第 12 章 计数原理

§12.1 排列组合与二项式定理

12.1.1 相关概念

学习内容

1、排列组合及其应用

2、二项式定理及其应用

1.分类加法计数原理

如果完成一件事情有 n 类办法，

第 1 类有 a_1 种方法，

第 2 类有 a_2 种方法，

......

第 n 类有 a_n 种方法，

则完成这件事情总共有：$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

例1. 从甲地到乙地可坐飞机、汽车或轮船，飞机每日有 3 班，汽车每日有 10 班，轮船有 2 班，问从甲地到乙地，每日有多少种不同的走法?

【解】 属于分类问题，共有 $3+10+2=15$ 种不同的走法。

2．分步乘法计数原理

如果一件事情需要 n 步才能完成，

第 1 步有 a_1 种方法，

第 2 步有 a_2 种方法，

......

第 n 步有 a_n 种方法，

则完成这件事情总共有：$a_1 \bullet a_2 \bullet \cdots \bullet a_n$ 种不同的方法。

例 2. 用 1，2，3，4，5，6 共 6 个数字，可组成多少个无重复数字的三位数?

【解】 属于分步问题，第一步从 6 个数字中任选 1 个数字构成百分位数；有 6 种不同的选法；第二步从剩下的 5 个数字中任选 1 个数字构成十分位数，有 5 种不同的选法；显然，个位数有 4 种不同的选法；

综上，可组成 $6\times5\times4=120$ 个无重复数字的三位数。

3.排列与排列数

从 n 个不同的对象中，任取 m 个对象，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个**排列**，特别地，$m=n$ 时的排列称为**全排列**。

从 n 个不同的对象中取出 m 个对象的所有排列的个数，称为从 n 个不同对象中取出 m 对象的**排列数**，用 A_n^m 表示。

如何计算 A_n^m 呢？

假设 $a_1a_2\cdots a_m$ 是从 n 个不同的对象中，任取 m 个对象构成的一个排成，很明显，构成这样一个排列需分 m 步完成，其中，

a_1 有 n 种不同的取法

a_2 有 $n-1$ 种不同的取法

$\cdots$，

a_m 有 $n-m+1$ 种不同的取法

综上，排列 $a_1a_2\cdots a_m$ 的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$，从而得到

排列数公式

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

特别地，$A_n^n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!$（读作 n 的**“阶乘”**）

为方便，我们规定：$0!=1$

注意：因 $n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1}$

$=\dfrac{[n(n-1)\cdots(n-m+1)](n-m)(n-m-1)\times\cdots\times2\times1}{(n-m)(n-m-1)\times\cdots\times2\times1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

因此，排列数公式也可写成：

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

例 2：求证：$A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

【证明】：$A_n^m+mA_n^{m-1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}+m\times\dfrac{n!}{(n-m+1)!}=\dfrac{n!}{(n-m)!}[1+\dfrac{m}{n-m+1}]$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\times\frac{n+1}{n-m+1}=\frac{(n+1)!}{(n-m+1)!}=A_{n+1}^m$$

证毕。

4.组合与组合数

一般地，从 n 个不同对象中取出 m 个对象并成一组，称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个组合；从 n 个不同对象中取出 m 个对象的所有组合的个数称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的组合数，用 C_n^m 表示。

我们知道 A_n^m 是从 n 个不同对象中取出 m 个对象的排列数，从 n 个不同对象中取 m 个对象作排列，也可以这样来完成：第一步，从 n 个不同对象中任取 m 个对象作组合，我们知道有 C_n^m 个不同的组合；第二步，对取出的每一个组合作全排列，有 A_m^m 种不同的排列。因

此，由乘法原理，我们得到 $A_n^m = C_n^m A_m^m$，即

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

上述公式称为组合数公式。

为方便，我们规定：$C_n^0 = 1$

另外，从组合数公式不难得到：

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

例 4：求证：$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

【证明】：$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{(m+1)!}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}[1+\frac{n-m}{m+1}] = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \times \frac{n+1}{m+1}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}$$

5.几个组合恒等式

（1）$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$

（2）$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$

（3）$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

6.二项式定理

我们知道

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$，

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

…

那$(x+y)^n$呢

事实上，$(x+y)^n$展开后的每一项都是n次单项式，如果不看这些单项式的系数，则每一项都可写成x^iy^j的形式，其中$i+j=n$，但x^iy^j前面的系数怎么求呢?

我们可以这样考虑问题：为了获取x^iy^j，我们将$(x+y)^n$看成$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$，即n个$(x+y)$在相乘，我们从n个$(x+y)$中任取i个，这i个都贡献x，剩下的$n-i(=j)$个都贡献y，从而就有了x^iy^j，显然，x^iy^j的系数应为C_n^i。这样，我们就得到了如下的二项式定理

$$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y^1+\cdots+C_n^ix^{n-i}y^i+\cdots+C_n^ny^n$$

上式右边称为$(x+y)^n$的展开式，$C_n^ix^{n-i}y^i$称为展开式的第$i+1$项，C_n^i称为第$i+1$项的二项式系数，而称$T_{i+1}=C_n^ix^{n-i}y^i$为二项展开式的通项公式。

12.1.2 典型例题

例 1（1）某地区足球比赛共有 12 个队参加，每队都要与其他各队在主客场分别比赛一次，则共有（　　)场比赛

（2）用 0，1，2，⋯，9 这 10 个数字可以排成（　　　　）个无重复数字的四位偶数。

【解】(1）如果将每一场比赛看成主场队在前、客场队在后的一个排列，则问题等价于从 12 个不同对象中取 2 个对象的排列数，故共有$A_{12}^2=132$场比赛。

（2）分两类，第一类的末位为 0，有A_9^3个；

第二类的末位为 2，4，6，8 这 4 个数中的某一个，这类数可分三步完成，第一步确定末位，有A_4^1种方法，第二步确定首位，因其不能为 0，故有A_8^1种方法，第三步确定中间两位，有A_8^2种方法，由分步计数乘法原理，第二类数有$A_4^1A_8^1A_8^2$个。

综上，满足要求的四位偶数有$A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2=9\times8\times7+4\times8\times8\times7=2296$个

例 2（1）　6 本不同的书平均分成 3 堆,每堆 2 本，共有______不同的分法

（2）7 人站成一排 ,其中甲乙相邻且丙丁相邻, 共有多少种不同的排法.

【解】(1)：分三步取书得$C_6^2C_4^2C_2^2$种方法,但这里出现重复计数的现象,3 堆书并无顺序，故共有$\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=30$种不同的分法。

（2）将甲乙捆绑看成一个对象，丙丁捆绑后也看成一个对象，5 个对象的排列数为A_5^5；另外，

甲乙以及丙丁自身会可交换顺序，分别产生 A_2^2 个排列。由分步计数原理可得共有 $A_5^5A_2^2A_2^2=480$ 种不同的排法。

例 3.用 1，2，3，4，5，6 这六个数字组成无重复数字且 1，3，5 三个数字互不相邻的六位数，有________个.

【解】为了让 1，3，5 不相邻，我们先排 2，4，6，有 A_3^3 种不同的排列，考察其中任意一个排列，它们形成了 4 个缝隙（第 1 个数字左边和第 3 个数字右边各算 1 个缝隙），然后将 1，3，5 插入到 4 个缝隙中的任意 3 个，又会产生 A_4^3 个不同的排列，故，总共有 $A_4^3\times A_3^3=144$ 个不同的排列，即符合要求的数有144个。

2　6　4

例 4.对于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15$，则该方程有______组正整数解，有____组非负整数解。

【解】在桌上从左到右排 15 个苹果，相邻两个苹果之间有 1 个空隙，共 14 个空隙，现从这 14 个空隙中任取 9 个空隙，分别在其中插一支筷子，从左到右，第 1 支筷子左边的苹果数赋给 x_1，第 1、2 两支筷子之间的苹果数赋给 x_2，…，第 8、9 两支筷子间的苹果数赋给 x_9，第 9 支筷子右边的苹果数赋给 x_{10}，因此，题中所给方程的正整数解的个数为 C_{14}^9，如果 x_i 为非负整数，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15\Rightarrow(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_{10}+1)=25,$$

令 $y_i=x_i+1$，则 y_i 为正整数，考虑到 y_i 与 x_i 是一一对应的，而 $y_1+y_2+\cdots+y_{10}=25$ 有 C_{24}^9 组正整数解，故 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15$ 有 C_{24}^9 组非负整数解。

例 5.从 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字中任意取 4 个数字，组成一个没有重复且能被 3 整除的四位数，则这样的四位数共有________个(用数字作答).

【解】注意到一个事实：一个 n 位数能被 3 整除，当且仅当其各位数字之和能被 3 整除。本题中的四位数，各位数字之和最大为14，所以，我们这样分类

（1）各位数字之和等于12，有下面的①②两种情形；

（2）各位数字之和等于9，有下面的③④两种情形；

（3）各位数字之和等于6，有下面的⑤一种情形；

① 由 1，2，4，5 组成；

② 由 0，3，4，5 组成；

③由 0，2，3，4 组成；

④由 0，1，3，5 组成；

⑤由 0，1，2，3 组成。

易知

① 有 $A_4^4=24$ 个

②、③、④、⑤分别有 $C_3^1A_3^3=18$

综上，则这样的四位数共 $24+18\times4=96$ 个.

例 6.某外商计划在 4 个候选城市中投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该外商不同的投资方案有(　　)

A.16 种　　B.36 种　　C.42 种　　D.60 种

【解】: **(直接法)**若 3 个不同的项目投资到 4 个城市中的 3 个，每个城市 1 个项目，则有 A_4^3 种投法；若 3 个不同的项目投资到 4 个城市中的 2 个，一个城市 1 个、另一个城市 2 个，这种情况有 $C_4^2C_2^1C_3^2$ 种投法.由分类加法计数原理知共 $A_4^3+C_4^2C_2^1C_3^2=60$ (种)投资方案。选 D。

【法二】(间接法)显然，每个项目有 4 种投资方案，因此，3 个项目共有 $4\times4\times4=64$ 种投资方案，但其中 3 个项目落入同一城市的不符合要求，不符合要求的有 4 种，所以，总的投资方案共 $64-4=60$ (种).

例 7．从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对，其中所成的角为 60° 的共有（　　）对

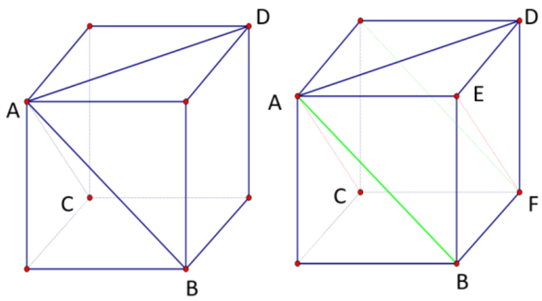
（A）24 对　　（B）30 对　　（C）48 对　　（D）60 对

【解】我们将问题分成两类

（1）每个顶点处的 3 条对角线，他们相互间成 60° 的角，有 3 对，8 个顶点共 24 对。

（2）每个顶点处 3 条对角线中的任意 1 条与另外 2 条的平行对角线分别构成 1 对 60° 的异面直线，因此，每个顶点 6 对，8 个顶点共 48 对，但每对重复计算了一次，因此只能算 24 对。

综合（1)、(2)，共 48 对。选 C



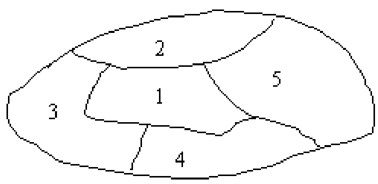
例 8（全国卷）如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻地区不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有________种（以数字作答）

【解】这是个典型的分类问题。我们可以按 2、4 区域同色和不同色分成两类。

2、4 区域同色： 有 $C_4^1C_3^1C_2^1C_2^1$ 种（区域 1 有 C_4^1 种，区域 2、4 有 C_3^1 种，区域 3、5 各 C_2^1 种）

2、4 区域不同色：有 A_4^3 种（区域 1、2、4 占 3 种颜色，区域 3、5 没选择余地）

从而共有 24+48=72 种方法,应填 72



例 9.在某班进行的演进比赛中，共有 5 位选手参加，其中 3 位女生，2 位男生，如果 2 位男生不能连着出场，且女生甲不能排在第一个，那么出场顺序有________种(用数字作答).

【解】: 采用排除法。不考虑对女生甲的限制，有 $A_3^3A_4^2$ 种（先排女生，再将 2 个男生插入 4 个空）；而女生甲排第一个的情况有 $A_2^2A_3^2$（2 个男生插 3 个空），因此，符合要求的出场顺序有 $A_3^3A_4^2-A_2^2A_3^2=72-12=60$（种）

例 10（全国 I 卷）过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线有（　　）

（A）18 对　　（B）24 对　　（C）30 对　　（D）36 对

【解】（间接法）

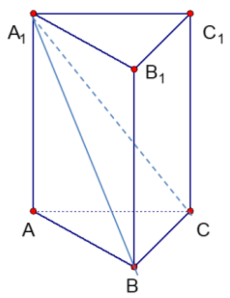
①共一顶点的共面直线有 $6C_5^2=60$ 对；

②侧面互相平行的直线有 6 对；

③侧面的对角线有 3 对共面；

所以异面直线总共有 $C_{15}^2-60-6-3=36$ 对.

【点拨】解排列组合题的关键是分好类.



例 11(全国卷)四面体的 4 个顶点及各条棱的中点，共 10 个点，从这 10 个点中任取 4 个不共面的点，共有（　　）取法

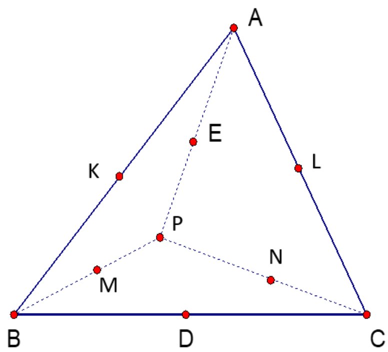
【解】从 10 个点中任取 4 个点，共有 C_{10}^4 种取法。现减掉其中不合适的取法

(1) 每个面有 6 个点，从这 6 个点中任取的 4 个点，不合适，有 $4C_6^4$ 种

(2) 每条棱上有 3 个点，这 3 个点与对棱的中点组成的 4 点组不合适，有 6 种

(3) 去掉 1 组对棱，剩下 4 条棱的中点构成的 4 个点共面，不合适，有 3 种

因此，共有 $C_{10}^4-4C_6^4-6-3=141$ 种。



例 12（全国 I）设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$。选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有（　　）

A． 50种　　B． 49种　　C． 48种　　D． 47种

【解】我们根据集合 A 中的最大元进行分类。

A 的最大元为 1，则 A 有 1 个，B 有 2^4-1 个；

A 的最大元为 2，则 A 有 2^2-2^1 个，B 有 2^3-1 个；

A 的最大元为 3，则 A 有 2^3-2^2 个，B 有 2^2-1 个；

A 的最大元为 4，则 A 有 2^4-2^3 个，B 有 2^1-1 个；

综上，不同的选择方法有 $1\times15+2\times7+4\times3+8\times1=49$ 种，选 B。

例 13（插空法）10 个节目中有 6 个演唱 4 个舞蹈，要求每两个舞蹈之间至少安排一个演唱，有多少种不同的安排节目演出顺序的方式?

【解】: 先将 6 个演唱节目任意排成一列有 A_6^6 种排法，再从演唱节目之间和前后一共 7 个位置中选出 4 个安排舞蹈有 A_7^4 种方法，故共有 $A_6^6\times A_7^4$=604800 种方式。

例 14．某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目、2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是(　　)

A.72　　　　B.120　　　　C.144　　　　D.168

【解】: 依题意，先仅考虑 3 个歌舞类节目互不相邻的排法种数为 $A_3^3A_4^3=144$，其中 3 个歌舞类节目互不相邻但 2 个小品类节目相邻的排法种数为 $A_2^2A_2^2A_3^3=24$，因此满足题意的排法种数为 144－24＝120，选 B

例 15．在 8 张奖券中有一、二、三等奖各 1 张，其余 5 张无奖.将这 8 张奖券分配给 4 个人，每人 2 张，不同的获奖情况有________种(用数字作答).

【解】: 按获奖人数分类

情形一：3 人获奖，有 $A_4^3=24$ 种（也可以理解成 $C_4^3A_3^3$）

情形二：2 人获奖，有 $C_4^2C_2^1C_3^2=36$ 种

综上，共有 $24+36=60$ 种。

例 16．6 根凳子摆成一排，3 人随机就座，任何两人不相邻的坐法种数为(　　)

A.144　　　　B.120　　　　C.72　　　　D.24

【解】: 把 6 根凳子从左到右编号成 1，2，3，4，5，6；按题意，坐人的凳子的编号只能是如下 4 种:

135；136，146，246；

每一种情况作全排列，有 A_3^3 种，

综上，共有 $4A_3^3=24$ 种坐法。选 D。

例 17.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1) $C_n^ka^{n-k}b^k$ 是二项展开式的第 k 项.(　　)

(2)二项展开式中，系数最大的项为中间一项或中间两项.(　　)

(3) $(a+b)^n$ 的展开式中某一项的二项式系数与 a,b 无关.(　　)

⑷ $(a+b)^n$ 某项的系数是该项中非字母因数部分，包括符号等，与该项的二项式系数不同.(　　)

【解】 $C_n^k a^{n-k} b^k$ 是二项式展开式中的第 $k+1$ 项，二项式系数最大的项为中间一项或中间两项，故(1)(2)均不正确.

答案　(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

例 18（1）求 $S=C_{27}^1+C_{27}^2+\cdots+C_{27}^{27}$ 除以 9 的余数.

（2）已知 $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=729$，则 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$ 等于(　　)

A.63　　B.64　　C.31　　D.32

【解】（1）由于 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$，故 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

故，$S=C_{27}^1+C_{27}^2+\cdots+C_{27}^{27}=2^{27}-1=8^9-1$

$=\left(9-1\right)^9-1=C_9^0\times9^9-C_9^1\times9^8+\cdots+C_9^8\times9-C_9^9-1=9\left(C_9^0\times9^8-C_9^1\times9^7+\cdots+C_9^8\right)-2$

$\because C_9^0\times9^8-C_9^1\times9^7+\cdots+C_9^8$ 是整数，$\therefore S$ 被 9 除的余数为 7.

（2）逆用二项式定理得

$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=\left(1+2\right)^n=3^n=729$，即 $3^n=3^6$，所以 $n=6$

所以 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^0=2^6-1=63$

故选 A.

例 19⑴设 $(2-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，那么 $(a_1+a_3+a_5)^2-(a_0+a_2+a_4)^2$ 的值为(　　)

A.32　　B.－32　　C.243　　D.－243

⑵已知 a,b 为正实数，且 $(ax+2by-1)^6$ 展开式中 x^2y^2 的系数为 1440，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值为

【解】（1）$\because (2-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$，

令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5=243$，

$\therefore (a_1+a_3+a_5)^2-(a_0+a_2+a_4)^2$

$=-(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)=-243$

（2）因 $(ax+2by-1)^6=[(ax+2by)-1]^6=C_6^0(ax+2by)^6+C_6^1(ax+2by)^5(-1)^1$

$+C_6^2(ax+2by)^4(-1)^2+\cdots+C_6^6(-1)^6$

显然，只有$(ax+2by)^4$展开后才会出现x^2y^2，故$(ax+2by-1)^6$展开后，x^2y^2的系数为$C_6^2(-1)^2C_4^2a^2(2b)^2=360a^2b^2$，

由题意知：$360a^2b^2=1440$，故$ab=2$

从而$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}}=2$，当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$，即$a=1,b=2$时取等号。

综上，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为2。

例 20（全国 I） $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中，x^3y^3 的系数为(　　)

A．5　　　　B．10　　　　C．15　　　　D．20

【解】 $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5=x(x+y)^5+\frac{y^2(x+y)^5}{x}$

因此，其展开式中，x^3y^3 的系数由$x(x+y)^5$中$(x+y)^5$展示式中x^2y^3及$\frac{y^2(x+y)^5}{x}$中$(x+y)^5$展开式中x^4y的系数组成，即$C_5^3+C_5^1=15$，选 C。

例 21． $(x^2-\frac{1}{2x})^9$的展开式中，第 4 项的二项式系数是________，第 4 项的系数是________.

【解】第 4 项的二项式系数为$C_9^3=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$，

原二项式展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r(x^2)^{9-r}(-\frac{1}{2x})^r=(-1)^r\frac{1}{2^r}C_9^rx^{18-3r}$，其中，$r=0,1,\cdots,9$

$T_4=(-1)^3\frac{1}{2^3}C_9^3x^{18-3\times3}=-\frac{1}{8}C_9^3x^9$

第 4 项的系数为：$-\frac{1}{8}C_9^3=-\frac{21}{2}$。

例 22.已知在$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$的展开式中，第 6 项为常数项.

(1)求n；

(2)求含x^2的项的系数；

(3)求展开式中所有的有理项.

【解】 (1)通项公式为$T_{r+1}=C_n^r(x^{\frac{1}{3}})^{n-r}(-\frac{1}{2})^r(x^{-\frac{1}{3}})^r=C_n^r(-\frac{1}{2})^rx^{\frac{n-2r}{3}}$，因为第 6 项为常数项，

故 $\dfrac{n-2\times5}{3}=0$，即 $n=10$。

(2)令 $\dfrac{10-2r}{3}=2$，得 $r=2$，故，x^2 的项的系数是 $C_{10}^{2}(-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{45}{4}$。

(3)由通项公式及题意得 $\begin{cases}\dfrac{10-2r}{3}\in Z\\0\le r\le10\\r\in N\end{cases}$

显然，r 可取 $2,5,8$，对应的有理项分别为 $\dfrac{45}{4}x^2,-\dfrac{63}{8},\dfrac{45}{256}x^{-2}$

例 23（1）（全国 I）$(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中，x^3 的系数是____（用数字填写答案）

（2）（全国 I）$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为（　　）

（A）10　　（B）20　　（C）30　　（D）60

【解】（1）原式展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=2^{5-r}C_5^rx^{5-\frac{r}{2}}$，要出现 x^3，必须有 $r=4$，故 x^3 的系数为 $C_5^4(2)^{5-4}=10$

（2）$(x^2+x+y)^5=(x^2+x+y)(x^2+x+y)\cdots(x^2+x+y)$

从 5 个括号中任取 2 个出来贡献 y，从剩下 3 个括号中任取 2 个出来贡献 x^2，剩下 1 个贡献 x，因此，共有 $C_5^2C_3^2=30$ 种，从而 x^5y^2 的系数为 30，选 C。

例 24（全国 II）$(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 $a=$（　　）

【解】令 $f(x)=(a+x)(1+x)^4$，其展开式中偶次项系数之和为 A，奇次项系数之和为 B，则 $f(1)=A+B=16(1+a)$，$f(-1)=A-B=0$

又，$B=32$，解之得 $a=3$

例 25（全国 I）$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为______(用数字填写答案)

【解】$(x-y)(x+y)^8=x(x+y)^8-y(x+y)^8$，前一项中 x^2y^7 的系数为 C_8^7；后一项中 x^2y^7 的系数为 $-C_8^6$；

综上，x^2y^7 的系数为 $C_8^7-C_8^6=8-28=-20$

例 26（全国卷）在 $\left(x^2+3x+2\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为（　　）

(A) 160　　(B) 240　　(C) 360　　(D) 800

【解】令 $f(x)=\left(x^2+3x+2\right)^5=x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$

因 $f'(x)=5(x^2+3x+2)^4(2x+3)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+9a_9x^8+10x^9$，故

$a_1=f'(0)=5\times3\times2^4=240$，选 B。

【法二】$\left(x^2+3x+2\right)^5=(x+1)^5(x+2)^5$，

故，其展开式中 x 的系数为 $(x+1)^5$ 中 x 的系数乘 $(x+2)^5$ 的常数加 $(x+1)^5$ 的常数乘 $(x+2)^5$ 中 x 的系数，即 $C_5^1\times(1)^4\times2^5+C_5^1\times2^4\times1^5=240$

例 27.对于 $\left(x+y+z+w\right)^{10}$

（1）问其展开后有多少项?

（2）求展开式中 $x^3y^4z^2w$ 的系数

【解】:（1）由于 $\left(x+y+z+w\right)^{10}$ 展开后的每一项，不看系数，都可写成 $x^iy^jz^kw^l$ 的形式，其中 $i+j+k+l=10$，因此，$\left(x+y+z+w\right)^{10}$ 展开后有多少项，就等价于 $i+j+k+l=10$ 方程有多少组不同的非负整数解，由前面的知识知：该方程有 $C_{13}^3=286$ 组非负整数解，因此 $\left(x+y+z+w\right)^{10}$ 展开后有 286 项。

（2）$\left(x+y+z+w\right)^{10}$ 表示 10 个 $\left(x+y+z+w\right)$ 相乘，从中任取 3 个括号，让其贡献 x；从剩下的 7 个括号中任取 4 个括号，让其贡献 y；再从剩下的 3 个括号中任取 2 个括号贡献 z；最后一个括号贡献 w，因此 $x^3y^4z^2w$ 的系数为 $C_{10}^3C_7^4C_3^2=12600$。