好题欣赏——2025 年第 5 期

1. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)\cdot f(x+2)=13$，$f(1)=2$，则 $f(99)=$（　　）

（A）13　　（B）2　　（C）$\dfrac{13}{2}$　　（D）$\dfrac{2}{13}$

【解析】易知 $f\left(x\right)$ 是周期函数，周期为 4．所以 $f\left(99\right)=f\left(3\right)=\dfrac{13}{f\left(1\right)}=\dfrac{13}{2}$．选 C。

2. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ x-1 & x\geq 0\end{cases}$，则不等式 $x+\left(x+1\right)f\left(x+1\right)\leq 1$ 的解集是

(A) $\left\{x\mid -1\leq x\leq \sqrt{2}-1\right\}$　　(B) $\left\{x\mid x\leq 1\right\}$

(C) $\left\{x\mid x\leq \sqrt{2}-1\right\}$　　(D) $\left\{x\mid -\sqrt{2}-1\leq x\leq \sqrt{2}-1\right\}$

【解析】依题意得 $\begin{cases}x+1<0\\ x+\left(x+1\right)\left[-\left(x+1\right)+1\right]\leq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x+\left(x+1\right)\left[\left(x+1\right)-1\right]\leq 1\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x<-1\\ x\in R\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geq -1\\ -\sqrt{2}-1\leq x\leq \sqrt{2}-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$ 或 $-1\leq x\leq \sqrt{2}-1\Rightarrow x\leq \sqrt{2}-1$，选 C．

3. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点到一条准线的距离之比为 3：2，则双曲线的离心率是

（　　）

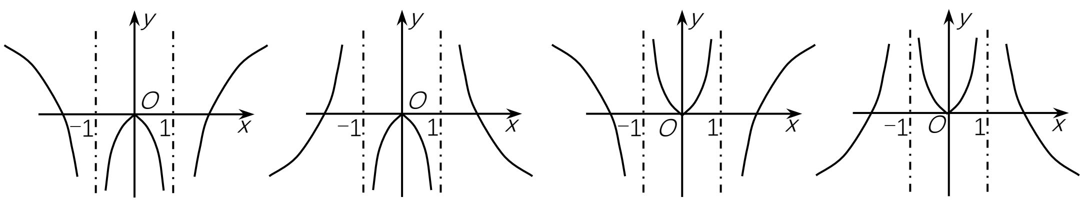
（A）3　　（B）5　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{5}$

【解析】依题不妨取双曲线的右准线 $x=\dfrac{a^2}{c}$，则左焦点 F_1 到右准线的距离为 $\dfrac{a^2}{c}+c=\dfrac{a^2+c^2}{c}$，

左焦点 F_1 到右准线的距离为 $c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{c^2-a^2}{c}$，依题 $\dfrac{\frac{c^2+a^2}{c}}{\frac{c^2-a^2}{c}}=\dfrac{c^2+a^2}{c^2-a^2}=\dfrac{3}{2}$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=5$，$\therefore$ 双曲线

的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}.$

4. 已知 $a>0,a\neq 1$，函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+b})$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上既是奇函数又是增函数，则函数 $g(x)=\log_a\left||x|-b\right|$ 的图象是（　　　　）



A　　B　　C　　D

【解析】：$f(x)$ 为奇函数，且 $f(0)$ 存在，则 $f(0)=0\Rightarrow \log_a\sqrt{b}=0\Rightarrow b=1$，当 $x>0$ 时，真数 $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 递增，而已知 1 对数 $f(x)$ 递增，$\therefore$ 底数 $a>1$，$\therefore g(3)=\log_a 2>0$，排除选项 B、D，又 $g(\frac{1}{2})=\log_a\frac{1}{2}<0$，排除选项 C，故选 A.

5. 已知以 4 为周期的函数 $f(x)=\begin{cases}m\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1]\\ -\cos\dfrac{\pi x}{2}, x\in(1,3]\end{cases}$，其中 $m>0$。若方程 $f(x)=\dfrac{x}{3}$ 恰有 5 个实数解，则 m 的取值范围为（　　）

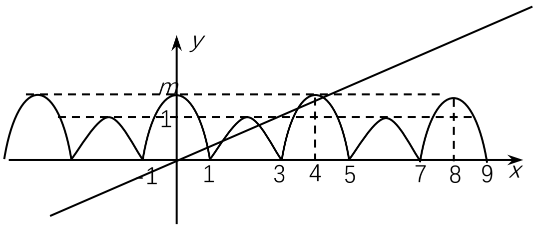
(A) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{7}\right)$

【解析】：题目给出了 $f(x)$ 在 $(-1,3]$ 上的解析式，结合周期为 4，知：

当 $x\in(3,5]$ 时，$x-4\in(-1,1]$，故此时 $f(x)=f(x-4)=m\sqrt{1-(x-4)^2}$，

当 $x\in(7,9]$ 时，$x-8\in(-1,1]$，故此时 $f(x)=f(x-8)=m\sqrt{1-(x-8)^2}$

$f(x)$ 的草图如下，方程 $f(x)=\dfrac{x}{3}$ 恰有 5 个实数解充要条件是：



直线 $y=\dfrac{x}{3}$ 与半椭圆 $C_1: y=m\sqrt{1-(x-4)^2}$ 有两个交点，而与半椭圆 $C_2: y=m\sqrt{1-(x-8)^2}$ 无交点.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{x}{3}\\ y=m\sqrt{1-(x-4)^2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x^2}{9}=m^2-m^2(x-4)^2\Rightarrow(\dfrac{1}{9}+m^2)x^2-8m^2x+15m^2=0$，令 $\Delta>0$，

得 $64m^4-4(\dfrac{1}{9}+m^2)\cdot15m^2>0\Rightarrow m^2>\dfrac{15}{9}(m>0)\Rightarrow\ m>\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　①；

由 $\begin{cases}y=\dfrac{x}{3}\\ y=m\sqrt{1-(x-8)^2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x^2}{9}=m^2-m^2(x-8)^2\Rightarrow(\dfrac{1}{9}+m^2)x^2-16m^2x+63m^2=0$，令 $\Delta<0$，

得 $256m^4-4(\dfrac{1}{9}+m^2)\cdot63m^2<0\Rightarrow m^2<7\Rightarrow 0<m<\sqrt{7}$　　②.

由①、②求交，知(B)正确

6. （2024 届高三上九省联考 多选）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则（　　）

A．$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　　　B．$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C．函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 为偶函数　　　　D．函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数

【解析】令 $x=y=0$，解得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=-1$，

如 $f(0)=0$，则在题目中令 $y=0$，则得 $f(x)=0$ 恒成立，此与 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ 矛盾，故 $f(0)=-1$。

在题目中令 $x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}$，得 $f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，故 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，得 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，A 对；

令 $y=-\frac{1}{2}$，得 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2x$，即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，故 C 错；

在 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$ 中令 $x=1$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，故 B 对；

由 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$ 得 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$ 为减函数，故 D 对；

综上，选 ABD。

7. 对 $\forall x>0$，不等式 $a^x>\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

【解析】显然 $a>1$，$a^x>\log_a x\Leftrightarrow e^{x\ln a}>\frac{\ln x}{\ln a}\Leftrightarrow(x\ln a)e^{x\ln a}>x\ln x=e^{\ln x}\ln x$，

令 $f(x)=xe^x$，则原不等式 $\Leftrightarrow f(x\ln a)>f(\ln x)$，

因 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，故 $f(x)$ 单调递增，从而 $x\ln a>\ln x$，即 $\ln a>\frac{\ln x}{x}$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，因 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，易知 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$。由 $\ln a>\frac{1}{e}$ 解得 $a>e^{\frac{1}{e}}$。

综上，a 的取值范围为 $(e^{\frac{1}{e}},+\infty)$。

【法二】考虑到 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数，其图像关于直线 $y=x$ 对称，因此

要 $a^x>\log_a x$ 恒成立，只需 $a^x>x$ 恒成立即可，即 $x\ln a>\ln x$ 恒成立。

由题意，$a>1$，故 $\ln a>\dfrac{\ln x}{x}$，即 $\ln a>\dfrac{1}{e}$，故 $a>e^{\frac{1}{e}}$

8. **（多选题）**已知 $0<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}b<1$，则下列说法正确的是

A. $1>a^2>b^2>\dfrac{1}{4}$　　B. $2>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>1$　　C. $\dfrac{a}{b-1}>\dfrac{b}{a-1}$　　D. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}>e^{-b}>\dfrac{1}{e}$

【解析】由已知 $0<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}b<1$，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\dfrac{1}{2}<b<a<1$，故 $\dfrac{1}{4}<b^2<a^2<1$，故 A 正确；

因函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又因 $\dfrac{1}{2}<b<a<1$，所以 $2>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}>1$，B 错；

因 $\dfrac{a}{b-1}-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{a(a-1)-b(b-1)}{(b-1)(a-1)}=\dfrac{(a^2-b^2)-(a-b)}{(b-1)(a-1)}=\dfrac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)}$，

又因 $\dfrac{1}{2}<b<a<1$，所以 $a+b>1$，$\dfrac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)}>0$，故 C 正确；

因 $-\dfrac{1}{2}>-b>-a>-1$，函数 $y=e^x$ 为单调递增函数，所以 $\dfrac{1}{e}<e^{-a}<e^{-b}<1=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，D 对；

综上，选 ACD。

9. **（巴蜀中学）**已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 有两个零点 $x_1<x_2$，则下列说法错误的是（　　）

A．$a>e$　　B．$x_1+x_2>2$　　C．$x_1x_2>1$　　D．有极小值点 x_0，且 $x_1+x_2<2x_0$

【巧解】显然 $f'(x)=e^x-a$，如 $a\le 0$，则 $f(x)$ 单调递增，不可能有两个零点，故 $a>0$，从而 x_1,x_2 均为正数。由题意 $\begin{cases}e^{x_1}=ax_1\\ e^{x_2}=ax_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\ x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$

$\Rightarrow x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$，故 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，

由**“对数平均值不等式”**知：$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>2\\ x_1x_2<1\end{cases}$，

显然 C 错 B 对，选 C。

由 $f'(x)=e^x-a=0$ 得 $x_0=\ln a$，易知 x_0 为 $f(x)$ 的极小点，所以，$f(x)$ 要有两个零点，必有 $f(x_0)<0$，即 $e^{\ln a}-a\ln a<0$，也即 $a-a\ln a<0$，即 $1-\ln a<0$，故 $a>e$，选项 A 对。

由前面的分析知：$x_1<x_0<x_2$，

令 $g(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$，显然 $g(0)=0$，

又，$g'(x)=e^{x_0+x}+e^{x_0-x}-2a\ge 2\sqrt{e^{2x_0}}-2a=2e^{x_0}-2a=2e^{\ln a}-2a=0$，故 $g(x)$ 单调递增；

故 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_0+(x_2-x_0))>f(x_0-(x_2-x_0))=f(2x_0-x_2)$，

考虑到 $2x_0-x_2<x_0$，且 $x<x_0$ 时 $f(x)$ 递减，故，由 $f(x_1)>f(2x_0-x_2)$ 得

$x_1<2x_0-x_2$，即 $x_1+x_2<2x_0$。D 对

10. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则 $|\vec{c}|$ 的最大值是(　　)

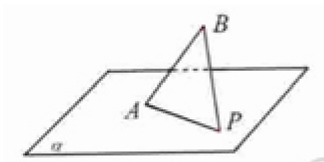
（A）1　　（B）2　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 $\because|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ 展开 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0\Rightarrow|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta,$

$\therefore|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta,$ 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 $\sqrt{2}$；

或者利用数形结合，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 对应的点 A,B 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$\vec{c}$ 对应的点 C 在圆 $x^2+y^2=2$ 上即可.

11. 如图，AB 是平面 a 的斜线段，A 为斜足，若点 P 在平面 a 内运动，使得△ABP 的面积为定值，则动点 P 的轨迹是(　　　)



（A）圆　　（B）椭圆

（C）一条直线　　（D）两条平行直线

【解析】本小题其实就是一个平面斜截一个圆柱表面的问题。考虑到三角形面积为定值，底边一定，从而 P 到直线 AB 的距离为定值，若忽略平面的限制，则 P 轨迹类似为一以 AB 为轴心的圆柱面，加上后者平面的交集，轨迹为椭圆！还可以采取排除法，直线是不可能的，在无穷远处，点到直线的距离为无穷大，故面积也为无穷大，从而排除 C 与 D，又题目在斜线段下标注重点符号，从而改成垂直来处理，轨迹则为圆，故剩下椭圆为答案！

12. 已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $\frac{m}{M}$ 的值为

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【巧解】令 $g(x)=\sqrt{x}$，则 $y=g(1-x)+g(x+3)$，令 $1-x=x+3$，解得 $x=-1$，故函数 y 的图像关于直线 $x=-1$ 对称，易知 $y_{\max}=y(-1)=2\sqrt{2},y_{\min}=y(1)=y(-3)=2$，故 $\frac{m}{M}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，选 C。

【解法二】：定义域 $\begin{cases}1-x\ge0\\x+3\ge0\end{cases}\Rightarrow-3\le x\le1$，$y^2=4+2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+3}=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}$

所以当 $x=-1$ 时，y 取最大值 $M=2\sqrt{2}$，当 $x=-3或1$ 时 y 取最小值 $m=2$ $\quad\therefore \frac{m}{M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in R$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$,则下列说法一定正确的是

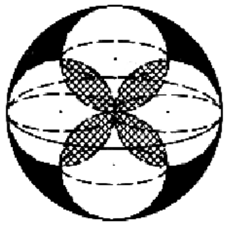
(A) $f(x)$ 为奇函数 (B) $f(x)$ 为偶函数

(C) $f(x)+1$ 为奇函数 (D) $f(x)+1$ 为偶函数

【解析】 令 $x=0$，得 $f(0)=2f(0)+1$，$f(0)=-1$，所以 $f(x-x)=f(x)+f(-x)+1=-1$

$f(x)+f(-x)+1+1=0$,即 $f(x)+1=-[f(-x)+1]$，所以 $f(x)+1$ 为奇函数,选 C

14. 如图 9，体积为 V 的大球内有 4 个小球，每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点，4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点.V_1 为小球相交部分（图中阴影部分）的体积，V_2 为大球内、小球外的图中黑色部分的体积，则下列关系中正确的是


题(9)图

(A) $V_1>\frac{V}{2}$ (B) $V_2<\frac{V}{2}$

(C) $V_1>V_2$ (D) $V_1<V_2$

【解析】 设大球半径为 R，小球半径为 $\frac{R}{2}$ 根据题意 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=4\cdot\frac{4\pi}{3}(\frac{R}{2})^3-\frac{V_1}{4}\times 2+V_2$ 所以

$V_2-\frac{V_1}{2}=\frac{4\pi}{3}R^3-4\cdot\frac{4\pi}{3}(\frac{R}{2})^3=\frac{2\pi}{3}R^3=\frac{V}{2}$ 于是 $V_2-\frac{V_1}{2}=\frac{V}{2}$ 即 $2V_2-V_1=V$ 所以

$V_2-V_1=V-V_2>0$，$\therefore V_1<V_2$。

15. 函数 $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(0\le x\le 2\pi)$ 的值域是（ ）

(A) $[-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$ (B) $[-1,0]$ (C) $[-\sqrt{2},0]$ (D) $[-\sqrt{3},0]$

【解析】 $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sqrt{(1-\cos x)^2+(1-\sin x)^2}}\ge\frac{\sin x-1}{1-\sin x}=-1$，当且仅当 $\cos x=1$ 时取等号；

又，易知 $f(x)\le 0$，当且仅当 $\sin x=1$ 时取等号，故 $-1\le f(x)\le 0$，选 B。

16. 有 90 位学生参加面试，学生来自 A、B、C 三校，其中 A 校 20 人，B 校 30 人，C 校 40 人，面试时每次都从尚未面试的学生中抽取一位，面试完毕以后再选择下一位面试，则 A 校学生先于其他两校学生完成面试的概率是（ ）

A．$\frac{7}{9}$　　B．$\frac{11}{15}$　　C．$\frac{22}{45}$　　D．$\frac{23}{45}$

【解】分以下两种情况讨论

（1）　让第 90 位面试的同学为 B 校同学，此时，B 不可能优先了，再考虑 A、C 两校，一共有 60 位同学，让第 60 位面试的同学位 C 校同学，这样就可保证 A 校优于 B、C 两校完成面试；

（2）　按（1）的思路交换 B、C 两校

综上，所求概率为 $\frac{30}{90}\times\frac{40}{60}+\frac{40}{90}\times\frac{30}{50}=\frac{22}{45}$，选 C.

17. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 6 局时停止，设甲在每局中获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，且各局比赛相互独立，则比赛停止时已打局数 ξ 的方差 $D(\xi)$ 为（　　）

A. $\frac{4540}{2187}$　　B. $\frac{16400}{6561}$　　C. $\frac{16496}{6561}$　　D. $\frac{1820}{729}$

【解】显然，ξ 只能取 2（某人一开始就连赢 2 局）、4（某人 3 胜 1 负，此人前 2 局中必输 1 局，其余 3 局必须赢）、6 三个值，易知

$$p(\xi=2)=p(\text{甲})+p(\text{乙})=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9},$$

$$p(\xi=4)=p(\text{甲})+p(\text{乙})=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{20}{81},$$

故 $p(\xi=6)=1-\frac{5}{9}-\frac{20}{81}=\frac{16}{81}$，

故 $D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\frac{5}{9}\times2^2+\frac{20}{81}\times4^2$

$+\frac{16}{81}\times6^2-\left(\frac{5}{9}\times2+\frac{20}{81}\times4+\frac{16}{81}\times6\right)^2=\frac{16400}{6561}$，选 B。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=\sqrt{3}\sin A$，则 $\frac{abc}{2c^2+2ab\cos C}$ 的最大值为__

【解】由余弦定理，基本不等式以及辅助角公式可知

$$\frac{abc}{2c^2+2ab\cos C}=\frac{abc}{2\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)+2ab\cos C}=\frac{abc}{2\left(a^2+b^2-ab\cos C\right)}$$

$$\le \frac{abc}{2\left(2ab-ab\cos C\right)}=\frac{c}{2\left(2-\cos C\right)}=\frac{\sqrt{3}\sin C}{2\left(2-\cos C\right)}\le \frac{\sqrt{3}\sin C}{2\sqrt{3}\sin C}=\frac{1}{2},$$

当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号。

注意：最后一步我们用到了不等式：$2-\cos C\ge \sqrt{3}\sin C$，事实上，此等价于

$\sqrt{3}\sin C+\cos C\le 2$，由辅助角公式知，此乃显然。

【法二】利用**外森比克不等式**。令 $\triangle ABC$ 的面积为 S

$$\frac{abc}{2c^2+2ab\cos C}=\frac{abc}{2c^2+2ab\times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{a\times \frac{2S}{\sin A}}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2\sqrt{3}S}{a^2+b^2+c^2}\le \frac{2\sqrt{3}S}{4\sqrt{3}S}=\frac{1}{2}$$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号。

【解法三】从已知条件和问题发现：a,b 所处地位对等，故 $\frac{abc}{2c^2+2ab\cos C}$ 取最大值时，应该有 a,b，此时，

$$\frac{abc}{2c^2+2ab\cos C}=\frac{a^2c}{4a^2-2a^2\cos C}=\frac{1}{2}\times \frac{c}{2-\cos C}=\frac{1}{2}\times \frac{\sqrt{3}\sin C}{2-\cos C}\le \frac{1}{2}\times \frac{\sqrt{3}\sin C}{\sqrt{3}\sin C}=\frac{1}{2}$$

【注意】外森比克不等式： $\triangle ABC$ 中

（1）$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

（2）$xa^2+yb^2+zc^2\ge 4\sqrt{xy+yz+zx}S$

19. 过点 $P(b,4)$ 引抛物线 $x^2=8y$ 的两条切线，设切点分别为 A,B，则直线 AB 一定过定点（　　）

【略解】 AB 的方程为 $bx=4(y+4)$，显然，AB 过定点 $M(0,-4)$

20. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，直线 l 过点 $P(2,1)$，且与 C 交于 M,N，若 P 恰为线段 MN 的中点，则直线 l 的斜率为______

【巧解】直接用公式 $k_l=\frac{p}{y_0}=\frac{2}{1}=2$

21. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ **存在**一点 P，使得 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则椭圆的离心率的取值范围为

（　　）

【巧解】由 $e \ge \sin\frac{\theta}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$，故 e 的取值范围为 $[\frac{1}{2},1)$

22. （全国卷)椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是______

【速解】易知 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，令 $P(x,y)$，则 $F_1P=3+\frac{\sqrt{5}}{3}x,\ F_2P=3-\frac{\sqrt{5}}{3}x,\ F_1F_2=2\sqrt{5}$

由 $\angle F_1PF_2$ 为钝角知：$F_1P^2+F_2P^2-F_1F_2^{\ 2}<0$，解得 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【速解二】由题意知：$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}<0 \Rightarrow OP^2-OF_1^{\ 2}<0 \Rightarrow x^2+y^2<5 \Rightarrow x^2+4(1-\frac{x^2}{9})<5$，

解得 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}$

23. 已知 M,N 分别位于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左、右支，F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点，$MN//F_1F_2$，且 $MN=\frac{4}{5}c$，F_2M 交双曲线右支于点 Q，且 Q 为 F_2M 之中点，则双曲线的离心率为 _______

【解析】：易知 $x_M=-\frac{2}{5}c$，$x_Q=\frac{1}{2}(x_M+c)=\frac{3}{10}c$

故 $F_2M=-ex_M+a=\frac{2}{5}ce+a$，$F_2Q=ex_Q-a=\frac{3}{10}ce-a$

由 $F_2M=2F_2Q \Rightarrow \frac{2}{5}ce+a=2(\frac{3}{10}ce-a)=\frac{3}{5}ce-2a \Rightarrow 3a=\frac{1}{5}ce \Rightarrow e=\sqrt{15}$

24. 已知 $M(3,0)$，过 M 的直线交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 两点，F 为抛物线的焦点，且 $|FA|-|FB|=\sqrt{13}$，则 $\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{FB}=$________

【速解】令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=9$，$y_1y_2=-12$；

又，$|FA|-|FB|=\sqrt{13} \Rightarrow x_1-x_2=\sqrt{13} \Rightarrow x_1+x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4x_1x_2}=\sqrt{13+36}=7$，

故 $\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{FB}=(x_1-1,y_1)\bullet(x_2-1,y_2)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2=9-7+1-12=-9$

25. 已知 F 为抛物线 C: $x^2=4y$ 的焦点,过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于不同的两点 A,B,抛物线 C 在 A,B 两点处的切线分别是 l_1,l_2,且 l_1,l_2 相交于点 P,则 $|PF|+\frac{32}{|AB|}$ 的最小值是___

【巧解】设 AB 与对称轴的倾斜角为 θ，则 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$，根据抛物线的光学性质及彭斯雷定理，$\triangle ABP$ 为直角三角形，直角顶点 P 在准线上，且 $PF\perp AB$，故

$|PF|=\dfrac{p}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$，从而

$$|PF|+\frac{32}{|AB|}=\frac{2}{\sin\theta}+8\sin^2\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}+8\sin^2\theta\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}\times 8\sin^2\theta}=6$$

26. 若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $4\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|$ 的最大值为________________。

【解】由极化恒等变形得 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2=8\vec{a}^2+2\vec{b}^2$，$|2\vec{a}+\vec{b}|^2-|2\vec{a}-\vec{b}|^2=8\vec{a}\cdot\vec{b}$

故 $\dfrac{|2\vec{a}+\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}+\dfrac{|2\vec{a}+\vec{b}|^2-|2\vec{a}-\vec{b}|^2}{8}=1$，即 $\dfrac{5|2\vec{a}+\vec{b}|^2}{8}+\dfrac{3|2\vec{a}-\vec{b}|^2}{8}=1$

即 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=\dfrac{8}{5}-\dfrac{3|2\vec{a}-\vec{b}|^2}{5}\le\dfrac{8}{5}$，故 $|2\vec{a}+\vec{b}|\le\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

27. 甲、乙、丙三人传球，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者将球等可能地传给另外 2 人中的任何 1 人。则传球 10 次后，球回到甲手中的概率为____。

【解】记 p_n 为传球 n 次后，球在甲手中的概率，显然 $p_1=0$，且 $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

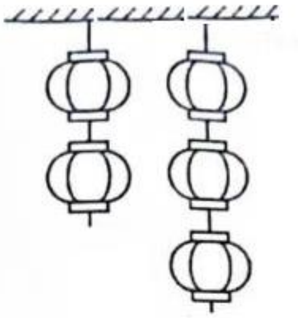
由 $p_n=\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1})\Rightarrow p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}(p_{n-1}-\dfrac{1}{3})$

故，数列 $\{p_n-\dfrac{1}{3}\}$ 是以 $p_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$ 为首项，$-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，因此

$p_n-\dfrac{1}{3}=(-\dfrac{1}{3})(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$，即 $p_n=\dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}$

故 $p_{10}=\dfrac{2^9+1}{3\times 2^9}$，即传 10 次球后，求回到甲手中的概率为 $\dfrac{2^9+1}{3\times 2^9}$

28. 奥运吉祥物“雪容融”是根据中国传统文化种灯笼的造型创作而成。县挂有如图所示的两串灯笼，每次随机选取其中一串并摘下其最下方的一个灯笼，直至某一串灯笼被摘完为止，则左边灯笼先摘完的概率为_____。



【提示】左、右两串灯笼，从上到下分别标号 1，2，3，4，5；显然，要保证左边那串先摘完，取灯笼的顺序只能是 21、251、2541、521、5241、5421 六种，故所求概率为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$$

【巧解】分 2 次、3 次和 4 次完成三种情况：

2 次完成，概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^2$；3 次完成，概率为$C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^3$；4 次完成，概率为$C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4$

故所求概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$

29. 设整数n,k满足$1\le k\le n$，集合$A=\left\{2^m\,\middle|\,0\le m\le n-1,m\in Z\right\}$，从$A$中任取$k$个不同的元素并取它们的乘积，这样的乘积有$C_n^k$个，设它们的和为$a_{n,k}$，例如

$a_{3,2}=2^0\cdot2^1+2^0\cdot2^2+2^1\cdot2^2=14$。

（1） 若$n\ge2$，求$a_{n,2}$；

（2） 记$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$，求$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$和$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$的整式表达式；

（3） 用含n,k的式子表示$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$。

【解析】（1）$a_{n,2}=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)^2-\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^k\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{4^n-1}{4-1}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(2^n-1\right)^2-\frac{4^n-1}{3}\right]=\frac{4^n}{3}-2^n+\frac{2}{3}$

（2）因为$f_n(x)=\left(1+2^0x\right)\left(1+2^1x\right)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)$，

$f_{n+1}(x)=\left(1+2^0x\right)\left(1+2^1x\right)\left(1+2^2x\right)\cdots\left(1+2^{n-1}x\right)\left(1+2^nx\right)$，两式相除，得$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$。

又，$f_n(2x)=(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)$，故$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$

（3）因 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k$　　　①

所以，$a_{n,0}=1$，

又因 $f_{n+1}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}a_{n+1,k}x^k$　　　②

由②和①得

$$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k+2^n\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(a_{n,k}+2^na_{n,k-1})x^k \quad ③$$

由②和③，比较x^{k+1}的系数，得$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$　　　④

因为 $f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}(2x)^k+x\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}(2x)^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}2^kx^k+\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}2^kx^{k+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(2^ka_{n,k}+2^{k-1}a_{n,k-1})x^k$

由②，比较x^{k+1}的系数，得$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$　　　⑤

由④⑤消去$a_{n,k+1}$，得$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$，故$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$

30. 若正实数数列$\{c_n\}$满足$c_{n+1}^2\le c_nc_{n+2}\,(n\in N^*)$，则称$\{c_n\}$是一个对数凸数列；若实数数列$\{d_n\}$满足$2d_{n+1}\le d_n+d_{n+2}$，则称$\{d_n\}$是一个凸数列。已知$\{a_n\}$是一个对数凸数列，$b_n=\ln a_n$。

（1）证明：$a_1a_{10}\ge a_5a_6$；

（2）若$a_1a_2\cdots a_{2024}=1$，证明：$a_{1012}a_{1013}\le 1$；

（3）若$b_1=1,b_{2024}=2024$，求b_{10}的最大值。

【解析】（1）由题意得：$a_{n+1}^2\le a_na_{n+2}$，$\therefore \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\ge\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ge\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\ge\cdots\ge\dfrac{a_2}{a_1}$，

$\therefore a_1a_{10}\ge a_2a_9\ge a_3a_8\ge a_4a_7\ge a_5a_6$，

故$a_1a_{10}\ge a_5a_6$，证毕。

（2）因 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$，$\therefore \frac{a_{n-k}}{a_{n-k-1}} \le \frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}} \le \cdots \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \le \cdots \le \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$，

$\therefore a_{n+k}a_{n-k} \le a_{n+k+1}a_{n-k+1}\left(1 \le k < n\right)$，

故 $a_{1012}a_{1013} \le a_{1011}a_{1014} \le a_{1010}a_{1015} \le \cdots \le a_1a_{2024}$，故 $\left(a_{1012}a_{1013}\right)^{1012} \le a_1a_2\cdots a_{2024} = 1$，

$\therefore a_{1012}a_{1013} \le 1$，证毕。

（3）由 $a_{n+1}^2 \le a_na_{n+2}$ 得 $\ln\left(a_{n+1}^2\right) \le \ln\left(a_na_{n+2}\right)$，$\therefore 2b_{n+1} \le b_n + b_{n+2}$，也即

$b_{n+1} - b_n \le b_{n+2} - b_{n+1}$，$\therefore b_{2024} - b_{2023} \ge b_{11} - b_{10}, b_{2022} - b_{2022} \ge b_{11} - b_{10}, \cdots, b_{11} - b_{10} \ge b_{11} - b_{10}$

以上式子累加，得 $b_{2024} - b_{10} \ge 2014\left(b_{11} - b_{10}\right)$ ①

另外，$b_{11} - b_{10} \ge b_{10} - b_9, b_{11} - b_{10} \ge b_9 - b_8, \cdots, b_{11} - b_{10} \ge b_2 - b_1$

以上式子累加得 $9\left(b_{11} - b_{10}\right) \ge b_{10} - b_1$ ②

结合①②得：$\frac{b_{2024} - b_{10}}{2014} \ge b_{11} - b_{10} \ge \frac{b_{10} - b_1}{9}$，$\therefore \frac{2024 - b_{10}}{2014} \ge \frac{b_{10} - 1}{9}$，化简得 $b_{10} \le 10$，

另外，显然有 $b_n = n$ 符合题意，此时 $b_{10} = 10$，

综上，b_{10} 的最大值为 10.