§ 10.3 等比数列

10.3.1 相关概念

学习提纲与学习目标

1、掌握等比数列的定义、通项公式和前 n 项和公式的求法

2、熟练掌握等比数列的性质，并能利用这些性质解决相应问题

1．等比数列的定义

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，通常用字母 q 表示．

2．等比数列的通项公式

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，则它的通项 $a_n = a_1q^{n-1}$．

3．等比中项

若 $c^2 = a\cdot b\left(ab\neq 0\right)$，那么 c 叫做 a 与 b 的等比中项．

4．等比数列的常用性质

(1)通项公式的推广：$a_n = a_mq^{n-m}\left(m,n\in N^*\right)$．

(2)若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $k+l=m+n\left(k,l,m,n\in N^*\right)$，则 $a_ka_l = a_ma_n$

(3) 若 $\{a_n\},\{b_n\}$ (项数相同)是等比数列，则 $\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$，$\left\{a_n^2\right\}$，$\left\{a_nb_n\right\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 仍是等比数列．

(4) 公比不为－1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 仍成等比数列，其公比为 q^n。

(5) 令等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比 $q\neq 1$，则 $\dfrac{S_n}{S_m}=\dfrac{1-q^n}{1-q^m}$

5．等比数列的前 n 项和公式

等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q\left(q\neq 0\right)$，其前 n 项和为 S_n，

当 $q=1$ 时，$S_n = na_1$。

当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$。

10.3.2 典型例题

例 1(1)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_4=4$，则a_2a_6等于(　　).

A．4　　　　B．8　　　　C．16　　　　D．32

(2)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_3a_4=8, a_7=8$，则$a_1=$(　　)

A．1　　　B．±1　　　C．2　　　D．±2

【解】(1)由等比数列的性质得：$a_2a_6=a_4^2=16$

(2) $a_2a_3a_4=8\Rightarrow a_3^3=8\Rightarrow a_3=2$，故$a_7=a_3q^4=2q^4=8\Rightarrow q^2=2$

从而，$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=1$，选 A。

例 2．已知一等比数列的前三项依次为$x, 2x+2, 3x+3$，那么$-13\dfrac{1}{2}$是此数列的第（　　）项

A．2　　　B．4　　　C．6　　　D．8

【解】由$x(3x+3)=(2x+2)^2$解得$x=-1$或$x=-4$，而$x\neq-1\Rightarrow x=-4$

因此，$q=\dfrac{2x+2}{x}=\dfrac{3}{2}$，由$-13\dfrac{1}{2}=-4\times(\dfrac{3}{2})^{n-1}$，解得$n=4$

例 3.已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，公比$q\neq1$，设$P=\sqrt{a_4\cdot a_8}, Q=\dfrac{a_3+a_9}{2}$，则$P$与$Q$的大小关系（　　）

A．$P>Q$　　　B．$P<Q$　　　C．$P=Q$　　　D．无法确定

【解】由基本不等式和等比数列的性质知:

$Q=\dfrac{a_3+a_9}{2}>\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{a_3a_9}=\sqrt{a_4a_8}=P$，选 B。

例 4.已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_1+a_3=\dfrac{5}{4}, a_2+a_4=\dfrac{5}{2}$，则$\dfrac{S_6}{S_3}=$（　　）

A、$\dfrac{1}{2}$　　　B、$\dfrac{9}{8}$　　　C、2　　　D、9

【解】由题意知：$\dfrac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=q=2$，故，$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=9$，选 D。

例 5（全国 I）设等比数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为（　　）

【解】设该数列的公比为q，则

$a_1(1+q^2)=10,\ a_1q(1+q^2)=5$，因此，$q=\dfrac{1}{2}, a_1=8$，从而该数列为:$8,4,2,1,\dfrac{1}{2},\cdots$

易知：$n\geq 4$ 时 $a_n\leq 1$，故 $a_1a_2a_3=8\times 4\times 2=64$ 为最大。

例 6.（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_m=2$，$S_{2m}=10$，则 $S_{3m}=$（　　）

A．14　　　B. 24　　　C. 32　　　D. 42

（2）在一个等比数列中，前两项和是 7，前六项的和是 91，那么前四项和是（　）

A．28　　　B．32　　　C．35　　　D．49

【解】（1）由等比数列的性质知：$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 仍成等比数列，即 $2,8,S_{3m}-10$ 成等比数列

故 $2(S_{3m}-10)=64$，解得 $S_{3m}=42$，选 D。

（2）因 S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等比数列，即 $7,S_4-7,91-S_4$ 成等比数列，

故 $(S_4-7)^2=7(91-S_4)$，解得 $S_4=28$，选 A。

例 7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_6=b_7$，则有(　　).

A．$a_3+a_9\leq b_4+b_{10}$　　　B．$a_3+a_9\geq b_4+b_{10}$

C．$a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$　　　D．a_3+a_9 和 b_4+b_{10} 的大小关系不确定

【解】记等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，则

$a_3+a_9=\dfrac{a_6}{q^3}+a_6q^3\geq 2\sqrt{(\dfrac{a_6}{q^3})(a_6q^3)}=2a_6=2b_7=b_4+b_{10}$，选 B。

例 8. 若 a,b 是函数 $f(x)=x^2-px+q(p>0,q>0)$ 的两个不同的零点，且 $a,b,-2$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q$ 的值等于(　　)

A.6　　　B.7　　　C.8　　　D.9

【解】由题意知：$a+b=p,ab=q$，因 $p>0,q>0$，故 $a>0,b>0$

因 $a,b,-2$ 重排后可成等差数列，且 $a>0,b>0$，故等差中项不能是 -2，只能是 a 或 b

同理，$a,b,-2$ 重排后可成等比数列，等比中项只能是 -2，即 $ab=4$

所以，$\begin{cases}ab=4\\2b=a-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ab=4\\2a=b-2\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=4\\a=1\end{cases}$

故 $p=5,q=4$，$p+q=9$，选 D。

例 9. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差 d 不为零，前 n 项和是 S_n，若 a_3,a_4,a_8 成等比数列，则(　　)

A. $a_1d>0$，$dS_4>0$　　　B．$a_1d<0$，$dS_4<0$

C．$a_1d>0$，$dS_4<0$　　　D．$a_1d<0$，$dS_4>0$

【解】$\because a_3,a_4,a_8$成等比数列，$\therefore \left(a_1+3d\right)^2=\left(a_1+2d\right)\left(a_1+7d\right)$，整理得$a_1=-\dfrac{5}{3}d$，$\therefore$

$a_1d=-\dfrac{5}{3}d^2<0$

又$S_4=4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d=-\dfrac{2d}{3}$，$\therefore$ $dS_4=-\dfrac{2}{3}d^2<0$，故选 B.

例 10. 设正项等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{1}{2}$，前n项和为S_n，且

$2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$，则$a_n=$_________

【解】$2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$

$\Rightarrow 2^{10}(S_{30}-S_{20})=S_{20}-S_{10}\Rightarrow 2^{10}q^{10}(S_{20}-S_{10})=S_{20}-S_{10}$

由题意知：$S_{20}-S_{10}\neq 0$，故$2^{10}q^{10}=1\Rightarrow q=\dfrac{1}{2}$

故，$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{2^n}$

【注意】这里利用了S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$成等比数列的性质，该等比数列的公比显然为q^{10}。

例 11.已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2,a_4a_6=16$，则$\dfrac{a_9-a_{11}}{a_5-a_7}$=(　　)

A．2　　　　B．4　　　　C．8　　　　D．16

【解】因为数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_3=2$，所以$a_4a_6=a_5^2=16$，故$q^4=(\dfrac{a_5}{a_3})^2=4$，

从而，$\dfrac{a_9-a_{11}}{a_5-a_7}=\dfrac{q^4(a_5-a_7)}{a_5-a_7}=q^4=4$，选 B。

例 12．已知三角形的三边构成等比数列，它们的公比为q，则q的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$　　B．$(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},1]$　　C．$[1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$　　D．$(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$

【解】设三角形的三边为a,aq,aq^2,则

$$\begin{cases}a+aq>aq^2\\a+aq^2>aq\\aq+aq^2>a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q^2-q-1<0\\q^2-q+1>0\\q^2+q-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\q\in R\\q>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\text{或}q<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解法二】 a,b,c 成等比数列，分 $a \le b \le c$ 和 $a \ge b \ge c$ 两种情况，所得到的 q 应该互为倒数关系，因此只能选 D。

例 13（全国卷） 一个等比数列前 n 项的和为 48，前 $2n$ 项的和为 60，则前 $3n$ 项的和为(　　)

A．83　　　　B.108　　　　C．75　　　　D．63

【解】 由等比数列的性质知：$S_n,\ S_{2n}-S_n,\ S_{3n}-S_{2n}$ 也成等比数列，即 $48,\ 12,\ S_{3n}-60$ 成等比数列，解得 $S_{3n}=63$，选 D。

例 14. 已知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等比数列，它们的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{3^n+1}{4}$ 对 $n\in \mathrm{N}^*$ 恒成立，则 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=$

A．3^n　　　　B．4^n　　　　C．3^n 或 4^n　　　　D．$(\dfrac{4}{3})^n$

【解】 令 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 q 和 p 。$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{S_1}{T_1}=\dfrac{4}{4}=1 \Rightarrow a_1=b_1$，故

$$\frac{S_2}{T_2}=\frac{\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}}{\dfrac{b_1(1-p^2)}{1-p}}=\frac{1+q}{1+p}=\frac{10}{4}\Rightarrow 2q-5p=3,\quad \frac{S_3}{T_3}=\frac{\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}}{\dfrac{b_1(1-p^3)}{1-p}}=\frac{1+q+q^2}{1+p+p^2}=7,$$

解 $\begin{cases} 2q-5p=3 \\ \dfrac{1+q+q^2}{1+p+p^2}=7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} p=3 \\ q=9 \end{cases}$

故，$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{a_1q^n}{b_1p^n}=3^n$，选 A。

例 15. 等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1+a_6=11, a_3\cdot a_4=\dfrac{32}{9}$，且公比 $q\in\left(0,1\right)$．则数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为（　　　）

【解】 $\because a_3\cdot a_4=a_1\cdot a_6=\dfrac{32}{9}$

又 $a_1+a_6=11$，故 a_1,a_6 为方程 $x^2-11x+\dfrac{32}{9}=0$ 的两根，

又 $q\in\left(0,1\right)$，$\therefore a_1=\dfrac{32}{3}, a_6=\dfrac{1}{3}$

$\therefore q^5=\dfrac{a_6}{a_1}=\dfrac{1}{32},\therefore q=\dfrac{1}{2}$， $\therefore a_n=\dfrac{32}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-6}$

例 16．设实数数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，满足$S_{n+1}=a_{n+1}S_n,(n\in N^*)$

（Ⅰ）若a_1，S_2，$-2a_2$成等比数列，求S_2和a_3；

（Ⅱ）求证：对$k\ge 3$有$0\le a_{k+1}\le a_k\le\dfrac{4}{3}$

【解】（Ⅰ）由题意$\begin{cases}S_2^2=-2a_1a_2\\ S_2=a_2S_1=a_1a_2\end{cases}\Rightarrow S_2^2=-2S_2$，

因为$S_2\ne 0$所以$S_2=-2$；

由$S_2+a_3=S_3=a_3S_2\Rightarrow a_3=\dfrac{S_2}{S_2-1}=\dfrac{2}{3}$；

（Ⅱ）易见$S_n\ne 1,a_{n+1}\ne 1$，

所以$S_{n+1}=a_{n+1}S_n\Rightarrow S_n+a_{n+1}=a_{n+1}S_n\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{S_n}{S_n-1},S_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}$

从而$k\ge 3$时有:

$$a_k=\frac{S_{k-1}}{S_{k-1}-1}=\frac{a_{k-1}S_{k-2}}{a_{k-1}S_{k-2}-1}=\frac{a_{k-1}\times\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-1}-1}}{a_{k-1}\times\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-1}-1}-1}=\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}^2-a_{k-1}+1}$$

因为$a_{k-1}^2-a_{k-1}+1=(a_{k-1}-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，所以$a_k\ge 0$；

要证$a_k\le\dfrac{4}{3}$，只要证$\dfrac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}^2-a_{k-1}+1}\le\dfrac{4}{3}$，

即证$3a_{k-1}^2\le 4a_{k-1}^2-4a_{k-1}+4\Leftrightarrow a_{k-1}^2-4a_{k-1}+4\ge 0\Leftrightarrow(a_{k-1}-2)^2\ge 0$，此式显然成立，

所以$k\ge 3$时有$a_k\le\dfrac{4}{3}$。

下证$a_{k+1}\le a_k$，

事实上，$a_{k+1}-a_k=\dfrac{a_k^2}{a_k^2-a_k+1}-a_k=\dfrac{-a_k(a_k-1)^2}{a_k^2-a_k+1}\le 0$，所以$a_{k+1}\le a_k$（$k\ge 3$）。

综上，原不等式成立。

例 17.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2},n\in N^*$。

(1)令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：$\{b_n\}$ 是等比数列；

(2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1)证明 $b_1=a_2-a_1=1$.

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}-a_n=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-a_{n-1}\right)=-\dfrac{1}{2}b_{n-1}$，

$\therefore\{b_n\}$ 是以 1 为首项，$-\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列.

(2)【解】 由(1)知 $b_n=a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

即 $a_n-a_{n-1}=(-\dfrac{1}{2})^{n-2}$，故当 $n\geq 2$ 时，

$$a_n=a_1+\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\left(a_n-a_{n-1}\right)=1+1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$=1+\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

当 $n=1$ 时，$\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{1-1}=1=a_1$，$\therefore a_n=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(n\in N^*\right)$

18．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}(n\in N^+)$.

（I）求证：$\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（II）数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(3^n-1)\cdot\dfrac{n}{2^n}\cdot a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若不等式 $(-1)^n\lambda<T_n+\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 对一切 $n\in N^+$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

【解】（Ⅰ）易知 $a_n\neq 0$，故

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{a_n}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，公比 $q=3$ 的等比数列。

$\therefore\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot 3^n$ $\qquad\therefore\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)$ $\qquad\therefore a_n=\dfrac{2}{3^n-1}$

（Ⅱ）$b_n=\left(3^n-1\right)\dfrac{n}{2^n}a_n=\left(3^n-1\right)\dfrac{n}{2^n}\dfrac{2}{3^n-1}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\dfrac{6}{2^5}+\cdots\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-3}}+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$ ①

$\therefore \dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\dfrac{5}{2^5}+\dfrac{6}{2^6}+\cdots\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-2}}+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$ ②

①−②，$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^6}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-2}}+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$

$=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}\ \therefore T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}\ \therefore\left(-1\right)^n\lambda<4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$\therefore\left(-1\right)^n\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$　　当 n 为奇数时，$-\lambda<4-\dfrac{2}{2^0}=2$，$\therefore\lambda>-2$；

当 n 为偶数时，$\lambda<4-\dfrac{2}{2^1}=3$，$\therefore\lambda<3$. 综上所述：$-2<\lambda<3$.