§2.3 函数的奇偶性及其应用

2.3.1 相关概念

1、奇函数与偶函数

如函数 $f(x)$ 在其定义域内，对任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称该函数为**奇函数**；如对任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$，则称该函数为**偶函数**。

很明显，判断一个函数是否是奇函数或偶函数，首先看其定义域是否关于原点对称。

2、奇、偶函数的图像特征:

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图像关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如其图像给关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数。

3、奇、偶函数的性质

(1)奇函数在关于原点对称的区间上的单调性**相同**，偶函数在 y 轴的两边单调性**相反**.

(2)两个奇函数的和是**奇函数**，两个奇函数的积（或商）是**偶函数**；两个偶函数的和、积（或商）都是**偶函数**；一个奇函数，一个偶函数的积（或商）是**奇函数**.

4、重要结论:

(1) 定义域关于原点对称的任一个函数 $f(x)$ 都可以唯一写成一个奇函数 $h(x)$ 与一个偶函数 $g(x)$ 之和的形式（事实上: $h(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$，$g(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$）

(2) 对于**多项式函数** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

$P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项系数全为零

$P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项系数全为零

5、函数图像的中心对称性（奇函数的推广）

(1) 如函数 $f(x)$ 恒满足 $f(x+a)+f(b-x)=c$，则 $f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$ 中心对称

(2) 如函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$，则 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ 中心对称

(3) $g(x)$ 为任意函数，则 $y=g(x+\lambda)-g(\mu-x)$ 的图像关于 $(\frac{\mu-\lambda}{2},0)$ 中心对称。

(4) 三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的图像关于点 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$ 成中心对称。

6、函数图像的轴对称性（偶函数的推广）

（1）如函数 $f(x)$ 恒满足 $f(x+a)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 成轴对称

(2) 定义在 R 上的任意函数 $g(x)$，则 $f(x)=g(x-a)+g(a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 成轴对称

7、两个函数的图像对称性质

（1）函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=g(2a-x)$

（2）函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow f(x)+g(2a-x)=2b$

8、函数图像对称性与函数周期之间的关系

（1）如函数 $f(x)$ 的图像同时关于直线 $x=a$、$x=b$ 对称，则 $f(x)$ 是以 $2|a-b|$ 为周期的周期函数

（2）如函数 $f(x)$ 的图像同时关于 $(a,b),(c,b)$ 对称，则 $f(x)$ 是以 $2|a-c|$ 为周期的周期函数

（3）如函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称，且关于直线 $x=c$ 对称，则 $f(x)$ 是以 $4|a-c|$ 为周期的周期函数

2.3.2 典型例题

例 1（1）下列说法正确的是（　　）

A．函数 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ 是奇函数　　B．函数 $f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数

C．函数 $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ 是非奇非偶函数　　D．函数 $f(x)=1$ 既是奇函数又是偶函数

(2) 已知函数 $f(x)=(m-1)x^2+(m-2)x+(m^2-7m+12)$ 为偶函数，则 m 的值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解】(1) 选项 A、B 中函数的定义域不关于原点对称，因此是非奇非偶函数；选项 D 中的函数仅为偶函数；综上选 C。

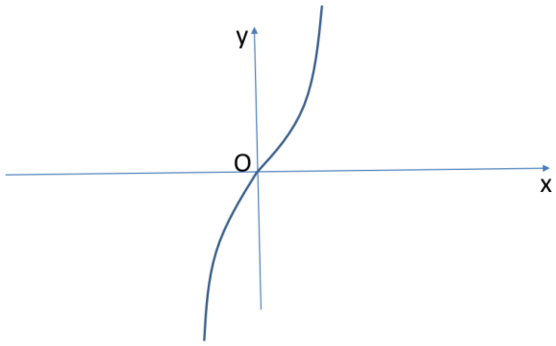
（2）偶函数不含奇次项，故 $m-2=0, m=2$，选 B

例 2.已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x(1+x)$，画出函数 $f(x)$ 的图像，并求出函数的解析式。

【解】 $f(x)$ 的图像如图所示。

因 $x\geq 0$，$f(x)=x(1+x)$，$f(x)$ 是奇函数，故 $x\leq 0$ 时，由 $-x\geq 0$ 得

$f(x)=-f(-x)=-(-x)[1+(-x)]=x(1-x)$，因此 $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & x\geq 0\\ x(1-x), & x<0\end{cases}$。



例 3.我们知道，函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于点 $P\left(a,b\right)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x+a\right)-b$ 为奇函数。

（1）求函数 $f\left(x\right)=x^3-3x^2$ 图像的对称中心；

（2）类比上述推广结论，写出"函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于 y 轴成轴对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x\right)$ 为偶函数"的一个推广结论。

【解】(1) 令 $f(x)$ 图像的对称中心为 (a,b)，则

$f(x+a)-b=(x+a)^3-3(x+a)^2-b=x^3+(3a-3)x^2+(3a^2-6a)x+(a^3-3a^2-b)$ 为奇函数，

故，$\begin{cases}3a-3=0\\ a^3-3a^2-b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$，即 $f(x)$ 图像的对称中心为 $(1,-2)$。

(2) 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是：$f(x+a)$ 为偶函数。

例 4 (1) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$

A．-50　　B．0　　C．2　　D．50

(2) 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=1$,则 $f(8)+f(9)=$ (　　)

A. －2　　B.－1　　C. 0　　D. 1

【解】(1) 由 $f(1-x)=f(1+x)$ 知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，

又因 $f(x)$ 是奇函数，故其图像关于原点 $(0,0)$ 对称，因此 $f(x)$ 是周期为 $4|1-0|=4$ 的周期函数，

易知 $f(1)=2, f(2)=0, f(3)=f(-1)=-2, f(4)=0$，故

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)$

$=f(1)+f(2)=2$，选 C。

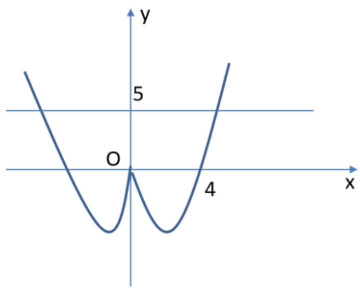
(2) 易知 $f(x)$ 的图像既关于原点对称，又关于直线 $x=2$ 对称，因此 $f(x)$ 为周期函数，周期 $T=8$；从而 $f(8)+f(9)=f(0)+f(1)=0+1=1$，选 D

例 5、已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，当 $x\geq 0$ 时 $f(x)=x^2-4x$，那么不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是______。

【解】 令 $f(x)=5(x\geq 0)$，解方程 $x^2-4x=5(x\geq 0)$ 得 $x=5$，

参看图像，知 $f(x)<5$ 的解集为 $(-5,5)$，

令 $-5<x+2<5$，解得 $-7<x<3$，即 $f(x+2)<5$ 的解集为 $(-7,3)$



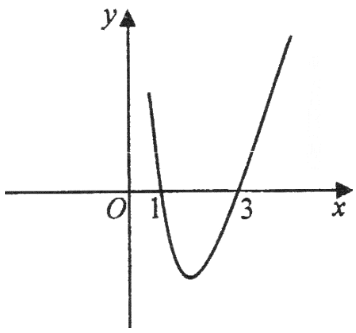
例 6．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对任意 x_1、$x_2\in R$，若 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 成立，则关于 x 的不等式 $f(1+x^2)+f(1-3x)<x^2-3x+2$ 的解为____

【解】 因 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(1+x^2)+f(1-3x)=f(1+x^2)-f(3x-1)$，

题中不等式实际为 $f(1+x^2)-f(3x-1)<x^2-3x+2$

由题意，需 $1+x^2<3x-1$，解之得：$1<x<2$

例 7．已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象如图所示，则不等式 $\dfrac{f(x)}{x-1}<0$ 的解集为（　　）



A、$(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$　　B、$(-3,-1)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$

C、$(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(3,+\infty)$　　D、$(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,1)$

【解法一】观察法： 从图像上看，$x\in(1,3)$ 时，有 $x-1>0,\ f(x)<0$，故此时 $\dfrac{f(x)}{x-1}<0$

故，不等式解集必包含区间$(1,3)$，只能选 A。

【解法二】 原不等式分解为$\begin{cases}x>1\\f(x)<0\end{cases}$和$\begin{cases}x<1\\f(x)>0\end{cases}$， 解$\begin{cases}x>1\\f(x)<0\end{cases}$得$x\in(1,3)$

考虑到$f(x)$的图像关于原点对称，解$\begin{cases}x<1\\f(x)>0\end{cases}$得$x\in(-3,-1)\cup(0,1)$

综上，选 A。

例 8（1）若函数$f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+bx+1}$在$\left[-1,1\right]$上是奇函数，则$f(x)$的解析式为________.

（2）设函数$f(x)$与$g(x)$的定义域是$x\in R$且$x\neq\pm1$, $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数,且$f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$,求$f(x)$和$g(x)$的解析式.

【解】（1）由题意知 $f(0)=a=0$，故$a=0$，即$f(x)=\dfrac{x}{x^2+bx+1}$

又，$f(x)$、x均为奇函数，故x^2+bx+1必为偶函数，从而x^2+bx+1不含奇次项，即$b=0$

综上：$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

（2）由题意知：$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，

故$\begin{cases}f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}\\f(-x)+g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}\\f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$

解得：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

例 9（1）. 已知奇函数$f(x)$的定义域为$[-2,2]$，且在区间$[-2,0]$内递减，求满足$f(1-m)+f(1-m^2)<0$的实数m的取值范围.

（2）$f(x+2)$是偶函数，且$x\geq2$时$f(x)$单调递减，$f(1)=5$，则不等式$f(a-3)-5\geq0$的解集为________

【解】（1）由题意知：$\begin{cases}-2\leq1-m\leq2\\-2\leq1-m^2\leq2\end{cases}$，解得 $-1\leq m\leq\sqrt{3}$

又$f(x)$为奇函数，故$f(x)$在$[-2,2]$上递减，故

$f(1-m)<-f(1-m^2)=f(m^2-1)\Rightarrow1-m>m^2-1$，解得$-2<m<1$

综上，$-1\leq m<1$。

（2）由题意知：$f(x)$的图像关于直线$x=2$对称，且自变量离对称轴越近，函数值越大。由于目标不等式等价于$f(a-3)\ge f(1)$

故，$|(a-3)-2|\le|1-2|$，即$|a-5|\le 1$，解得$a\in[4,6]$。

即原不等式的解集为$[4,6]$。

例 10、已知定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x-4)=-f(x)$，且在区间$[0,2]$上是增函数，则(　　).

A．$f(-25)<f(11)<f(80)$　　B．$f(80)<f(11)<f(-25)$

C．$f(11)<f(80)<f(-25)$　　D．$f(-25)<f(80)<f(11)$

【解】 由$f(x)$是奇函数且在$[0,2]$上单调递增知$f(x)$在$[-2,2]$上递增，

又$f(x-4)=-f(x)\Rightarrow f(x-8)=-f(x-4)=f(x)$，故函数$f(x)$以 8 为周期，

从而$f(-25)=f(-1)$，$f(11)=f(3)=-f(3-4)=f(1)$，$f(80)=f(0)$

故$f(-25)<f(80)<f(11)$，选 D.

例 11.已知函数$f\left(x\right)$是定义在实数集R上的不恒为零的偶函数，且对任意实数x都有$xf\left(x+1\right)=\left(1+x\right)f\left(x\right)$，则$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$的值是(　　)

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{5}{2}$

【解】 $xf(x+1)=(x+1)f(x)\Rightarrow\dfrac{f(x+1)}{x+1}=\dfrac{f(x)}{x}$

令$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，易知$g(x)$是周期为 1 的奇函数，故$g(\dfrac{5}{2})=g(\dfrac{1}{2})=g(-\dfrac{1}{2})=-g(\dfrac{1}{2})$

因此$g(\dfrac{1}{2})=0$，进而得$g(\dfrac{5}{2})=0$，从而得$f(\dfrac{5}{2})=0$，选 A。

例 12.定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$满足：$f(x)-f(y)=f(\dfrac{x-y}{1-xy})$；当$x,y\in(-1,0)$时，有$f(x)>0$；若$P=f(\dfrac{1}{5})+f(\dfrac{1}{11})+\cdots+f(\dfrac{1}{r^2+r-1})+\cdots+f(\dfrac{1}{2020^2+2020-1})$，$Q=f(\dfrac{1}{2})$，$R=f(0)$；则$P,Q,R$的大小关系为(　　)

A. $R>Q>P$　　B. $R>P>Q$　　C. $P>R>Q$　　D.不能确定

【解】 因$f(x)-f(y)=f(\dfrac{x-y}{1-xy})$，取$x=y$，得$f(0)=f(x)-f(y)=0$

取 $x=0$，得 $f(0)-f(y)=f(-y)$，即 $f(y)=-f(-y)$，故 $f(x)$ 为 $(-1,1)$ 上的奇函数。

如 $x<y$，则 $\frac{x-y}{1-xy}\in(-1,0)$，故 $f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})>0$，即 $f(x)>f(y)$

故，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减。

$$\because f(\frac{1}{r^2+r-1})=f(\frac{1}{r(r+1)-1})=f(\frac{\frac{1}{r(r+1)}}{1-\frac{1}{r(r+1)}})=f(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}}{1-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r+1}})=f(\frac{1}{r})-f(\frac{1}{r+1})$$

$$\therefore P=f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})+\cdots+f(\frac{1}{r^2+r-1})+\cdots+f(\frac{1}{2020^2+2020-1})$$

$$=[f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{3})]+[f(\frac{1}{3})-f(\frac{1}{4})]+\cdots+[f(\frac{1}{2020})-f(\frac{1}{2021})]=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2021})>f(\frac{1}{2})=Q$$

又，显然有 $P<0, Q<0, R=0$，

故，$R>P>Q$，选 B。

例 13. 已知偶函数 $f(x)$（$x\in R$）满足 $f(1-x)=f(1+x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $y=f(x)$ 在 $[0,100]$ 上零点的个数为_________.

【解】 由 $f(1-x)=f(1+x)$ 知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，又 $f(x)$ 为偶函数，其图像关于直线 $x=0$ 对称，因此 $f(x)$ 为周期函数，$T=2\times|1-0|=2$ 为其一个周期。

故 $f(2)=f(0)=0$，从而知 $f(x)$ 在 $[0,100]$ 上有 51 个零点。

例 14. 若关于 x 的函数 $f(x)=\frac{x^3+tx^2+2x+t^2}{x^2+t}(t>0)$ 的最大值为 M，最小值为 N，且 $M+N=4$，则实数 t 的值为（　）

【解】 $f(x)=\frac{x^3+tx^2+2x+t^2}{x^2+t}=\frac{(x^3+2x)+t(x^2+t)}{x^2+t}=\frac{x^3+2x}{x^2+t}+t$；

因 $\frac{x^3+2x}{x^2+t}$ 为奇函数，故 $f(x)$ 的图像关于点 $(0,t)$ 中心对称，故 $M+N=2t$，解得 $t=2$

例 15、设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in R$

（1）讨论 $f(x)$ 的奇偶性；　　（2）求 $f(x)$ 的最小值。

【解】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+|x|+1$ 为偶函数，

当 $a\neq0$ 时，$f(x)=x^2+|x-a|+1$ 为非奇非偶函数；

（2）当 $x<a$ 时，$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}$，

当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=a+\frac{3}{4}$，

当$a\le\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}$不存在；

当$x\ge a$时，$f(x)=x^2+x-a+1=(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{3}{4}$,

当$a>-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(a)=a^2+1$，

当$a\le-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(-\frac{1}{2})=-a+\frac{3}{4}$。

例 16.已知函数$f\left(x\right)$对任意实数x,y恒有$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，当$x>0$时，$f\left(x\right)<0$，且$f\left(1\right)=-2$。

（I）判断$f\left(x\right)$的奇偶性；

（II）求$f\left(x\right)$在区间$\left[-2,2\right]$上的最大值；

（III）若$a\ge0$，解关于x的不等式$f\left(ax^2\right)-2f\left(x\right)<f\left(ax\right)+4$。

【解】（I）令$x=y=0$得$f\left(0\right)=f\left(0\right)+f\left(0\right)$，故$f\left(0\right)=0$，

再令$y=-x$，得$f(x)+f(-x)=0$，故$f\left(x\right)$为奇函数；

（II）对$\left[-2,2\right]$上任意的$x_1<x_2$，由题意$f(x_2-x_1)<0$，

故$f\left(x_2\right)=f\left(x_1+(x_2-x_1)\right)=f(x_1)+f(x_2-x_1)<f(x_1)$

故，$f\left(x\right)$在区间$\left[-2,2\right]$上递减，因此$f\left(x\right)$在区间$\left[-2,2\right]$上的最大值为$f\left(-2\right)$

令$x=y=-1$，则$f\left(-2\right)=2f(-1)=-2f(1)=4$，$f\left(x\right)$在区间$\left[-2,2\right]$上的最大值为4

（III） $f\left(ax^2\right)-2f\left(x\right)<f\left(ax\right)+4\Leftrightarrow f\left(ax^2\right)<f\left(x\right)+f(x)+f\left(ax\right)+f(-2)$

$\Leftrightarrow f\left(ax^2\right)<f[(a+2)x-2]\Leftrightarrow ax^2>(a+2)x-2\Leftrightarrow(x-1)(ax-2)>0$

当$a=0$时，不等式的解集为$(-\infty,1)$。

当$a\in(0,2]$时，不等式的解集为$(-\infty,1)\cup(\frac{2}{a},+\infty)$；

当$a>2$时，不等式的解集为$(-\infty,\frac{2}{a})\cup(1,+\infty)$。