§ 13.2 随机变量及其分布

13.2.1 相关概念

学习内容

一、随机变量及其常用数字特征

二、几个常用的概率分布

1.离散型随机变量

随着试验结果变化而变化的变量称为随机变量，所有取值可以一一列出的随机变量，称为离散型随机变量.

2.离散型随机变量的分布列及常用数字特征。

（1）分布列：一般地，若离散型随机变量 X 所有可能的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， X 取值 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$，则表

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

称为离散型随机变量 X 的概率分布列，简称分布列。

显然，$p_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

（2）数学期望：若离散型随机变量 X 所有可能的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， X 取值 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$，则称 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 为 X 的数学期望，用 EX 表示，即 $EX=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$。

(3) 方差：同（2），称 $\left(x_1-EX\right)^2\cdot p_1+\left(x_2-EX\right)^2\cdot p_2+\cdots+\left(x_n-EX\right)^2\cdot p_n$ 为 X 的方差，用 DX 表示，即

$DX=\left(x_1-EX\right)^2\cdot p_1+\left(x_2-EX\right)^2\cdot p_2+\cdots+\left(x_n-EX\right)^2\cdot p_n$，称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差，用 σX 表示，即 $\sigma X=\sqrt{DX}$。

3.数学期望与方差的性质

设 X 为一随机变量，a,b 为常数，则

（1） $E(aX+b)=aE(X)+b$　　　　（2） $D(aX+b)=a^2D(X)$

方差与期望的关系：$DX=EX^2-\left(EX\right)^2$

随机变量的数学期望反应了随机变量取值的平均水平，而方差则反应了随机变量的取值与其均值的偏离程度。

4.几个特殊的分布：

（1）两点分布 $B(1,p)$：在一次试验中，如果随机变量 X 只取 0 或 1 两个值，则称 X 服从两点分布，记为 $X\sim B(1,p)$，其中 p 为 $X=1$ 时的概率，即

$P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$，$p\in(0,1)$，

两点分布也称“0-1 分布”，如果 $X\sim B(1,p)$，则 $EX=p$，$DX=p(1-p)$

（2）二项分布

贝努利试验：只包含两个等可能结果的试验称为贝努利试验，将一个贝努利试验独立地重复进行 n 次，叫 n-重贝努利试验。

一般地，在 n 重贝努利试验中，设每次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，用 X 表示事件 A 发生的次数，则 X 的分布列为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}，\quad k=0,1,2,\cdots,n。$$

如果随机变量 X 的分布列具有上面的形式，则称 X 服从**二项分布**，记作 $X\sim B(n,p)$，由二项式定理知

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1$$

显然，如果随机变量 $X\sim B(n,p)$，则 $EX=np$，$DX=np(1-p)$。

（3）几何分布

在实际问题中，我们也常需要讨论独立重复试验中，某事件第一次发生时所做试验次数 X 的概率分布情况，很显然 X 也是随机变量，且“$X=k$”表明该事件在 k 次独立试验中，前 $k-1$ 次都没有发生，仅在第 k 次试验时才发生。

令 A_k 表示该事件在第 k 次试验时发生，且 $P(A_k)=p, P(\bar{A}_k)=1-p=q$

则 $P(X=k)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)=q^{k-1}p,(k=1,2,3,\cdots)$

我们称 X 服从几何分布，记为 $X\sim g(k,p)$，其中 $g(k,p)=q^{k-1}p$，$q=1-p$，$k=1,2,3,\cdots$。

若 $X\sim g(k,p)$，则

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=\frac{1}{p}，\quad DX=\frac{q}{p^2}$$

（4）超几何分布

假设一批产品共有 N 件，其中含有 M 件次品，现从 N 件产品中任取 n 件（不放回），设其中次品件数为 X，则

$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\ldots,m$，其中，$m=\min\{M,n\}$，且

$n \le N, M \le N, n, M, N \in N^*$，称分布列

X	0	1	$\cdots$.	m
P	$\dfrac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\cdots$.	$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

为超几何分布列。如果随机变量 X 的分布列为超几何分布列，就称 X 服从超几何分布。记作 $X \sim H(N,n,M)$

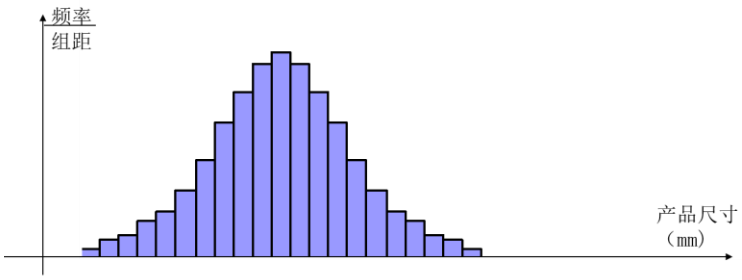
如果 $X \sim H(N,n,M)$，则 $EX = n \times \dfrac{M}{N}$， $DX = n \times \dfrac{M}{N}(1-\dfrac{M}{N}) \times \dfrac{N-n}{N-1}$

很明显，当 N 很大的时候，$\dfrac{M}{N} \to p$（常数），$\dfrac{N-n}{N-1} \to 1$，此时，$EX \to np$，$DX \to np(1-p)$，从而，$H(N,n,M) \to B(n,p)$

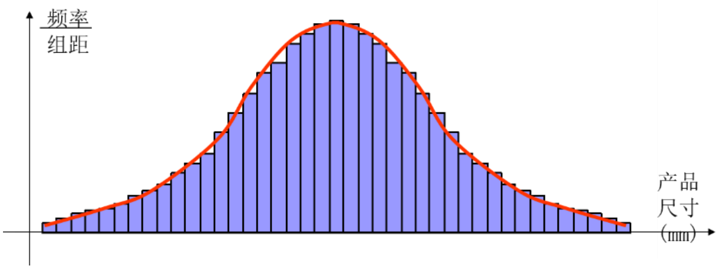
（5）正态分布

前面的几个分布都是离散型随机变量的概率分布，现实中，有大量的随机变量不是离散型的，它们的取值往往充满某个区间，甚至整个实数轴，我们将这类随机变量称为连续型随机变量。

下图是 200 零件在某一标准尺寸（中心尺寸）附近的频率分步直方图。



很明显，随着样本容量的增大以及组距的缩小，频率分步直方图的轮廓将趋于一条光滑的钟型曲线，如下图



我们将这条曲线称为对应的随机变量 X 的概率密度曲线。这条曲线的函数解析式为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}6} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0)$$

而函数 $f(x)$ 称为随机变量 X 的概率密度函数。此处的 μ 和 σ，分别为随机变量 X 的数学

期望和标准方差。

易知曲线与水平轴围成的区域面积为 1.

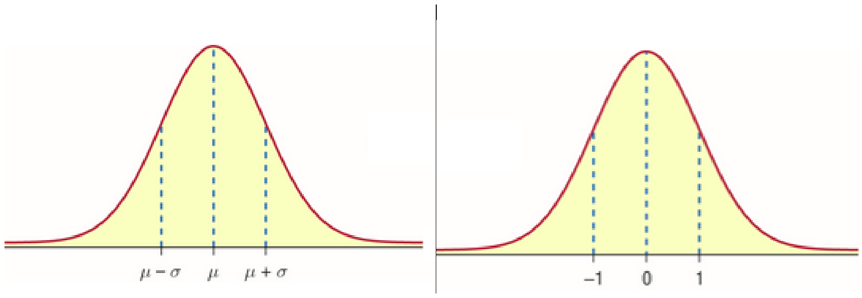
定义：如随机变量 X 的概率密度函数为：

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}}$ $(-\infty<x<+\infty,-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0)$，则称 X 服从参数 μ，σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

函数 $f(x)$ 的图像如图一所示，图像关于直线 $x=\mu$ 轴对称。

标准正态分布：

当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，相应的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty)$；这样的正态分布称为标准正态分布，相应的曲线称为标准正态曲线。其图像如图二所示。



标准正态分布常用公式：设随机变量 X 服从标准正态分布，定义 $\varphi(x)=P(X<x)$，则

（1） $\varphi(-x)+\varphi(x)=1$

（2） $P(a<\xi<b)=\varphi(b)-\varphi(a)$

正态曲线具有的性质：

当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定。σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体越分散；σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中。

正态分布随机变量在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma]$, $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$, $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 上的概率分别为

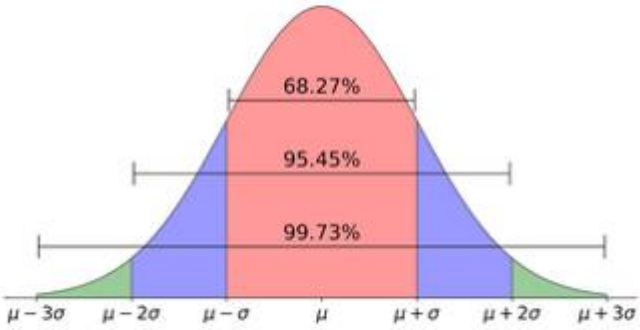
$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6827$

$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$

$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9974$

“3σ”原则

符合正态分布的随机变量 ξ 的取值范围为 R，但由前面的知识我们看出，ξ 落在 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 外的概率非常小，因此，我们一般认为 ξ 的取值是个有限区间，即 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$，在工程中，我们称其为 3σ 规则。



13.2.2 典型例题

例 1.袋中有 3 个白球、5 个黑球，从中任取两个，可以作为随机变量的是(　　)

A.至少取到 1 个白球　　　　B.至多取到 1 个白球

C.取到白球的个数　　　　D.取到的球的个数

【解】选项 A，B 表述的都是随机事件；

选项 D 是确定的值 2，并不随机；

选项 C 是随机变量，可能取值为 0，1，2.

综上，选 C。

例 2.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)离散型随机变量的概率分布列中，各个概率之和可以小于 1.(　　)

(2)离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的.(　　)

(3)如果随机变量 X 的分布列由下表给出，则它服从两点分布.(　　)

X	2	5
P	0.3	0.7

(4)从 4 名男演员和 3 名女演员中选出 4 名，其中女演员的人数 X 服从超几何分布.(　　)

【解】对于(1)，离散型随机变量所有取值的并事件是必然事件，故各个概率之和等于 1，故(1)不正确；

对于(3)，X 的取值不是 0，1，故不是两点分布，所以(3)不正确.

(4) $N=7, n=4, M=3$，$X \sim H(7,4,3)$

【答案】　(1)×　(2)√　(3)×　(4)√

例 3.设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

求：(1)$2X+1$ 的分布列；(2)$|X-1|$的分布列.

【解】由分布列的性质知：$0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$，$\therefore m=0.3$.

首先列表为

X	0	1	2	3	4
$2X+1$	1	3	5	7	9
$\|X-1\|$	1	0	1	2	3

从而由上表得两个分布列为

(1)$2X+1$ 的分布列

$2X+1$	1	3	5	7	9
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

(2)$|X-1|$的分布列为

$\|X-1\|$	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

例 4(1).已知 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，且 $Y=2X+1$，则 $EY=$______，$DY=$______。

(2) 如果 $X\sim H(6,4,3)$，则 $EX=$______。

【解】(1) 因 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，故 $EX=np=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$DX=npq=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$，

因 $Y=2X+1$，故 $EY=2EX+1=2\times\frac{3}{4}+1=\frac{5}{2}$，$DY=2^2DX=4\times\frac{9}{16}=\frac{9}{4}$

(2) 如 $X\sim H(N,n,M)$，则 $EX=n\times\frac{M}{N}$，故由 $X\sim H(6,4,3)$ 得 $EX=4\times\frac{3}{6}=2$。

例 5.从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，用 X 表示所选 3 人中女生的人数。

(1) 求 X 的分布列；　　(2) 求 $P(X\le 1)$。

【解】(1) 显然，X 的取值为 0，1，2；易知

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}，P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$$

故，X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

(2) 从 X 的分布列得 $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0.8$

例 6.分别指出下列随机变量服从什么分布，并用合适的符号表示。

(1)某班级共有 30 名学生，其中有 10 名学生戴眼镜，随机从这个班级中抽取 5 人，设抽到的不戴眼镜的人数为 X；

(2)已知女性患色盲的概率为 0.25%，任意抽取 300 名女性，设其中患色盲的人数为 X；

⑶学校要从 3 名男教师和 4 名女教师中随机选出 3 人去支教，设抽取的人中男教师的人数为 X 。

【解】（1）由题意知：30 名学生中有 20 名不戴眼镜，因此，X 服从参数为$30,5,20$的超几何分布，即$X \sim H(30,5,20)$

⑵ X 服从参数为$300,0.25\%$的二项分布，即$X \sim B(300,0.0025)$；

⑶ X 服从参数为$7,3,3$的超几何分布，即$X \sim H(7,3,3)$

例 7.一家投资公司在决定是否对某创业项目进行资助时，经评估后发现：如果项目成功，将获利5000万元，如果项目失败，将损失3000万元。设这个项目成功的概率为 p ，而你是投资公司的负责人，如果仅从平均收益方面考虑，则 p 满足什么条件时你才会对该项目进行资助？为什么？

【解】设随机变量 X 表示获利，则 X 的分布列如下

X （万）	5000	-3000
P	p	$1-p$

平均获利即为 X 的数学期望EX ，当$EX>0$时可投资该项目。

$EX=5000p-3000(1-p)=8000p-3000$，

由$EX>0$得 $p>0.375$时，故 $p>0.375$时可投资该项目。

例 8、在某次数学考试中，考生的成绩 X 服从如下正态分布，即$X \sim N(90,100)$

（1）试求考试成绩位于区间$(70,110)$的概率？

（2）若这次考试共有2000名考生，试估计考试成绩在$(80,100)$间的考生大约有多少人？

【解】（1）由题意知： $\mu=90,\sigma=10$，由3σ原则知：

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$，即$P(70<X<110)=0.9544$，

故成绩位于区间$(70,110)$的概率为0.9544。

（2）因$\mu=90,\sigma=10$，由3σ原则知：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，

即$P(80<X<100)=0.6827$，

故成绩位于区间$(80,100)$的概率为0.6827，

现有 2000 人参加考试，因此约有

$2000\times0.6827\approx1365$人的成绩位于区间$(80,100)$。

例 9（1）设随机变量$X \sim N(2,9)$，若$P(X>c+1)=P(X<c-1)$，则$c=$______，X 的概率密度函数为_____

（2）已知 X 服从正态分布，X 落在$(-3,-1)$的概率与落在$(3,5)$里的概率相等，则$EX=$______。

【解】(1) 由题意知：$c+1$与$c-1$关于2对称，故$\dfrac{(c+1)+(c-1)}{2}=2$，即$c=2$；

又，因$\mu=2,\ \sigma=3$，故X的概率密度函数为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$。

(2) 显然，区间$(-3,-1)$和$(3,5)$的区间长度相等，且此二区间关于直线$x=1$对称，故$EX=1$。

例 10 (1) 已知$X\sim N(0,1)$，则X在区间$(-\infty,-2)$内取值的概率等于（　　）

A. 0.9544　　B. 0.0456　　C. 0.9772　　D. 0.0228

(2) 若$X\sim N(5,1)$,则$P(6<X<7)=$______。

【解】(1) 由题意知$\mu=0,\sigma=1$，由3σ原则知：$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(-2\le X\le 2)=0.9544$，故$P(X\le -2)=\dfrac{1-P(-2\le X\le 2)}{2}=\dfrac{1-0.9544}{2}=0.0228$

选 D。

(2) 由题意知$\mu=5,\sigma=1$，故 $\mu+\sigma=6,\ \mu+2\sigma=7$，

由3σ原则知：$P(6<X<7)=P(\mu+\sigma<X<\mu+2\sigma)=\dfrac{0.9544-0.6827}{2}=0.1359$。

例 11.工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务，每次只派一个人进去，且每个人只派一次，工作时间不超过 10 分钟，如果有一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出，再派下一个人。现在一共只有甲、乙、丙三个人可派，他们各自能完成任务的概率分别为p_1,p_2,p_3，假设p_1,p_2,p_3互不相等，且假定各人能否完成任务的事件相互独立.

(Ⅰ) 如果按甲在先，乙次之，丙最后的顺序派人，求任务能被完成的概率。若改变三个人被派出的先后顺序，任务能被完成的概率是否发生变化?

(Ⅱ) 若按某指定顺序派人，这三个人各自能完成任务的概率依次为q_1,q_2,q_3，其中q_1,q_2,q_3是p_1,p_2,p_3的一个排列，求所需派出人员数目X的分布列和均值（数字期望）EX；

(Ⅲ) 假定$1>p_1>p_2>p_3$，试分析以怎样的先后顺序派出人员，可使所需派出的人员数目的均值（数学期望）达到最小。

【解】(I) 无论以怎样的顺序派出人员，任务不能被完成的概率都是$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$，所以任务能被完成的等于$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$，它显然与三个工作人员被派出的先后顺序无关。

(II) 当依次派出的三个人各自完成任务的概率分别为q_1,q_2,q_3时，随机变量X的分布列为

X	1	2	3
P	q_1	$(1-q_1)q_2$	$(1-q_1)(1-q_2)$

所需派出的人员数目的均值（数学期望）EX是

$EX = q_1 + 2(1-q_1)q_2 + 3(1-q_1)(1-q_2) = 3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2$

(Ⅲ)由(II)的结论知,当以甲最先、乙次之、丙最后的顺序派人时,$EX = 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2$

根据常理，优先派出完成任务概率大的人，可减少所需派出的人员数目的均值。

下面证明：对于 p_1, p_2, p_3 的任意排列 q_1, q_2, q_3，都有

$3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2 \geq 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2, \cdots$（*）

事实上，

$$\Delta = (3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2) - (3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2)$$
$$= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) - p_1p_2 + q_1q_2$$
$$= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) - (p_1 - q_1)p_2 - q_1(p_2 - q_2)$$
$$= (2 - p_2)(p_1 - q_1) + (1 - q_1)(p_2 - q_2)$$
$$\geq (1 - q_1)(p_1 - q_1) + (1 - q_1)(p_2 - q_2)$$
$$= (1 - q_1)[(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2)] \geq 0.$$

即（*）成立。

例 12．某花店每天以每枝5元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝10元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理。

（1）若花店一天购进16枝玫瑰花，求当天的利润y(单位：元)关于当天需求量n（单位：枝，$n \in N$）的函数解析式。

（2）花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得下表：

日需求量n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率。

(i）若花店一天购进16枝玫瑰花，X 表示当天的利润（单位：元），求 X 的分布列，数学期望及方差；

(ii)若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花,你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由。

【解】（1）当$n \geq 16$时，$y = 16 \times (10 - 5) = 80$

当$n \leq 15$时，$y = 5n - 5(16 - n) = 10n - 80$，得 $y = \begin{cases} 10n - 80 (n \leq 15) \\ 80 \qquad (n \geq 16) \end{cases} (n \in N)$

（2）(i) X 可取60，70，80

$P(X = 60) = 0.1, P(X = 70) = 0.2, P(X = 80) = 0.7$

X 的分布列为

X	60	70	80

P	0.1	0.2	0.7

$EX=60\times0.1+70\times0.2+80\times0.7=76$

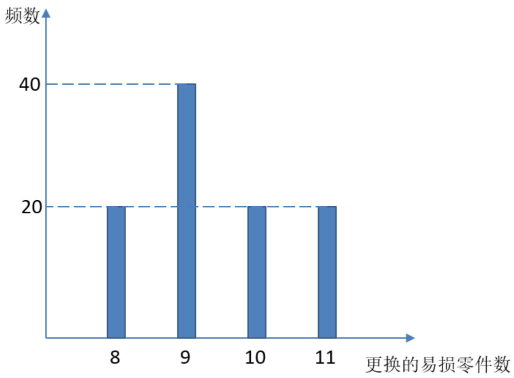
$DX=E(X-EX)^2=16^2\times0.1+6^2\times0.2+4^2\times0.7=44$

(ⅱ) 购进 17 枝时，当天的利润为

$y=(14\times5-3\times5)\times0.1+(15\times5-2\times5)\times0.2+(16\times5-1\times5)\times0.16+17\times5\times0.54=76.4$

因 $76.4>76$，故应购进 17 枝

例 13（全国 I）某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰.机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元.在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元.现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.



（I）求 X 的分布列；

（II）若要求 $P(X\le n)\ge0.5$，确定 n 的最小值；

（III）以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

【解】:（Ⅰ）由柱状图并以频率代替概率可得，一台机器在三年内需更换的易损零件数为 8，9，10，11 的概率分别为 0.2，0.4，0.2，0.2，从而

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$；

$P(X=17)=2\times0.2\times0.4=0.16$；

$P(X=18)=2\times0.2\times0.2+0.4\times0.4=0.24$；

$P(X=19)=2\times0.2\times0.2+2\times0.4\times0.2=0.24$；

$P(X=20)=2\times0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$；

$P(X=21)=2\times0.2\times0.2=0.08$；

$P(X=22)=0.2\times 0.2=0.04$.

所以 X 的分布列为

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $P(X\le 18)=0.44$，$P(X\le 19)=0.68$，故 n 的最小值为 19.

（Ⅲ）记 Y 表示 2 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元）.当 $n=19$ 时，

$$EY=19\times 200\times 0.68+(19\times 200+500)\times 0.2$$

$$+(19\times 200+2\times 500)\times 0.08+(19\times 200+3\times 500)\times 0.04=4040.$$

当 $n=20$ 时，

$$EY=20\times 200\times 0.88+(20\times 200+500)\times 0.08+(20\times 200+2\times 500)\times 0.04=4080$$

可知当 $n=19$ 时所需费用的期望值小于 $n=20$ 时所需费用的期望值，故应选 $n=19$.

例 14. 某钢管生产车间生产一批钢管(大量)，质检员从中抽出若干根对其直径（单位：mm）进行测量，得出这批钢管的直径 X 服从正态分布 $N\left(65,4.84\right)$. 当质检员随机抽检时，测得一根钢管的直径为 $73\mathrm{mm}$，他立即要求停止生产，检查设备，

（Ⅰ）请你根据所学知识，判断该质检员的决定是否有道理，并说明判断的依据；

（Ⅱ）如果从该批钢管中随机抽取 100 根，设其直径满足在 $60.6\mathrm{mm}-65\mathrm{mm}$ 的根数为随机变量 Y，

(i) 求随机变量 Y 的数学期望；

(ii) 求使 $P(Y=k)$ 取最大值时的整数 k 的值.

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9774$.

【解】:（Ⅰ）$\because \mu=65$，$\sigma=2.2$，$\mu-3\sigma=58.4$，$\mu+3\sigma=71.6$，$\because 73\in\left(\mu+3\sigma,+\infty\right)$，

$$\therefore P(X>71.6)=\frac{1-P(58.4<X\le 71.6)}{2}=\frac{1-0.9974}{2}=0.0013,$$

此事件为小概率事件，该质检员的决定有道理.

(Ⅱ) (i) $\because \mu=65$，$\sigma=2.2$，$\mu-2\sigma=60.6$，由题意

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu)=\frac{P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)}{2}=\frac{0.9544}{2}=0.4772$$

$\therefore Y\sim B(100,0.4772)$，$\therefore EY=100\times 0.4772=47.72$

(ii)（$P(Y=k)=\mathrm{C}_{100}^{k}0.4772^{k}\cdot 0.5228^{100-k}$.

设 $P(Y=k)$ 最大，则 $\begin{cases} P(Y=k)\ge P(Y=k+1) \\ P(Y=k)\ge P(Y=k-1) \end{cases}$，即 $\begin{cases} \dfrac{0.5228}{100-k}\ge\dfrac{0.4772}{k+1} \\ \dfrac{0.4772}{k}\ge\dfrac{0.5228}{101-k} \end{cases}$，

解得 $47.1972\le k\le 48.1972$.

因为 $k\in\mathbf{N}^*$，所以使 $P(Y=k)$ 取最大值时的整数 $k=48$。