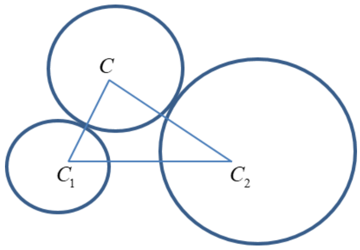
习题课

1. 与圆 $x^2+y^2=1$ 及圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心的轨迹是（　　）

（A）一个椭圆上　（B）双曲线的一支上　（C）一条抛物线上　（D）一个圆上

【解】显然，所给二圆的圆心分别为 $(0,0),(4,0)$，半径分别为 1 和 2，新圆的圆心到所给两圆的圆心距之差的绝对值为 1（小于给定二圆的圆心距 4），因此新圆圆心的轨迹是双曲线的一支。选 B。



2. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点 P，使得点 P 到直线 $y=x+3$ 的距离最短。

【解】设 $P(x_0,y_0)$，则 P 到直线 $x-y+3=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|x_0-y_0+3|}{\sqrt{2}}$，

因 $|x_0-y_0+3|=|\dfrac{y_0^2}{4}-y_0+3|=\dfrac{1}{4}|y_0^2-4y_0+12|=\dfrac{1}{4}|(y_0-2)^2+8|$ 在 $y_0=2$ 时取得最小值为 2，

故 d 的最小值为 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，此时 $x_0=\dfrac{y_0^2}{4}=1$，$P(1,2)$

3. 已知点 P 是椭圆 $16x^2+25y^2=1600$ 上一点，且在 x 轴上方，F_1,F_2 分别是椭圆的左、右焦点，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为____。

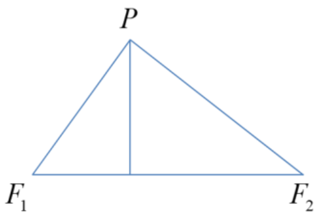
【解】易知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$，故 $a=10,b=8,c=6$，

设 F_2P 的倾斜角为 α，由 $\tan\alpha=-4\sqrt{3}$ 得 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{7}$，

因此，$|F_2P|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\alpha}=\dfrac{64}{10-\frac{6}{7}}=7$

令 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=|F_2P|\sin\alpha=7\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=4\sqrt{3}$，

故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_0=\dfrac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$



4. 直线$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$与椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$交于$A,B$两点，$P$在椭圆上，使得$\triangle PAB$面积等于3，这样的点$P$共有(　　)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

【解】:如图，令P到AB的距离为h，易知$AB=5$，由$S_{\triangle PAB}=3$知，$h=\dfrac{6}{5}$

考虑与AB平行的直线l，设其方程为$3x+4y+C=0$，

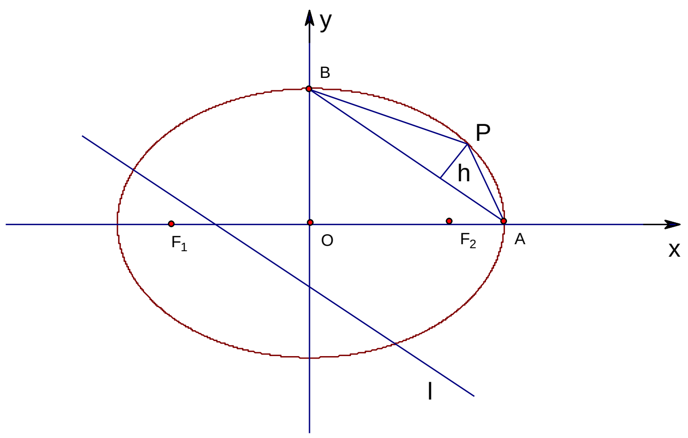
令其与直线AB：$3x+4y-12=0$间的距离$d=\dfrac{|12+C|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{6}{5}$，

解得$C=-6$或$C=-18$，故l的方程为$3x+4y-6=0$或$3x+4y-18=0$

由$\Delta=(aA)^2+(bB)^2-C^2$知$\Delta=224>0$或$\Delta=-56<0$，

故$3x+4y-6=0$与椭圆有两个交点，选 B。

【注意】: 对于椭圆：$\Delta=0$相切；$\Delta>0$相交；$\Delta<0$相离



【法二】易知$AB=5$，令$P(4\cos\alpha,3\sin\alpha)(\alpha\in[0,2\pi])$，

P到AB的距离为d，由$S_{\triangle PAB}=3$知，$d=\dfrac{6}{5}$

又，AB的方程为$3x+4y-12=0$，故

$$d=\frac{|12\cos\alpha+12\sin\alpha-12|}{5}=\frac{6}{5}\Rightarrow|\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-1|=\frac{1}{2}$$

从而$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$或$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

前者显然无解，而后者有两解，故有两个P

5. 过抛物线$y^2=8(x+2)$的焦点F作倾斜角为60°的直线，若此直线与抛物线交于A、B两点，弦AB的中垂线与x轴交于点P，则线段PF的长等于（　　）

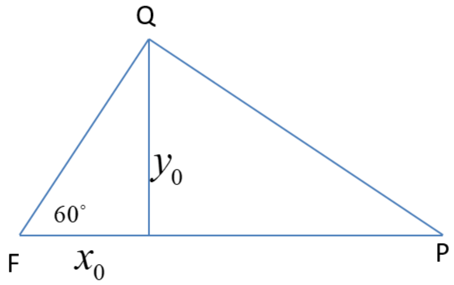
(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

【解】易知，题中抛物线由$y^2=8x$向左平移 2 个单位而得，故其焦点为原点(0，0)，令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$因AB的方程为$y=\sqrt{3}x$，将其带入$y^2=8(x+2)$，化简得$3x^2-8x-16=0$，故$x_1+x_2=\frac{8}{3}$

令AB中点为$Q(x_0,y_0)$，则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4}{3}$，

故$QF=2x_0=\frac{8}{3}$，$PF=2QF=\frac{16}{3}$．选A.

【巧解】本题等价于$y^2=8x$的情况，令AB中点为$Q(x_0,y_0)$，则$y_0k_{AB}=p$，即$y_0=\frac{4}{\sqrt{3}}$，因此$QF=\frac{y_0}{\sin 60^\circ}=\frac{8}{3}$，故$PF=2QF=\frac{16}{3}$．选$A$.



6. 已知$M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\},N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$．若对于所有的$m\in R$，均有$M\cap N\neq\varnothing$，则$b$的取值范围是（　　　）

A．$[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]$　　B．$(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$　　C．$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

【巧解】直线$y=mx+b$过定点$(0,b)$，故只需$(0,b)$在椭圆内或椭圆上，即$2b^2\leq 3$，解得$b\in[-\frac{\sqrt{6}}{2},+\frac{\sqrt{6}}{2}]$．选 A．

【解法二】椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，直线方程$mx-y+b=0$

$\Delta=(aA)^2+(bB)^2-C^2=3m^2+\dfrac{3}{2}-b^2\ge 0\Rightarrow b^2\le 3m^2+\dfrac{3}{2}\le\dfrac{3}{2}$

解得$b\in[-\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\dfrac{\sqrt{6}}{2}]$，选 A。

7. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(c,0)$，若存在过$F$的直线$l$与双曲线的右支交于不同的两点，与双曲线的一条渐近线交于第一象限内的点A，且$|AF|=c$，则双曲线C的离心率的取值范围是（　　　　）

A. $(1,\sqrt{3}]$　　B. $(1,2)$　　C. $[\sqrt{2},2)$　　D. $(2,+\infty)$

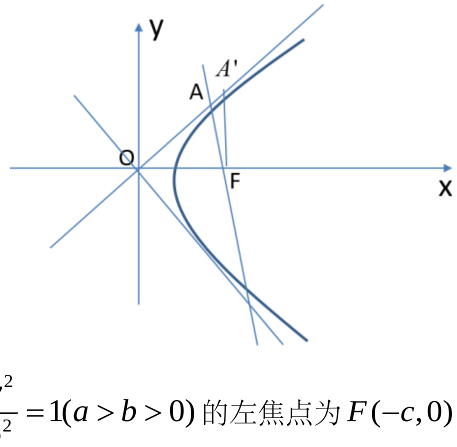
【解】令渐近线$y=\dfrac{b}{a}x$的倾斜角为α，则FA的倾斜角为2α，则当$2\alpha>90^\circ$时，需

$\tan 2\alpha<-\dfrac{b}{a}$，

此时$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}<-\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{2\times\frac{b}{a}}{1-(\frac{b}{a})^2}<-\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{2}{2-e^2}<-1$，得$\sqrt{2}<e<2$。

当$2\alpha\le 90^\circ$时，需$\dfrac{bc}{a}\le c$，即$\dfrac{b^2}{a^2}\le 1$，故$1<e\le\sqrt{2}$

综上，e的取值范围为$(1,2)$，选 B。



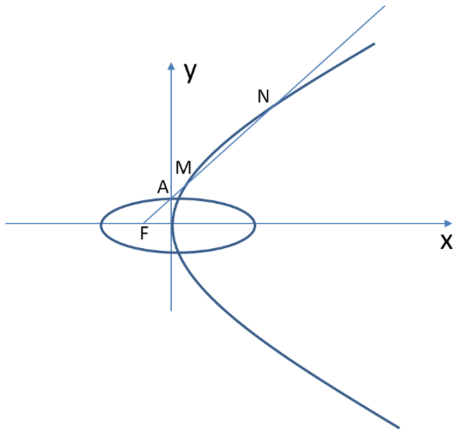
8. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-c,0)$，上顶点为$A$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线$FA$与抛物线$E:y^2=4cx$交于$M,N$两点，则$|MA|+|NA|=$（　　）

A. $2\sqrt{3}a$　　　　B. $5a$　　　　C. $4\sqrt{3}a$　　　　D. $10a$

【解】易知 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，故 $b=\dfrac{1}{2}a$，故 $k_{FA}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，令 MN 的中点为 $P(x_0.y_0)$，则由抛物线的性质知：$k_{MN}\cdot y_0=p\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0=2c\Rightarrow y_0=2\sqrt{3}c$，

易知直线 FA 的方程为：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，故 $x_0=\sqrt{3}y_0-c=5c$

故 $|MA|+|NA|=\dfrac{1}{\cos 30^\circ}(x_M+x_N)=\dfrac{2x_0}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2\times 10c}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times 10}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=10a$，选 D。



9.　已知椭圆与双曲线有公共焦点 F_1,F_2，F_1 为左焦点，F_2 为右焦点，P 点为它们在第一象限的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{4}$，设 e_1,e_2 分别为椭圆和双曲线的离心率，则 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}$ 的最大值为（　　　）

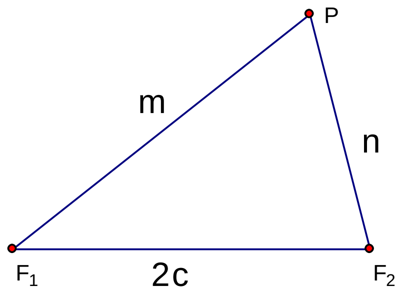
A. $\sqrt{2}$　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. $3\sqrt{2}$　　　　D. $4\sqrt{2}$

【解】令 $|F_1P|=m,|F_2P|=n,m+n=2a_1,m-n=2a_2$，则 $m=a_1+a_2,n=a_1-a_2$。设 $|F_1F_2|=2c$，则 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}=\dfrac{a_1}{c}+\dfrac{a_2}{c}=\dfrac{m}{c}$，

又因为余弦定理得 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore n^2-\sqrt{2}mn+m^2-4c^2=0$，由 $\Delta\geq 0$ 得 $2m^2-4m^2+16c^2\geq 0$，

即 $m^2\leq 8c^2$，$\because m\leq 2\sqrt{2}c$，$\therefore\dfrac{m}{c}\leq 2\sqrt{2}$。故选 B



10. 当α从0°到180°变化时，方程$x^2+y^2\cos\alpha=1$表示的曲线的形状为_____。

【解】(1) $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$时表示椭圆，且焦点在$y$轴上。

(2) $\alpha=90^\circ$时，曲线方程变为$x^2=1$，为两条直线。

(3) $\alpha\in(90^\circ,180^\circ)$时，因$\cos\alpha<0$，故曲线为双曲线，焦点在$x$轴上。

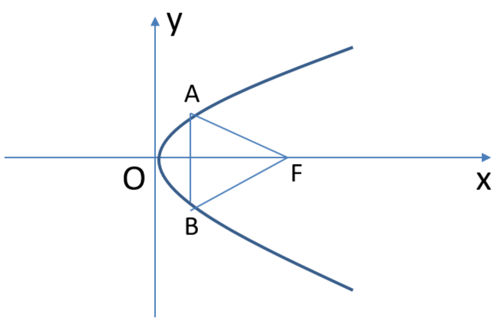
11. 已知等边三角形的一个顶点位于抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，另两个顶点在抛物线上，则这个等边三角形的边长为_____。

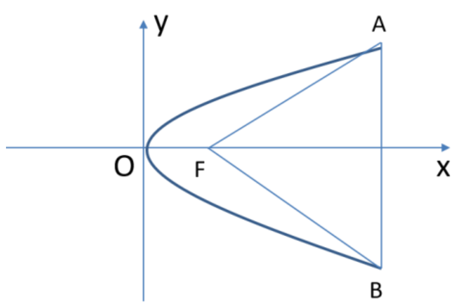
【解】设等边三角形的边长为a，另两个顶点分别为A,B，根据对称性：AB一定与x轴垂直，因此，有如图所示的两种情况，对应的边长分别为

(1) $a=|FA|=\dfrac{p}{1-\cos150^\circ}=2p(2-\sqrt{3})$

(2) $a=|FA|=\dfrac{p}{1-\cos30^\circ}=2p(2+\sqrt{3})$

因此，等边三角形的边长为$2p(2-\sqrt{3})$或$2p(2+\sqrt{3})$





12. 斜率为 2 的直线l与双曲线$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$交于$A,B$两点，　且$|AB|=4$，则直线$l$的方程为_____。

【解】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线方程为$y=2x+m$，将其代入双曲线的方程，化简得：

$10x^2+12mx+3m^2+6=0$，

由题意知：$\Delta=24m^2-240>0$，解得$m>\sqrt{10}$或$m<-\sqrt{10}$，此时

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{6}{5}m,\ x_1x_2=\frac{3m^2+6}{10}$

由公式$|AB|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$（$k$为$l$的斜率），得

$16=(1+2^2)[(-\frac{6m}{5})^2-4\times\frac{3m^2+6}{10}]$，解得$m=\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$，

故，l的方程为：$y=2x\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$。

13. 经过点$M(2,1)$作直线l交双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$于A,B两点，且M为AB的中点，则直线l的方程为_____。

【解】显然，设$k_{OM}=\frac{1}{2}$，由斜率积定理知$k_l\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，即$k_l\times\frac{1}{2}=2$，故$k_l=4$

因此，l的方程为：$y-1=4(x-2)$，即$y=4x-7$

【法二】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1{}^2-\frac{y_1{}^2}{2}=1,x_2{}^2-\frac{y_2{}^2}{2}=1$，

两式相减（点差法），得$(x_1{}^2-x_2{}^2)-\frac{1}{2}(y_1{}^2-y_2{}^2)=0$，

即$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，

也即$2=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，即$2=\frac{2\times1}{2\times2}\times k_l$，

得$k_l=4$，利用点斜式方法，得直线l的方程为$y=4x-7$

14. 已知$\triangle ABC$的两个顶点A,B的坐标分别为$(-5,0),(5,0)$，且AC,BC所在直线的斜率之积等于$m(m\neq0)$，则顶点C的轨迹为_____。

【解】令$C(x,y)$，由题意得$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=m(x\neq\pm5)$，即$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25m}=1\ (x\neq\pm5)$，

因此，

（1）$m>0$时，轨迹为双曲线，点$(-5,0)$和$(5,0)$除外

（2）$m<0$时，C的轨迹为圆（$m=-1$）或椭圆（$m\neq-1$），点$(-5,0)$和$(5,0)$除外。

15. 圆锥曲线$\sqrt{x^2+y^2+6x-2y+10}-|x-y+3|=0$的离心率为______。

【解】 $\sqrt{x^2+y^2+6x-2y+10}-|x-y+3|=0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}}{\dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$ 表示动点 $P(x,y)$ 到点 $(-3,1)$ 的距离，$\dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}$ 表示动点 $P(x,y)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离，

根据圆锥曲线的第二定义，题设中的曲线为双曲线，其离心率为 $\sqrt{2}$ 。

16. 已知定点 $A(2,1)$， F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点，点 P 为椭圆上的动点，当 $3|PA|+5|PF|$ 取最小值时，点 P 的坐标为_____。

【解】由题意知 $e=\dfrac{3}{5}$.令椭圆左准线为 l， 因 $\dfrac{4}{25}+\dfrac{1}{16}<1$，故点 A 在椭圆内。过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，过 A 作 $AM\perp l$ 于 M 。

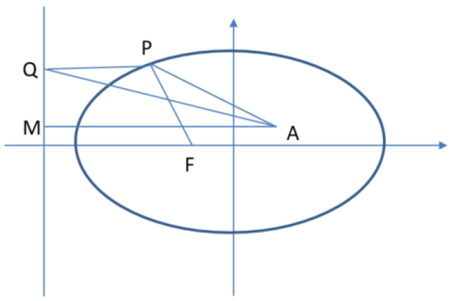
由定义知 $\dfrac{|PF|}{|PQ|}=e=\dfrac{3}{5}$， 则 $\dfrac{5}{3}|PF|=|PQ|$。

所以 $3|PA|+5|PF|=3(|PA|+\dfrac{5}{3}|PF|)=3(|PA|+|PQ|)\geq 3|AQ|\geq 3|AM|$

所以当且仅当 P 为 AM 与椭圆的交点时取等号，

把 $y=1$ 代入椭圆方程得 $x=\pm\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$ ，

又 $x<0$ ，所以点 P 坐标为 $(-\dfrac{5\sqrt{15}}{4},1)$



17. 设 A,B 是椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上的两个动点，且 $OA\perp OB$（O 为原点），AB 的最大值与最小值分别为_______。

【解】由题设 $a=1,b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， 记 $OA=r_1, OB=r_2, \dfrac{r_1}{r_2}=t$， 则 $\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}$=4，故

$$AB^2=r_1^2+r_2^2=\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2)(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2})=\frac{1}{4}(2+t^2+\frac{1}{t^2})$$

易知：$r_1,r_2\in[b,a]$，故$\frac{b^2}{a^2}\le t^2\le\frac{a^2}{b^2}$

又函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$\left[\frac{b^2}{a^2},1\right]$上单调递减，在$\left[1,\frac{a^2}{b^2}\right]$上单调递增，

所以当$t^2=1$即$OA=OB$时，AB取最小值 1；

当$t^2=\frac{b^2}{a^2}$或$\frac{a^2}{b^2}$时，AB取最大值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

18. **（高联赛）**椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$上任意两点$P$，$Q$，若$OP\perp OQ$，则乘积$|OP|\cdot|OQ|$的最小值为_____.

【解】由椭圆的性质知$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{|OP||OQ|}\Rightarrow|OP||OQ|\ge\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$，

当且仅当$|OP|=|OQ|$时取等号

故$|OP||OQ|$的最小值为$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

19. **（高联赛）**抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，A,B是抛物线上的两个动点，且满足$\angle AFB=\frac{\pi}{3}$．设线段AB的中点M在l上的投影为N，则$\frac{|MN|}{|AB|}$的最大值是______

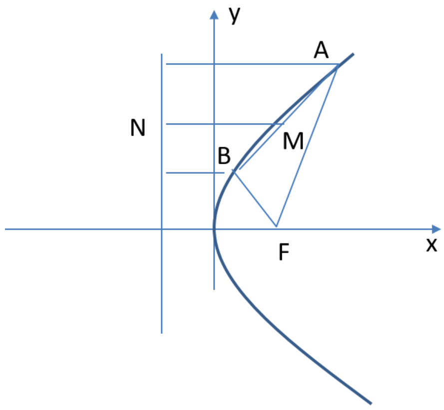
【解】由抛物线的定义及梯形的中位线定理得$|MN|=\frac{|AF|+|BF|}{2}$.

在ΔAFB中,由余弦定理得

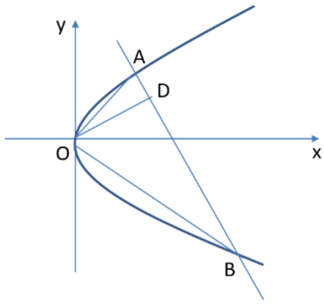
$$|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\frac{\pi}{3}=(|AF|+|BF|)^2-3|AF|\cdot|BF|$$

$$\ge(|AF|+|BF|)^2-3(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2=(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2=|MN|^2,$$

即$\frac{|MN|}{|AB|}\le1$，当且仅当$|AF|=|BF|$时等号成立。故$\frac{|MN|}{|AB|}$的最大值为1.



20. 如图,已知直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB, OD\perp AB$ 交 AB 于点 D，点 D 的坐标为 $(2,1)$， $p=$_____。



【解】 因 $k_{OD}=\dfrac{1}{2}$，故 $k_{AB}=-2$，因此，AB 的方程为 $y-1=-2(x-2)$，即 $y=-2x+5$，将其代入抛物线方程，化简得

$4x^2-(20+2p)x+25=0$　　　(*)

令 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{10+p}{2}, x_1x_2=\dfrac{25}{4}$，进而

$y_1y_2=(-2x_1+5)(-2x_2+5)\ =4x_1x_2-10(x_1+x_2)+25=-5p$，

由题意知：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，

即 $\dfrac{25}{4}-5p=0$，解得 $p=\dfrac{5}{4}$。

另一方面，$p=\dfrac{5}{4}$时，易验证方程（*）的判别式 $\Delta>0$，

故，$p=\dfrac{5}{4}$。

21. 就 m 的不同取值，指出方程 $(m-1)x^2+(3-m)y^2=(m-1)(3-m)$ 所表示的曲线的形状分别为______。

【解】（1） $m=1$时，原方程变为 $2y^2=0$，故 $y=0$，此表示 x 轴；

(2) $m=3$时，原方程变为$2x^2=0$，故$x=0$，此表示y轴；

(3) 当$m\neq 1$且$m\neq 3$时，原方程变形为$\dfrac{x^2}{3-m}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$

① $m=2$时，方程表示圆

② $1<m<3$，但$m\neq 2$时，方程表示椭圆

③ $m<1$或$m>3$时，方程表示双曲线。

22. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(b>a>0\right)$的右焦点为$F,O$为坐标原点，若存在直线$l$过点$F$交双曲线$C$的右支于$A,B$两点，使$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则双曲线离心率的取值范围是__________

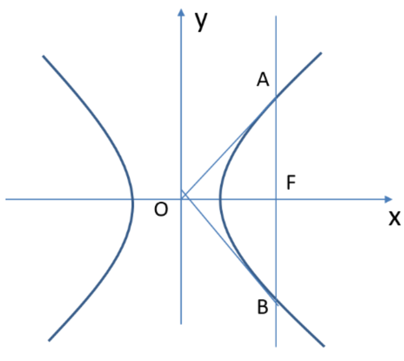
【解】当l斜率不存在时，AB为通径，此时，由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$知$\dfrac{b^2}{a}=c$，

从而$ac=c^2-a^2\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$；

当l斜率存在时，令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB斜率为k，则AB方程为：$y=k(x-c)$，将其带入双曲线方程，化简得$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2k^2cx-a^2k^2c^2-a^2b^2=0$

易知上述方程的判别式$\Delta>0$，

故$x_1+x_2=\dfrac{2a^2k^2c}{a^2k^2-b^2},x_1x_2=\dfrac{a^2k^2c^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}$，又



$y_1y_2=k^2(x_1-c)(x_2-c)=k^2[x_1x_2-c(x_1+x_2)+c^2]$

故，由$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\ \Rightarrow(1+k^2)x_1x_2-k^2c(x_1+x_2)+k^2c^2=0$

$\Rightarrow k^2=\dfrac{a^2b^2}{b^4-a^2c^2}$

由题意知：$|k|>\dfrac{b}{a}$，故 $k^2=\dfrac{a^2b^2}{b^4-a^2c^2}>\dfrac{b^2}{a^2}\Rightarrow e<\sqrt{3}$，

综上，双曲线离心率的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\sqrt{3}\right)$

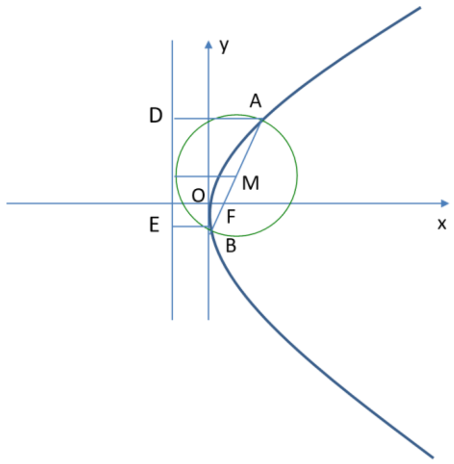
23. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线与抛物线交于 A,B 两点，以 AB 为直径画圆，观察它与抛物线准线 l 的关系，你能得到什么结论？相应于椭圆，双曲线又如何？你能证明你的结论吗?

【解】 令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\odot M$ 的半径 $r=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+p)$

又，圆心 $M(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$，

故 M 到准线的距离为 $d=\dfrac{x_1+x_2}{2}-(-\dfrac{p}{2})=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+p)$，

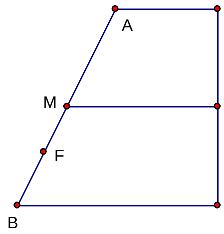
显然，$d=r$，故 $\odot M$ 与准线相切。



注意： 也可用抛物线的定义证明结论

类似地，以椭圆的焦点弦 AB 为直径的圆与准线相离，以双曲线的焦点弦 AB 为直径的圆与准线相交，我们用圆锥曲线的第二定义证明如下：

（1）椭圆情况：不妨设 AB 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F，椭圆离心率为 e，A,B 到右准线的距离分别为 d_1,d_2，则 $|FA|=ed_1,|FB|=ed_2$，且圆心 M 到准线的距离为 $\dfrac{d_1+d_2}{2}$（如图，梯形的中位线）



另外，半径$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|FA|+|FB|)=\frac{d_1+d_2}{2}e<\frac{d_1+d_2}{2}$，即圆心到准线的距离大于半径，因此，以$AB$为直径的圆与准线相离。

（2）双曲线的情况，参考椭圆的情况，我们有

$r=\frac{d_1+d_2}{2}e>\frac{d_1+d_2}{2}$（因为$e>1$），

即，圆心到准线的距离小于半径，

因此，以AB为直径的圆与准线相交。

24\. 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),F_1,F_2$分别为椭圆的左、右焦点，$P(x_0,y_0)$在椭圆$C$上

求证:（1）直线$l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$是椭圆在$P$处的切线

（2）从F_2发出的光线F_2P经直线l反射后经过F_1。

证明:（1）因为$P(x_0,y_0)$在椭圆上，所以$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以$P$也在直线，$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$上，联立直线和椭圆方程

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}\Rightarrow\left(a^2y_0^2+b^2x_0^2\right)-2a^2b^2x_0x+b^2a^4-a^4y_0^2=0$$

因为P在椭圆上，

所以$a^2y_0^2+b^2x_0^2=a^2b^2\Rightarrow a^2b^2x^2-2a^2b^2x_0x+a^2b^2x_0^2=0\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow$直线$l$与椭圆相切，

又因为$l\cap C=P$，所以直线l是椭圆在点P处的切线。

（2）设F_2关于直线l的对称点为$F_2'\left(x_1,y_1\right)$，则F_2,F_2'的中点在直线l上，直线F_2F_2'与l垂直，

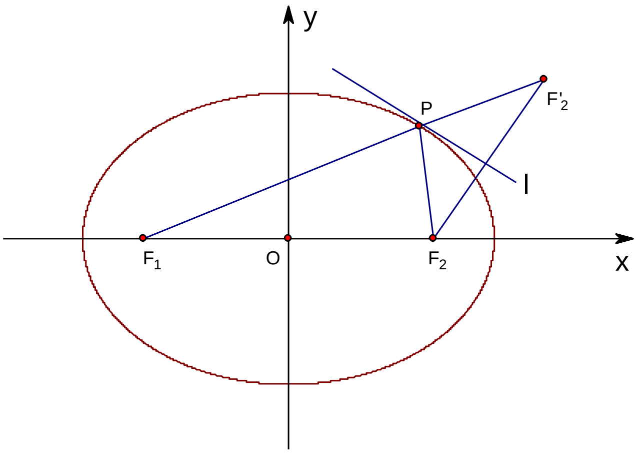
即$\begin{cases}\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{a^2b^2-b^2x_0\dfrac{x+c}{2}}{a^2y_0} \\ \dfrac{y_1}{x_1-c}\times\dfrac{-b^2x_0}{a^2y_0}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2a^2b^4x_0+a^4y_0^2c-b^4x_0^2c}{a^4y_0^2+b^4x_0^2} \\ y_1=\dfrac{2a^2b^2y_0\left(a^2-x_0c\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}\end{cases}$，

$$k_{F_2'F_2}=\frac{y_1}{x_1+c}=\frac{b^2y_0\left(a^2-x_0c\right)}{b^4x_0+a^2y_0^2c}=\frac{b^2y_0\left(a^2-x_0c\right)}{b^4x_0+a^2b^2c-b^2x_0^2c}=\frac{y_0\left(a^2-x_0c\right)}{\left(a^2-c^2\right)x_0+a^2c-x_0^2c}$$

$$=\frac{y_0\left(a^2-x_0c\right)}{\left(a^2-x_0c\right)\left(x_0+c\right)}=\frac{y_0}{x_0+c}=k_{PF_1}$$

所以F_2', P, F_2三点共线，

所以从F_2发出的光线F_2P经直线l反射后经过F_1。



25. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1(-\sqrt{2},0), A_2(\sqrt{2},0), P$是椭圆$C$上异于$A_1, A_2$的任意一点，记直线$PA_1, PA_2$的斜率分别为$k_1, k_2$，满足$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{2}$。

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）过椭圆C的右焦点F_2作斜率为正的直线l_1，分别与椭圆C交于A, B两点（A点在第一象限），线段AB的中点为Q，过点Q作直线l_1的垂线，分别交x, y轴于M, N两点。记$\triangle OAB$的面积为$S_{\triangle OAB}$（O为坐标原点）。问是否存在实数λ，使得$S_{\triangle OAB}=\lambda|MN|$，若存在，求出$\lambda$的值；若不存在，请说明理由。

【解】（1）因为$a=\sqrt{2}$，设$P\left(x_0, y_0\right)$，则$k_1=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}, k_2=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}$，

则 $k_1k_2=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}=-\dfrac{1}{2}$，

又因为 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，且 $a^2=2$ 代入得 $b^2=1$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$。

（2）设 AB 的直线方程为 $x=my+1\left(m>0\right)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_0,y_0)$，直线与椭圆联立得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\x=my+1\end{cases}$，消去 x 得 $\left(my+1\right)^2+2y^2-2=0$，整理得 $\left(m^2+2\right)y^2+2my-1=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2},y_1y_2=\dfrac{-1}{m^2+2}$，则 $y_0=-\dfrac{m}{m^2+2}$

所以 $x_0=\dfrac{-m^2}{m^2+2}+1=\dfrac{2}{m^2+2}$，即 $Q\left(\dfrac{2}{m^2+2},\dfrac{-m}{m^2+2}\right)$

因为 $AB\perp MN$，则 $k_{MN}=-m$，

则 MN 的直线方程为 $y+\dfrac{m}{m^2+2}=-m\left(x-\dfrac{2}{m^2+2}\right)$，

整理得 $mx+y-\dfrac{m}{m^2+2}=0$，

则 $M\left(\dfrac{1}{m^2+2},0\right),N\left(0,\dfrac{m}{m^2+2}\right),MN=\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，

则原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$

又，$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{2\sqrt{2}(1+m^2)}{m^2+2}$

故，$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\sqrt{2}\,|MN|$

故，存在实数 $\lambda=\sqrt{2}$，使得 $S_{\triangle OAB}=\lambda|MN|$。

26. **（2024 年新课标 II 卷）**已知双曲线 $C:x^2-y^2=m\left(m>0\right)$，点 $P_1\left(5,4\right)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$。按照如下方式依次构造点 $P_n\left(n=2,3,\cdots\right)$，过点 P_{n-1} 且斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 $\left(x_n,y_n\right)$。

（1）若 $k=\frac{1}{2}$，求 x_2,y_2；

（2）证明：数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$。

【解】（1）由点 $\left(5,4\right)$ 在双曲线 C 上得 $5^2-4^2=m$，即 $m=9$，

当 $k=\frac{1}{2}$ 时，直线 P_1Q_1 的方程为 $y=\frac{1}{2}\left(x-5\right)+4=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$，消 y 得 $x^2-2x-15=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=5$，

所以 $Q_1\left(-3,0\right)$，则 $P_2\left(3,0\right)$，所以 $x_2=3,y_2=0$。

（2）由题意得 $Q_n\left(-x_{n+1},y_{n+1}\right)$，直线 P_nQ_n 的方程为 $y=k\left(x-x_n\right)+y_n$，

联立 $\begin{cases} y=k\left(x-x_n\right)+y_n \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$，消 y 得 $\left(1-k^2\right)x^2-2k\left(y_n-kx_n\right)x-\left(y_n-kx_n\right)^2-9=0$，

所以 $x_n+\left(-x_{n+1}\right)=\frac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}$，即 $x_{n+1}=x_n-\frac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}$

又 $y_{n+1}=k\left(-x_{n+1}-x_n\right)+y_n=k\left[\frac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}-2x_n\right]+y_n=\frac{2k\left(ky_n-x_n\right)}{1-k^2}+y_n$，

所以 $x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n-\frac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}-\frac{2k\left(ky_n-x_n\right)}{1-k^2}=x_n-y_n-2k\frac{\left(1+k\right)\left(y_n-x_n\right)}{1-k^2}$

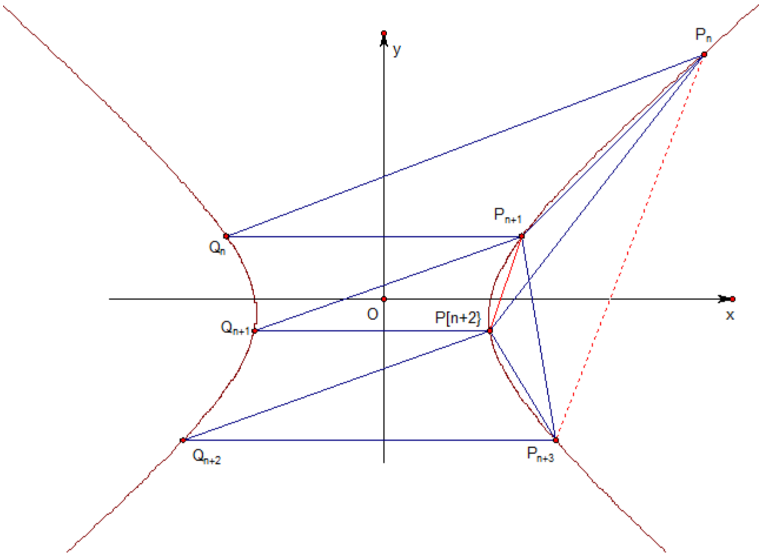
$=\left(x_n-y_n\right)\frac{1+k}{1-k}$，

又易得 $x_1-y_1\neq 0,\frac{1+k}{1-k}\neq 0$，所以数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

（3）要证 $S_n=S_{n+1}$，即要证 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，则只需证 $P_{n+1}P_{n+2}//P_nP_{n+3}$，即只需证

$k_{P_{n+1}P_{n+2}}=k_{P_nP_{n+3}}$，即只需证 $\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\frac{y_{n+3}-y_n}{x_{n+3}-x_n}$，

令 $t=\frac{1+k}{1-k}$，由（2）得 $x_n-y_n=\left(x_1-y_1\right)t^{n-1}=t^{n-1}$，又 $x_n^2-y_n^2=9$



所以$\begin{cases} x_n - y_n = t^{n-1} \\ x_n + y_n = \dfrac{9}{t^{n-1}} \end{cases}$，解得$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{t^{n-1}} + t^{n-1}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{t^{n-1}} - t^{n-1}\right) \end{cases}$

所以$\dfrac{y_{n+3} - y_n}{x_{n+3} - x_n} = \dfrac{\dfrac{9}{t^{n+2}} - t^{n+2} - \dfrac{9}{t^{n-1}} + t^{n-1}}{\dfrac{9}{t^{n+2}} + t^{n+2} - \dfrac{9}{t^{n-1}} - t^{n-1}} = \dfrac{9 + t^{2n+1}}{9 - t^{2n+1}}$，

$\dfrac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{9}{t^{n+1}} - t^{n+1} - \dfrac{9}{t^{n}} + t^{n}}{\dfrac{9}{t^{n+1}} + t^{n+1} - \dfrac{9}{t^{n}} - t^{n}} = \dfrac{9 + t^{2n+1}}{9 - t^{2n+1}}$，

所以，$\dfrac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}} = \dfrac{y_{n+3} - y_n}{x_{n+3} - x_n}$，所以$S_n = S_{n+1}$，证毕。