# 习题课

**补充知识：**

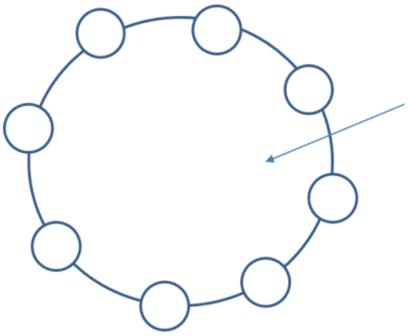
**1.catalan 定理：** $n$ 个+1 和 $n$ 个-1 构成的 $2n$ 项数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 如果满足部分和要求

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\geq 0(k=1,2,\cdots,2n)$$

则这样的数列有 $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ 个

**2.圆周排列：** 从 $n$ 个不同物体中（无重复地）取 $k$ 个排成一圆周，称为 $n$ 个不同元素的一个 $k-$ 圆周排列，其数目为 $\frac{A_n^k}{k}$

事实上，假设 $n$ 个不同元素的 $k-$ 圆周排列数为 $x$，很明显，我们将同一个这样的圆周排列从其中相邻的两个元素间剪开，它会贡献一个**线排列**，很明显，1 个圆周排列会贡献 $k$ 个线排列，因此有 $kx=A_n^k\Rightarrow x=\frac{A_n^k}{k}$



1. （全国卷）定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$ 如下：$\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 $m$ 项为 0，$m$ 项为 1，且对任意 $k\leq 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数。若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有（　　）

（A）18 个　　（B）16 个　　（C）14 个　　（D）12 个

**【巧解】：由 Catalan 定理知：** 项数为 $2m$ 的“01 规范数列”的个数为如下的 catalan 数，$c_m=\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}$。

本题中 $m=4$，故有 $\frac{1}{4+1}C_8^4=14$ 个“01 规范数列”。

**【解法二】** 易知：$a_1=0,a_8=1$，我们按照 $a_2,a_3,a_4$ 中 1 的个数进行分类讨论

（1）$a_2,a_3,a_4$ 全为 0，符合要求，有 1 种

（2）$a_2,a_3,a_4$中有1个1，$a_5,a_6,a_7$中必有1个0，不管位置如何均满足要求，有$C_3^1C_3^1$种

（3）$a_2,a_3,a_4$中有2个1

101型，则必有$a_5=0$，剩下1个0在$a_6,a_7$位置均可，有$C_2^1$种

011型，则必有$a_5=0$，剩下1个0在$a_6,a_7$位置均可，有$C_2^1$种

综上：共有$1+C_3^1C_3^1+C_2^1+C_2^1$=14种。

2. 从$1,2,3,\cdots,20$中选取四元数组$\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$，满足$a_2-a_1\geq 3, a_3-a_2\geq 4, a_4-a_3\geq 5$，则这样的四元数组$\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$的个数为（　　）

A．$C_9^4$　　B．$C_{10}^4$　　C．$C_{11}^4$　　D．$C_{12}^4$

**【解】**令$x_1=a_1, x_2=a_2-2, x_3=a_3-5$，　$x_4=a_4-9$，

显然：$x_1\geq 1$，$x_2-x_1=(a_2-2)-a_1=a_2-a_1-2\geq 1$，

$x_3-x_2=(a_3-5)-(a_2-2)=a_3-a_2-3\geq 1$，

$x_4-x_3=(a_4-9)-(a_3-5)=a_4-a_3-4\geq 1$，且

$x_4=a_4-9\leq 11$，数组$(a_1,a_2,a_3,a_4)$与$(x_1,x_2,x_3,x_4)$一一对应，问题转化为求数组$(x_1,x_2,x_3,x_4)$的个数，其中$1\leq x_1<x_2<x_3<x_4\leq 11$

显然，其个数为$C_{11}^4$。

3. 如图所示，某地有一段网格状公路，小王开车从$A$处出发，选择最近的路线去往$B$处。因道路检修，虚线处公路无法行驶。若行至$S$路口处，小王会随机选择开向$C,D$两个路口之一，再选择避开$S$的最近路线继续行至$B$处，则小王共有（　　）种不同的行驶路线

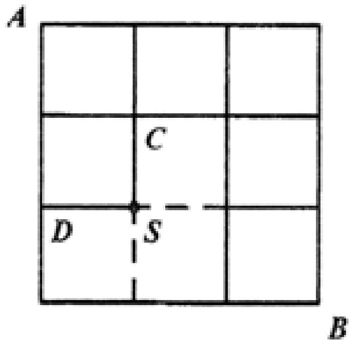
A、11　　B、20　　C、21　　D、23

**【解】**分两种情况，

情形一：不经过$S$，有$C_6^3-C_3^1C_3^1=11$条；

情形二：经过$S$，由$A\to S$有$C_3^1$种，此时由$C$方向到$B$有3种，由$D$方向到$B$有1种，共4种；

综上，有$11+C_3^1\times 4=23$（种）满足要求的行驶路线




4. 用$a$代表红球，$b$代表蓝球，$c$代表黑球.由加法原理及乘法原理，从1个红球和1个蓝球中取出若干个球的所有取法可由$(1+a)(1+b)$的展开式$1+a+b+ab$表示出来，如：“1”表示一个球都不取、“$a$”表示取出一个红球、而“$ab$”则表示把红球和蓝球都取出来.依此类推，下列各式中，其展开式可用来表示从5个无区别的红球、5个无区别的蓝球、5个有区别的黑球中取出若干个球，且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是(　　)

A.$\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)\left(1+b^5\right)(1+c)^5$

B. $\left(1+a^5\right)\left(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5\right)(1+c)^5$

C.$(1+a)^5\left(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5\right)\left(1+c^5\right)$

D.$\left(1+a^5\right)(1+b)^5\left(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5\right)$

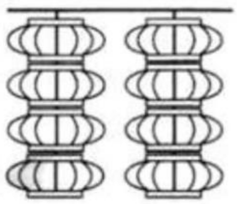
**【解】**分三步：第一步，5个无区别的红球可能取出0个，1个，…，5个，则有$\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)$种不同的取法；

第二步，5个无区别的蓝球都取出或都不取出，则有$\left(1+b^5\right)$种不同取法；

第三步，5个有区别的黑球看作5个不同色，从5个不同色的黑球中任取0个，1个，…，5个，有$(1+c)^5$种不同的取法，

所以，所求的取法种数可用$\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)\left(1+b^5\right)(1+c)^5$的展开式来表示，故选A.

5. 元宵节灯展后，悬挂有8盏不同的花灯需要取下，如图所示，每次取1盏，则不同的取法有（　　）种



A.32　　　　B.70　　　　C.90　　　　D.280

**【解】**8 盏花灯可以产生 $A_8^8$ 种不同的排列，由于有两串花灯，每串只有 1 种取法，但其却产生了 $A_4^4$ 种不同的排列，故符合要求的取法有：$\dfrac{A_8^8}{A_4^4A_4^4}=70$ 种。

**【法二】**在桌子上从左到右安排 8 个位置，给两串花灯从下到上分别贴上 $a,b,c,d$ 和 $x,y,x,w$ 标签，每取一个花灯，按从左到右的顺序依次放在桌子上的 8 个位置，取完则得到一个排列，此排列中，$a,b,c,d$ 和 $x,y,x,w$ 的左、右顺序不变，反之，从桌子上 8 个位置中任取 4 个位置，从左到右分别放上 $a,b,c,d$，剩下的位置从左到右分别放上 $x,y,x,w$，则对应了 1 种取法，显然这种对应关系是一对一的，因此，总共有 $C_8^4=70$ 种不同的取法。

6.　从集合 $\{1,2,3,\cdots,20\}$ 中任取 $3$ 个不同的数，使得这 3 个数成等差数列，则不同的等差数列有（　　　）个。

A.$180$　　　　B.$90$　　　　C.$100$　　　　D.$160$

**【解】**设取出的三个数为 $a,b,c$，且 $a,b,c$ 成等差数列，则 $a+c=2b$，因此，$a,c$ 必定同为奇数，或同为偶数；

又由于题中的 20 个自然数中，刚好 10 个奇数、10 个偶数，且其中任意两个奇数（或任意两个偶数）的平均数仍在这 20 个自然数中，因此，一旦取定 $a,c$，则 $b$ 就定下来了。

因此，选法有两类；

第一类：$a,c$ 同为奇数，共有 $A_{10}^2=10\times9=90$ 种；

第二类：$a,c$ 同为偶数，共有 $A_{10}^2=10\times9=90$ 种；

因此，满足要求的数列有 $180$ 个。选 A。

7.　从 $1,2,3,4,\cdots,9$ 这 $9$ 个数中任取 2 个数，分别作为一个对数的底数和真数，则所得不同的值有（　　　）个。

A.$64$　　　　B.$53$　　　　C.$56$　　　　D.$51$

**【解】**（1）取出的 2 个数中有 1 时，1 只能为真数，

由于 $\log_2 1=\log_3 1=\cdots=\log_9 1=0$，此时，对数的值只有 1 个。

（2）取出的 2 个数中不含 1 时，1 个作底数，1 个作真数，共有 $A_8^2$ 个对数值，

考虑到 $\log_2 4=\log_3 9,\log_4 2=\log_9 3$，$\log_2 3=\log_4 9,\log_3 2=\log_9 4$，

故，此时，不同的对数值共有 $A_8^2-4=52$ 个

综合（1）（2），不同的对数值共有 $53$ 个，选 B。

8. 现有一分硬币 3 枚，二角纸币 6 张，十元纸币 4 张，则它们共可组成_____种非零的币值。

【解】此处采用分步计数原理。由于有 3 个币种，因此每一个币值的构成分成三步。

第一步：取硬币（可以不取），有不取、取 1 枚、2 枚、3 枚共 4 种取法

第二步：取二角纸币（可以不取），共有 7 种取法；

第三步：取十元纸币（可以不取），共有 5 种取法；

由乘法原理，共有$4\times7\times5=140$种取法，

但其中有一种对应零币值，不合要求，

故，符合要求的取法有$140-1=139$种。

9. 2 张 100 元纸币，3 张 50 元纸币，4 张 10 元纸币可以凑出____种非零币值。

【解】4 张 10 元纸币凑不出 50 元，但 3 张 50 元纸币用其 2 张就可凑出 100 元，因此 2 张 100 元纸币可以看成是 4 张 50 元纸币，问题转化为用 4 张 10 元纸币、7 张 50 元纸币可以凑出多少种非零币值?

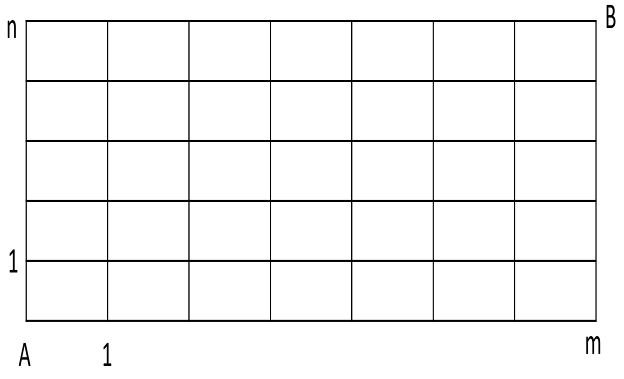
显然，4 张 10 元纸币有 5 种取法（1 张不用也算 1 种取法），7 张 50 元纸币有 8 种取法，

故可以凑出$5\times8-1=39$种非零币值。

10. $2n$个人排成一列进入剧场，入场费为 50 元，但$2n$中的$n$个人只带有 50 元一张的纸币，另外$n$个人只带有 100 元一张的纸币，售票处为机器售票，且刚开始时，机器是空的，没钱。问：有____种队列，使得只要有带 100 元/张纸币的人买票，机器就能找零？（假设这些人是不可区分的）

【解】如果我们将 50 元纸币看成$+1$，将 100 元纸币看成$-1$，由 **Catalan 定理**知：这种队列的个数为$\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$。

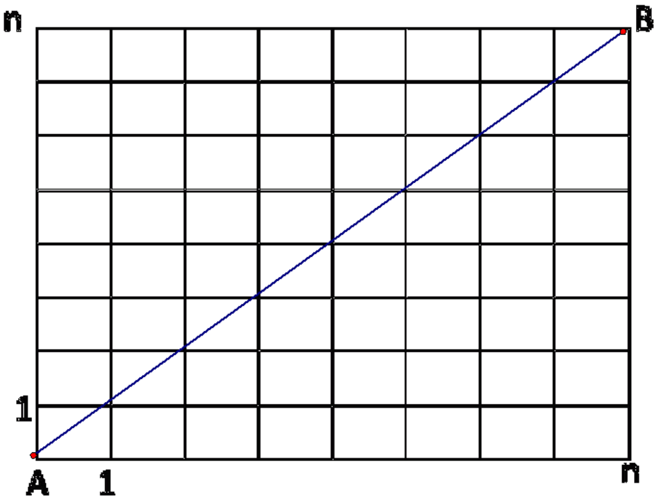
11. 假设有如下的$n\times m$型街道，问从 A 到 B 的最短路径有多少条?



【解】 $A \to B$需走$n+m$步，其中$m$步横着走（剩下的都只能竖着走，别无选择），因此最短路径的条数为$C_{n+m}^{m}$。

12. 假设有如下的$n \times n$型街道，问从 A 到 B，且不能越过对角线的最短路径有____条。

【解】：我们仅需考虑对角线 AB 之上的走法。如果每竖着走一步，我们排一个 1，每横着走一步，我们排一个-1，这样，每一条符合要求的路径就对应 catalan 定理中的一个数列，因此，由 catalan 定理知：对角线 AB 上边的最短路径有$\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$；考虑到对角线 AB 下边的情况，知：满足要求最短路径一共有：$\dfrac{2}{n+1}C_{2n}^{n}$条。




13. 已知集合$A=\{1,2,3,\cdots,50\}$，集合$B=\{1,2,3,\cdots,25\}$，$f$为集合$A$到$B$的映射，满足$f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(50)$，且集合$B$中任意一个元素都有原像，则这样的$f$有______个。

【解】我们将$1,2,3,\cdots,50$从小到大排成一排，考察数字 1 与 2 之间，2 与 3 之间，…，49 与 50 之间共形成的 49 个空格，从这 49 个空格中任取 24 个空格，在取出的 24 个空格中分别插上 1 支筷子，从左到右，第 1 支筷子左边的数全部对应集合$B$中的 1，第 1 支筷子与第 2 支筷子之间的元素全部对应集合$B$中的 2，…，第 23 支筷子与第 24 支筷子之间的元素全部对应集合$B$中的 24，第 24 支筷子右边的元素全部对应集合$B$中的 25，这样，我们就构造出一个从集合$A$到$B$的映射，该映射显然满足要求，故，符合要求的映射$f$有$C_{49}^{24}$个。


14. 对一个五位数，如果它的十位数字比个位和百位数字大，它的千位数字比百位数字和万位数字大，则称这样的数为波浪数，现由 1，2，3，4，5，6，7 七个数字组成五重复数字的五位波

浪数，则这样的波浪数有______个

**【解】**我们将十位和千位数字称为波峰数字，我们以 1，2，3，4，5 五个数字组成的波浪数为例，显然，波峰数字有如下 2 种情况

（1）波峰数字为 4 和 5，这样的波浪数有 $A_2^2A_3^3=12$ 个

（2）波峰数字为 5 和 3，则 4 的位置被 5 限制，这样的波浪数有 $A_2^2A_2^2=4$ 个

故，由 1，2，3，4，5 构成的五位波浪数有 16 个.

事实上，由任意 5 个不同数字构成的五位波浪数都是 16 个。

故，本题中符合要求的五位波浪数有：$C_7^5\times16=336$ 个

15. 若从集合 $\{x|-3\le x\le 4, x\in Z\}$ 的元素中任取 3 个不同的数字作为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的 3 个字母 $a,b,c$，则共能组成过原点且顶点在第一象限或第三象限的抛物线的条数是______。

**【解】**由题意知：$a\ne0,c=0$，点 $(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2}{4a})$ 位于第一象限或第三象限，题中集合有 3 个负数，4 个正数。

（1）$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}>0\\-\dfrac{b^2}{4a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$，有 $C_3^1C_4^1$ 种，（2）$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}<0\\-\dfrac{b^2}{4a}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$，有 $A_4^2$ 种

综合（1）（2），共有 $C_3^1C_4^1+A_4^2=24$ 条。

16. 圆周上有 8 个等分圆周的点，以这些等分点为顶点的锐角三角形或钝角三角形的个数为______。

**【解】**8 个等分点构成 4 条直径，由于直径所对的圆周角为直角，每条直径对应 6 个直角三角形，4 条直径对应 24 个直角三角形，因此，满足要求的斜三角形有 $C_8^3-24=32$ 个。

17. 8 个女孩，25 个男孩围成一圈坐下，任意两个女孩之间至少坐两个男孩，则共有______种不同的排列方法（圆圈旋转后能重合的被认为是相同的）

**【解】**先让 25 个男孩作圆周排列，有 $\dfrac{A_{25}^{25}}{25}=24!$ 种排法。对每一个圆周排列，25 个男孩之间产生了 25 个空格，假定有个女孩叫张山，我们从张山开始，她显然可坐 25 个空位中的任意一个，有 25 种座法。不妨令张山坐到 1 号空位，并顺时针将这些空位编号为 2，3，⋯，25 号，另外 7 个女孩所占空位的号数由小到大分别令为 $x_1,x_2,\cdots,x_7$，很明显，每个数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_7)$ 对

应$7!$种坐法。另外，由题意知：$x_1\ge 3, x_2-x_1\ge 2, x_3-x_2\ge 2,\cdots, x_7-x_6\ge 2, x_7\le 24$，令$y_1=x_1, y_2=x_2-1$，$y_3=x_3-2,\cdots, y_7=x_7-6$，则数组$(x_1,x_2,\cdots,x_7)$与$(y_1,y_2,\cdots,y_7)$一一对应，且$3\le y_1<y_2<\cdots<y_7\le 24-6=18$，显然，$(y_1,y_2,\cdots,y_7)$有$C_{16}^7$个，从而，满足要求的排列方法有：$24!\times 25\times C_{16}^7\times 7!=\dfrac{16!25!}{9!}$种。

18. 一只蚂蚁从原点出发，沿$x$轴爬行（正、负方向均可），每次只能爬行1步，1步为1个单位，已知蚂蚁爬行20步后，到达点$P(12,0)$的位置，则蚂蚁不同的爬行方式有_____种

**【解】**令蚂蚁爬行$n$步后，到达点$P_n(x_n,0)$的位置，由题意知：

$x_0=0, x_{20}=12, |x_{i+1}-x_i|=1(0\le i\le 19)$

由于$x_{20}=(x_{20}-x_{19})+(x_{19}-x_{18})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0=12$，

其中每个括号取值为$1$或$-1$，令其中有$x$个取$1$，则有$(20-x)$个取$-1$，因此，由$x-(20-x)=12$得$x=16$，

20个括号的取值一旦确定，则数列$\{x_n\}$就确定了，从而就对应了蚂蚁的一种爬行方式，

故，不同的爬行方式有$C_{20}^4$种。

19. $(1+x+x^2)^8$的展开式中，$x^5$的系数为_____

**【解】**$(1+x+x^2)^8=(1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x+x^2)$，

$x^5$的构成方式有如下三种

（1）2个小括号各出1个$x^2$，另外6个小括号中，任选一个出$x$，其他小括号出常数1，共有$C_8^2C_6^1$种；

（2）1个小括号出$x^2$，从另外7个小括号中任选3个，各出1个$x$，其他小括号出常数1，共有$C_8^1C_7^3$种；

（3）从8个小括号中任选5个，各出1个$x$，其他小括号出常数1，共有$C_8^5$种；

综上，$x^5$的系数为$C_8^2C_6^1+C_8^1C_7^3+C_8^5=504$

20. $(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(10+x)$的展开式中$x^8$的系数为_____

**【解】** $(1+x)(2+x)(3+x)\cdot\cdots\cdot(10+x)$的展开式中，$x^8$可如下构成：从10个括号中任取2个括号，各出1个常数，其余8个括号各出1个$x$，因此$x^8$的系数为$1,2,3,\cdots,10$这10个数字中，任意两个数字之积之和；故$x^8$的系数为

$\frac{1}{2}[(1+2+3+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)]$

$=\frac{1}{2}[(\frac{10}{2}(1+10))^2-\frac{10\times 11\times 21}{6}]=1320$

**【公式一】**: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**【公式二】**: $n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，任意两个之积之和为

$\frac{1}{2}[(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)]$

21. （1）. 整数数组 $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 满足 $0<x_1\le x_2\le x_3\le x_4<7$，这样的数组有个

（2）将 9 本不同的书分成 5 堆，要求其中 1 堆只有 1 本，剩下的 4 堆平均每堆 2 本，则有种不同的分法。

**【解】**（1）由 $0<x_1\le x_2\le x_3\le x_4<7$ 知 $1\le x_1<x_2+1<x_3+2<x_4+3\le 9$，

令 $y_1=x_1,y_2=x_2+1,y_3=x_3+2,y_4=x_4+3$，

显然，$1\le y_1<y_2<y_3<y_4\le 9$，

且数组 $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 与 $(y_1,y_2,y_3,y_4)$ 一一对应，而后者显然有 $C_9^4=126$ 个

故，满足要求的数组 $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 有 $126$ 个。

（2）由于有 4 堆是平均分组，故，共有 $\frac{C_9^2C_7^2C_5^2C_3^2}{4!}=945$ 种不同的分法。

22. 求证：$2222^{5555}+5555^{2222}$ 能被 7 整除。

**【证明】: 因**

$2222^5=(317\times 7+3)^5=(317\times 7)^5+C_5^1(317\times 7)^4\times 3+\cdots+C_5^4(317\times 7)\times 3^4+C_5^5\times 3^5$，

又，$5555^2=(793\times 7+4)^2=(793\times 7)^2+2\times(793\times 7)\times 4+4^2$

由于 $3^5+4^2=243+16=259$ 能被 7 整除，故 $2222^5+5555^2$ 能被 7 整除

考虑到 $2222^{5555}+5555^{2222}=(2222^5)^{1111}+(5555^2)^{1111}=(2222^5+5555^2)\times\Delta$，

其中 $\Delta$ 为正整数，

故 $2222^{5555}+5555^{2222}$ 能被 7 整除。证毕。

23. 设 $x=(5+\sqrt{24})^{2n},y=(5-\sqrt{24})^{2n}$，其中 $n\in N^*$，

（1）求证：$x+y$ 是一个自然数；

（2）求 $x+y$ 的个位数字;

（3）求 $x$ 的个位数字。

（1）**【证明】** $x+y=2(5^{2n}+C_{2n}^{2}5^{2n-2}\times 24+\cdots+24^{n})$ ,

故，$x+y$ 为自然数。

（2）**【解】** 因 $2\times 24^{n}=2(25-1)^{n}$ ，故

$n$ 为偶数时，$x+y$ 的个位数字为 $2$ ;

$n$ 为奇数时，$x+y$ 的个位数字为 $8$ ;

（3）**【解】** 考虑到 $0<y=(5-\sqrt{24})^{2n}<1$，故

$n$ 为偶数时，$x$ 的个位数字为 $1$ ;

$n$ 为奇数时，$x$ 的个位数字为 $7$ 。

24. 如果 $n\in N^{*}$ ，求证：$(3+\sqrt{7})^{n}$ 的整数部分必为奇数。

**【证明】**: 设 $(3+\sqrt{7})^{n}$ 的整数部分为 $x$ , 小数部分为 $y$ , 并令 $z=(3-\sqrt{7})^{n}$ , 显然, $0<z<1$ ,

又 $(3+\sqrt{7})^{n}=3^{n}+C_{n}^{1}3^{n-1}(\sqrt{7})+C_{n}^{2}3^{n-2}(\sqrt{7})^{7}+\cdots+C_{n}^{n}(\sqrt{7})^{n}$ ,

$(3-\sqrt{7})^{n}=3^{n}-C_{n}^{1}3^{n-1}(\sqrt{7})+C_{n}^{2}3^{n-2}(\sqrt{7})^{2}+\cdots+(-1)^{n}C_{n}^{n}(\sqrt{7})^{n}$

故，$x+y+z=2(3^{n}+C_{n}^{2}3^{n-2}\cdot 7+C_{n}^{4}3^{n-4}\cdot 7^{2}+\cdots)$ 必为偶数,

考虑到 $0<y<1,0<z<1$，故必有 $y+z=1$ ,

故，$x$ 的个位数必为奇数。