§ 4.2 三角恒等变换

4.2.1 相关概念和公式

1、诱导公式梳理

公式一

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$$

公式二

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

公式三

$$\begin{aligned}&\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha, &&\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha,\\ &\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha, &&\cos(k\pi+\alpha)=(-1)^k\cos\alpha,\\ &\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha, &&\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha,\end{aligned}$$

公式四

$$\begin{aligned}&\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha &&\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ &\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha &&\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ &\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha &&\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\end{aligned}$$

诱导公式可概括为$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$的各三角函数值的化简公式．记忆规律是：奇变偶不变，符号看象限．其中的奇、偶是指$\frac{\pi}{2}$的奇数倍和偶数倍，变与不变是指函数名称的变化．若是奇数倍，则正弦变余弦，余弦变正弦；若是偶数倍，则函数名称不变；符号看象限是指把α看成锐角时原函数值的符号作为结果的符号．

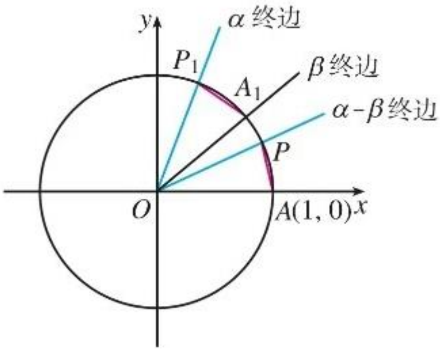
比如求$\sin(\frac{3\pi}{2}+120^\circ)$，先变成$\cos120^\circ$，然后将$120^\circ$看成锐角，$\frac{3\pi}{2}+120^\circ$在**“第 4 象限”**，而第 4 象限的正弦为负，故在$\cos120^\circ$前面加“—”号，因此得$\sin(\frac{3\pi}{2}+120^\circ)=-\cos120^\circ=\frac{1}{2}$

再比如求$\sin(\frac{3\pi}{2}-30^\circ)$，先变成$\cos(-30^\circ)$，然后将$-30^\circ$看成锐角，$\frac{3\pi}{2}+(-30^\circ)$在**“第 4 象限”**，而第 4 象限的正弦为负，故在$\cos(-30^\circ)$前面加“—”号，因此得$\sin(\frac{3\pi}{2}-30^\circ)=-\cos(-30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．两角和与差的正、余弦公式和正切公式及其他相关公式

如图所示，设单位圆与 x 轴正半轴相交于 $A(1,0)$，为简单计，不妨设 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\alpha,\beta$ 的终边分别与单位圆交于 P_1,A_1，作一个角 $\angle POA=\alpha-\beta$，$\alpha-\beta$ 的终边与单位圆交于点 P。连接 A_1P_1,AP，显然,因 $\angle P_1OA_1=\angle POA$，故 $A_1P_1=AP$。由于 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha),A_1(\cos\beta,\sin\beta)$，$P(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$，由两点间的距离公式得:

$$A_1P_1=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2},\quad AP=\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)}$$



即 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)$，化简得

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

此即为两角差的余弦公式。

值得一提的是：公式（1）对任意的 α,β 都合适。

在公式（1）中，将 β 换成 $-\beta$，得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$，即

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2)$$

此即两角和的余弦公式。

由诱导公式得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta]=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$，即

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \qquad (3)$$

此即两角和的正弦公式。

在公式（3）中，将 β 换成 $-\beta$，得 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$，即

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \qquad (4)$$

此即两角差的正弦公式。

由两角差的正余弦公式得:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$，即

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} \qquad (5)$$

此即两角差的正切公式。

在公式（5）中，将β换成$-\beta$，得

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} \qquad (6)$$

在$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$中，令$\beta=\alpha$，则得

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad (7)$$

在$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$中，令$\beta=\alpha$，则得

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (8)$$

由（7）可得

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad (9)$$

在公式（6）里边，令$\beta=\alpha$，就得到

$$\boxed{\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} \qquad (10)$$

万能公式（了解）

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

辅助角公式

由于$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$

令$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

正弦平方差公式（自己验证）

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

常见的三角不等式

(1) 若 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则

$\sin x<x<\tan x$， $1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$

(2) $|\sin x|+|\cos x|\ge 1$

4.2.2 典型例题

例 1.（1） 已知 $A=\dfrac{\sin(k\pi+\alpha)}{\sin\alpha}$， $B=\dfrac{\cos(k\pi+\alpha)}{\cos\alpha}(k\in Z)$，则 $A+B$ 的值构成的集合是（　　）

A. $\{-2,-1,1,2\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）已知 $\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\dfrac{1}{2}$，则 $\cos(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)=$______

【解析】（1） $A+B=\dfrac{\sin(\alpha+k\pi)}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos(\alpha+k\pi)}{\cos\alpha}$

$$=\frac{(-1)^k\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{(-1)^k\cos\alpha}{\cos\alpha}=2\times(-1)^k=\pm2$$

只能选 C。

（2） $\cos(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{3}-\alpha))=\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\dfrac{1}{2}$

例 2. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{13}$， $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{13}$，且 $\alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$， $\alpha+\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\sin2\alpha,\cos2\beta$ 的值。

【解析】 因 $\alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$， 故 $\cos(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=-\dfrac{12}{13}$。

因 $\alpha+\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，故 $\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{12}{13}$。从而

$$\sin 2\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\beta\right)+\left(\alpha-\beta\right)\right]=\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\alpha-\beta\right)$$

$$=\frac{120}{169}$$

$$\cos 2\beta=\cos\left[\left(\alpha+\beta\right)-\left(\alpha-\beta\right)\right]=\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\alpha-\beta\right)$$

$$=-1$$

例 3（1）.已知$\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)=a$，则$\cos(\frac{5\pi}{6}+\theta)+\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)=$_______

（2）已知$\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{1}{4}$，则$\cos(\frac{\pi}{3}+2\alpha)=$（　　　　）

【解析】（1）$\cos(\frac{5\pi}{6}+\theta)+\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)=\cos(\pi-(\frac{\pi}{6}-\theta))+\sin(\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{6}-\theta))$

$=-\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)+\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)=0$

（2）由题意得：$\cos 2(\frac{\pi}{3}-\alpha)=1-2\sin^2(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{7}{8}$

故，$\cos(\frac{\pi}{3}+2\alpha)=-\cos[\pi-(\frac{\pi}{3}+2\alpha)]=-\cos(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)=-\frac{7}{8}$

例 4：求证

（1）$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$

（2）$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

证明（1）：右边$=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\sin\alpha\cos\beta$

=左边，故原等式成立，证毕。

（2）左边$=\sin(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2})+\sin(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2})$

$=\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}+\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}-\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

$=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$=右边，

故原等式成立，证毕。

例 5（1）（**全国 I**）已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（　　）

A、$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　　B、$\frac{2}{3}$　　　　C、$\frac{1}{3}$　　　　D、$\frac{\sqrt{5}}{9}$

(2) 已知$2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则$\tan\theta=$　(　　)

A、-2　　　　B、-1　　　　C、1　　　　D、2

【解】(1) 由题意得：$3(2\cos^2\alpha-1)-8\cos\alpha=5$，即$3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，

解得$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$或$\cos\alpha=2$（舍去）

因$\alpha\in(0,\pi)$，故$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，选 A

(2) 由题意得：$2\tan\theta-\dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=7$，

化简得：$\tan^2\theta-4\tan\theta+4=0$，解得$\tan\theta=2$。选 D

例 6：已知$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1}{2},\sin\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{3}$，求证：

(1) $\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$；

(2) $\tan\alpha=5\tan\beta$

【证明】(1) 由题意知

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\qquad ①$$

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\qquad ②$$

比较①*2 和②*3 两式的右边知

$$2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\sin\beta=3\sin\alpha\cos\beta-3\cos\alpha\sin\beta$$

移项整理得：$\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$，证毕。

(2) 由（1）知$\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$　　③

显然$\cos\alpha\neq0$，事实上，如$\cos\alpha=0$，因此时$\sin\alpha\neq0$，故$\cos\beta=0$，由①得：$0=\frac{1}{2}$，矛盾。

同理，$\cos\beta\neq0$

③两边同时除以$\cos\alpha\cos\beta$，得$\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{5\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$，即$\tan\alpha=5\tan\beta$，证毕。

例 7.已知$\dfrac{1-\tan\theta}{2+\tan\theta}=1$，求证：$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

证明：由$\dfrac{1-\tan\theta}{2+\tan\theta}=1$得$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，故$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})^2}=-\dfrac{4}{3}$，

$$-4\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=-4\times\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=-4\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{4}{3},$$

因此，原等式成立，证毕。

例 8.在$\triangle ABC$中，已知$\tan A,\tan B$是x的方程$x^2+p\left(x+1\right)+1=0$的两个实根，求$\angle C$。

【解】方程$x^2+p(x+1)+1=0$即为$x^2+px+p+1=0$

由韦达定理知$\begin{cases}\tan A+\tan B=-p\\ \tan A\tan B=p+1\end{cases}$，因此，$1-\tan A\tan B=-p$

易知$p\neq 0$，故$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{-p}{-p}=1$，即$\tan(A+B)=1$，

因A,B为三角形的内角，故$A+B=45^\circ$，进而$C=135^\circ$.

例 9.求证：

（1）$3+\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha=8\sin^4\alpha$

（2）$\dfrac{\tan\alpha\tan 2\alpha}{\tan 2\alpha-\tan\alpha}+\sqrt{3}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=2\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})$

证明（1）左边$=3+2\cos^2 2\alpha-1-4\cos 2\alpha=2\cos^2 2\alpha-4\cos 2\alpha+2$

$=2(\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha+1)=2(\cos 2\alpha-1)^2=2(1-2\sin^2\alpha-1)^2=8\sin^4\alpha=$右边，

故，原等式成立。

（2）左边$=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}-\sqrt{3}\cos 2\alpha$

$=\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha-\alpha)}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha$，

右边$=2(\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha$

左边=右边，故原等式成立，证毕。

例 10.是否存在锐角α,β，使$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3},\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$同时成立？若存在，求出$\alpha,\beta$的度数；若不存在，请说明理由。

【解析】假设这样的α,β存在，由$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3}$知$\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{3}$

因此，$\tan(\frac{\alpha}{2}+\beta)=\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

从而得$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta=\sqrt{3}(1-2+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$

此说明$\tan\frac{\alpha}{2},\tan\beta$为如下一元二次方程之二根

$x^2-(3-\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})=0$　　　　(*)

上述方程的判别式$\Delta=4-2\sqrt{3}>0$，即方程（*）有两个不相等的实根。

解方程（*）得：$\tan\frac{\alpha}{2}=1$（舍去）或$\tan\beta=1$

由$\tan\beta=1$得$\beta=\frac{\pi}{4}$；再由$\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{3}$得$\alpha=\frac{\pi}{6}$；

综上，这样的α,β存在，其中$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$。

例 11.观察以下各等式：

$\sin^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin 30^\circ\cos 60^\circ=\frac{3}{4}$,

$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\frac{3}{4}$,

$\sin^2 15^\circ+\cos^2 45^\circ+\sin 15^\circ\cos 45^\circ=\frac{3}{4}$

【解】规律如下：如$\beta-\alpha=30^\circ$，则$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin\alpha\cos\beta=\frac{3}{4}$

证明：左边==$\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30^\circ)+\sin\alpha\cos(\alpha+30^\circ)$

$=\sin^2\alpha+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)^2+\sin\alpha(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$

=右边。

故，原等式成立，证毕。

例 12.已知 $\tan\alpha=2$ 求:

(1) $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}$；　(2). $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$　（3） $\frac{\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha}$

【解析】（1） $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=\frac{2\times2-3}{4\times2-9}=-1$

(2) $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{4\tan^2\alpha-3\tan\alpha-5}{\tan^2\alpha+1}=\frac{4\times2^2-3\times2-5}{2^2+1}=1$

(3) $\frac{\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

例 13.（1） $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ=$________;

（2） $\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ=$________.

【解析】(1) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+(\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ)$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1=45\frac{1}{2}$

（2） $\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ=0-(\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ)$

$=90-45\frac{1}{2}=44\frac{1}{2}$

例 14.(1) 若 $\tan\beta=3$，则 $\frac{\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}=$ ______

(2) $\log_2\cos\frac{\pi}{9}+\log_2\cos\frac{2\pi}{9}+\log_2\cos\frac{4\pi}{9}=$______

【解析】(1) 原式= $\frac{(\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\beta)/\cos^2\beta}{(2\sin^2\beta+\cos^2\beta)/\cos^2\beta}=\frac{\tan^2\beta+2\tan\beta}{2\tan^2\beta+1}=\frac{9+6}{2\times9+1}=\frac{15}{19}$

(2) 原式 $=\log_2(\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9})$,

而$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$，即原式$=\log_2\frac{1}{8}=-3$

例 15.求值:

（1）若$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2020$, 则$\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=$________。

（2）$\dfrac{\sin 65^{o}+\sin 15^{o}\sin 10^{o}}{\sin 25^{o}-\cos 15^{o}\cos 80^{o}}=$________

【解析】（1）原式$=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$$=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2020$$

（2）原式$=\dfrac{\sin(80^0-15^0)+\sin 15^0\cos 80^0}{\sin(15^0+10^0)-\cos 15^0\sin 10^0}=\dfrac{\sin 80^0\cos 15^0}{\sin 15^0\cos 10^0}=\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=2+\sqrt{3}$

例 16(1) 设$a=\sin 14^0+\cos 14^0$，$b=\sin 16^0+\cos 16^0$，$c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则a,b,c大小关系（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

(2) $(1+\tan 21^0)(1+\tan 22^0)(1+\tan 23^0)(1+\tan 24^0)$ 的值是(　　)

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

【解析】(1) $a=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 14^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14^\circ)=\sqrt{2}\sin 59^0$，

同理，$b=\sqrt{2}\sin 61^0$，$c=\sqrt{2}\sin 60^0$，

因$\sin 59^0<\sin 60^0<\sin 61^0$，故选 D。

(2) 因$\tan 21^\circ=\tan(45^\circ-24^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 24^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 24^\circ}=\dfrac{1-\tan 24^\circ}{1+\tan 24^\circ}$，

故$1+\tan 21^0=1+\dfrac{1-\tan 24^\circ}{1+\tan 24^\circ}=\dfrac{2}{1+\tan 24^\circ}$

故$(1+\tan 21^0)(1+\tan 24^0)=\dfrac{2}{1+\tan 24^\circ}(1+\tan 24^0)=2$

同理：$(1+\tan 22^0)(1+\tan 23^0)=2$。选 C。

例 17.求值：（1）$\sin 6^0\sin 42^0\sin 66^0\sin 78^0$；

（2）$\sin^2 20^0+\cos^2 50^0+\sin 20^0\cos 50^0$。

【解析】:（1）原式$=\sin 6^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0$

$$=\frac{\sin 6^0\cos 6^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{2}\sin 12^0\cos 12^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\sin 24^0\cos 24^0\cos 48^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{8}\sin 48^0\cos 48^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{16}\sin 96^0}{\cos 6^0}=\frac{\frac{1}{16}\cos 6^0}{\cos 6^0}=\frac{1}{16}$$

（2）$\sin^2 20^0+\cos^2 50^0+\sin 20^0\cos 50^0$

$$=\frac{1-\cos 40^0}{2}+\frac{1+\cos 100^0}{2}+\frac{1}{2}[\sin(20^0+50^0)+\sin(20^0-50^0)]$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 100^0-\cos 40^0)+\frac{1}{2}\sin 70^0-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\sin 70^0\sin 30^0+\frac{1}{2}\sin 70^0=\frac{3}{4}$$

例 18.（1）证明：$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\left(\alpha+\beta\right)-\tan\alpha\tan\beta\tan\left(\alpha+\beta\right)$；

（2）求$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$的值;

（3）若$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，求$\left(1-\tan\alpha\right)\left(1-\tan\beta\right)$的值;

（4）求$\frac{\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\tan 120^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}$的值。

（1）**证明**：右边$=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$=\tan\alpha+\tan\beta$=左边。

故原等式成立，证毕。

（2）**解**：由（1）得$\tan 20^0+\tan 40^0+\sqrt{3}\tan 20^0\tan 40^0$

$=\tan(20^0+40^0)-\sqrt{3}\tan 20^0\tan 40^0+\sqrt{3}\tan 20^0\tan 40^0=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

（3）**解**：由（1）知：$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta$

$=1-[\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)]+\tan\alpha\tan\beta$

$=1-\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha\tan\beta\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha\tan\beta=2$

（4）**解**：由（1）知：

原式 $=\frac{\tan 60^\circ-\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 60^\circ+\tan 120^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

$=1-\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha\tan\beta\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha\tan\beta=2$