习题课

一、选择题

1. 在整数集 Z 中，被整数 t 除所得余数为 $k(t>k\ge 0)$ 的所有整数组成一个“类”，记为 $[k]_t=\{at+k\mid a\in Z\},k=0,1,2,\cdots,t-1$，比如 $[3]_5=\{5a+3\mid a\in Z\}$，则下列结论正确的为（　　）

①$[1]_2=[1]_4\cup[3]_4$　　②$Z=[0]_2\cup[0]_3$

③整数 a,b 满足 $a\in[1]_5$ 且 $b\in[2]_5$ 的充要条件是 $a+b\in[3]_5$　　④$[0]_3\cap[1]_2=[3]_6$

【解析】$[1]_2=\{2n+1\mid n\in Z\}$，$[1]_4=\{4n+1\mid n\in Z\},[3]_4=\{4n+3\mid n\in Z\}$，

显然 $[1]_2=[1]_4\cup[3]_4$，①对；

②显然错；

对于③，必要性不成立

事实上，取 $a\in[0]_5,b\in[3]_5$，则 $a+b\in[3]_5$，但显然 $a\notin[1]_5,b\notin[2]_5$，故③错。

显然，$[0]_3$ 是由能被 3 整除的数构成的集合，而 $[1]_2$ 是奇数构成的集合，因此 $[0]_3\cap[1]_2$ 为被 6 除余数为 3 的整数构成的集合，即 $[0]_3\cap[1]_2=[3]_6$，故④对；

综上，选①④

2. 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2.3]=2,\ [-1.8]=-2$，方程 $[1+|x-1|]=3$ 的解集为 A，集合 $B=\{x\mid -2x^2+11kx-15k^2<0\}$，且 $A\cup B=R$，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $[\frac{6}{5},\frac{4}{3})\cup(-\frac{4}{3},-\frac{6}{5}]$　　B. $(\frac{6}{5},\frac{4}{3}]\cup[-\frac{2}{3},-\frac{2}{5})$

C. $[\frac{6}{5},\frac{4}{3}]\cup[-\frac{2}{3},-\frac{2}{5}]$　　D. $[\frac{6}{5},\frac{4}{3})\cup(-\frac{2}{3},-\frac{2}{5}]$

【解析】由题意知 $2\le|x-1|<3$，即 $2\le x-1<3$ 或 $-3<x-1\le-2$，解得 $3\le x<4$ 或 $-2<x\le-1$，故 $A=(-2,-1]\cup[3,4)$；

由 $-2x^2+11kx-15k^2<0\Rightarrow(2x-5k)(x-3k)>0$，

当 $k>0$ 时，得 $B=\left(-\infty,\frac{5k}{2}\right)\cup(3k,+\infty)$，因 $A\cup B=R$，故 $3\le\frac{5k}{2}<3k<4$，解得

$\frac{6}{5} \le k < \frac{4}{3}$

当 $k=0$ 时，得 $B=\left\{x\in R\,|\,x\ne 0\right\}$，此时 $A\cup B=R$ 不成立，故 $k=0$ 不可取；

当 $k<0$ 时，得 $B=\left(-\infty,3k\right)\cup\left(\frac{5k}{2},+\infty\right)$，则 $-2<3k<\frac{5k}{2}\le -1$，解得 $-\frac{2}{3}<k\le -\frac{2}{5}$，

综上，k 的取值范围为 $\left[\frac{6}{5},\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{5}\right]$

【法二】特殊值法。观察选择支，取 $k=\frac{4}{3}$，解 $-2x^2+11kx-15k^2<0$ 得 $B=\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)\cup\left(4,+\infty\right)$，显然 $A\cup B\ne R$（元素 4 不在里面），故排除 B、C；

再取 $k=-1$，解 $-2x^2+11kx-15k^2<0$ 得 $B=\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$，结合 $A=\left(-2,-1\right]\cup\left[3,4\right)$，显然 $A\cup B\ne R$，排除 A。

综上，只能选 D。

3. 设集合 $S,T,S\subseteq N^*,T\subseteq N^*,S,T$ 中至少有两个元素，且 S,T 满足：

①对任意 $x,y\in S$，若 $x\ne y$，都有 $xy\in T$

②对任意 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\frac{y}{x}\in S$；

下列情况中可能出现的有（　　　　）

A．S 有 4 个元素，$S\cup T$ 有 7 个元素　　B．S 有 4 个元素，$S\cup T$ 有 6 个元素

C．S 有 3 个元素，$S\cup T$ 有 5 个元素　　D．S 有 3 个元素，$S\cup T$ 有 4 个元素

【解析】取 $S=\{1,2,4\}$，则 $T=\{2,4,8\}$，$S\cup T=\left\{1,2,4,8\right\}$，D 对；

取 $S=\{2,4,8\}$，则 $T=\{8,16,32\}$，$S\cup T=\left\{2,4,8,16,32\right\}$，C 对；

取 $S=\{2,4,8,16\}$，则 $T=\{8,16,32,64,128\}$，$S\cup T=\{2,4,8,16,32,64,128\}$，A 对；

对于 B，令 $S=\{a,b,c,d\}$，则 $T=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$，其中 $a<b<c<d$

如 $a=1$，此时 $S=\{1,b,c,d\}$，$T=\{b,c,d,bc,bd,cd\}$，此时 B 不可能；

如 $a\ne 1$，则 $S\cup T$ 仍至少含 7 个元素，B 不可能；

综上，选 ACD。

4. $M=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，非空集合 P 满足：(1) $P\subseteq M$；(2) 若 $x\in P$，则 $-x\in P$，

则集合 P 的个数为（　　）

A．7　　B.8　　C.15　　D.16

【解析】 考虑 $\{0\},\{-1,1\},\{-2,2\},\{-3,3\}$，这 4 个集合显然都满足要求；

另外，这 4 个集合中，任意 2 个的并集也满足要求，有 6 个

同理，这 4 个集合中，任意 3 个集合的并集也满足要求，有 4 个

最后，这 4 个集合的并集也满足要求，有 1 个

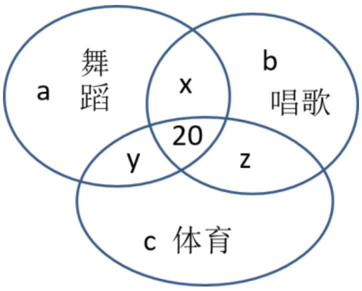
因此，共有 $4+6+4+1=15$ 个，选 C。

5. 某小学对小学生课外活动进行调查。调查结果显示；参加舞蹈课外活动的有 57 人，参加唱歌课外活动的有 82 人，参加体育课外活动的有 53 人，三种课外活动都参加的有 20 人，只选择两种课外活动参加的有 36 人，不参加其中任何一项活动的有 10 人，则接受调查的小学生一共有（　　）人

A.116　　B.126　　C.146　　D.160

【解析】 参考右边的韦恩图。令只参加舞蹈的有 a 人，只参加唱歌的有 b 人，只参加体育的有 c 人，由题意得 $\begin{cases} a+x+y+20=57 \\ b+x+z+20=82 \\ c+y+z+20=53 \\ x+y+z=36 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=60$

故，参加调查的小学生总共有 $(a+b+c)+(x+y+z+20)+10=60+(36+20)+10=126$ 人，选 B



二、填空题

6. 集合 $A=\{a\,|\,1\le a\le 2000, a=4k+1, k\in Z\}, B=\{b\,|\,1\le b\le 3000, b=3k-1, k\in Z\}$，则 $|A\cap B|=$_____。

【解析】 $3k-1=(3k-3)+2$，因此集合 B 是由 1—3000 中除 3 余 2 的整数构成的；

现在分析集合 A 里面的数，看满足除 3 余 2 这个要求，

当 $k=3r$ 时，$4k+1=12r+1$，除 3 余 1，不满足要求；

当 $k=3r+1$ 时，$4k+1=12r+5=(12r+3)+2$，除 3 余 2，满足要求；

当 $k=3r+2$ 时，$4k+1=12r+9$，能被 3 整除，不满足要求；

故，集合 A 中形如 $12r+5(r\in Z)$ 的数满足要求，

由 $1\le 12r+5\le 2000$，解得 $0\le r\le 166$

故，$|A\cap B|=167$.

【说明】$5\notin M$ 隐含了条件 $5^2-a=0$，这一点很容易被忽略。

7. 已知 $m\in R$，集合 $A=\{x\mid m\le x\le 3m-1\}$，若 $A\cap Z$ 恰有一个元素，则实数 m 的取值范围为______。

【解析】由题意知：集合 A 中含有一个整数，故 $A\ne\varnothing$，故 $m\le 3m-1\Rightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$，

如 $1\in A$，则 $1\le 3m-1<2$（$3m-1\ne 2$，否则 $m=1$，A 中含有 2 个整数，不合题意），解得 $\dfrac{2}{3}\le m<1$；

如果 $2\in A$，则必有 $1<m<2\le 3m-1<3$，解得 $1<m<\dfrac{4}{3}$；

其他情况均不符合要求。

综上，m 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{3},1\right)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$

8. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+2x-8\ge 0\}, B=\{x\mid x^2-2ax+4\le 0\}$，若 $a>0$，且 $A\cap B\cap N$ 中恰有 2 个元素，则 a 的取值范围为________。

【解析】易知 $A=(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$

由题意：B 中至少有 2 个元素，故 $4a^2-16>0$，得 $a>2$。

令 $f(x)=x^2-2ax+4$，对称轴为直线 $x=a$，

故，由题意知 $\begin{cases} f(2)=8-4a\le 0 \\ f(3)=9-6a+4\le 0 \\ f(1)=5-2a>0 \\ f(4)=16-8a+4>0 \end{cases}$，解得 $\dfrac{13}{6}\le a<\dfrac{5}{2}$，

故实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{13}{6},\dfrac{5}{2}\right)$。

9. 令 $A=\{1,99,-1,0,25,-36,-91,19,-2,11\}$，记 A 的所有非空子集为 $A_1,A_2,\cdots,A_{1023}$，记

A_i中所有元素之积为a_i，则$\sum_{i=1}^{1023} a_i =$______。

【解析】用公式，如实数集$X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，则其所有非空子集的元素之积之和为$(1+x_1)(1+x_2)\bullet\cdots\bullet(1+x_n)-1$。本题中$A=\{1,99,-1,0,25,-36,-91,19,-2,11\}$，

$$\sum_{i=1}^{1023} a_i=(1+1)(1+99)(1-1)(1+0)(1+25)\times(1-36)(1-91)(1-2)(1+11)-1=-1$$

10. 设$A=\{x\,|\,x^2+4x=0\}, B=\{x\,|\,x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,其中$x\in R$,如果$A\cap B=B$，则实数$a$的取值范围为______。

【解析】：由$A\cap B=B$得$B\subseteq A$，而$A=\{-4,0\}$，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8$

当$\Delta=8a+8<0$，即$a<-1$时，$B=\phi$，符合$B\subseteq A$；

当$\Delta=8a+8=0$，即$a=-1$时，$B=\{0\}$，符合$B\subseteq A$；

当$\Delta=8a+8>0$，即$a>-1$时，B中有两个元素，而$B\subseteq A=\{-4,0\}$；

$\therefore B=\{-4,0\}$得$a=1$

$\therefore a=1$或$a\le -1$。

11. **（北京高联赛）**S是集合$\{1,2,3,\cdots,2023\}$的子集，满足任意两个元素的平方和不是9的倍数，则$|S|$的最大值是______。（这里$|S|$表示S的元素个数）

【解析】整数x及其平方x^2除以9的余数情况如下表：

$x\pmod 9$	0	±1	±2	±3	±4
$x^2\pmod 9$	0	1	4	0	7

由此可知：$\left[\dfrac{2023}{3}\right]=674$个3的倍数只能人选1个，其它所有数均可选入。

故$|S|_{\max}=2023-674+1=1350$

12. **（全国高联赛）**设集合$\left\{\dfrac{3}{a}+b\,\middle|\,1\le a\le b\le 2\right\}$中的最大元素与最小元素分别为$M,m$，则$M-m$的值为____

【解析】由$1\le a\le b\le 2$知，$\dfrac{3}{a}+b\le\dfrac{3}{1}+2=5$，当$a=1,b=2$时，得最大元素$M=5$。

又$\dfrac{3}{a}+b\ge\dfrac{3}{a}+a\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3}$，当$a=b=\sqrt{3}$时，得最小元素$m=2\sqrt{3}$。

因此$M-m=5-2\sqrt{3}$

13. 设集合$A=\left\{x \mid x^2-[x]=2\right\}$和$B=\left\{x \mid |x|<2\right\}$，其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数，则$A\cap B=$_____。

【解析】因$|x|<2$，$[x]$的值可取$-2,-1,0,1$

当$[x]=-2$，则$x^2=0$无解;

当$[x]=-1$，则$x^2=1$，所以$x=-1$；

当$[x]=0$，则$x^2=2$无解;

当$[x]=1$，则$x^2=3$，所以$x=\sqrt{3}$；

所以$x=-1$或$x=\sqrt{3}$。

所以，$A\cap B=\left\{-1,\sqrt{3}\right\}$

14. 满足下列两个条件的非空集合S，① $S\subseteq\left\{1,2,3,4,5\right\}$；② 若$a\in S$，则$6-a\in S$。则非空集合$S$的个数为_____________。

【解析】我们按S中元素的个数进行讨论

（1）S为单元集，显然此时只有1个集合$\left\{3\right\}$

（2）S为2元集，由定义易知$\left\{1,5\right\},\left\{2,4\right\}$满足要求，有2个

（3）S为3元集，只需把“3”加到2元集中即可，有$\left\{1,3,5\right\},\left\{2,3,4\right\}$共2个

（4）S为4元集，有$\left\{1,2,4,5\right\}$共1个

（5）S为5元集，有$\left\{1,2,3,4,5\right\}$共1个

综上，满足要求的S有7个。

15. 由1，2，3组成的n位数，要求n位数中1，2和3每一个至少出现一次，所有这种n位数的个数为_______。

【解析】设所有由1，2，3组成的n位数的全体为集合S，不含$i(i=1,2,3)$的n位数的集合记为A_i，则$|S|=3^n$，$|A_1|=|A_2|=|A_3|=2^n$，$|A_1A_2|=|A_1A_3|=|A_2A_3|=1$，$|A_1A_2A_3|=0$，故

$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1A_2|-|A_1A_3|-|A_2A_3|+|A_1A_2A_3|=3\times2^n-3$

故，符合要求的n位数的个数为：$3^n-3\times2^n+3$。

16. （天津高联赛）设$A=\{1,2,3,4,\cdots,10\},B=\{1,2,3,4\}$，$C$是$A$的子集，且$C\cap B\neq\varnothing$，

则这样的C有______个

【解析】由题意，C一定含有 1，2，3，4 四个元素中的至少一个，由于集合A的不含 1，2，3，4 中任何一个元素的子集有$2^6=64$个（由$\{5,6,7,8,9,10\}$的子集构成），故，含有 1，2，3，4 中至少一个元素的子集有$2^{10}-64=960$个，因此，满足要求的C有960个

17. **（重庆高联赛）**设$a_i(i=1,2,3,4)$均为实数，若集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$的所有非空真子集的元素之和为 28，则$a_1+a_2+a_3+a_4=$______

【解析】: 含有元素$a_i(i=1,2,3,4)$的非空真子集有$2^3-1=7$个 ，故$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$的所有非空真子集的元素之和为$7(a_1+a_2+a_3+a_4)=28$，从而$a_1+a_2+a_3+a_4=4$。

18. **（全国高联赛）**已知实数集合$\{1,2,3,x\}$的最大元素与最小元素之差等于该集合所有元素之和，则$x=$______。

【解析】: 如果$x\geq 0$，则$\{1,2,3,x\}$的最大元与最小元之差$\leq \max\{3,x\}$，而$\max\{3,x\}<x+6$，不合题意，故$x<0$，从而$3-x=6+x$，解得$x=-\dfrac{3}{2}$。

19. **（山西高联赛）**设$M=\{1,2,3,\cdots,2018\}$中，末尾数字为 8 的元素之和为______

【解析】我们将$8,18,28,38,\cdots,2008,2018$的末位去掉，得到$0,1,2,3,\cdots,200,201$共 202 个数，因此，集合$M$中，末位为 8 的元素之和为

$$10(0+1+2+3+\cdots+200+201)+202\times 8=204626$$

20. 设 $n\in N$ 且 $n\geq 15$ ， A,B 是集合 $M=\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ 的一个划分（即$A\cap B=\varnothing,A\cup B=M$），证明：$A$ 或B中必有两不同数之和为完全平方数。

【证明】. 假设结论不成立，则不管是A还是B，其中任意两数之和均不是完全平方数。不妨设$1\in A$，则$3\in B$，$6\in A$，$10\in B$，$15\in A$，

但因$1\in A$，而$15+1=16$为完全平方数，因此，假设不成立，从而原结论成立。 证毕。

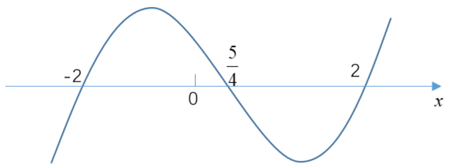
三、解答题

21. 设集合$M=\{x\mid \dfrac{ax-5}{x^2-a}<0,x\in R\}$。

（1）当$a=4$时，化简集合M

（2）如$3\in M$，且$5\notin M$，求实数a的取值范围。

【解析】（1）当$a=4$时，有$\dfrac{4x-5}{x^2-4}<0$，即$(4x-5)(x+2)(x-2)<0$，参考下图



得$x<-2$或$\frac{5}{4}<x<2$，故$M=(-\infty,-2)\cup(\frac{5}{4},2)$

（2）由$3\in M$得$\frac{3a-5}{3^2-a}<0$，即$(3a-5)(a-9)>0$，

故$a<\frac{5}{3}$或$a>9$　　　　①

由$5\notin M$得$\frac{5a-5}{5^2-a}\geq 0$，或$5^2-a=0$，

故$1\leq a\leq 25$　　　　②

由①②得：$a\in[1,\frac{5}{3})\cup(9,25]$

22. 已 知 集 合 $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=a+1\},B=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$ ， 且 $A\cap B=\varnothing$，求a的值。

【解析】 由$\frac{y-3}{x-2}=a+1$得$(a+1)x-y-2a+1=0$（$x\neq 2$）　　　　①

故，集合A表示一条直线，点$(2,3)$除外；

而$(a^2-1)x+(a-1)y=15$　　　　②

当$a\neq 1$时也表示一条直线，$a=1$时②不成立，

因此，当且仅当发生下列三种情况之一时，$A\cap B=\varnothing$

（1）$a=1$，此时$B=\varnothing$，故$A\cap B=\varnothing$

（2）$a=-1$，此时A表示直线$y=3(x\neq 2)$，B表示直线$y=-\frac{15}{2}$，他两互相平行，故$A\cap B=\varnothing$；

（3）$a\neq\pm 1$时，直线①②相交，但交点刚好是直线①上所缺的那个点$(2,3)$也能满足要求，将其带入直线②得$2(a^2-1)+3(a-1)=15$，解得$a=-4$或$a=\frac{5}{2}$

综上，$a=-4,\ \pm1,\ \dfrac{5}{2}$。

23. 已知非空集合 $A=\left\{x\mid x^2-(3a+1)x+2(3a-1)<0\right\}$ ，$B=\left\{x\mid x^2-(a^2+a+2)x+a^3+2a<0\right\}$。命题 $p:x\in A$，命题 $q:x\in B$，若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围。

【解析】 易知 $A=\left\{x\mid\left(x-2\right)\left(x-\left(3a-1\right)\right)<0\right\}$，$B=\left\{x\mid\left(x-a\right)\left(x-\left(a^2+2\right)\right)<0\right\}$

注意到 $a^2+2>a$，故 $B=\left(a,a^2+2\right)$

由于 $A\neq\varnothing$，故 $3a-1\neq2$，即 $a\neq1$

当 $a>1$ 时，$A=\left(2,3a-1\right)$

由题意知 $A\subseteq B$，故 $\begin{cases}a\le2\\3a-1\le a^2+2\end{cases}\Rightarrow1<a\le2$

当 $a<1$ 时，$A=\left(3a-1,2\right)$，由 $A\subseteq B$ 得 $\begin{cases}a\le3a-1\\2\le a^2+2\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le a<1$

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,2\right]$

24. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in R)$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),x\in R\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in R\}$，

（1）证明：$A\subseteq B$；

（2）如 $A=\{-1,3\}$，求集合 B。

【证明】（1）对任意的 $x_0\in A$，有 $x_0=f(x_0),x_0\in R$，

于是，$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，故 $x_0\in B$，从而 $A\subseteq B$，证毕。

（2）**【解】** 因 $A=\{-1,3\}$，所以 $\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1\\3^2+a\cdot3+b=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$

故，$f(x)=x^2-x-3$

由 $x=f(f(x))$ 得 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$

即 $(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$，解得 $x=-1,3,\pm\sqrt{3}$

所以 $B=\{-1,3,\pm\sqrt{3}\}$

25. 已知集合 $A=\left\{x\mid x^2-ax+8\ge0\right\}$。

（1） 若 $B=\{x\,|\,x^2-2ax-b<0\}$，且 $A\cap B=\{x\,|\,4\le x<9\}$，求 a,b 的值;

（2） 若 $B=\{x\,|\,x-2a<0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围。

【解】(1) 易知 $A=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$， $B=(x_3,x_4)$；

其中 x_1,x_2 为方程 $x^2-ax+8=0$ 的根， x_3,x_4 为方程 $x^2-2ax-b=0$ 的根，

由 $A\cap B=[4,9)$ 知： $x_2=4,x_4=9$

将 $x_2=4$ 代入方程 $x^2-ax+8=0$，解得 $a=6$；

将 $x_4=9$ 代入方程 $x^2-2ax-b=0$，解得 $b=-27$；

(2) $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$

当 $\Delta\le 0$ 时，得 $a^2-32\le 0\Rightarrow -4\sqrt{2}\le a\le 4\sqrt{2}$，此时 $A=R$，符合。

当 $\Delta=a^2-32>0$，即 $a>4\sqrt{2}$ 或 $a<-4\sqrt{2}$ 时

$A=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$，而 $B=(-\infty,2a)$，故

$$B\subseteq A\Rightarrow 2a\le x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-32}}{2}\Rightarrow a<-4\sqrt{2}$$

综上，$a\le 4\sqrt{2}$

26. 已知由实数组成的集合 A, $1\notin A$，又满足：若 $x\in A$，则 $\dfrac{1}{1-x}\in A$。

（1）设 A 中含有 3 个元素，且 $2\in A$，求 A；

（2） A 能否是只含一个元素的单元素集，试说明理由；

（3） A 中所含元素个数一定是 $3n\left(n\in N^*\right)$ 个吗？若是，给出证明，若不是，说明理由。

【解】(1) 由 $2\in A\Rightarrow \dfrac{1}{1-2}\in A\Rightarrow -1\in A$，从而 $\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}\in A$,而 $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2$

所以，$A=\left\{2,-1,\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) 假设 $A=\{a\}$，由题意知 $\dfrac{1}{1-a}=a\in A$， $\dfrac{1}{1-a}=a\Rightarrow a^2-a+1=0$，

显然，$\Delta=1-4<0$，该方程无实数解，故 A 不可能是含单个元素的单元素集。

(3) 集合 A 中一定含有 $3n\left(n\in N^*\right)$ 个元素。

证明：假设$x\in A$，则$\dfrac{1}{1-x}\in A$，进而$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}\in A$，而$\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

易验证：$x\neq\dfrac{1}{1-x},x\neq\dfrac{x-1}{x},\dfrac{1}{1-x}\neq\dfrac{x-1}{x}$

故集合A中一定含有$3n\left(n\in N^{*}\right)$个元素。

27. 由实数组成的集合A有如下性质：若$a\in A,b\in A$，且$a<b$，则$1+\dfrac{a}{b}\in A$。

（1）若集合A恰有两个元素，且有一个元素为$\dfrac{4}{3}$，求集合A；

（2）是否存在一个含有元素 0 的三元素集合，若存在，请求出该集合，若不存在，请说明理由。

【解】（1）不妨设$A=\left\{x,\dfrac{4}{3}\right\}$

如$x>\dfrac{4}{3}$，则$1+\dfrac{\frac{4}{3}}{x}=1+\dfrac{4}{3x}\in A$故$1+\dfrac{4}{3x}=x$或$1+\dfrac{4}{3x}=\dfrac{4}{3}$；

由$1+\dfrac{4}{3x}=x$解得$x=\dfrac{3+\sqrt{57}}{6}$，得$A=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{3+\sqrt{57}}{6}\right\}$

由$1+\dfrac{4}{3x}=\dfrac{4}{3}$解得$x=4$，得$A=\left\{\dfrac{4}{3},4\right\}$

如$x<\dfrac{4}{3}$，则$1+\dfrac{x}{\frac{4}{3}}=1+\dfrac{3x}{4}\in A$，故$1+\dfrac{3x}{4}=x$或$1+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{4}{3}$；

由$1+\dfrac{3x}{4}=x$，解得$x=4$（舍去）

由$1+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{4}{3}$，解得$x=\dfrac{4}{9}$，得$A=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{9}\right\}$

综上，$A=\left\{\dfrac{4}{3},4\right\}$或$A=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{9}\right\}$或$A=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{3+\sqrt{57}}{6}\right\}$

（2）假设这样的集合A存在，不妨设$A=\left\{0,x,y\right\}$，由题意知：x,y必均为正数；

从而$1+\dfrac{0}{x}=1\in A$，不妨修正$A=\left\{0,1,y\right\}$；

如果 $y>1$，则 $1+\frac{1}{y}\in A$，此时必有 $1+\frac{1}{y}=y$，解得 $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，得 $A=\left\{0,1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

如 $0<y<1$，则 $1+\frac{y}{1}=1+y\in A$，由于 $1+y\neq y,1+y\neq 1,1+y\neq 0$，此时不存在满足条件的 A

综上，满足题意的 A 存在，且只能是 $A=\left\{0,1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

28. 设 S 为非空数集，且满足(i) $2\notin S$；(ii) 若 $a\in S$，则 $\frac{1}{2-a}\in S$。证明

（1）对一切的 $n\in N^{*},n\geq 3$，都有 $\frac{n}{n-1}\notin S$；

（2）S 要么是单元素集，要么是无限集。

【证明】（1）假如存在某个 $n_0\geq 3$，使得 $\frac{n_0}{n_0-1}\in S$

则 $\frac{1}{2-\frac{n_0}{n_0-1}}=\frac{n_0-1}{n_0-2}=1+\frac{1}{n_0-2}\in S$

进而得 $\frac{1}{2-\frac{n_0-1}{n_0-2}}=\frac{n_0-2}{n_0-3}=1+\frac{1}{n_0-3}\in S$，继续下去，

可得 $1+\frac{1}{n_0-(n_0-1)}=2\in S$，与题设矛盾，

故，不存在正整数 $n\geq 3$，使得 $\frac{n}{n-1}\in S$，证毕。

（2）因为 $S\neq\varnothing$，故存在 $a\in S$，由 S 的性质知：$\frac{1}{2-a}\in S$，

如 $\frac{1}{2-a}=a$，解得 $a=1$，此时 $S=\{1\}$

如 $a\neq 1$，由 S 的性质知 $\frac{1}{2-\frac{1}{2-a}}=\frac{2-a}{3-2a}\in S$，进而 $\frac{1}{2-\frac{2-a}{3-2a}}=\frac{3-2a}{4-3a}\in S$

继续下去，知 $\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\in S$，貌似 S 为无限集，下面证明之，

事实上，我们只需证明：对任意两个不同的正整数n,m，都有$\dfrac{n-(n-1)a}{(n+1)-na}\neq\dfrac{m-(m-1)a}{(m+1)-ma}$即可。

如存在两个不同的正整数n,m，使得$\dfrac{n-(n-1)a}{(n+1)-na}=\dfrac{m-(m-1)a}{(m+1)-ma}$，则

$[n-(n-1)a][(m+1)-ma]=[(n+1)-na][m-(m-1)a]$

化简并整理得：$(n-m)(a-1)^2=0$，

由于$n\neq m$，故$a=1$，此与$a\neq 1$矛盾，

故，如$n\neq m$，则必有$\dfrac{n-(n-1)a}{(n+1)-na}\neq\dfrac{m-(m-1)a}{(m+1)-ma}$，即此时$S$为无限集合。

综上，非空集合S要么为单元集，要么为无限集，证毕。