§ 2.2 函数的单调性和周期性

2.2.1 相关概念

单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，对于区间 $D\subseteq I$，如对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$时，都有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，则称 $f(x)$ 是区间内 D 上的单调递增函数; 如果对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$，都有 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，则称 $f(x)$ 是区间 D 上的单调递减函数。单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数。

函数的单调性的等价关系

对任意 $x_1,x_2\in\left[a,b\right],x_1\neq x_2$，那么

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)\text{在}\left[a,b\right]\text{上单调递增;}$$

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)\text{在}\left[a,b\right]\text{上单调递减}$$

重要结论

(1) 如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是减函数;

(2) 如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是增函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是增函数;

(3) 如 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都是减函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数;

(4) 如 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都是增函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数;

(5) 如 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 一增一减，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是减函数;

注意： 函数的单调性是对某个区间而言的，所以要受到区间的限制．例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 分别在 $\left(-\infty,0\right)$, $\left(0,+\infty\right)$ 内都是单调递减的，但不能说它在整个定义域即 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 内单调递减，只能分开写，即函数的单调减区间为 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $\left(0,+\infty\right)$，不能用“$\cup$”连接．

周期函数

对于函数 $f\left(x\right)$，如果存在正常数 T，使得对任意自变量 x，都有 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 为周期函数，T 称为 $f\left(x\right)$ 的一个周期。如果 T 是 $f\left(x\right)$ 的周期中最小的一个，则称 T 为 $f\left(x\right)$ 的最小正周期。

注意： 周期函数未必一定有最小正周期，比如常数函数

周期函数的几个特征

a) $f(x)=-f(x+a)$，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数。

b) $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数

c) $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=2a$；

d) $f(x)=1-\frac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=3a$；

2.2.2 典型例题

例1、判断下面几个命题的正误：

（1）函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时是增函数，$x<0$ 也是增函数，所以 $f(x)$ 是增函数；

（2）$y=x^2-2|x|-3$ 的递增区间为 $[1,+\infty)$；

（3）两个增函数的积为增函数。

（4）如 $f(x)f(x+3)=1$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数

【解析】：(1) 反例：$f(x)=-\frac{1}{x}$，显然，$f(x)$ 在和 $x>0$ 时分别都是单调递增的，但 $f(-1)>f(1)$，（1）错。

(2) $y=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\le 0\\ x^2-2x-3, & x\ge 0\end{cases}$，$f(x)$ 的递增区间为 $[1,+\infty)$ 和 $[-1,0]$，命题（2）错。

（3）令 $f(x)=x, g(x)=2x$，则 $f(x)g(x)=2x^2$ 在定义域内不单调，（3）错。

（4）易知 $f(x)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x+6)$，（4）对。

例2、（1）根据函数单调性的定义证明函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上单调递增。

（2）讨论函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性。

（3）讨论函数 $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性。

（1）**证明**：对任意的 $x_1,x_2\in[3,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，易知 $\frac{9}{x_1x_2}<1$，从而 $1-\frac{9}{x_1x_2}>0$，

故，$y_1-y_2=(x_1+\frac{9}{x_1})-(x_2+\frac{9}{x_2})=(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)(1-\frac{9}{x_1x_2})<0$

因此，$y=x+\dfrac{9}{x}$ 在$[3,+\infty)$上为单调递增函数，证毕。

（2）由（1）知 $y=x+\dfrac{9}{x}$ 在$[3,+\infty)$上为单调递增函数;

另外，对$\forall x_1,x_2\in(0,3]$，如$x_1<x_2$，易知$1-\dfrac{9}{x_1x_2}<0$，

故，$y_1-y_2=(x_1-x_2)(1-\dfrac{9}{x_1x_2})>0$

因此，$y=x+\dfrac{9}{x}$ 在$(0,3]$上为单调递减函数。

（3）对任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，由（1）知

$y_1-y_2=(x_1+\dfrac{k}{x_1})-(x_2+\dfrac{k}{x_2})=(x_1-x_2)(1-\dfrac{k}{x_1x_2})$

易知，在$[\sqrt{k},+\infty)$上，有$1-\dfrac{k}{x_1x_2}>0$，从而$y_1<y_2$

在$(0,\sqrt{k}]$上，有$1-\dfrac{k}{x_1x_2}<0$，从而$y_1>y_2$

故，$y=x+\dfrac{k}{x}(k>0)$在$[\sqrt{k},+\infty)$上单调递增，在$(0,\sqrt{k}]$上单调递减。

【注】本题中的函数$y=x+\dfrac{k}{x}(k>0)$叫耐特函数，也叫对勾函数，如其定义域为$(0,+\infty)$，则函数在$[\sqrt{k},+\infty)$上单调递增，在$(0,\sqrt{k}]$上单调递减。函数在$x=\sqrt{k}$处取得最小值：$2\sqrt{k}$

例3、设函数$y=f(x)$的定义域为I，区间$D\subseteq I$，记$\Delta x=x_1-x_2,\Delta y=f(x_1)-f(x_2)$。

证明：（1）函数$y=f(x)$在区间D上单调递增的充要条件是：$\forall x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$。

（2）函数$y=f(x)$在区间D上单调递减的充要条件是：$\forall x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$。

证明（1）必要性：如$f(x)$在D上单调递增，则对任意的$x_1,x_2\in D$，如$\Delta x<0$，即$x_1<x_2$，则$f(x_1)<f(x_2)$，也即$\Delta y<0$;

如$\Delta x>0$，即$x_1>x_2$，则$f(x_1)>f(x_2)$，从而知$\Delta y>0$;

总之，Δx 与 Δy 同号，故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$；

充分性，对任意的 $x_1,x_2\in D$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0\Rightarrow \Delta x$ 与 Δy 同号，

因此，如 $x_1<x_2$，即 $\Delta x<0$，则 $\Delta y<0$，故 $f(x_1)<f(x_2)$

因此，$f(x)$ 在 D 上单调递增。

（2）略。

例4、讨论函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x-1}(a\neq 0)$ 在 $(-1,1)$ 上的单调性.

【解析】：对任意的 $-1<x_1<x_2<1$，

因 $f(x_1)-f(x_2)=a(\dfrac{x_1}{x_1-1}-\dfrac{x_2}{x_2-1})=a\dfrac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$，

易知 $\dfrac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$，所以

当 $a>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递减。

当 $a<0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递增。

例5、已知函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在 $[5,20]$ 上具有单调性，则 k 的取值范围为_______

【解析】 $f(x)=4x^2-kx-8$ 的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-k}{2\times 4}=\dfrac{k}{8}$

函数 $f(x)$ 在 $[5,20]$ 上具有单调性，等价于直线 $x=\dfrac{k}{8}$ 在区间 $[5,20]$ 之外，

故 $\dfrac{k}{8}>20$ 或 $\dfrac{k}{8}<5$，解之得 $k>160$ 或 $k<40$

例6、（1）定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数，且对任意 $x\in R$，$f\left(-x+8\right)=f\left(x+8\right)$ 恒成立，则（　　）

A．$f(6)>f(7)$　　B．$f(6)>f(9)$　　C．$f(7)>f(9)$　　D．$f(7)>f(10)$

（2）已知 $f\left(x\right)$ 是周期为 1 的周期函数，且 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-2)$，则 $f\left(x\right)$ 在 $[3,4]$ 上的解析式为 _____

【解析】（1）由 $f\left(-x+8\right)=f\left(x+8\right)$ 知：函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线对称，由题意知 $f\left(x\right)$ 在 $x=8$ 处取得最大值，因此离对称轴越远，函数值越小，选 D。

（2）$x\in[3,4]$时，　$x-3\in[0,1]$，由于$f(x)$是周期为1的周期函数，故，此时

$$f(x)=f(x-3)=\frac{1}{2}(x-3)[(x-3)-2]=\frac{1}{2}(x-3)(x-5)$$

例7、已知函数$y=f(x)$的定义域为R，且对任意$a,b\in R$，都有$f(a+b)=f(a)+f(b)$，且当$x>0$时，$f(x)<0$恒成立。证明：函数$y=f(x)$是R上的减函数；

证明：设$x_1>x_2$，则$x_1-x_2>0$，故$f(x_1-x_2)<0$

$\therefore f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)<f(x_2)$

$\therefore$函数$y=f(x)$是R上的减函数；

例8、函数$f(x)$定义域为R，对任意$x\in R$，$f(x)=f(-x)$恒成立，且$f(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上是减函数，则$f(-\frac{3}{2})与f(a^2+2a+\frac{5}{2})$的大小关系是（　　）

A．$f(-\frac{3}{2})>f(a^2+2a+\frac{5}{2})$　　B．$f(-\frac{3}{2})<f(a^2+2a+\frac{5}{2})$

C．$f(-\frac{3}{2})\ge f(a^2+2a+\frac{5}{2})$　　D．$f(-\frac{3}{2})\le f(a^2+2a+\frac{5}{2})$

【解析】易知$f(x)$的图像关于y轴对称，且距离y轴越远，函数值越小。

因$|a^2+2a+\frac{5}{2}|=(a+1)^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}$，$|-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}$

$f(a^2+2a+\frac{5}{2})\le f(\frac{3}{2})$，选C.

例9、已知$f(x)=x^2-2x+2$，在$\left[\frac{1}{4},m^2-m+2\right]$上任取三个数$a,b,c$，均存在以$f(a),f(b),f(c)$为三边的三角形，则$m$的取值范围为

A．$(0,1)$　　B．$[0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　D．$[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$

【解析】令$f(x)$的最小值和最大值分别为m和M，由三角形任意两边之和大于第三边知：对任意a,b,c，均有$f(a)+f(b)>f(c)$，即$2m>M$

由于$f(x)$的对称轴为直线$x=1$，

因$m^2-m+2=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>1$，故$1\in[\frac{1}{4},m^2-m+2]$，从而$m=f(1)=1$

又，$|(m^2-m+2)-1|=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$，$M=f(m^2-m+2)=(m^2-m+1)^2+1$

由$2m>M\Rightarrow 2>(m^2-m+1)^2+1$，解得$0<m<1$，选A。

例10、（1）若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+a^2-a,x<0\\x^2-a^2+1,x\geq 0,\end{cases}$ 为 R 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围是______

（2）$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,\ (x<1)\\-ax,\ \ (x\geq 1)\end{cases}$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{8},\frac{1}{3})$　　　B．$[0,\frac{1}{3}]$　　　C．$(0,\frac{1}{3})$　　　D．$(-\infty,\frac{1}{3}]$

【解析】（1）易知 x^3+a^2-a 在 $x<0$ 时递增，x^2-a^2+1 在 $x\geq 0$ 时递增，故，要 $f(x)$ 在 R 上单调递增，只需 $a^2-a\leq -a^2+1$，解得 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 1$

（2）$\begin{cases}3a-1<0\\-a<0\\-a\leq 3a-1+4a\end{cases}$，求得 $\frac{1}{8}\leq a<\frac{1}{3}$，故选 A．

例11、已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2-2x-5a+6}$ 对任意两个不相等的实数 x_1、$x_2\in[2,+\infty)$，都有不等式 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,+\infty)$　　　B．$[\frac{1}{2},+\infty)$　　　C．$(0,\frac{1}{2}]$　　　D．$[\frac{1}{2},2]$

【解析】由题意知函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增；

由选择支看出 $a>0$，故二次函数 $ax^2-2x-5a+6$ 开口向上，

因其对称轴为直线 $x=\frac{1}{a}$，故需 $\frac{1}{a}\leq 2$，即 $a\geq\frac{1}{2}$

另外，由 $a(2)^2-2\times 2-5a+6\geq 0$ 解得 $a\leq 2$；

最终，$\frac{1}{2}\leq a\leq 2$，选 D。

例12、已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(\frac{1}{2})=1$,如果对于 $0<x<y$,都有 $f(x)>f(y)$，

（1）求 $f(1)$；　　　　　　（2）解不等式　$f(-x)+f(3-x)\geq -2$。

【解析】（1）令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)$，故 $f(1)=0$

（2）因 $f(1)=0$，故 $f(-x)+f(3-x)\geq -2f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(-x)+f(3-x)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})\geq f(1)$

即 $f[(-x)(3-x)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}]\geq f(1)$，故 $\begin{cases} -x>0 \\ 3-x>0 \\ \dfrac{(-x)(3-x)}{4}\leq 1 \end{cases}$，解得 $-1\leq x<0$

例13、函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty，+\infty\right)$ 单调递减，且对任意 x，都有 $f(x)+f(-x)=0$．若 $f\left(1\right)=-1$，则满足 $-1\leq f(x-2)\leq 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$\left[-2，2\right]$　　B．$\left[-1，1\right]$　　C．$\left[0，4\right]$　　D．$\left[1，3\right]$

【解析】 易知函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于原点对称，由题意知

$-1\leq f\left(x-2\right)\leq 1 \Leftrightarrow f(1)\leq f\left(x-2\right)\leq f(-1)$

故 $-1\leq x-2\leq 1$，解得 $1\leq x\leq 3$，选 D。

【法二】 观察法。$f\left(3-2\right)=f(1)=-1$，满足不等式，故排除 A,B

又，$f\left(4-2\right)=f(2)<-1$，不满足不等式，排除 C

综上，只能选 D。

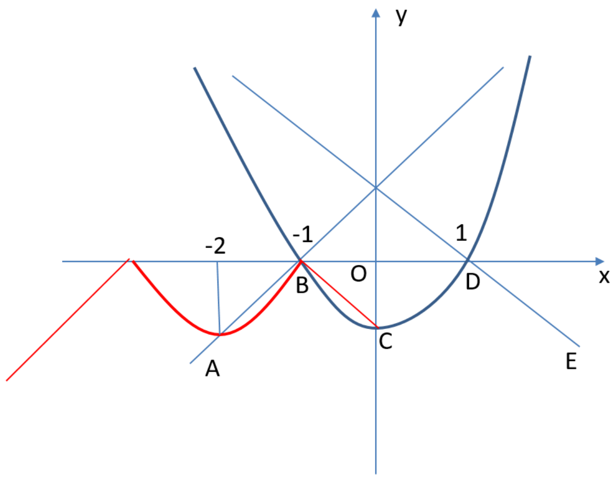
例14、设函数 $f\left(x\right)=\min\{x^2-1,x+1,-x+1\}$，其中 $\min\{x,y,z\}$ 表示 x,y,z 中的最小者，若 $f(a+2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(-1,0)$　　B．$[-2,0]$　　C．$(-\infty,-2)\cup(-1,0)$　　D．$[-2,+\infty)$

【巧解】 观察四个选择支，C、D 比较特殊，取 $a=-4$ 进行检验，看不等式 $f(-2)>f(-4)$ 是否成立?

显然，$f(-2)=-1, f(-4)=-3$，不等式成立，故选 C.

【法二】 数形结合。$f(x)$ 的图像如右图中的曲线 $ABCDE$。$f(a+2)$ 的图像为 $f(a)$ 的图像向左平移 2 个单位而得，如图中的红色部分，从图像上看，$f(a+2)>f(a)$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$，选 C。



例15、已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2-ax-2a$，若刚好存在两个正整数 $x_i(i=1,2)$，使得 $f(x_i)>0$，则实数 a 的取值范围为（　　　　）

A．$[0,\frac{2}{3})$　　　B．$(0,\frac{2}{3}]$　　　C．$[\frac{2}{3},1)$　　　D．$[\frac{1}{3},1)$

【巧解】基于选择支，取 $a=0$ 进行检验，此时 $f(x)=-x^3+3x^2=x^2(3-x)$，

显然，$f(1)>0, f(2)>0$，

当 $x\geq 3$ 时，恒由 $f(x)\leq 0$，满足要求，

考虑到 B、C、D 三个选项均不含 $a=0$，选 A。

【法二】我们采用如下策略：令 $\begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)>0 \\ f(3)\leq 0 \end{cases}$ 先得到 a 的大致范围，在此范围内，如 $f(x)\leq 0$ 在 $x\geq 3$ 恒成立，则问题解决。事实上，解 $\begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)>0 \\ f(3)\leq 0 \end{cases}$ 得 $a\in[0,\frac{2}{3})$，

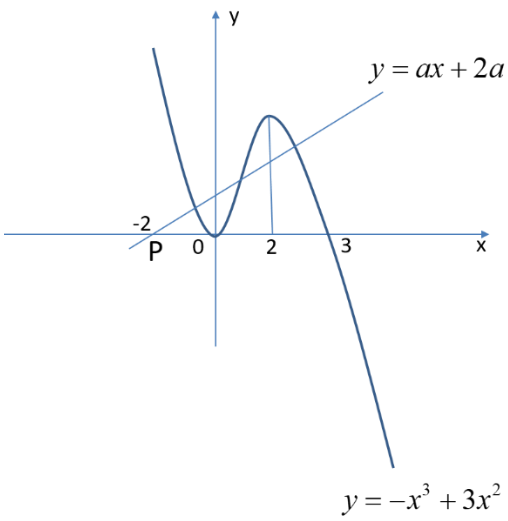
因 $f(x)=-x^2(x-3)-a(x+1)$

显然，在 $x\geq 3$ 时，$f(x)\leq 0$，故选 A。

【法三】问题 $\Leftrightarrow -x^3+3x^2>ax+2a$ 恰有两个正整数解，

在同一坐标系中，画出函数 $g(x)=-x^3+3x^2$ 和 $h(x)=ax+2a$ 的图像，注意 $g(x)=-x^3+3x^2=x^2(x-3)$（采用奇穿偶切法）画，而 $h(x)=ax+2a$ 是过定点 $P(-2,0)$ 的直线，

从图像看，$a\geq 0$，同时要求 $\begin{cases} g(1)>h(1) \\ g(2)>h(2) \end{cases}$，解得 $0\leq a<\frac{2}{3}$



例16、解方程$(x^2-20x+38)^3=x^3-4x^2+84x-152$

【解析】原方程变形为$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)=x^3+4x$

构造函数$f(x)=x^3+4x$，原方程变为$f(x^2-20x+38)=f(x)$

考虑到$f(x)$为单调递增函数，故必有$x^2-20x+38=x$，解得$x=2$或$x=19$

例17、设$f(x)$为定义在$(0,+\infty)$上的单调递增函数，且$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y), f(3)=1$，求解不等式$f(x)-f(\frac{1}{x-3})>2$。

【解】由$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$知$f(x)-f(\frac{1}{x-3})=f(\frac{x}{\frac{1}{x-3}})=f(x^2-3x)$

令$x=9, y=3$，易得$f(\frac{9}{3})=f(9)-f(3)$，得$f(9)=2f(3)=2$

故原不等式变形为$f(x^2-3x)>f(9)$

因$f(x)$为单调递增函数，所以$\begin{cases}x-3>0\\x^2-3x>9\end{cases}$，解之得$x>\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$。

例18、设定义在R上的函数$f(x)$对于任意实数x,y都有$f(x+y)=f(x)+f(y)-2$成立，且$f(1)=1$，当$x>0$时，$f(x)<2$ 。

（1）判断$f(x)$的单调性，并加以证明；

（2）试问:当$-1\le x\le 2$时，$f(x)$是否有最值？如果有，求出最值；如果没有，说明理由；

（3）解关于x的不等式$f(bx^2)-f(b^2x)<f(2x)-f(2b)$，其中$b^2>2$.

【解析】（1）设$x_1 < x_2$，则$x_2 - x_1 > 0$，由题意有

$f(x_2) = f(x_1 + (x_2 - x_1)) = f(x_1) + f(x_2 - x_1) - 2$，

故$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) - 2 < 0$，即$f(x_2) < f(x_1)$，故$f(x)$单调递减。

（2）由（1）知：$f(x)$在R上单调递减，故$f(x)$在$[-1,2]$上有最值，最大值为$f(-1)$，最小值为$f(2)$，下面分别求之。

由题意有$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) - 2 = 0$，

同理，$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) - 2$，故$f(0) = 2$，

再由$f(0) = f(1-1) = f(1) + f(-1) - 2$，得$f(-1) = 3$

（3）$f(bx^2) - f(b^2x) < f(2x) - f(2b) \Rightarrow f(bx^2) + f(2b) < f(2x) + f(b^2x)$

$\Rightarrow f(bx^2 + 2b) < f(b^2x + 2x)$，

因$f(x)$递减，故$bx^2 + 2b > b^2x + 2x$，也即$bx^2 - (b^2+2)x + 2b > 0$，

因$b^2 > 2$，故$\Delta = (b^2-2)^2 > 0$，

易知$bx^2 - (b^2+2)x + 2b = 0$之二根为$x_1 = \dfrac{2}{b}, x_2 = b$

（i）当$b > \sqrt{2}$时，$bx^2 - (b^2+2)x + 2b > 0$之解集为$(-\infty, \dfrac{2}{b}) \cup (b, +\infty)$

（ii）当$b < -\sqrt{2}$时，$bx^2 - (b^2+2)x + 2b > 0$之解集为$(b, \dfrac{2}{b})$