习题课

1. （1）已知ΔABC是锐角三角形，$P=\sin A+\sin B,Q=\cos A+\cos B,$ 则（　　）

A. $P<Q$　　B. $P>Q$　　C. $P=Q$　　D. P 与 Q 的大小不能确定

（2）在$\triangle ABC$中，$\sqrt{2}\sin A+\sin B\sin C$的最大值为（　　）

A. $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

【解】（1）$A+B>\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A>\dfrac{\pi}{2}-B\Rightarrow\sin A>\cos B$

同理可得：$\sin B>\cos A$

$\therefore\sin A+\sin B>\cos A+\cos B,P>Q$，选 B。

（2）$\sqrt{2}\sin A+\sin B\sin C=\sqrt{2}\sin A+\dfrac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2}$

$=\sqrt{2}\sin A+\dfrac{\cos(B-C)+\cos A}{2}\le\sqrt{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}$，仅当$B=C$时取等号

而$\sqrt{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\sin(A+\varphi)+\dfrac{1}{2}$，其中$\varphi$满足$\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

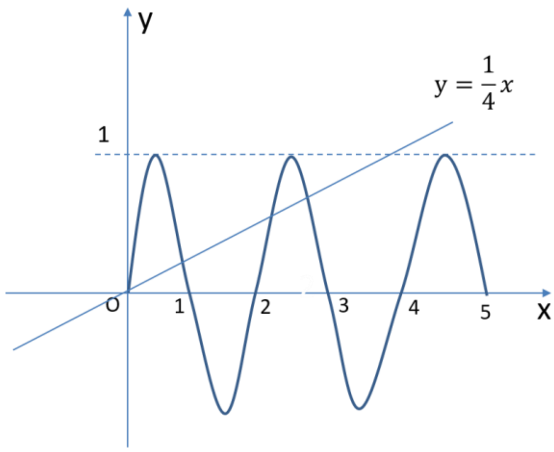
故$\sqrt{2}\sin A+\sin B\sin C\le 2$，其最大值为 2。选 B。

2. 方程$\sin\pi x=\dfrac{1}{4}x$的解的个数是（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【解】问题$\Leftrightarrow$函数$f(x)=\sin\pi x$与函数$g(x)=\dfrac{1}{4}x$图象的交点个数，

易知$f(x)$与$g(x)$均为奇函数，其图像均关于原点对称，故可只考虑$x\ge 0$的情况。数形结合，如图。从图像知：$x>0$时，两函数之图像有 3 个交点，由于原点显然满足要求，再考虑到对称性，知：$f(x)$与$g(x)$的图像共有 7 个交点，选 C。



3. 设 $a=\sin 14^0+\cos 14^0$，$b=\sin 16^0+\cos 16^0$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 a,b,c 大小关系（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

【解】$a=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 14^0+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14^0)=\sqrt{2}\sin 59^0$，

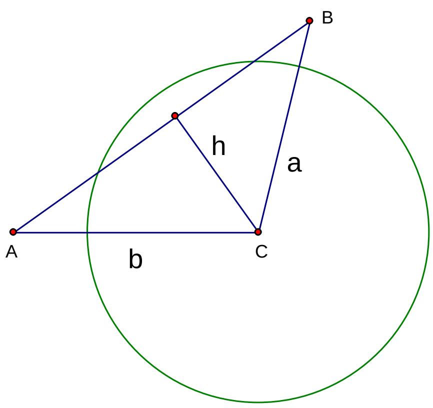
同理可得：$b=\sqrt{2}\sin 61^0$，$c=\sqrt{2}\sin 60^0$

考虑到 $\sin x$ 在 $(0^\circ,90^\circ)$ 上单调递增，故选 D。

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 $a,b,c,a=2,A=\frac{\pi}{4}$，若三角形有两解，则 b 的取值范围为（　　　）

A．$b>2$　　B．$0<b<2$　　C．$2<b<2\sqrt{2}$　　D．$2<b<2\sqrt{3}$

【解】如图，三角形有两解，等价于以 C 为圆心，2 为半径的圆与射线 AB 有两个交点，即 $\begin{cases} b\sin A<a \\ b>a \end{cases}$，解得 $2<b<2\sqrt{2}$



【法二】由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $c^2-\sqrt{2}bc+b^2-4=0$；

由题意，上面关于c的一元二次方程有两个不相等的正根，故$\begin{cases}\Delta=2b^2-4(b^2-4)>0\\ b^2-4>0\end{cases}$

5. 在锐角$\triangle ABC$中，a,b分别为角A,B的对边长，若$A=2B$，则$\dfrac{b}{a}$的范围是(　　)

A. $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　　B. $\left(\sqrt{3},2\right)$　　C. $\left(0,2\right)$　　D. $\left(\sqrt{2},2\right)$

【解】$\because A=2B$，所以，根据正弦定理得：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B$，

$\because\triangle ABC$为锐角三角形，故$A+B>90^\circ$，即$3B>90^\circ\Rightarrow B>30^\circ$，以及$A=2B<90^\circ$，

$\therefore B<45^\circ$，$\therefore 30^\circ<B<45^\circ$

$\therefore\dfrac{b}{a}=2\cos B\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，选 A。

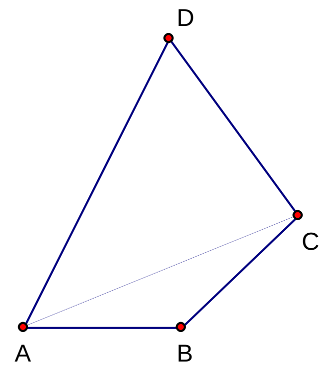
6. 在平面凸四边形$ABCD$中，$AB=3,BC=4,CD=5,DA=6$，则四边形$ABCD$面积的最大值为（　　）

A．21　　B. $6\sqrt{10}$　　C. $10\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{10}$

【巧解】不妨令该四边形的四条边长分别为a,b,c,d，p为该四边形的半周长，则$p=9$
由婆罗摩笈多公式得

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}\le\sqrt{(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)}=6\sqrt{10}$$

仅当$A+C=\pi$时取等号，故，四边形$ABCD$面积的最大值为$6\sqrt{10}$，选 B。



【另解】设$\angle B=\beta,\angle D=\alpha$，

则在$\triangle ABC$中，$AC^2=9+16-2\times3\times4\cos\beta=25-24\cos\beta$

在$\triangle ACD$中，$AC^2=25+36-2\times5\times6\cos\alpha=61-60\cos\alpha$，

$\therefore 5\cos\alpha-2\cos\beta=3$

$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\sin\beta+\dfrac{1}{2}\times 5\times 6\sin\alpha=3\left(5\sin\alpha+2\sin\beta\right)$

令 $M=5\cos\alpha-2\cos\beta, N=5\sin\alpha+2\sin\beta$，

则 $M^2+N^2=29-20\cos\left(\alpha+\beta\right)=9+N^2\Rightarrow N^2=20-20\cos\left(\alpha+\beta\right)$

所以 $\alpha+\beta=\pi$ ，即 $\cos\alpha=\dfrac{3}{7},\cos\beta=-\dfrac{3}{7}$ 时，N 取得最大值 $\sqrt{40}$ ，所以满级的最大值为 $6\sqrt{10}$，选 B。

7.　设锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c=1$，$A=2C$，则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为（　　）

A．$\left(0,2+\sqrt{2}\right)$　　B．$\left(0,3+\sqrt{3}\right)$　　C．$\left(2+\sqrt{2},3+\sqrt{3}\right)$　　D．$\left(2+\sqrt{2},3+\sqrt{3}\right]$

【解】因 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $A=2C<\dfrac{\pi}{2}$，得 $C<\dfrac{\pi}{4}$；

另外，由 $A+C=3C>\dfrac{\pi}{2}$ 知 $C>\dfrac{\pi}{6}$，故 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos C<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

又因为 $A=2C$，所以 $\sin A=2\sin C\cos C$，又因为 $c=1$，所以 $a=2\cos C$；

又，$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin 3C}{\sin C}=4\cos^2 C-1$，

所以 $a+b+c=4\cos^2 C+2\cos C$，令 $t=\cos C$，

则 $t\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，又因 $y=4t^2+2t$ 在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

上单调递增，所以函数值域为 $(2+\sqrt{2},3+\sqrt{3})$，选 C.

8.　如图，l_1,l_2,l_3 是同一平面内的三条平行直线，l_1 与 l_2 间的距离是 1，l_2 与 l_3 间的距离是 2，正 $\triangle ABC$ 的三顶点分别在 l_1,l_2,l_3 上，则 $\triangle ABC$ 的边长是

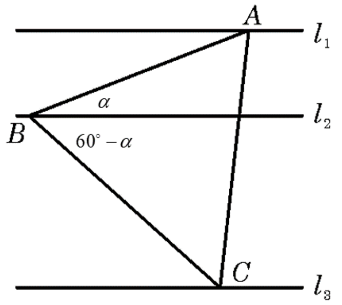
（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　（C）$\dfrac{3\sqrt{17}}{4}$　　（D）$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

【解】如图，易知 $AB=\dfrac{1}{\sin\alpha},BC=\dfrac{2}{\sin(60^\circ-\alpha)}$，

由题意：$\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin(60^\circ-\alpha)}$，

即 $\sin(60^\circ-\alpha)=2\sin\alpha\Rightarrow\sqrt{3}\cos\alpha=5\sin\alpha$，即 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

故，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，故 $AB=\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，即 $\triangle ABC$ 的边长为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$。



9.　已知 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})=$（　　　　　）

A. $-\dfrac{16}{25}$　　　B. $\dfrac{16}{25}$　　　C. $-\dfrac{7}{25}$　　　D. $\dfrac{7}{25}$

【解】 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=1-\dfrac{18}{25}=\dfrac{7}{25}$，选 D。

10.　$4\cos50^0-\tan40^0=$　　　　（　）

A、$\sqrt{2}$　　　B、$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　　C、$\sqrt{3}$　　　D、$2\sqrt{2}-1$

【解】 原式 $=4\sin40^0-\dfrac{\sin40^0}{\cos40^0}=\dfrac{4\sin40^0\cos40^0-\sin40^0}{\cos40^0}$

$$=\frac{2\sin80^0-\sin40^0}{\cos40^0}=\frac{2\cos10^0-\sin40^0}{\cos40^0}$$

$$=\frac{2\cos(40^0-30^0)-\sin40^0}{\cos40^0}=\frac{\sqrt{3}\cos40^0+\sin40^0-\sin40^0}{\cos40^0}=\sqrt{3}$$ 。选 C。

11.　已知 ΔABC 的内角 A,B,C 满足 $\sin2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$，面积 S 满足 $1<S<2$，a,b,c 分别为 A,B,C 所对的边，则下列不等式成立的是（　　）

A. $bc(b+c)>8$　　　B. $ab\left(a+b\right)>16\sqrt{2}$　　　C. $6\le abc\le12$　　　D. $12\le abc\le24$

【解】 $\sin2A+\sin\left(A-B+C\right)=\sin\left(C-A-B\right)+\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin2A+\sin(\pi-2B)+\sin(\pi-2C)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin2A+\sin2B+\sin2C=\dfrac{1}{2}$　　　（1）

另一方面：$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A(\cos A+\cos(B-C))=2\sin A(\cos(B-C)-\cos(B+C))=4\sin A\sin B\sin C$

结合（1）得: $\sin A\sin B\sin C=\dfrac{1}{8}$，从而

$S^3=\left(\dfrac{1}{2}bc\sin A\right)\left(\dfrac{1}{2}ac\sin B\right)\left(\dfrac{1}{2}ab\sin C\right)=\dfrac{a^2b^2c^2}{64}$，

故，$1\le S\le 2\Rightarrow 1\le S^3\le 8\Rightarrow 1\le\dfrac{a^2b^2c^2}{64}\le 8\Rightarrow 8\le abc\le 16\sqrt{2}$，选（A）。

12. （1）设 $\alpha,\beta\in[0,\pi]$，且满足 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=1$，则 $\sin(2\alpha-\beta)+\sin(\alpha-2\beta)$ 的取值范围为(　　)

A.$[-\sqrt{2},1]$　　B. $[-1,\sqrt{2}]$　　C.$[-1,1]$　　D. $[1,\sqrt{2}]$

【解】由题意得$\sin(\alpha-\beta)=1$，考虑到$\alpha,\beta\in[0,\pi]$，

得$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\beta+\dfrac{\pi}{2}$，因此

$\sin(2\alpha-\beta)+\sin(\alpha-2\beta)=\sin(\pi+\beta)+\sin(\dfrac{\pi}{2}-\beta)$

$=-\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta)=\sqrt{2}\cos(\beta+\dfrac{\pi}{4})$，

考虑到$\beta+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}]$，故$\sqrt{2}\cos(\beta+\dfrac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},1]$，选 A。

13. (1)$[2\sin 50^\circ+\sin 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)]\sqrt{2\sin^2 80^\circ}=$______

(2)已知$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，且$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2},\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$，则$2\alpha-\beta$的值为________.

【解】(1) 由于$1+\sqrt{3}\tan 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$，

故，原式$=[2\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\times\dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}]\times\sqrt{2}\sin 80^\circ$

$=(2\sin 50^\circ\cos 10^\circ+2\sin 40^\circ\sin 10^\circ)\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}(\sin 50^\circ\cos 10^\circ+\cos 50^\circ\sin 10^\circ)=2\sqrt{2}\sin 60^\circ=\sqrt{6}$

（2）由题意得： $\tan\alpha=\tan((\alpha-\beta)+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{7})}=\dfrac{1}{3}$。

故， $\tan(2\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(\alpha-\beta))=\dfrac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$

由于 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，故由 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 且 $\tan\beta=-\dfrac{1}{7}\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，

故 $0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2},-\pi<-\beta<-\dfrac{\pi}{2}$，从而 $-\pi<2\alpha-\beta<0$，

故，由 $\tan(2\alpha-\beta)=1$ 得 $2\alpha-\beta=-135^\circ$

14. $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$ 的值为____。

【解】构造对偶模型求解.

设 $A=\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$， $B=\sin^2 10^\circ+\sin^2 50^\circ-\cos 40^\circ\cos 80^\circ$，

则 $A+B=2-\cos 40^0$,

$$A-B=\cos 20^0+\cos 100^0+\cos 120^0=\cos(60^0-40^0)+\cos(60^0+40^0)-\frac{1}{2}$$

$$=2\cos 60^0\cos 40^0-\frac{1}{2}=\cos 40^0-\frac{1}{2}$$

解得 $A=\dfrac{3}{4}$.

【解法二】原式= $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

$$=\frac{1+\cos 20^\circ}{2}+\frac{1+\cos 100^\circ}{2}-\sin 40^\circ\sin 80^\circ=1+\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+\cos 100^\circ)-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$$

$$=1+\frac{1}{2}(2\cos 60^\circ\cos 40^\circ)-\sin 40^\circ\sin 80^\circ=1+\frac{1}{2}\cos 40^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$$

$$=1+\frac{1}{2}\cos(80^\circ-40^\circ)-\sin 40^\circ\sin 80^\circ=1+\frac{1}{2}(\cos 80^\circ\cos 40^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cos 120^\circ=\frac{3}{4}$$

15. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$， $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是____。

【巧解】因 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$

由题意知 $\cos B\cos C\neq 0$，上式两侧同时除以 $\cos B\cos C$ 得： $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，

又， $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ ，

故 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=2\tan B\tan C+\tan A\geq 2\sqrt{2\tan B\tan C\tan A}$ ，

即 $(\tan A\tan B\tan C)^2\geq 8\tan A\tan B\tan C$ ，故 $\tan A\tan B\tan C\geq 8$

易知等号可取，故 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值为 8 。

【另解】 由 $\sin A=\sin\left(B+C\right)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$ （1）

由题意知 $\cos B\cos C\neq 0$ ，上式两侧同时除以 $\cos B\cos C$ 得： $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ ，

故， $\tan A=-\tan\left(B+C\right)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\dfrac{2\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C}$ （2）

则 $\tan A\tan B\tan C=-\dfrac{2(\tan B\tan C)^2}{1-\tan B\tan C}=-\dfrac{2t^2}{1-t}$ ，其中 $t=\tan B\tan C$ ）

由题意知， $\tan A>0$ ，结合（2）知 $1-\tan B\tan C<0$ ，即 $t>1$

故， $\tan A\tan B\tan C=-\dfrac{2t^2}{1-t}=\dfrac{2[(t-1)+1]^2}{t-1}=2[(t-1)+\dfrac{1}{t-1}+2]\geq 2(2+2\sqrt{(t-1)\times\dfrac{1}{t-1}})=8$ ，

当且仅当 $t-1=\dfrac{1}{t-1}$ ，即 $t=2$ 时取等号，

由 $t=2\Rightarrow\tan B\tan C=2$ ；考虑到 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C=4$ ，

解得 $\tan B=2+\sqrt{2},\tan C=2-\sqrt{2},\tan A=4$ （或 $\tan B,\tan C$ 互换），

此时 A,B,C 均为锐角，满足要求，故所求的最小值为 8。

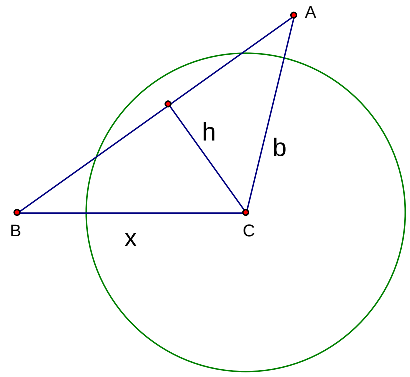
16. $\triangle ABC$ 中， $\angle B=60^{\circ},b=2,a=x$ ，如该三角形有两解，则 x 的范围为_____。

【解】 由余弦定理知： $b^2=x^2+c^2-2cx\cos B$ ，即 $c^2-xc+x^2-4=0$ ，由题意，该方程有两个正根，

故， $\begin{cases}\Delta=x^2-4(x^2-4)>0\\ x^2-4>0\\ x>0\end{cases}$ ，解得 $2<x<\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

【法二】 如图，三角形有两解，等价于以 C 为圆心，2 为半径的圆与射线 BA 有两个交点，

即 $\begin{cases}x\sin B<2\\ x>2\end{cases}$ ，解得 $2<x<\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$



17. 化简：$\dfrac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2})}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}(0<\alpha<\pi)=$________.

【解】原式$=\dfrac{(1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1)(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2})}{\sqrt{2+2(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1)}}$

$$=\frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2})(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2})}{\sqrt{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$$

18. $\sqrt{2+2\cos 8}+2\sqrt{1-\sin 8}$ 的化简结果是________.

【解】由于$4\in(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2})$，故$\sin 4<\cos 4<0$，

故原式$=\sqrt{2+2(2\cos^2 4-1)}+2\sqrt{\sin^2 4-2\sin 4\cos 4+\cos^2 4}$

$=\sqrt{4\cos^2 4}+2\sqrt{(\cos 4-\sin 4)^2}=-2\cos 4+2(\cos 4-\sin 4)=-2\sin 4$

19. $\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，如$a=2\sqrt{3},b^2+c^2=24$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_____

【解】由余弦定理知：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{24-12}{2bc}=\dfrac{6}{bc}$，

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{1}{2}bc\sqrt{1-\dfrac{36}{b^2c^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-36}$

又，由$b^2+c^2=24\Rightarrow 24\ge 2bc\Rightarrow bc\le 12$，

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-36}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2-36}=3\sqrt{3}$，

当$b=c=2\sqrt{3}$时取等号，故$\triangle ABC$面积的最大值为$3\sqrt{3}$。

【方法二】$b^2+c^2=24\Rightarrow 24\geq 2bc\Rightarrow bc\leq 12$，

故，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{24-12}{2bc}=\dfrac{6}{bc}\geq\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$，故$\sin A\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

因此，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\leq\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

当且仅当$A=60^\circ$（此时仍有$b=c=2\sqrt{3}$）时取等号。

20. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a,b,c，D是AB的中点，若$CD=1$，且$\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)\sin A=(c+b)(\sin C-\sin B)$，则$\triangle ABC$面积的最大值是__________

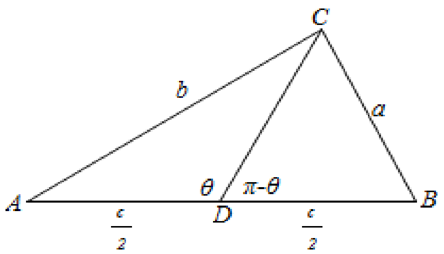
【解】如图，设$\angle CDA=\theta$，则$\angle CDB=\pi-\theta$，

在$\triangle CDA$和$\triangle CDB$中，分别由余弦定理可得

$\cos\theta=\dfrac{\dfrac{c^2}{4}+1-b^2}{c}$，$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\dfrac{c^2}{4}+1-a^2}{c}$，

两式相加，整理得$\dfrac{c^2}{2}+2-\left(a^2+b^2\right)=0$，$\therefore c^2=2\left(a^2+b^2\right)-4$，①

由$\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)\sin A=(c+b)(\sin C-\sin B)$及正弦定理得



$\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)a=(c+b)(c-b)$，整理得$a^2+b^2-c^2=\dfrac{ab}{2}$，　②

由余弦定理的推论可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

把①代入②整理得$a^2+b^2+\dfrac{ab}{2}=4$，

又$a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当$a=b$时等号成立，

$\therefore 4\geq 2ab+\dfrac{ab}{2}=\dfrac{5ab}{2}$，故得$ab\leq\dfrac{8}{5}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C\leq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{5}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

即$\triangle ABC$面积的最大值是$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．故答案为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

21. （1）已知$\cos\theta=-\dfrac{3}{5},\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，求$\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2$的值;

（2）已知$\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{5}$，求$\sin\alpha$的值;

（3）已知$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$，求$\sin 2\theta$的值;

（4）已知$\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$，求$\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值。

【解】（1）易知$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$,

故，$(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2})^2=\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}=1-\sin\theta=1+\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{5}$

（2）原式两边平方得：$1-\sin\alpha=\dfrac{1}{25}$，故$\sin\alpha=\dfrac{24}{25}$

（3）由题意得:$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$，即$1-\dfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2=\dfrac{5}{9}$，也即

$\sin^2 2\theta=\dfrac{8}{9}$，故$\sin 2\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

（4）由题意得：$\sin^2 2\theta=\dfrac{16}{25}$，故

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{25}=\dfrac{17}{25}$

22. （1）已知$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5},\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，求$\tan\alpha\tan\beta$的值;

（2）已知$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2},\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，求$\cos(\alpha-\beta)$的值。

【解】（1）易知$\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=3$，即$\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=3$，

故$\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=3$，解得$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

（2）由题意知：$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{4}$，$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{9}$，

两式相加得：$2+2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{36}$，故$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{72}$

23. 求下列各式的值

（1） $\tan 20^0+4\sin 20^0$　　　　（2） $\dfrac{\sin 7^0+\cos 15^0\sin 8^0}{\cos 7^0-\sin 15^0\sin 8^0}$.

【解】（1）原式$=\dfrac{\sin 20^0+4\sin 20^0\cos 20^0}{\cos 20^0}$

$=\dfrac{\sin 20^0+2\sin 40^0}{\cos 20^0}=\dfrac{\sin 20^0+2\sin(60^0-20^0)}{\cos 20^0}$

$=\dfrac{\sin 20^0+\sqrt{3}\cos 20^0-\sin 20^0}{\cos 20^0}=\sqrt{3}$

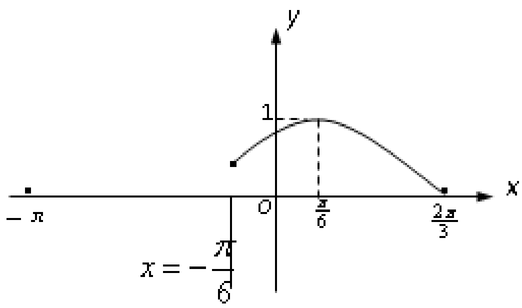
（2）原式$=\dfrac{\sin(15^0-8^0)+\cos 15^0\sin 8^0}{\cos(15^0-8^0)-\sin 15^0\sin 8^0}=\dfrac{\sin 15^0\cos 8^0}{\cos 15^0\cos 8^0}=\tan 15^0=\tan(45^0-30^0)$

$=2-\sqrt{3}$

24. 已知定义在区间$[-\pi,\dfrac{2}{3}\pi]$上的函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\dfrac{\pi}{6}$对称，当$x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2}{3}\pi]$时，函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，其图象如图所示.

(1)求函数$y=f(x)$在$[-\pi,\dfrac{2}{3}\pi]$的表达式；

(2)求方程$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的解.



【解】:（1）由图像知：$x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2}{3}\pi]$时$A=1,\dfrac{T}{4}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}$，故$T=2\pi,\omega=1$

故$f(x)=\sin(x+\varphi)$，易知$\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=1$，因$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，得$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以$f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

又，函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\dfrac{\pi}{6}$对称，故$f(x)=f(-x-\dfrac{\pi}{3})$，

易知：$x\in[-\pi,-\frac{\pi}{6})$ 时，$-x-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$

故 $x\in[-\pi,-\frac{\pi}{6})$ 时，$f(x)=f(-x-\frac{\pi}{3})=\sin(-x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=-\sin x$

综上，$f(x)=\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{3}),x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]\\-\sin x,x\in[-\pi,-\frac{\pi}{6})\end{cases}$

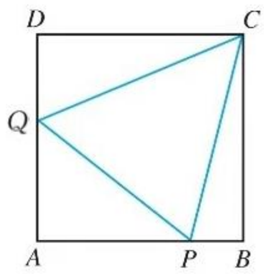
（2）考虑到对称性，只需在 $[-\pi,-\frac{\pi}{6})$ 上解方程 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 即可，此时 $f(x)=-\sin x$

由 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\pi\le x<-\frac{\pi}{6})$ 得 $x_1=-\frac{\pi}{4},x_2=-\frac{3\pi}{4}$

由对称性知：$x_3=-\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{12}$ 和 $x_4=-\frac{\pi}{3}-(-\frac{3\pi}{4})=\frac{5\pi}{12}$ 也为其根

所以，原方程之解为 $x_1=-\frac{\pi}{4},x_2=-\frac{3\pi}{4},x_3=-\frac{\pi}{12},x_4=\frac{5\pi}{12}$

25. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，P,Q 分别为边 AB,DA 上的点，当 $\triangle APQ$ 的周长为 2 时，求 $\angle PCQ$ 的大小。



【解法】 令 $AP=x,AQ=y,\angle BCP=\alpha,\angle DCQ=\beta$，则 $PQ=\sqrt{x^2+y^2}$，

$\tan\alpha=1-x$，$\tan\beta=1-y$。

故，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(1-x)+(1-y)}{1-(1-x)(1-y)}=\frac{2-x-y}{x+y-xy}$ ①

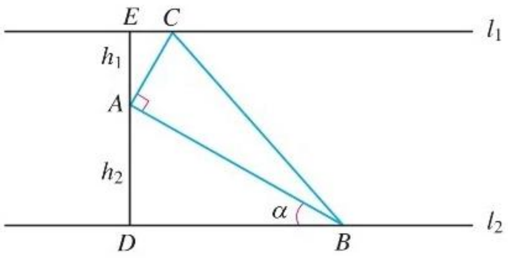
另外，由题意知：$\sqrt{x^2+y^2}+x+y=2$，

故 $x^2+y^2=(2-x-y)^2$，化简得 $xy=2x+2y-2$，带入①得

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2-x-y}{2-x-y}=1$，

考虑到 $\alpha,\beta\in(0,90^\circ)$，故 $\alpha+\beta=45^\circ$，从而 $\angle PCQ=45^\circ$

26. 如图，已知直线$l_1//l_2$，A是l_1,l_2之间的一定点，并且点A到l_1,l_2的距离分别为h_1,h_2，B是直线l_2上一动点，作$AC\perp AB$，且使AC与直线l_1交于点C，设$\angle ABD=\alpha$



（1）写出$\triangle ABC$面积S关于角α的函数解析式$S\left(\alpha\right)$；

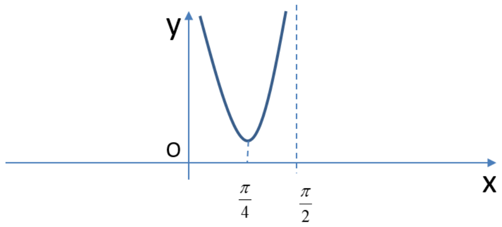
（2）画出上述函数的图像；

（3）由（2）中的图像求$S\left(\alpha\right)$的最小值。

【解】（1）易知$AB=\dfrac{h_2}{\sin\alpha},AC=\dfrac{h_1}{\cos\alpha}$，

故$S(\alpha)=\dfrac{1}{2}AB\times AC=\dfrac{h_1h_2}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{h_1h_2}{\sin 2\alpha}$ （$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$）

（2）$S(\alpha)=\dfrac{h_1h_2}{\sin 2\alpha}$（$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$）的图像如下图



（3）因$S(\alpha)=\dfrac{h_1h_2}{\sin 2\alpha}$（$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$），显然，当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，$S(\alpha)$取得最小值，最小值为$h_1h_2$。

27. 已知$A+B=\dfrac{\pi}{4}$，

（1）求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

（2）求$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\bullet\cdots\bullet(1+\tan 44^\circ)$的值

（1）**证明：**由题意得$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$

$\Rightarrow\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B\Rightarrow 1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2$

$\Rightarrow(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

(2) 利用（1）的结论得:

$(1+\tan 1^{\circ})(1+\tan 2^{\circ})(1+\tan 3^{\circ})\cdots\cdots(1+\tan 44^{\circ})=2^{22}$

28. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADC=90^{\circ}$，$\angle A=45^{\circ}$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求$\cos\angle ADB$；

（2）若$DC=2\sqrt{2}$，求BC.

【解】（1）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知$\dfrac{5}{\sin 45°}=\dfrac{2}{\sin\angle ADB}$，故$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

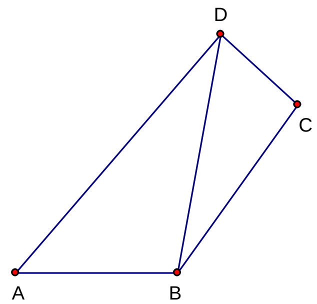
由题设知，$\angle ADB<90°$，故$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\dfrac{2}{25}}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

（2）由题设及（1）知$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$。

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}=25$，

所以$BC=5$.



29. 在ΔABC中，A,B,C的对边分别是a,b,c，已知$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$。

（1）求$\cos A$的值;

（2）若$a=1,\cos B+\cos C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求边$c$的值。

【解】（1）由射影定理知：$c\cos B+b\cos C=a$，

从而$3a\cos A=a$，因此$\cos A=\dfrac{1}{3}$

（2）：由（1）知$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，从而

由 $\cos B+\cos C=\cos(\pi-(A+C))+\cos C=\cos C-\cos A\cos C+\sin A\sin C$

$=\dfrac{2}{3}\cos C+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 得:

$\cos C+\sqrt{2}\sin C=\sqrt{3}\Rightarrow\sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

再由正弦定理知: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

30. 在 ΔABC 中, $a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$

(I) 求 B 的大小

(II) 求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值

【解】(Ⅰ)由余弦定理及题设得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $A+C=\dfrac{3\pi}{4}$.

$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos(\dfrac{3\pi}{4}-A)=\sqrt{2}\cos A+\cos\dfrac{3\pi}{4}\cos A+\sin\dfrac{3\pi}{4}\sin A$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\cos(A-\dfrac{\pi}{4})$

因为 $0<A<\dfrac{3\pi}{4}$, 所以当 $A=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 取得最大值1.

31. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x+a$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间;

(3) 求使 $f\left(x\right)\geq 0$ 成立的 x 的取值集合。

【解】 $f(x)=2\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x+a$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+a$ (1) 易知 $f(x)_{\max}=2+a$,

由题意有: $2+a=1$, 即 $a=-1$。

（2）由（1）知 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$，因为$\sin x$的单调递减区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$

令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，解得$2k\pi+\frac{\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，

即 $f(x)$的递减区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}](k\in Z)$

（3） $f(x)\ge 0\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})\ge\frac{1}{2}$，故$2k\pi+\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，解之得

$2k\pi\le x\le 2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$，

即 $f(x)\ge 0$的x的集合为$[2k\pi,2k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in Z)$