数形结合，由三角形不等式知：

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=|AC|+|AB|\geq\left|BC\right|=\sqrt{5}$，

当且仅当 A,B 重合时取得最小值。 所以，$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ 的最小值为 $\sqrt{5}$。



1、两点间的距离公式：如 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2、三角不等式：$|AB|+|AC|\geq|BC|$

例 19、$f\left(x\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为________。

【解】显然，$f\left(1\right)+f\left(0\right)=2$，

令 $x=\dfrac{t-1}{t}$，带入原式得 $f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-t}\right)=2-\dfrac{1}{t}$ （1）

令 $x=\dfrac{1}{1-t}$，带入原式得 $f\left(\dfrac{1}{1-t}\right)+f\left(t\right)=\dfrac{t-2}{t-1}$　　　　　（2）

又，$f\left(t\right)+f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)=1+t$　　　　　（3）

由（1）（2）（3）解得 $f\left(t\right)=\dfrac{t^3-t^2-1}{2t^2-2t}$，

综上，得 $f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda, x=0\\ 2-\lambda, x=1\\ \dfrac{x^3-x^2-1}{2x^2-2x}, x\neq 0 且 x\neq 1\end{cases}$，其中 λ 为任意实数。