§ 9.2 椭圆的基本性质

9.2.1 相关概念

学习提纲

1　焦点三角形问题

2　斜率积定理

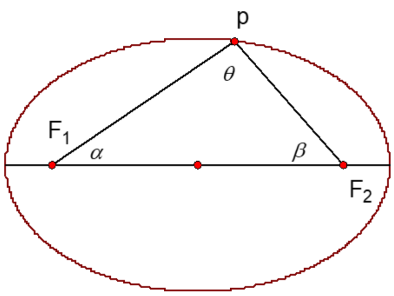
3　带倾斜角的焦半径和弦长问题

焦点三角形中的重要结论

结论：如图，设椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$P$ 为椭圆上异于长轴端点的任意点，F_1、F_2 为椭圆的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，$\angle PF_1F_2=\alpha, \angle PF_2F_1=\beta$，则

（1）$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$，　　（2）$PF_1\bullet PF_2=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$

（3）$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$　　（4）$e\geq\sin\frac{\theta}{2}$



证明：（1）令 $PF_1=x, PF_2=y$，由余弦定理知

$$4c^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta=(x+y)^2-2xy-2xy\cos\theta$$

$$=4a^2-2xy(1+\cos\theta)=4a^2-2xy\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow xy\times\cos^2\frac{\theta}{2}=a^2-c^2\Rightarrow xy=\frac{b^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})=b^2\tan\frac{\theta}{2}$$

（2）由余弦定理知

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta$$

$$=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos\theta)$$

故$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{2a^2-2c^2}{(1+\cos\theta)}=\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}$

(3)：$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{F_1F_2}{PF_1+PF_2}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

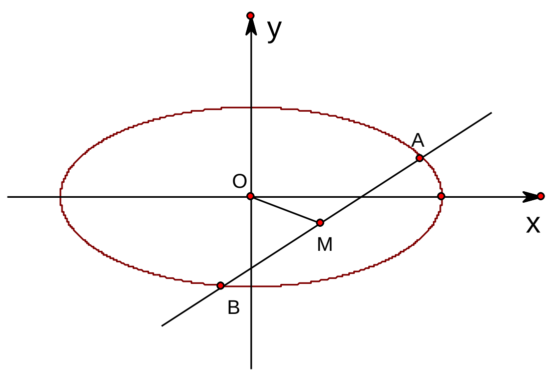
$=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$，

因此$\dfrac{1-e}{1+e}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}$

(4)：由（3）有$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\geq\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos(90^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\sin\dfrac{\theta}{2}$，仅当$\alpha=\beta$时取等号。

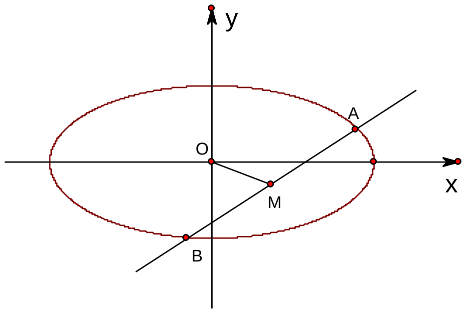
斜率积定理

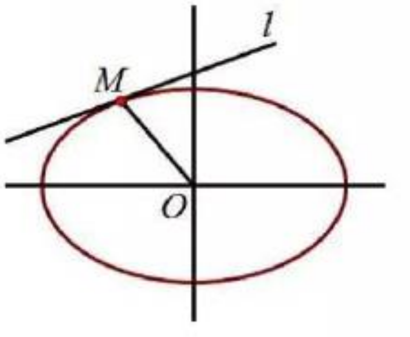
定理 1、如图，AB 为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的任意一条弦，$M$ 为 AB 的中点，O 为坐标原点，如k_{OM},k_{AB}均存在，则$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$



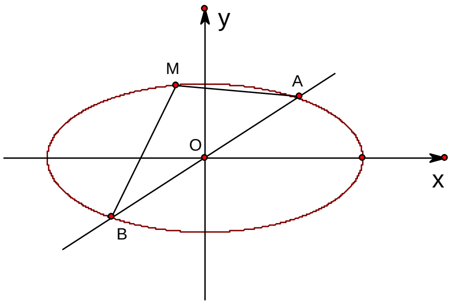
推论：若l为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上不垂直于对称轴的切线，$M$ 为切点，如图，则

$k_{OM} \cdot k_l = -\dfrac{b^2}{a^2}$





定理 2、M 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点，A、B 是椭圆上关于原点对称的两个点，如 k_{MA}, k_{MB} 均存在，则 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\dfrac{b^2}{a^2} = e^2-1$



【注意】 对于椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

定理 1 变为： $k_{OM} \cdot k_{AB} = -\dfrac{a^2}{b^2}$；　　　**定理 2 变为：** $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\dfrac{a^2}{b^2}$。

我们仅对**定理 1** 进行证明，**定理 2** 留给读者（同样可用**点差法**证明）。

【证明】： 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $M(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2})$，$\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{b^2}=1$

两式相减并因式分解，得

$$\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow k_{OM}k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2-1$$

定理 3.椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 为椭圆 C 上的动点，且满足

$k_{OA} \bullet k_{OB} = -\dfrac{b^2}{a^2}$，则有

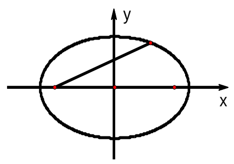
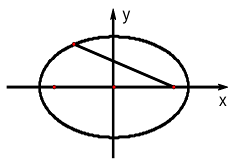
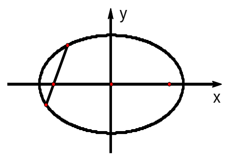
（1） $OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$　　　　（2） $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}ab$

【注意】该定理的逆定理也成立，即题中椭圆如果满足（1）或（2），则必有 $k_{OA} \bullet k_{OB} = -\dfrac{b^2}{a^2}$。

定理 4. P,Q 为椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 上任意两点，且 $OP \perp OQ$，则

$\dfrac{1}{|OP|^2} + \dfrac{1}{|OQ|^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ ；

带倾斜角的焦半径和焦点弦问题

θ 为 F_1P 与 x 轴正向夹角	θ 为 F_2P 与 x 轴正向夹角	θ 为 AB 与 x 轴正向夹角
		
$F_1P = a + ex = \dfrac{b^2}{a - c\cos\theta}$	$F_2P = a - ex = \dfrac{b^2}{a + c\cos\theta}$	$AB = \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta}$
		$AB = 2a + e(x_1 + x_2)$
		$AB = \sqrt{1+k^2}\left\|x_2 - x_1\right\|$

坐标表示：左加右减

倾斜角表示：分母左减右加

9.2.2 典型例题

例 1.若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 存在一点 P ,使得 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$，则椭圆的离心率的取值范围为（　　）

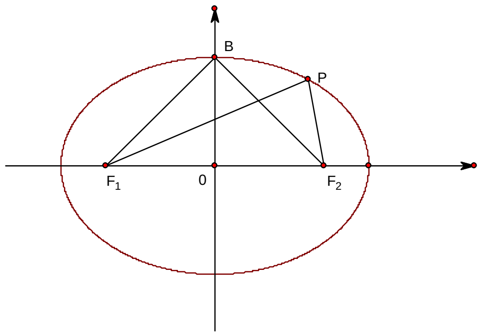
【巧解】由 $e \ge \sin\dfrac{\theta}{2} = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，知 e 的取值范围为 $[\dfrac{1}{2},1)$

【解法二】设 B 为椭圆的上顶点，则 $\angle OBF_2 \ge 30^\circ$

因此，$\tan\angle OBF_2 = \dfrac{c}{b} \ge \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $\frac{c}{b}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3c^2\geq b^2\Rightarrow 4c^2\geq a^2\Rightarrow e\geq\frac{1}{2}$

故，e 的取值范围为 $[\frac{1}{2},1)$。



例 2（1）：已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$A,B$ 为椭圆 C 上两动点，且 $k_{OA}\bullet k_{OB}=-\frac{3}{4}$，则 $S_{\triangle OAB}$ =（　　）

（2）已知 P,Q 为椭圆 $x^2+2y^2=1$ 上的两个不同点，满足 $|OP|^2+|OQ|^2=\frac{3}{2}$，则 $k_{OP}\bullet k_{OQ}$ =（　　）

【巧解】（1）：显然，$k_{OA}\bullet k_{OB}=-\frac{b^2}{a^2}$，由**定理** 3 知 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

（2）易知 $a^2=1,b^2=\frac{1}{2}$，$|OP|^2+|OQ|^2=\frac{3}{2}=a^2+b^2$，

由**定理** 3 知：$k_{OP}\bullet k_{OQ}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$

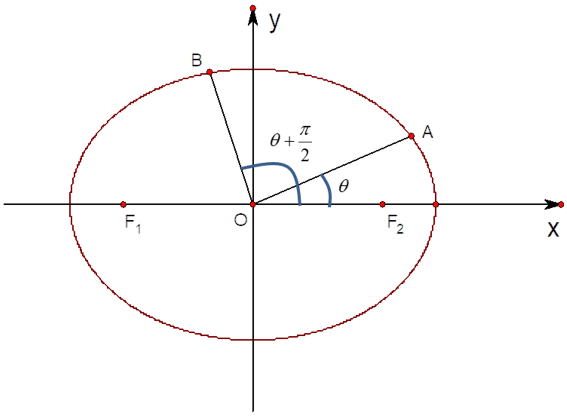
例 3. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上有两点 A,B，满足 $OA\perp OB$，O 为原点，求证：$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ 为定值。

【证明】不妨令 $A(|OA|\cos\theta,|OA|\sin\theta)$，$B(-|OB|\sin\theta,|OB|\cos\theta)$，

则 $\frac{OA^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{OA^2\sin^2\theta}{b^2}=1\Rightarrow\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{OA^2}$

同理 B 在椭圆上，得到 $\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{OB^2}$

上面两式相加，得 $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$



例 4（全国卷）．椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是(　　)

A. $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$　　B. $[\frac{3}{8},\frac{3}{4}]$　　C. $[\frac{1}{2},1]$　　D. $[\frac{3}{4},1]$

【解析】 $k_{PA_1}k_{PA_2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow k_{PA_1}=-\frac{3}{4}\times\frac{1}{k_{PA_2}}=-\frac{3}{4}\times[-1,-\frac{1}{2}]=[\frac{3}{8},\frac{3}{4}]$，选 B。

【常规】 易知 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$，当 $k_{PA_2}=-2$ 时，得直线 PA_2 的方程为 $y=-2(x-2)$，与椭圆方程联立，解得 $P(\frac{26}{19},\frac{24}{19})$，得 $k_{PA_1}=\frac{3}{8}$；

当 $k_{PA_2}=-1$ 时，得直线 PA_2 的方程为 $y=-(x-2)$，与椭圆方程联立，解得 $P(\frac{2}{7},\frac{12}{7})$，得 $k_{PA_1}=\frac{3}{4}$；

综上，得 k_{PA_1} 的取值范围为 $[\frac{3}{8},\frac{3}{4}]$，选 B。

例 5．过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交 A,B 两点，若 M 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率等于______

【解】 由题意知：$k_{AB}=-\frac{1}{2}$，$k_{OM}=1$，故 $k_{AB}k_{OM}=e^2-1\Rightarrow e^2-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 6．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交 E 于 A,B 两点．若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为(　　)

A. $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

【巧解】 令 AB 中点为 $M(1,-1)$，则 $k_{OM}=-1, k_{AB}=\dfrac{0-(-1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}$，

由 $k_{OM}\bullet k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 知：$-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a^2=2b^2$，只能选 D。

例 7．已知 P,Q 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的动点，直线 PQ 与圆 $M:(x-1)^2+y^2=1$ 相切，切点 A 恰为线段 PQ 的中点，当直线 PQ 斜率存在时点 A 的横坐标为 （　　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{4}{3}$　　C. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】 令 $A(x_0,y_0)$，则直线 PQ 的方程为 $(x_0-1)(x-1)+y_0y=1$，因此 $k_{PQ}=-\dfrac{x_0-1}{y_0}$；

又 $k_{OA}=\dfrac{y_0}{x_0}$，由椭圆的性质知：$k_{OA}\cdot k_{PQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}\Rightarrow\dfrac{y_0}{x_0}\times(-\dfrac{x_0-1}{y_0})=-\dfrac{4}{16}\Rightarrow x_0=\dfrac{4}{3}$，选 A。

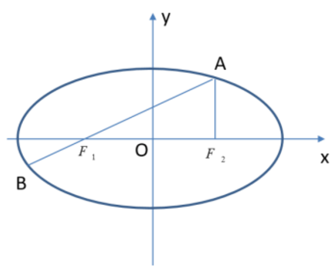
例 8．设 F_1、F_2 分别是椭圆 $E:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点．若 $|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为______

【巧解】 令 $\angle AF_1x=\theta$，则 $|F_1A|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|F_1B|=\dfrac{b^2}{a-c\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

故 $\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}=\dfrac{3b^2}{a+c\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{a}{2c}\Rightarrow|F_1A|=\dfrac{2b^2}{a}=2b^2$

又 $AF_2\perp x$ 轴，故 $|F_2A|=\dfrac{b^2}{a}=b^2$，故 $3b^2=2a\Rightarrow b^2=\dfrac{2}{3}$

从而，椭圆 E 的方程为 $x^2+\dfrac{3}{2}y^2=1$



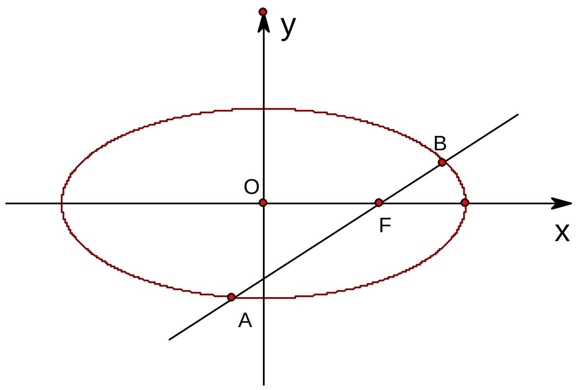
例 9.倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$右焦点$F$，与椭圆交于$A$、$B$两点，且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则该椭圆的离心率为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解】如图，由题意知FB与x轴正向的夹角为$\frac{\pi}{4}$，FA与x轴正向的夹角为$\frac{5\pi}{4}$，由

$|FB|=\frac{1}{2}|FA|$得$\dfrac{b^2}{a+c\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\times\dfrac{b^2}{a+c\cos\frac{5\pi}{4}}\Rightarrow\dfrac{2a+\sqrt{2}c}{2a-\sqrt{2}c}=2$，

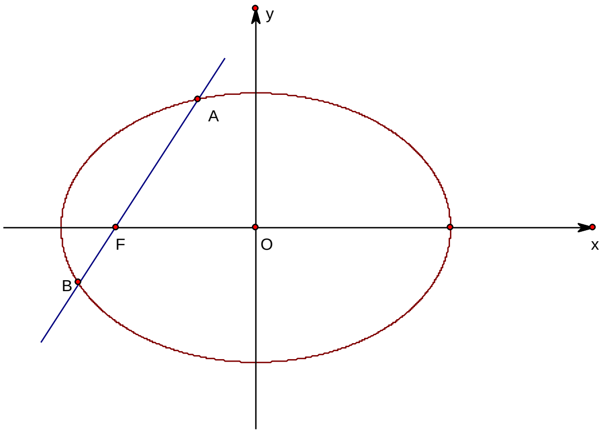
得$\dfrac{2+\sqrt{2}e}{2-\sqrt{2}e}=2$，解得$e=\frac{\sqrt{2}}{3}$



例 10. 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，过$F$的直线与椭圆交于$A,B$两点，$AB$的倾斜角为$60^\circ$，且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则椭圆的离心率为_____

【解】由题意知：$\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a-c\cos60^\circ}}{\dfrac{b^2}{a-c\cos(180^\circ+60^\circ)}}=\dfrac{a+c\cos60^\circ}{a-c\cos60^\circ}=\dfrac{2a+c}{2a-c}=\dfrac{2+e}{2-e}=2$，

解得$e=\frac{2}{3}$



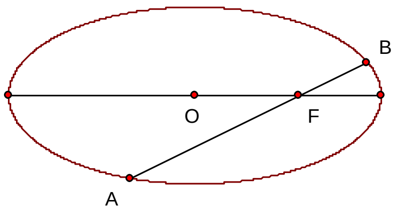
例 11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A,B 两点．若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

【解】 令 AB 的倾斜角为 θ，如图所示，由题意得

$$\frac{|\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{FA}|}=\frac{\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}}{\dfrac{b^2}{a+c\cos(\pi+\theta)}}=\frac{a-c\cos\theta}{a+c\cos\theta}=\frac{1-e\cos\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{1}{3},$$

解得 $e\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，从而 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，进而得 $k=\tan\theta=\sqrt{2}$，选 B。



例 12. 设 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，且 $MF_2\perp x$ 轴，直线 MF_1 与 C 的另一个交点 N，若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，则椭圆的方程为______

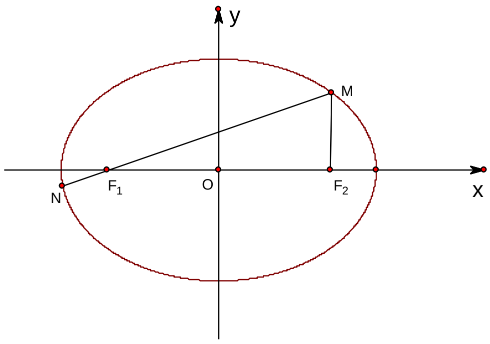
【解】 令 MN 的倾斜角为 θ，如图，有 $\overrightarrow{MF_1}=4\overrightarrow{F_1N}$，

故$\dfrac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{F_1N}|}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}}{\dfrac{b^2}{a-c\cos(\pi+\theta)}}=\dfrac{a+c\cos\theta}{a-c\cos\theta}=4$，故$\cos\theta=\dfrac{3a}{5c}$，从而$|\overrightarrow{MF_1}|=\dfrac{5b^2}{2a}$

易知：$|MF_2|=\dfrac{b^2}{a}=4,$ 故$|\overrightarrow{MF_1}|=\dfrac{5}{2}|\overrightarrow{MF_2}|=10$

由$|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2a=14\Rightarrow a=7$，故$b^2=4a=28$

从而椭圆方程为$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{28}=1$。



例 13、已知圆C的方程$(x-1)^2+y^2=1$，P是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$上一点，过$P$作圆的两条切线，切点为$A$、$B$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围为（　）

A. $[2\sqrt{2}-3,\dfrac{56}{9}]$　　　　B. $[\dfrac{56}{9},+\infty)$

C. $(-\infty,2\sqrt{2}-3]$　　　　D. $(-\infty,2\sqrt{2}-3]\cup[\dfrac{56}{9},+\infty)$

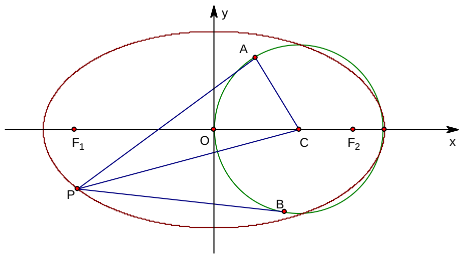
【巧解】$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\alpha$ 有界，不可能无限大，只能选 A。

【另解】如图，令$\angle APB=2\theta$，易知$|\overrightarrow{PA}|^2=PC^2-r^2$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|^2\cos 2\theta=|\overrightarrow{PA}|^2(2\cos^2\theta-1)=PC^2+\dfrac{2r^4}{PC^2}-3r^2=PC^2+\dfrac{2}{PC^2}-3$

显然$1\le PC\le 3$，故$1\le PC^2\le 9$

考虑函数$f(x)=x+\dfrac{2}{x}-3(x\in[1,9])$，易得$f_{\min}(x)=2\sqrt{2}-3,\ \ f_{\max}(x)=\dfrac{56}{9}$



例 14. 已知 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，P 在椭圆上且满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=c^2$，则此椭圆离心率的取值范围是（　　）

A．$[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$　　B．$[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$　　C．$[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$　　D．$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

【巧解】 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=c^2\Rightarrow\overrightarrow{PO}^2-c^2=c^2\Rightarrow\overrightarrow{PO}^2=2c^2$，又 $b\le|\overrightarrow{PO}|\le a$，故 $b^2\le 2c^2\le a^2$，解得 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le e\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

【法二】：设 $P(x,y)$，则 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$，$-a\le x\le a$，

则 $\overrightarrow{PF_1}=(-c-x,-y)$，$\overrightarrow{PF_2}=(c-x,-y)$，

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x^2-c^2+y^2=(1-\dfrac{b^2}{a^2})x^2+b^2-c^2=\dfrac{c^2}{a^2}x^2+b^2-c^2$，

因为 $-a\le x\le a$，所以 $b^2-c^2\le\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\le b^2$，

所以 $b^2-c^2\le c^2\le b^2\Rightarrow 2c^2\le a^2\le 3c^2$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\dfrac{c}{a}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．故选 B．

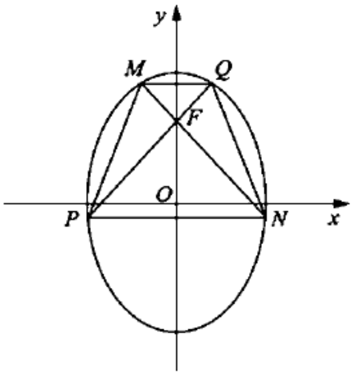
例 15． P,Q,M,N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点．已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线，$\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线，且 $\overrightarrow{PF}\bullet\overrightarrow{MF}=0$．求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值．

解：易知 $a=\sqrt{2},\ b=c=1$，PQ 与 MN 是互相垂直的焦点弦，如图，不妨令 MN 与 y 正向夹角为 θ，PQ 与 y 正向夹角为 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$，则 $MN=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}$，

$$PQ=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}$$

因此，$S=\frac{1}{2}MN\times PQ=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}\times\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}=\frac{4}{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$

显然，$S_{\max}=2$，$S_{\min}=\frac{16}{9}$



例 16.已知点 $A(-2,0),B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$。记 M 的轨迹为曲线 C。

（1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 C 于 P,Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G.

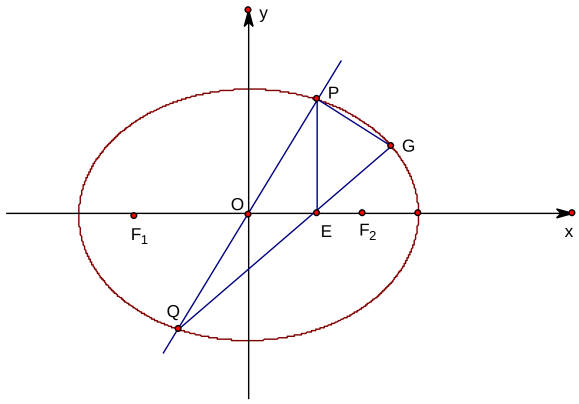
（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；（ii）求 $\triangle PQG$ 面积的最大值.

【解】（1）由题设得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(|x|\neq 2)$，

所以，C 为中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆，不含左右顶点.

（2）（i）**【证明】**设直线 PQ 的斜率为 $k(k>0)$，其方程为 $y=kx$，与椭圆方程联立，解得 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$.

记 $u=\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，则 $P(u,uk),Q(-u,-uk),E(u,0)$.



于是直线QG的斜率为$\frac{k}{2}$，方程为$y=\frac{k}{2}(x-u)$.

将其与椭圆方程联立，化简得$(2+k^2)x^2-2uk^2x+k^2u^2-8=0$. ①

设$G(x_G,y_G)$，则$-u$和x_G是方程①的解，故$x_G=\frac{u(3k^2+2)}{2+k^2}$，由此得$y_G=\frac{uk^3}{2+k^2}$.

从而直线PG的斜率为$\frac{\frac{uk^3}{2+k^2}-uk}{\frac{u(3k^2+2)}{2+k^2}-u}=-\frac{1}{k}$. 所以$PQ\perp PG$，即$\triangle PQG$是直角三角形.

（ii）【解】利用公式$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|$，并参考（i）得

$|PQ|=2u\sqrt{1+k^2}$，$|PG|=\frac{2uk\sqrt{k^2+1}}{2+k^2}$，

所以$\triangle PQG$的面积$S=\frac{1}{2}|PQ||PG|=\frac{8k(1+k^2)}{(1+2k^2)(2+k^2)}=\frac{8(\frac{1}{k}+k)}{1+2(\frac{1}{k}+k)^2}$

设$t=k+\frac{1}{k}$，则由$k>0$得$t\geq 2$，当且仅当$k=1$时取等号.

因为$S=\frac{8t}{1+2t^2}=\frac{8}{2t+\frac{1}{t}}$在$[2,+\infty)$单调递减，所以当$t=2$，即$k=1$时，$S$取得最大值，最大值为$\frac{16}{9}$.

因此，$\triangle PQG$面积的最大值为$\frac{16}{9}$.

例 17.已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$左、右焦点分别为$F_1,F_2$，上顶点为$A$，离心率为

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$.

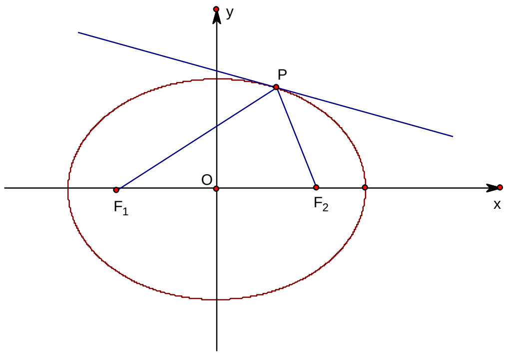
（1）求 E 的方程；

（2）直线 l 与 E 相切于点 P，直线 m 过点 F_1 经点 P 被直线 l 反射得反射光线 n. 问：直线 n 是否经过 x 轴上一个定点？若经过，求出该点的坐标；若不经过，说明理由.

【解】（1）设 $F_2(c,0)$，由题意得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ b=1\end{cases}$，

又 $a^2=b^2+c^2$，所以有 $a=\sqrt{2},c=1$，

故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.



（2）当直线 l 的斜率为 0 时，则直线 l 与 E 相切于短轴的一个顶点，由椭圆的对称性可知，直线 n 经过 x 轴上的点 $F_2(1,0)$.

当直线 l 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$（$m\neq 0$），将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，$\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=0$，

整理得 $m^2=2k^2+1$，从而 $x_P=-\dfrac{2km}{1+2k^2}=-\dfrac{2k}{m}$，

所以 $y_P=\dfrac{1}{m}$，即 $P(-\dfrac{2k}{m},\dfrac{1}{m})$，

所以 $\overrightarrow{F_2P}=(-\dfrac{2k+m}{m},\dfrac{1}{m})$.

设F_1关于直线l的对称点为$Q(x_0, y_0)$，则有，$\begin{cases} \dfrac{y_0}{x_0+1} = -\dfrac{1}{k} \\ \dfrac{y_0}{2} = k \times \dfrac{x_0-1}{2} + m \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x_0 = \dfrac{k^2-2mk-1}{k^2+1} \\ y_0 = -\dfrac{2k-2m}{k^2+1} \end{cases}$，即$Q(\dfrac{k^2-2mk-1}{k^2+1}, -\dfrac{2k-2m}{k^2+1})$.

所以$\overrightarrow{F_2Q} = (-\dfrac{2mk+2}{k^2+1}, -\dfrac{2k-2m}{k^2+1})$.

又$\dfrac{2k+m}{m} \times \dfrac{2k-2m}{k^2+1} - (-\dfrac{2mk+2}{k^2+1}) \times \dfrac{1}{m} = \dfrac{2\left(2k^2+1-m^2\right)}{m\left(k^2+1\right)} = 0$

所以$\overrightarrow{F_2P} // \overrightarrow{F_2Q}$，即$P, Q, F_2$三点共线，所以直线$n$经过点$F_2(1,0)$.

当直线l斜率不存在时，直线n即为x轴，也经过点F_2.

综上，直线n经过x轴上一个定点$F_2(1,0)$.