第 11 章　一元函数的导数及其应用

§ 11.1 导数的概念及其运算

11.1.1　相关概念

学习目标

1、了解导数的概念及导数的几何意义

2、掌握导数的运算法则

3、能对常见函数进行求导

4、能利用导数工具解决曲线的切线方程问题

函数极限

对于函数 $f(x)$ 和 x_0，如存在实数 A，使得 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限；如存在实数 B，使得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$，则称 B 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限；若函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在并且相等，则称 $f(x)$ 在 x_0 处的极限存在，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

比如函数 $f(x)=\sqrt{x}$，因 $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=2$，故 $f(x)$ 在 4 处的极限存在，记为 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$；

又比如函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，故 $f(x)$ 在 0 处的左、右极限虽然存在，但不相等，故 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在。

导数

对于函数 $f(x)$ 和 x_0，如 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$；自然，如 $f(x)$ 在 x 处的导数记为 $f'(x)$。

例如：$f(x)=3x+1$，因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(\Delta x+2)+1-7}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}3=3$，故 $f'(2)=3$。

注意：（1）$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数值的增量，Δx 为自变量的增量，因此 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 表示 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x](\Delta x>0)$ 或 $[x_0+\Delta x,x_0](\Delta x<0)$ 上的平均变化率，因此，$f'(x_0)$ 也称 $f(x)$ 在 x_0 处的瞬时变化率。

（2）$\Delta x \to 0$ 是指 Δx 以任意形式趋于 0，Δx 以特殊形式趋于 0，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，不能说明 $f'(x_0)$ 存在。

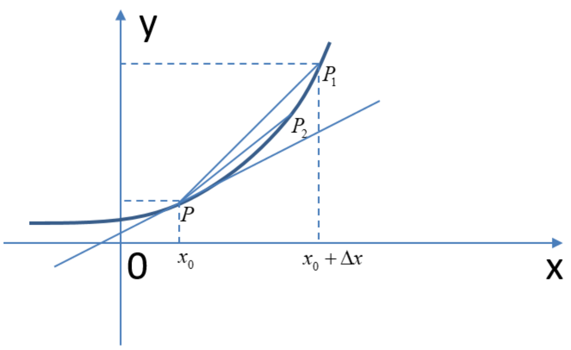
（3）由于极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 包含左极限和右极限，因此，从导数的定义看，$f(x)$ 在 x_0 处也有左导数和右导数的概念，只有当 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数均存在且相等时，才能说 $f(x)$ 在 x_0 处**可导**。

显然，**常数函数在任意一点处的导数都为 0**。

导数的几何意义（特殊情况除外）

如果令 $P(x_0, f(x_0)), P_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，

则 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}=k_{PP_1}$，他表示 $f(x)$ 图像上线段 PP_1 所在直线的斜率，当 $\Delta x \to 0$ 时，$x_0+\Delta x \to x_0$，从而 $P_1 \to P$，线段 $PP_1 \to P$ 点处的切线，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 就是 P 处切线的斜率（**高中阶段不涉及特殊情况**）



导数的物理意义

如 $s(t)$ 表示位移，则 $s'(t)$ 表示 t 时刻的瞬时速度；如 $v(t)$ 表示速度，则 $v'(t)$ 表示 t 时刻的瞬时加速度。

瞬时速度

$$\upsilon = s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

瞬时加速度

$$a = v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

几个常见函数的导数

（1）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，　$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，　$(e^{x})'=e^{x}$

（2）$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a,\left(a>0,a\neq 1\right)$，　$(C)'=0$（C 为常数）

（3）$\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a},\left(a>0,a\neq 1\right)$

（4）$(\sin x)'=\cos x,\quad(\cos x)'=-\sin x$

导数的四则运算

设 $f(x), g(x)$ 均可导，则

（1）$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$

（2）$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$　　特别地，$[cf(x)]'=cf'(x)$（c 为常数）

（3）$[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}(g(x)\neq 0)$

复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x{}'=\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在点 u 处有导数 $y_u{}'=f'(u)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数，且 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$，或写作 $f_x'(\varphi(x))=f'(u)u_x'=f'(u)\varphi'(x)$

11.1.2 典型例题

例1. 试求下列各式的值

（1）$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}$　　（2）$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\cdots}}}$

【解】（1）：令 $x=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}$，则 $x^{2}=2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}=2x$，解得 $x=2$（$x=0$ 舍去）。

故，原式的值为 2.

(2)：令 $x=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\cdots}}}$，则 $\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\cdots}}=2+x$，故 $\dfrac{1}{x}=2+x$

解得 $x=\sqrt{2}-1$（$x=-\sqrt{2}-1$ 舍去），

所以，原式的值为 $\sqrt{2}-1$。

例2. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 在 x_0 处的导数为 -2，求下列各式的值

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$　　(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$

【解】(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

$$=2f'(x_0)=2\times(-2)=-4$$

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}=-5\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{-5\Delta x}$

$$=-5f'(x_0)=-5\times(-2)=10$$

例3. 如下列极限都存在，问极限值 a 是否为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数

（1）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=a$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]=a$

（3）对任意 $\left\{x_n\right\}$，$x_n\neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0-x_n)-f(x_0)}{x_n}=a$

（4）对任意 $\left\{x_n\right\}$，$x_n\neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x_n)}{x_n}=a$

【解】（1）不为。$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 与 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 在结构上不一致，事实上，很容易取反例，比如取 $f(x)=|x|$，$x_0=0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{2h}=0$，但 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，即 $f(x)$ 在 0 处的导数不存在。

（2）不为。虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=a$，并不代表 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，比如取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$，取 $x_0=0$，则题中的 $a=0$，但 $f(x)$ 在 0 处的导数不存在。

（3）不为。如 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0-x_n)-f(x_0)}{x_n}=a=-\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0-x_n)-f(x_0)}{-x_n}=-f'(x_0)$$

（4）是。

例4. 根据导数的定义，求下列函数在相应点处的导数

(1) $f(x)=2x^2+1$,求 $f'(2)$ （2） $f(x)=\sqrt{x-1}$，求 $f'(5)$

【解】（1） $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{8\Delta x-4(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8-4\Delta x)=8$

(2) $f'(5)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}=\frac{1}{4}$$

例5. 用导数的定义求下列函数的导数 $f'(x)$

(1) $f(x)=x^3$ (2) $f(x)=x^4$ (3) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

【解】（1） $(x^3)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2$$

（2） $(x^4)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^3\bullet\Delta x+6x^2\bullet(\Delta x)^2+4x\bullet(\Delta x)^3+(\Delta x)^4}{\Delta x}=4x^3$$

（3） $(x^{\frac{1}{2}})'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

仔细观察（1）、（2）、（3），我们有更一般的结论：$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

例6. （1）数学史上，我们把自然对数的底数 e 定义成 $e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$，请利用此结论，求 $f(x)=\ln x$ 的导数

（2）证明：$(e^x)'=e^x$

（1）【解】: $(\ln x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})$

$=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x}{\Delta x}\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\ln[\lim\limits_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]=\dfrac{1}{x}\ln e=\dfrac{1}{x}$

（2）证明：令 $y=e^x$，则 $\ln y=x$，该式两边同时对 x 求导，利用（1）的结论得

$\dfrac{1}{y}\times y'=1$，即 $y'=y=e^x$，也即 $(e^x)'=e^x$，证毕。

例7. 求下列函数的导数

(1) $f(x)=xe^{-2x}$ (2) $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$ (3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

【解】由于 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，故 $(x)'=1$

(1) $f'(x)=(x)'e^{-2x}+x(e^{-2x})'=e^{-2x}+xe^{-2x}(-2x)'=e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}(2x^2-3x+1)'=\dfrac{4x-3}{2x^2-3x+1}$

(3) $f'(x)=((x^2-1)^{-\frac{1}{2}})'=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2-1)'=-x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

例8. （1）已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$，则 $f'(99)=$（ ）

（2）如果 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}-\cdots$，请针对 $\cos x$，写出类似的一个式子

【解】（1）令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-99}$，则 $f(x)=g(x)(x-99)$，因此

$f'(x)=g'(x)(x-99)+g(x)$，从而 $f'(99)=g(99)=-98!$

【注意】类似的试题都用这种方法。

（2）在 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}-\cdots$ 两边同时求导，得

$\cos x=1-\dfrac{3x^2}{3!}+\dfrac{5x^4}{5!}-\dfrac{7x^6}{7!}+\dfrac{9x^8}{9!}-\cdots=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}+\cdots$

例9. （1）设曲线 $y=ax-\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$，则 $a=$( )

A.0 B.1 C.2 D.3

（2）设 $f(x)=x^x$，求 $f'(x)$

【解】(1) $y'=a-\dfrac{1}{x+1}$，由题意得 $y'(0)=a-1$，即 $a-1=2$，所以 $a=3$

(2) 易知 $\ln f(x)=x\ln x$，故 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$，

因此，$f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

例10. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

【解】因 $f(x)$ 为奇函数，故 $a-1=0$，即 $a=1$

故 $f(x)=x^3+x$，从而 $f'(x)=3x^2+1, f'(0)=1$

故，$f(x)$ 在 $(0,0)$ 处切线的斜率为 1，只能选 D。

例11. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________

【解】 $y'=3(2x+1)e^x+3(x^2+x)e^x=3(x^2+3x+1)e^x$，所以 $k=y'(0)=3$，

所以，曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=3x$，即 $3x-y=0$.

例12. **(全国卷)** 若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为(　　　　)

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\dfrac{1}{2}$　　C. $y=\dfrac{1}{2}x+1$　　D. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

【解】设 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 的切点为 $P(x_0,\sqrt{x_0})$，因 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，故 l 的方程为:

$y-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，即 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}$，显然，$l$ 的斜率与其在 y 轴上的截距之积为 $\dfrac{1}{4}$，只能选 D。

令 l 与圆相切于点 $Q(x_1,y_1)$，在 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 两边求导数，得 $2x+2yy'=0$，故 $y'=-\dfrac{x}{y}$，故 $k=-\dfrac{x_1}{y_1}$，由点斜式得 l 的方程为：$x_1x+y_1y=\dfrac{1}{5}$，从而有 $x_1=-\dfrac{1}{5x_0}, y_1=\dfrac{2}{5\sqrt{x_0}}$，带入圆的方程，得 $x_0=1$，故切线方程为：$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，选 D。

例13. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$____

【解】 设切线与曲线 $y=\ln x+2$ 切于点 $P(x_1,\ln x_1+2)$，因 $y'=\dfrac{1}{x}$，故切线方程为:

$$y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$$

设切线与曲线 $y=\ln\left(x+1\right)$ 切于点 $Q(x_2,\ln(x_2+1))$,因 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，故切线方程为:

$$y=\frac{1}{x_2+1}x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$$

$\therefore \begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2+1}\\ \ln x_1+1=\ln\left(x_2+1\right)-\dfrac{x_2}{x_2+1}\end{cases}$， 解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$， $\therefore b=\ln x_1+1=1-\ln 2$.

例14. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上处处可导，证明（1）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（2）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

（1）**【证明】**: 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，两边求导，得 $-f'(-x)=f'(x)$，即 $f'(-x)=-f'(x)$，故 $f'(x)$ 为奇函数；

（2）**【解】**: 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，两边求导，得 $-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，故 $f'(x)$ 为偶函数；

例15. （1）若 $f(x)=a\sin(x+\dfrac{\pi}{3})+b\cos(x-\dfrac{\pi}{3})(ab\neq 0)$ 是偶函数，则有序实数对 (a,b) 可以是______（写出你认为正确的一组数对即可）

（2）若 $f(x)=a\sin(x+\dfrac{\pi}{4})+b\sin(x-\dfrac{\pi}{4})(ab\neq 0)$ 是偶函数，则 $2^{a+b}=$______。

【解】（1）因 $f(x)$ 是偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，

即 $f'(x)=a\cos(x+\dfrac{\pi}{3})-b\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$ 为奇函数，

故，$f'(0)=a\cos\dfrac{\pi}{3}-b\sin(-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$，即 $a+\sqrt{3}b=0(ab\neq 0)$。

随便取一对 $(a,b)=(-\sqrt{3},1)$ 即可。

（2）因 $f(x)$ 是偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，

即 $f'(x)=a\cos(x+\dfrac{\pi}{4})+b\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$ 为奇函数，

故， $f'(0)=a\cos\frac{\pi}{4}+b\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)=0$ ，得 $a+b=0$

故， $2^{a+b}=2^0=1$ 。

例16. 若 $(2x-1)^{10}=a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$ ，则 $a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}=$ ___

【解】.在 $(2x-1)^{10}=a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$ 两边同时求导数，

得 $10\times(2x-1)^9\times 2=10a_{10}x^9+9a_9x^8+8a_8x^7+\cdots+2a_2x+a_1$ ，

上式两边取 $x=1$ ，得 $10a_{10}+9a_9+8a_8+\cdots+2a_2+a_1=20$

例17. 设 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，求证：椭圆在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为： $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

【证明】 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边同时对 x 求导，得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y_x'}{b^2}=0$ ，故 $y_x'=-\frac{b^2x}{a^2y}$ ，

因此， $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率为： $k=y_x'(x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ ，

从而，切线方程为 $y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$ ，也即 $a^2y_0y-a^2{y_0}^2=b^2{x_0}^2-b^2x_0x$ ，

即 $a^2y_0y+b^2x_0x=b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2=a^2b^2$ ，两边同时除以 a^2b^2 ，

得： $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ ，证毕。