好题欣赏——2025年第1期

1. 若$0<a_1<a_2,0<b_1<b_2$，且$a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中值最大的是（　　）

A．$a_1b_1+a_2b_2$　　B．$a_1a_2+b_1b_2$　　C．$a_1b_2+a_2b_1$　　D．$\frac{1}{2}$

【解析】$a_1a_2+b_1b_2<(\frac{a_1+a_2}{2})^2+(\frac{b_1+b_2}{2})^2=\frac{1}{2}$（注意：因为$a_1\neq a_2,b_1\neq b_2$　故不取等号）

$a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2+a_2b_1)=(a_1-a_2)b_1+(a_1-a_2)b_2=(a_2-a_1)(b_2-b_1)\geq 0$

故$a_1b_1+a_2b_2\geq(a_1b_2+a_2b_1)$

事实上，如你熟悉排序不等式，由顺序和≥乱序和≥反序和，可直接得$a_1b_1+a_2b_2\geq a_1b_2+a_2b_1$

$1=(a_1+a_2)(b_1+b_2)=a_1b_1+a_2b_2+a_1b_2+a_2b_1\leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$，故$a_1b_1+a_2b_2\geq\frac{1}{2}$

综上，选A。

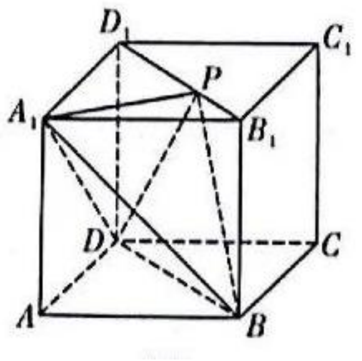
2. （**多选题**）如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为线段B_1D_1上一动点（包括端点），则以下结论正确的有（　　　　）

A．三棱锥$P-A_1BD$的体积为定值$\frac{1}{3}$

B．过点P，平行于平面A_1BD的平面被正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$截得的多边形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．直线PA_1与平面A_1BD所成角的正弦值的范围为$\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

D．当点P与B_1重合时，三棱锥$P-A_1BD$的外接球的体积为$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$



【解析】$V_{P-A_1BD}=V_{A_1-PBD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}$，故A错。

对于B，易知目标多边形为等边$\triangle B_1D_1C$，其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故B对。

对于C，易知平面A_1BD//平面B_1D_1C，此二平面三等分体对角线AC_1，故P到平面A_1BD的距

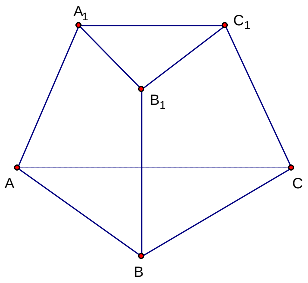
离 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 PA 与平面 A_1BD 所成角的正弦为 $\sin\alpha=\dfrac{d}{A_1P}=\dfrac{\sqrt{3}}{3A_1P}$，易知

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le A_1P\le 1$，故 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3A_1P}\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，C对。

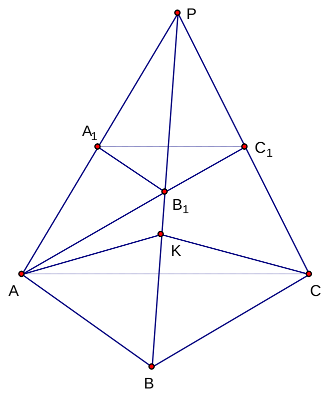
至于D，因 P,B_1 重合，易知 $\triangle DBB_1$ 和 $\triangle A_1DB_1$ 均为直角三角形，B_1D 为公共斜边，故 B_1D 为三棱锥 B_1-A_1DB 外接球的直径，因 $B_1D=\sqrt{3}$，故外接球体积为 $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$，D对；

综上，选BCD。

3. **（多选题）**如图，正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上下底面边长分别为 3 和 6，侧棱长为 3，则下列结论中正确的有(　　)



图一



图二

A．过 AC 的平面截该三棱台所得截面三角形周长的最小值为 $6\sqrt{3}+6$

B．棱长为 $\dfrac{5}{2}$ 的正四面体可以在该棱台内随意转动

C．直径为 $\sqrt{6}$ 的球可以整体放入该三棱台内(含与某面相切)

D．该三棱台可以整体放入直径为 $4\sqrt{3}$ 的球内。

【解析】将三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补形成三棱锥 $P-ABC$，易知三棱锥 $P-ABC$ 为正四面体。参考图二。

对于A，截面三角形的周长 $l=6+2AK$，易知 $\triangle PAB$ 是边长为6的等边三角形，$AB_1\perp PB$，故 $(AK)_{\min}=AB_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$，故 l 的最小值为 $6+6\sqrt{3}$，A对；

对于B，棱长为 $\dfrac{5}{2}$ 的正四面体，其外接球半径为 $r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{8}$，正四面体 $P-ABC$ 内切球的半径为 $r_2=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\times 6=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，考虑到正棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为

$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times 6=\sqrt{6}$，因此三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球即为 $P-ABC$ 的内切球，很明显，$r_1>r_2$，故B错，C对；

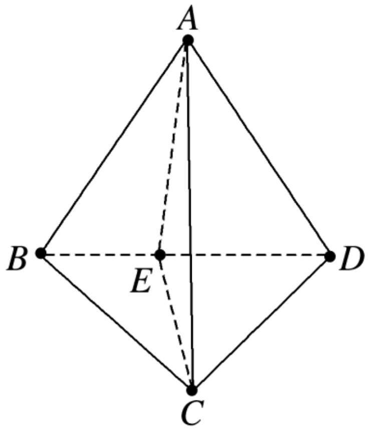
对于D，易知 $\triangle ABC$ 外接球的直径为 $2R=\frac{6}{\sin 60^{\circ}}=4\sqrt{3}$，而三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $\sqrt{6}<\frac{1}{2}R=2\sqrt{3}$，所以该三棱台可以整体放入直径为 $4\sqrt{3}$ 的球内，D对。

综上，选ACD。

4. 已知四边形 $ABCD, AB=BD=DA=2, BC=CD=\sqrt{2}$，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，当二面角 $A-BD-C$ 处于 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 过程中，直线 AB 与 CD 所成角的余弦值取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{5\sqrt{2}}{8}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$　　D. $\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{8}\right]$

【解析】如图所示，取 BD 的中点 E，连接 AE,CE，$\therefore \angle AEC$ 即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，而 $AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cos\angle AEC=4-2\sqrt{3}\cos\angle AEC$，因 $\angle AEC\in[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，故 $AC^2\in[1,7]$，由**斯坦纳定理**得



$$\cos(AB,CD)=\frac{|(AD^2+BC^2)-(AC^2+DB^2)|}{2AB\times CD}=\frac{|(4+2)-(AC^2+4)|}{2\times 2\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|2-AC^2|}{4\sqrt{2}}\in[0,\frac{5\sqrt{2}}{8}]$$，选 D。

5. （2022 全国乙卷）已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设四棱锥底面所在圆的半径为 r，则四棱锥的高 $h=\sqrt{1-r^2}$，令四棱锥底面面积为 S，

则当底面为正方形时面积最大，即 $S\le\frac{1}{2}\times(2r)\times(2r)=2r^2$，因此，四棱锥的体积

$$V=\frac{1}{3}Sh\le\frac{1}{3}\times 2r^2\times\sqrt{1-r^2}=\frac{2}{3}\sqrt{r^4(1-r^2)}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{r^2}{2}\times\frac{r^2}{2}(1-r^2)},$$

注意到 $\frac{r^2}{2}\times\frac{r^2}{2}(1-r^2)\le\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+(1-r^2)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，故 $V\le\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$，

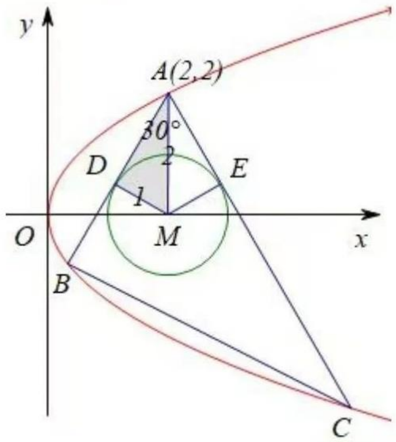
易知 $\frac{r^2}{2}=1-r^2$，也即 $r^2=\frac{2}{3}$ 时取等号，此时四棱锥体积最大，

此时 $h=\sqrt{1-r^2}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 C。

6. 已知抛物线 $y^2=2px$ 上三点 $A(2,2),B,C$，直线 AB,AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线, 则直线 BC 的方程为（　　）

A. $x+2y+1=0$　　B. $3x+6y+4=0$　　C. $2x+6y+3=0$　　D. $x+3y+2=0$

【解法一】 易知抛物线方程为 $y^2=2x$，如图



易知直线 AB,AC 的斜率分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$，

故直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x+2-2\sqrt{3}$，直线 AC 的方程为 $y=-\sqrt{3}x+2+2\sqrt{3}$，

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x+2-2\sqrt{3}\\ y^2=2x\end{cases}$ 可得 B 点坐标，

同理可得 C 点坐标，进而得 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$。选 B。

【方法二】 齐次化思想。令 BC 的方程为 $m(x-2)+n(y-2)=1$，则

$$y^2=2x\Rightarrow(y-2+2)^2=2(x-2+2)\Rightarrow(y-2)^2+4(y-2)-2(x-2)=0$$

$$\Rightarrow(y-2)^2+[4(y-2)-2(x-2)][m(x-2)+n(y-2)]=0$$

$$\Rightarrow(4n+1)(y-2)^2+(4m-2n)(x-2)(y-2)-2m(x-2)^2=0,$$

令 $\dfrac{y-2}{x-2}=k$，则上面的方程变为 $(4n+1)k^2+(4m-2n)k-2m=0$

很明显，该方程的两个根 k_1,k_2 分别为直线 AB,AC 的斜率，由草图知 $\begin{cases}k_1=\sqrt{3}\\k_2=-\sqrt{3}\end{cases}$，

故 $\begin{cases}k_1+k_2=\dfrac{4m-2n}{4n+1}=0\\k_1k_2=-\dfrac{2m}{4n+1}=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{3}{22}\\n=-\dfrac{3}{11}\end{cases}$，进而得 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$。

7. 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目、2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是(　　)

A. 72　　B. 120　　C. 144　　D. 168

【解析】依题意，先仅考虑 3 个歌舞类节目互不相邻的排法种数为 $A_3^3A_4^3=144$，其中 3 个歌舞类节目互不相邻但 2 个小品类节目相邻的排法种数为 $A_2^2A_2^2A_3^3=24$，因此满足题意的排法种数为 144－24＝120，选 B

8. 有 90 位学生参加面试，学生来自 A、B、C 三校，其中 A 校 20 人，B 校 30 人，C 校 40 人，面试时每次都从尚未面试的学生中抽取一位，面试完毕以后再选择下一位面试，则 A 校学生先于其他两校学生完成面试的概率是（　　）

A．$\dfrac{7}{9}$　　B．$\dfrac{11}{15}$　　C．$\dfrac{22}{45}$　　D．$\dfrac{23}{45}$

【解析】分以下两种情况讨论

（1）　让第 90 位面试的同学为 B 校同学，此时，B 不可能优先了，再考虑 A、C 两校，一共有 60 位同学，让第 60 位面试的同学位 C 校同学，这样就可保证 A 校优于 B、C 两校完成面试；

（2）　按（1）的思路交换 B、C 两校

综上，所求概率为 $\dfrac{30}{90}\times\dfrac{40}{60}+\dfrac{40}{90}\times\dfrac{30}{50}=\dfrac{22}{45}$，选 C.

9. 判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1) $C_n^ka^{n-k}b^k$ 是二项展开式的第 k 项.(　　)

(2) 二项展开式中，系数最大的项为中间一项或中间两项.(　　)

(3) $(a+b)^n$ 的展开式中某一项的二项式系数与 a,b 无关.(　　)

(4) $(a+b)^n$ 某项的系数是该项中非字母因数部分，包括符号等，与该项的二项式系数不同.(　　)

【解析】$C_n^ka^{n-k}b^k$ 是二项式展开式中的第 $k+1$ 项，二项式系数最大的项为中间一项或中间两项，故(1)(2)均不正确.

答案 (1)× (2)× (3)√ (4)√

10. （2020 全国 I 理）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数为(　　)

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 20

【解析】$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5=x(x+y)^5+\frac{y^2(x+y)^5}{x}$

因此，其展开式中，x^3y^3 的系数由 $x(x+y)^5$ 中 $(x+y)^5$ 展示式中 x^2y^3 及 $\frac{y^2(x+y)^5}{x}$ 中 $(x+y)^5$ 展开式中 x^4y 的系数组成，即 $C_5^3+C_5^1=15$，选 C。

11. 数列 $\{a_k\}$ 共有 11 项，$a_1=0,a_{11}=4$，且 $|a_{k+1}-a_k|=1,k=1,2,\cdots,10$。满足这种条件的不同数列的个数为(　　)

A. 100　　B. 120　　C. 140　　D. 160

【解析】$a_{11}=(a_{11}-a_{10})+(a_{10}-a_9)+\cdots+(a_2-a_1)=4$，其中 10 个小括号，每个小括号取值 1 或 -1，易知取 1 的个数有 7 个，取-1 的个数有 3 个，因此，满足要去的数列有 $C_{10}^3=120$ 个，选 B。

12. 将 12 个相同的小球分给甲、乙、丙三个人，其中甲至少 1 个，已至少 2 个，丙至少 3 个，则不同的分法共有

A. 24 种　　B. 26 种　　C. 28 种　　D. 30 种

【解析】设 x_1,x_2,x_3 分别为分给甲、乙、丙的小球的个数，则 $x_1\ge1,x_2\ge2,x_3\ge3$，且 $x_1+x_2+x_3=12$，也即 $x_1+(x_2-1)+(x_3-2)=9$，故有 $C_8^2=28$ 种不同分法。

13. 现有语文、数学、外语、物理、化学、生物各一本，均分给 3 个人，其中数学和物理不分给同一个人，则不同的分配方法有（　　）

A. 36　　B. 54　　C. 72　　D. 84

【解析】注意，本题虽然属于均分问题，但人是有区别的。因此可以这样考虑

（1）　将这 6 本不同的书均分给 3 人，有 $C_6^2C_4^2=90$ 种不同的分法

（2）　数学和物理分给同一个人，有 $C_3^1C_4^2=18$ 种不同的分法

综上，有 $90-18=72$ 种不同的分法，选 C。

14. 已知 O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三点，当 $\lambda\ge0$ 时，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}\right)$，则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的（　　）

（A）重心　　（B）垂心　　（C）内心　　（D）外心

【解析】令 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}=\overrightarrow{AE}$，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}=\overrightarrow{AF}$，则 $\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}\Rightarrow EF//BC$，选 A。

15. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$\cos A=\frac{1}{3}$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y$ 的最大值为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

【解析】由 $\cos A=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\angle BOC=\cos 2A=-\frac{7}{9}$，令 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则

$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=x(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+y(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\Rightarrow(1-x-y)\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow(1-x-y)^2R^2=x^2R^2+y^2R^2-\frac{14}{9}xyR^2\Rightarrow(1-x-y)^2=x^2+y^2-\frac{14}{9}xy$

$\Rightarrow 32xy-18(x+y)+9=0\Rightarrow 0\le 32\times(\frac{x+y}{2})^2-18(x+y)+9$，即

$8(x+y)^2-18(x+y)+9\ge 0$，解得 $x+y\ge\frac{3}{2}$（舍去）或 $x+y\le\frac{3}{4}$，

即 $x+y$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$，选 D

【注意】：A 为锐角，由等和线定理知：外心 O 位于 A 与基底线 BC 之间，即 $x+y\in(0,1)$

16. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值为（　　）

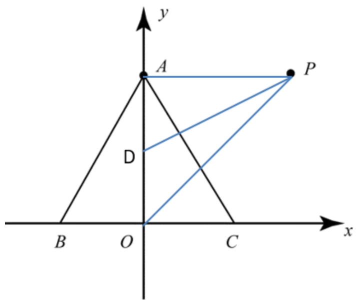
A、-2　　B、$-\frac{3}{2}$　　C、$-\frac{4}{3}$　　D、-1

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$．设 $P(x,y)$，

则 $\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，故

$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2\sqrt{2}y+2y^2=2\left[x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$，

故，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$



【法二】令 O,D 分别为 BC,AO 的中点，则

$$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=2(\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{DO}^2)\geq -2\overrightarrow{DO}^2=-2\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=-\frac{3}{2}$$

仅当 P,D 重合时取等号，故 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$ 。

17. 已知 $(1+x+x^2)(x+\frac{1}{x^3})^n$ 的展开式中没有常数项, $n\in N^*,2\leqslant n\leqslant 8$, 则 $n=$______.

【解析】依题 $(x+\frac{1}{x^3})^n$ 对 $n\in N^*,2\leqslant n\leqslant 8$ 中，只有 $n=5$ 时，其展开式既不出现常数项，也不会出现与 x 、 x^2 乘积为常数的项。

18. 已知 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$, $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{3})$，且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 有最小值，无最大值，则 $\omega=$__________.

【解析】依题 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})\,(\omega>0)$, $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{3})$ 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 有最小值, 无最大值, $\therefore$ 区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 为 $f(x)$ 的一个半周期的子区间，且知 $f(x)$ 的图像关于 $x=\dfrac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{4}$ 对称，$\therefore \frac{\pi}{4}\cdot\omega+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z$, 取 $K=0$ 得 $\omega=\frac{14}{3}$.

19. 已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点．设 $|FA|>|FB|$，则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于________.

【解析】设 A（x_1，y_1）B（x_2，y_2）由 $\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow x^2-6x+1=0\Rightarrow x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，（$x_1>x_2$）；$\therefore$ 由抛物线的定义知 $\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{x_1+1}{x_2+1}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

20. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行，类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①____________；充要条件②____________ ．（写出你认为正确的两个充要条件）

【解析】两组相对侧面分别平行；一组相对侧面平行且全等；对角线交于一点；底面是平行四边形.

21. 在平面直角坐标系中，从六个点：$A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$、$F(3,3)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的概率是____________（结果用分数表示）.

【解析】已知 A、C、E、F 共线；B、C、D 共线；六个无共线的点生成三角形总数为：C_6^3；可构

成三角形的个数为：$C_6^3-C_4^3-C_3^3=15$，所以所求概率为：$\dfrac{C_6^3-C_4^3-C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{3}{4}$；

22. 方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 的图像与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像交点的横坐标．若方程 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_k\ (k\le 4)$ 所对应的点 $\left(x_i,\dfrac{4}{x_i}\right)$（$i=1,2,\cdots,k$）均在直线 $y=x$ 的同侧，则实数 a 的取值范围是________.

【解析】方程的根显然 $x\neq 0$，原方程等价于 $x^3+a=\dfrac{4}{x}$，原方程的实根是曲线 $y=x^3+a$ 与曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 的交点的横坐标；而曲线 $y=x^3+a$ 是由曲线 $y=x^3$ 向上或向下平移 $|a|$ 个单位而得到的。

若交点 $\left(x_i,\dfrac{1}{x_i}\right)(i=1,2,\cdots,k)$ 均在直线 $y=x$ 的同侧，因直线 $y=x$ 与 $y=\dfrac{4}{x}$ 交点为：

$(-2,-2),(2,2)$，所以结合图象可得 $\begin{cases}a>0\\x^3+a>-2\\x\ge -2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\x^3+a<2\\x\le 2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a\in(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$。

23. 若不等式 $|3x-b|<4$ 的解集中的整数有且仅有 $1,2,3$，则 b 的取值范围为________.

【解析】$|3x-b|<4\Rightarrow\dfrac{b-4}{3}<x<\dfrac{b+4}{3}$，$\Rightarrow\begin{cases}0<\dfrac{b-4}{3}<1\\3<\dfrac{b+4}{3}<4\end{cases}\Rightarrow 5<b<7$ 即范围为 $(5,7)$

24. 已知 t 为常数，函数 $y=|x^2-2x-t|$ 在区间[0，3]上的最大值为 2，则 $t=$_____

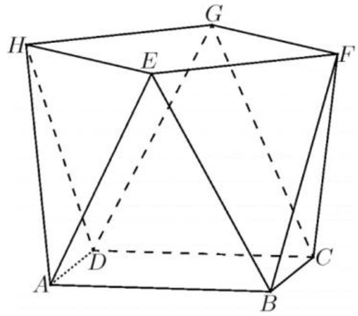
【解析】对称轴为 $x=1$, 下方图像翻到 x 轴上方. 由区间[0，3]上的最大值为 2，知 $y_{\max}=f(3)=|3-t|=2$, 解得 $t=1$或5, 检验 $t=5$ 时，$f(0)=5>2$ 不符, 而 $t=1$ 时满足题意.

25. 用 1，2，3，4，5，6 组成六位数（没有重复数字），要求任何相邻两个数字的奇偶性不同，且 1 和 2 相邻，这样的六位数的个数是________（用数字作答）。

【解析】依题先排除 1 和 2 的剩余 4 个元素有 $2A_2^2\cdot A_2^2=8$ 种方案，再向这排好的 4 个元素中插入 1 和 2 捆绑的整体，有 A_5^1 种插法，

$\therefore$ 不同的安排方案共有 $2A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_5^1=40$ 种。

26. (2024 年四川高联赛)将边长为 1 得正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 绕其中心旋转 45°，得到一个十面体 $ABCD-EFGH$（如图），则该十面体的体积为_____。

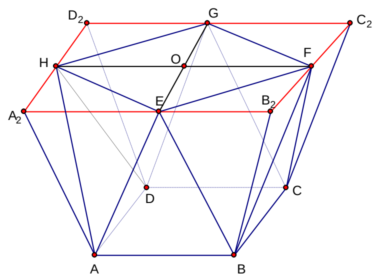


【解析】如图，$ABCD-EFGH$ 的侧面均为三角形，在平面 $EFGH$ 中，以 EG, FH 为边长作正方形 $A_2B_2C_2D_2$，连接 AA_2, BB_2, CC_2, DD_2，得上下底均为正方形的四棱台 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$，上、下底面边长分别为 $\sqrt{2}$ 和1。

易知 $V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}=\frac{1}{3}\times1\times\left(2+1+\sqrt{1\times2}\right)=\frac{3+\sqrt{2}}{3}$。

$V_{A-A_2EH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1=\frac{1}{12}$

故，$V_{ABCD-EFGH}=V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}-4V_{A-A_2EH}=\frac{3+\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{12}=\frac{2+\sqrt{2}}{3}$



27. **（2022 清华强基计划）**对于 $x\in R$，$f(x)$ 满足 $f(x)+f(1-x)=1, f(x)=2f\left(\frac{x}{5}\right)$，且对于 $0\le x_1\le x_2\le1$，恒有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则 $f\left(\frac{1}{2022}\right)=$______。

【解析】由 $f(x)=2f\left(\frac{x}{5}\right)\Rightarrow f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2}f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}f(5x)$，

故 $f\left(\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{5}{2022}\right)=\frac{1}{16}f\left(\frac{625}{2022}\right)$，

对任意 $0\le x_0\le1$，$f(x_0)=2f\left(\frac{x_0}{5}\right)=1-f(1-x_0)=1-2f\left(\frac{1-x_0}{5}\right)$，所以

$f\left(\frac{x_0}{5}\right)+f\left(\frac{1-x_0}{5}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $f(0)+f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$，又由已知有 $f(1)+f(0)=1$，两式相减得

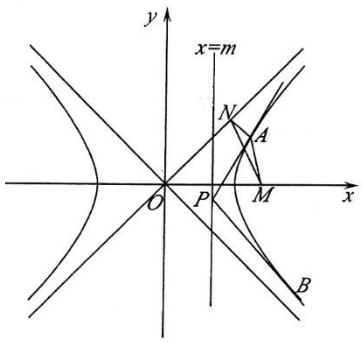
$f(1)=f\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}=2f\left(\frac{1}{5}\right)$，所以 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，且对于 $0\le x_1\le x_2\le 1$，恒有 $f(x_1)\le f(x_2)$

所以当 $x\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$时，恒有 $f(x)=\frac{1}{2}$，

而 $\frac{1}{5}<\frac{625}{2022}<\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{625}{2022}\right)=\frac{1}{2}$，故 $f\left(\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{16}f\left(\frac{625}{2022}\right)=\frac{1}{32}$。

28. 设点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x=m(y\ne\pm m,0<m<1)$ 上，过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA、PB，切点为 A、B，定点 M（$\frac{1}{m}$，0）。



（1）过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线，垂足为 N，试求△AMN 的重心 G 所在的曲线方程；

（2）求证：A、M、B 三点共线.

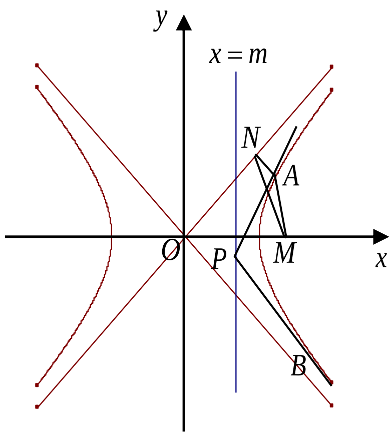
证明：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由已知得到 $y_1y_2\ne 0$，且 $x_1^2-y_1^2=1$，$x_2^2-y_2^2=1$，

设切线 PA 的方程为：$y-y_1=k(x-x_1)$，由 $\begin{cases} y-y_1=k(x-x_1) \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ 得

$(1-k^2)x^2-2k(y_1-kx_1)x-(y_1-kx_1)^2-1=0$

从而 $\Delta=4k^2(y_1-kx_1)^2+4(1-k^2)(y_1-kx_1)^2+4(1-k^2)=0$，

解得 $k=\frac{x_1}{y_1}$



因此 PA 的方程为：$y_1y=x_1x-1$

同理 PB 的方程为：$y_2y=x_2x-1$

又 $P(m,y_0)$ 在 PA、PB 上，

所以 $y_1y_0=mx_1-1$，$y_2y_0=mx_2-1$

即点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 都在直线 $y_0y=mx-1$ 上

又 $M(\frac{1}{m},0)$ 也在直线 $y_0y=mx-1$ 上，所以三点 A、M、B 共线

（2）垂线 AN 的方程为：$y-y_1=-x+x_1$，

由 $\begin{cases} y-y_1=-x+x_1 \\ x-y=0 \end{cases}$ 得垂足 $N(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_1+y_1}{2})$，

设重心 $G(x,y)$，所以 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}(x_1+\frac{1}{m}+\frac{x_1+y_1}{2}) \\ y=\frac{1}{3}(y_1+0+\frac{x_1+y_1}{2}) \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{9x-3y-\frac{3}{m}}{4} \\ y_1=\dfrac{9y-3x+\frac{1}{m}}{4} \end{cases}$

由 $x_1^2-y_1^2=1$ 可得 $(3x-3y-\frac{1}{m})(3x+3y-\frac{1}{m})=2$，即 $(x-\frac{1}{3m})^2-y^2=\frac{2}{9}$ 为重心 G 所在曲线方程

29. 已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+c, & a_n<3, \\ \frac{a_n}{d}, & a_n\geq 3. \end{cases}$

（1）当 $a_1=1$，$c=1,\ \ d=3$ 时，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）当 $0<a_1<1$，$c=1,\ \ d=3$ 时，试用 a_1 表示数列 $\{a_n\}$ 前 100 项的和 S_{100}；

（3）当 $0<a_1<\frac{1}{m}$ （m 是正整数），$c=\frac{1}{m}$，正整数 $d\geq 3m$ 时，求证：数列 $a_2-\frac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\frac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\frac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\frac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d=3m$．

【解析】（1）由题意得 $a_n=\begin{cases} 1, & n=3k-2, \\ 2, & n=3k-1, \\ 3, & n=3k, \end{cases}\ \ (k\in Z^+)$

（2）当 $0<a_1<1$ 时，$a_2=a_1+1$，$a_3=a_1+2$，$a_4=a_1+3$，$a_5=\frac{a_1}{3}+1$，$a_6=\frac{a_1}{3}+2$，

$a_7=\frac{a_1}{3}+3$，…，$a_{3k-1}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+1$，$a_{3k}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+2$，$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+3$，…，

$$\begin{aligned} \therefore\ S_{100}&=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{98}+a_{99}+a_{100}) \\ &=a_1+(3a_1+6)+(a_1+6)+\left(\frac{a_1}{3}+6\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{3^{31}}+6\right) \\ &=a_1+a_1\left(3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{31}}\right)+6\times 33 \\ &=\frac{1}{2}\left(11-\frac{1}{3^{31}}\right)a_1+198\ . \end{aligned}$$

（3）当 $d=3m$ 时，$a_2=a_1+\frac{1}{m}$；

$\because\ a_{3m}=a_1+\dfrac{3m-1}{m}=a_1-\dfrac{1}{m}+3<3<a_1+3=a_{3m+1}$，$\therefore\ a_{3m+2}=\dfrac{a_1}{3m}+\dfrac{1}{m}$；

$\because\ a_{6m}=\dfrac{a_1}{3m}-\dfrac{1}{m}+3<3<\dfrac{a_1}{3m}+3=a_{6m+1}$，$\therefore\ a_{6m+2}=\dfrac{a_1}{9m^2}+\dfrac{1}{m}$；

$\because\ a_{9m}=\dfrac{a_1}{9m^2}-\dfrac{1}{m}+3<3<\dfrac{a_1}{9m^2}+3=a_{9m+1}$，$\therefore\ a_{9m+2}=\dfrac{a_1}{27m^3}+\dfrac{1}{m}$.

$\therefore\ a_2-\dfrac{1}{m}=a_1$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{3m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{9m^2}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{27m^3}$.

综上所述，当 $d=3m$ 时，数列 $a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$ 是公比为 $\dfrac{1}{3m}$ 的等比数列.

当 $d\geq 3m+1$ 时，$a_{3m+2}=\dfrac{a_1+3}{d}\in\left(0,\ \dfrac{1}{m}\right)$，

$a_{6m+2}=\dfrac{a_1+3}{d}+3\in\left(3,\ 3+\dfrac{1}{m}\right)$，$a_{6m+3}=\dfrac{\dfrac{a_1+3}{d}+3}{d}\in\left(0,\ \dfrac{1}{m}\right)$，

$a_{9m+2}=\dfrac{\dfrac{a_1+3}{d}+3}{d}+\dfrac{3m-1}{m}\in\left(3-\dfrac{1}{m},\ 3\right)$.

由于 $a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}<0$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}>0$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}>0$，

故数列 $a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$ 不是等比数列.

所以，数列 $a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d=3m$.

30. （2020 全国 II）已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$

（1）证明：$|f(x)|\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

（2）证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\cdot\sin^2 2^n x\leq\dfrac{3^n}{4^n}$

（1）证明：$|f(x)|=2|\sin^3 x\cos x|=2\sqrt{\sin^6 x(1-\sin^2 x)}=2\sqrt{27\times\dfrac{\sin^2 x}{3}\times\dfrac{\sin^2 x}{3}\times\dfrac{\sin^2 x}{3}(1-\sin^2 x)}$

$$\leq 2\sqrt{27\left(\frac{\dfrac{\sin^2 x}{3}+\dfrac{\sin^2 x}{3}+\dfrac{\sin^2 x}{3}+(1-\sin^2 x)}{4}\right)^4}=\frac{2}{16}\times 3\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

当且仅当 $\dfrac{\sin^2 x}{3}=(1-\sin^2 x)$，也即 $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号。

（2）：由（1）知

$|\sin^2 x\sin 2x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$|\sin^2 2x\sin 4x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$，…，$|\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

故$|\sin^2 x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin 2^n x|\le(\frac{3\sqrt{3}}{8})^n$，从而

$$|\sin^3 x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin^3 2^n x|\le|\sin^2 x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin 2^n x|\le(\frac{3\sqrt{3}}{8})^n$$

故，$\sin^2 x\sin^2 2x\cdots\sin^2 2^{n-1}x\sin^2 2^n x=|\sin^3 x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin^3 2^n x|^{\frac{2}{3}}\le\left((\frac{3\sqrt{3}}{8})^n\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{3^n}{4^n}$。

证毕。

【注意】本题中用到了算数平均值不等式

令$x_1,x_2,\cdots,x_n$非负，则$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

上式也可写成：$x_1x_2\cdots x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$