§1.2 常用逻辑用语

1.2.1 相关概念

1.命题

可以判断真假的陈述句叫命题，判断为真的叫真命题，判断为假的叫假命题。例如

（1） $11>6$　　（2） 15 是 3 的倍数　　（3）0.7 是整数　　（4）3 是负数吗?

其中，（1）、（2）、（3）都是命题，因为它们都可以判断真假。很明显，（1）、（2）是真命题，（3）是假命题。（4）不能判断真假，他不是陈述句，因此不是命题。又如“这是一棵大树”，由于“大树”没有界定，我们不能判断这句话的真假，因此，它不是命题；再比如“$x<2$”，由于 x 是未知数，也不能判断“$x<2$”的真假，因此它也不是命题。

2.充分条件和充要条件

中学中的许多命题，均可写成“若 p，则 q”，“如果 p，那么 q”等形式。其中 p 称为命题的条件，q 称为命题的结论。下面我们考察“若 p，则 q”命题中，p 和 q 的关系。

一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理得出 q，此时，我们就说由 p 可以推出 q，记为“$p\Rightarrow q$”，并且说：“p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件”。

如果“若 p，则 q”为假命题，那么，由条件 p 不能推出结论 q，此时，我们记为“$p\nRightarrow q$”，并且说：“p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件”。

如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均为真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，则记为 $p\Leftrightarrow q$，此时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，我们就说 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件。显然，此时 q 也是 p 的充要条件。

3.全称量词和存在量词

短语“所有的”、“任意一个”等，在逻辑学中通常称为“全称量词”，并用符号“$\forall$”表示。含有全称量词的命题，叫做“全称量词命题”。比如命题：“对 $\forall$ 的 $n\in Z$，$2n+1$ 均为奇数”就是全称量词命题。

通常，将含有变量 x 的命题，用 $p(x),q(x),r(x)\cdots$ 等来表示，变量 x 的取值范围用 M 表示，则全称量词命题“对 M 中任意的 x，$p(x)$ 成立”，可用符号记为：“$\forall x\in M$，$p(x)$”。

短语“存在一个”、“至少有一个”等，在逻辑学中通常称为“存在量词”，并用符号“$\exists$”表示。含有存在量词的命题，叫做“存在量词命题”。比如命题：“有的四边形是菱形”、“有一个素数不是奇数”都是存在量词命题。

对于存在量词命题“存在 M 中的元素 x，使得 $p(x)$ 成立”，可用符号记为：“$\exists x\in M$，

$p(x)$”。

4.全称量词命题和存在量词命题的否定

一般地，对一个命题进行否定，就可以得到一个新命题，这一新命题称为原命题的否定，例如“三角形内角和为180°”的否定为“三角形内角和不是180°”，“空集是集合$A=\{1\}$的真子集”的否定为“空集不是集合$A=\{1\}$的真子集”。

那么全称量词命题和存在量词命题的否定又该如何呢?

一般说来，对含有一个量词的全称量词命题进行否定，只需将“所有的”、“任意一个”等全称量词，变成“并非所有的”、“并非任意一个”等短语即可。比如，“$\forall x \notin M$，$p(x)$”的否定为“并非$\forall x \notin M$，$p(x)$”，也就是说“$\exists x \in M$，使得$p(x)$不成立”。通常，我们用符号“$\neg p(x)$”表示“$p(x)$不成立”。因此

全称命题“$\forall x \notin M$，$p(x)$”的否定为：“$\exists x \in M$，$\neg p(x)$”。

显然，全称量词命题的否定，是存在量词命题。

类似地，对含有一个量词的存在量词命题进行否定，只需将“存在一个”、“至少有一个”等存在量词，变成“不存在一个”、“没有一个”等短语即可。比如，“$\exists x \in M$，$p(x)$”的否定为“不存在$x \in M$，使$p(x)$成立”，也就是说“对$\forall x \in M$，$p(x)$不成立”。

对含有一个量词的存在量词命题进行否定，有如下结论。

“$\exists x \in M$，$p(x)$”，它的否定为：“对$\forall x \in M$，$\neg p(x)$”。

显然，存在量词命题的否定，是全称量词命题。

1.2.2 典型例题

例 1、判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1) “$x^2+2x-3>0$”是命题.(　　)

(2)当q是p的必要条件时，p是q的充分条件.(　　)

(3) 设$x>0, y\in R$，则“$x>y$”是“$x>|y|$”的充分不必要条件(　　)

【解析】 (1)错误.该语句不能判断真假，故该说法是错误的.

(2) 对。

(3) 显然，由$x>y$不能得到$x>|y|$，故充分性不成立，但由$x>|y|$，显然可以得到$x>y$，故必要性成立，

$\therefore$“$x>y$”是“$x>|y|$”的必要不充分条件.故(3)错。

例 2（1）设命题 $p:\exists n\in N$，$n^2>2^n$，则 $\neg p$ 为(　　)

A. $\forall n\in N$，$n^2>2^n$　　　B. $\exists n\in N$，$n^2\le 2^n$

C. $\forall n\in N$，$n^2\le 2^n$　　　D. $\exists n\in N$，$n^2=2^n$

（2）命题“$\forall n\in N^*, f(n)\in N^*$ 且 $f(n)\le n$”的否定形式是(　　)

A. $\forall n\in N^*, f(n)\notin N^*$ 且 $f(n)>n$　　　B. $\forall n\in N^*, f(n)\notin N^*$ 或 $f(n)>n$

C. $\exists n_0\in N^*, f(n_0)\notin N^*$ 且 $f(n_0)>n_0$　　　D. $\exists n_0\in N^*, f(n_0)\notin N^*$ 或 $f(n_0)>n_0$

【解析】（1）　$\because p$： $\exists n\in N$，$n^2>2^n$，$\therefore \neg p$：　$\forall n\in N$，$n^2\le 2^n$，选 C。

【注意】：存在量词命题的否定是全称量词命题；全称量词命题的否定是存在量词命题。

（2）D．

例 3（1）**（全国卷）**设甲是乙的充分条件，乙是丙的充要条件，丙是丁的必要条件，那么丁是甲的（　）

（A）充分条件　　（B）必要条件　　（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要的条件

（2）钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的（　　）

(A)充分条件　　(B)必要条件　　(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

【解析】（1）由题意有甲$\to$乙$\rightleftarrows$丙$\leftarrow$丁。因此，由甲推不出丁，即丁不是甲的必要条件；同时，由丁可以推出乙，但推不出甲，因此丁也不是甲的充分条件，故选 D。

（2）便宜没好货$\rightleftarrows$好货不便宜(原命题与逆否命题等价)，也就是说：好货$\to$不便宜，故“不便宜”是“好货”的必要条件，正确选项 B。

例 4.王昌龄《从军行》中两句诗为“黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还”，其中“攻破楼兰”是“返回家乡”的（　　　　　）

A．充要条件　B．充分不必要条件　C．必要不充分条件　D．既不充分也不必要条件

【解析】“不破楼兰终不还”与其逆否命题“返回家乡，则攻破楼兰”等价。故返回家乡$\Rightarrow$攻破楼兰，故“攻破楼兰”是“返回家乡”的必要不充分条件，选 C。

例 5. 已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，集合 $B=\{x|x<m+1\}$，则 $A\cap B=\varnothing$ 的一个充分不必要条件是（　　）

A. $m\le -2$　　B. $m<-2$　　C. $m<2$　　D. $-4<m<-3$

【解析】 $A\cap B=\varnothing\Rightarrow m+1\le -1\Rightarrow m\le -2$，因此，选 B、D。

例 6(全国Ⅱ)有三张卡片，分别写有 1 和 2，1 和 3，2 和 3.甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的

卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，则甲的卡片上的数字是________.

【解析】 由丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”可知，丙为“1 和 2”或“1 和 3”，又乙说“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，所以乙只可能为“2 和 3”，所以由甲说“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，所以甲只能为“1 和 3”

例 7．记实数 x_1，x_2，…… x_n 中的最大数为 $\max\left\{x_1,x_2,......,x_n\right\}$，最小数为 $\min\left\{x_1,x_2,......,x_n\right\}$。已知$\triangle ABC$的三边长为$a,b,c$（$a\le b\le c$），定义它的倾斜度为 $l=\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\times\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}$，则“$l=1$”是“$\triangle ABC$为等边三角形”的（　　）

A.必要而不充分的条件　　　　B.充分而不必要的条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【解析】若$\triangle ABC$为等边三角形，则$a=b=c$，$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=1=\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}$，$l=1$，排除 B、D；

若$\triangle ABC$为等腰三角形，如$a=2,b=2,c=3$时，则$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)=\frac{3}{2},\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\frac{2}{3}$，此时$l=1$仍成立，但$\triangle ABC$不为等边三角形,所以 A 正确。

例 8.定义 $A-B=\left\{x\middle|x\in A,x\notin B\right\}$，设 A,B,C 是某集合的三个子集，且满足$(A-B)\cup(B-A)\subseteq C$，则$A\subseteq(C-B)\cup(B-C)$是$A\cap B\cap C=\varnothing$的（　　）

A．充要条件　　　　B. 充分非必要条件

C．必要非充分条件　　　　D. 既非充分也非必要条件

【解】如$A\subseteq(C-B)\cup(B-C)=C_{C\cup B}(B\cap C)$，则$A\cap(B\cap C)=\varnothing$，即$A\cap B\cap C=\varnothing$，充分性成立。

下证必要性

因为$(A-B)\cup(B-A)\subseteq C$，所以$A\cup B\cup C=B\cup C=A\cup C$，

如$A\cap B\cap C=\varnothing$，即$A\cap(B\cap C)=\varnothing$，

则$A\subseteq C_{A\cup B\cup C}(B\cap C)$，即$A\subseteq C_{B\cup C}(B\cap C)=(B-C)\cup(C-B)$，必要性成立；

综上，选 A。

例 9.已知 $A=\{x\mid a<x<a^2\}, B=\{x\mid \dfrac{2x-5}{x-1}<1\}$，命题 $p:x\in A$，命题 $q:x\in B$。

（1）若 $1\in A$，求实数 a 的取值范围;

（2）若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围。

解（1）：因 $1\in A$，故 $a<1<a^2$，解得 $a<-1$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$。

（2）：$\dfrac{2x-5}{x-1}<1\Rightarrow\dfrac{x-4}{x-1}<0\Rightarrow(x-4)(x-1)<0$，解得 $B=(1,4)$

因 p 是 q 的充分不必要条件，故 $A\subsetneq B$

当 $A=\varnothing$，即 $a\ge a^2$，也即 $0\le a\le 1$ 时，满足题意;

当 $A\ne\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}a^2>a\\a\ge 1\\a^2\le 4\end{cases}$，解得 $1<a\le 2$，此时 $A=(a,a^2)$，显然 $A\subsetneq B$，

综上，$0\le a\le 2$。