§4.4 正、余弦定理及其应用

4.4.1 相关概念

1、正弦定理

在$\triangle ABC$中，令a,b,c分别是角A,B,C的对边，R为$\triangle ABC$外接圆半径，则

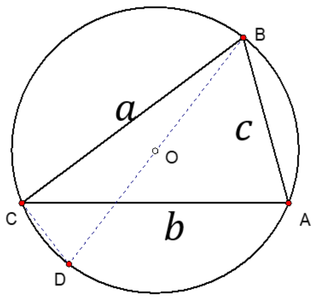
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

证明： 如图，连接BO，设其延长线交圆O于D，连接CD。

$\because \angle BCD=90^\circ$，且$\angle BDC=\angle A$，$\therefore a=2R\sin\angle BDC=2R\sin\angle A$，即$\dfrac{a}{\sin\angle A}=2R$

同理可证：$\dfrac{b}{\sin\angle B}=\dfrac{c}{\sin\angle C}=2R$，

因此$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。



正弦定理的几种变式：

(1) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(2) $a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$

(3) $\sin A=\dfrac{a}{2R},\quad \sin B=\dfrac{b}{2R},\quad \sin C=\dfrac{c}{2R}$

三角形面积公式：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

（其中，R是三角形外接圆半径，r是三角形内切圆的半径)，并可由此计算R，r

2、余弦定理

在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是角A,B,C的对边，则

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

证明：由正弦定理知：$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2}{2\sin B\sin C}$

$=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 B\cos^2 C-2\sin B\cos C\cos B\sin C-\cos^2 B\sin^2 C}{2\sin B\sin C}$

$=\dfrac{\sin^2 B(1-\cos^2 C)+\sin^2 C(1-\cos^2 B)-2\sin B\sin C\cos B\cos C}{2\sin B\sin C}$

$=\dfrac{2\sin^2 B\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos B\cos C}{2\sin B\sin C}=\sin B\sin C-\cos B\cos C$

$=-\cos(B+C)=\cos A$

即 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

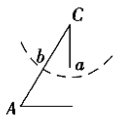
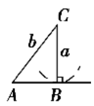
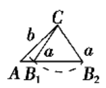
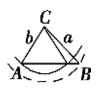
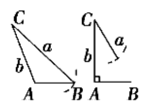
同理可得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

余弦定理的变式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ac\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

解三角形的主要工具是正余弦定理，解三角形时，要注意解的情况，必要时可数形结合

比如已知两边和其中一边的对角（如已知 a，b，A），则有如下几种情况

	A 为锐角				A 为钝角或直角	
图形						
关系式	$a<b\sin A$	$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a\geq b$	$a>b$	$a\leq b$
解的个数	无解	一解	两解	一解	一解	无解

3、射影公式

$$a\cos B+b\cos A=c \qquad b\cos C+c\cos B=a \qquad a\cos C+c\cos A=b$$

4、三角形面积公式

（1）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$ 分别表示 a,b,c 边上的高）

（2）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{r}{2}(a+b+c)$

（其中，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，r 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径）

（3）海伦公式：$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

5 、凸四边形的面积公式

设平面凸四边形 $ABCD$ 的四条边长分别为 a,b,c,d，$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，则

$$S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

仅当 $A+C=B+D=\pi$ 是面积最大。也即四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形时面积最大。这个公式也称为婆罗摩及多公式。

4.4.2 典型例题

例 1．已知 $\triangle ABC$，则下列命题中，是真命题的有哪些?

（1）若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

（2）若 $\sin A=\cos B$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

（3）若 $\cos A\cos B\cos C<0$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形;

（4）$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

【解析】(1)若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，如 $2A+2B=\pi$，则 $A+B=\frac{\pi}{2}$，此时 $\triangle ABC$ 是直角三角形，(1）错

(2）取 $A=120^\circ, B=30^\circ$，显然 $\sin A=\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，(2）错。

(3）$\cos A,\cos B,\cos C$ 中必有且仅有一个为负，不妨设 $\cos A<0$，则 A 为钝角，(3）对。

(4）如 $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则必有 $\cos(A-B)=\cos(B-C)=\cos(C-A)=1$，得 $A=B=C$，(4）对。

例 2．下列命题中，正确命题的序号是（　　）

(1）在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形

(2）一个三角形三个内角的正弦与另一三角形三内角的余弦相等，则这两个三角形都必为锐角三角形。

（3）$\triangle ABC$中，已知$a\cos B=b\cos A+\frac{1}{2}$，则由正弦定理可得：$\sin A\cos B=\sin B\cos A+\frac{1}{2}$，

（4）$\triangle ABC$为锐角三角形，则必有$\sin A+\sin B+\sin C\geq\cos A+\cos B+\cos C$

【解析】：$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$，

故$\tan\frac{A-B}{2}=0$或$\tan\frac{A+B}{2}=1$，即$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$；（1）错。

（2）不妨设这两个三角形分别为$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$，且$\sin A=\cos A_1,\sin B=\cos B_1,\sin C=\cos C_1$，

由$\cos A_1,\cos B_1,\cos C_1$均为正知$\triangle A_1B_1C_1$为锐角三角形；

另外，如$\triangle ABC$为锐角三角形，则由$\cos A_1=\sin A=\cos(\frac{\pi}{2}-A)$，得$A_1=\frac{\pi}{2}-A$

同理，$B_1=\frac{\pi}{2}-B$，$C_1=\frac{\pi}{2}-C$，从而有

$A_1+B_1+C_1=\frac{3\pi}{2}-(A+B+C)$，得$A_1+B_1+C_1=\frac{\pi}{2}$，矛盾；故（2）错。

（3）$a\cos B=b\cos A+\frac{1}{2}$中含有常数$\frac{1}{2}$，因此不能由正弦定理得到：$\sin A\cos B=\sin B\cos A+\frac{1}{2}$，（3）错。

（4）因$\triangle ABC$为锐角三角形，故$A+B>\frac{\pi}{2}\Rightarrow A>\frac{\pi}{2}-B\Rightarrow\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)$，

故，$\sin A>\cos B$；

同理有$\sin B>\cos C,\sin C>\cos A$，

故$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$，（4）对。

综上，正确命题的序号为（4）。

例 3（1）在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3},b=\sqrt{2},B=45^{\circ}$.求角$A,C$和边$c$。

（2）在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc,$则$A=$（　　）

A．90^0　　B．60^0　　C．135^0　　D．150^0

【解析】（1）由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，故 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^{\circ}}$，

故 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\because a>b$，$\therefore A=60^{\circ}$ 或 $A=120^{\circ}$

当 $A=60^{\circ}$ 时，$C=180^{\circ}-60^{\circ}-45^{\circ}=75^{\circ}$，$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

当 $A=120^{\circ}$ 时，$C=15^{\circ}$，故 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。

（2）$(a+b+c)(b+c-a)=3bc\Rightarrow(b+c)^2-a^2=3bc$

$\therefore\ b^2+c^2-a^2=bc\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60^0$

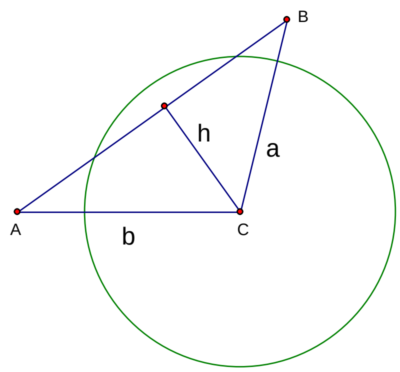
例 4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2,b=\sqrt{6},A=45^{\circ}$，则满足条件的三角形有(　　)

A.1 个　　　　B.2 个　　　　C.0 个　　　　D.无法确定

【解析】: 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $2^2=(\sqrt{6})^2+c^2-2\sqrt{6}c\cos 45^{\circ}$，整理得 $c^2-2\sqrt{3}c+2=0$，因判别式 $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times 2=4>0$，

故上面的方程有两个不相等的根，且易知此二根为正，故满足条件的三角形有两个。

【法二】: 如图，因 $h=b\sin A=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}<a$；又 $a<b$，因此，以 C 为圆心，a 为半径的圆与射线 AB 有两个交点，故满足条件的三角形有两个。



例 5. 已知锐角 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，$AB=2\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　　B．$6\sqrt{3}$　　　C．$8\sqrt{3}$　　　D．$12\sqrt{3}$

【解析】 $\because$ 锐角 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，$AB=2\sqrt{3}$，

$\therefore\ \frac{c}{\sin C}=2R$，即 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=4$，$\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 C 为锐角，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$，$\therefore a=4\sin A$，$b=4\sin B$，$c=2\sqrt{3}$，

$\therefore a+b+c=2\sqrt{3}+4\sin B+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=6\sin B+2\sqrt{3}\cos B+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}$

$\therefore$当$B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$B=\frac{\pi}{3}$时

$a+b+c$取得最大值$4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$．故选B．

例6.在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$b=2\sqrt{7}$，$c=3$，$B=2C$，则$\cos 2C$的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　　　B．$\frac{5}{9}$　　　　C．$\frac{4}{9}$　　　　D．$\frac{\sqrt{7}}{4}$

【解析】由正弦定理可得：$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin 2C}{\sin C}=\frac{2\sin C\cos C}{\sin C}=2\cos C=\frac{2\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\cos C=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\therefore\cos 2C=2\cos^2 C-1=2\times\frac{7}{9}-1=\frac{5}{9}$，故选B

例7.在$\triangle ABC$中，三内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$，$bc=\sqrt{3}a^2$，则角C的大小是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$或$\frac{2\pi}{3}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　　　D．$\frac{\pi}{6}$

【解析】$\because b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由$0<A<\pi$，可得$A=\frac{\pi}{6}$，

$\because bc=\sqrt{3}a^2$，$\therefore\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin^2 A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\therefore\sin\left(\frac{5\pi}{6}-C\right)\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

即$\sin C(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即$\frac{1}{2}\sin C\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 C=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{4}\sin 2C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\cos 2C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即$\sin 2C=\sqrt{3}\cos 2C$

故$\tan 2C=\sqrt{3}$，又$0<C<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore 2C=\frac{\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$，即$C=\frac{\pi}{6}$或$\frac{2\pi}{3}$，故选A．

例8.在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{6}-\sqrt{2},C=30^0$，则$AC+BC$的最大值是________。

【解析】：$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C},\dfrac{AC+BC}{\sin B+\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，

$$AC+BC=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sin A+\sin B)=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 75^\circ\cos\frac{A-B}{2}=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A-B}{2}\le 4,(AC+BC)_{\max}=4$$

【注意角的变换】：$A=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2},B=\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{A-B}{2}$

例 9.ΔABC 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边，若 ΔABC 为锐角三角形，且 $B=\dfrac{\pi}{3},c=2$，则边 b 的取值范围是（　　）

A、$\left(\sqrt{3},3\right)$　　B、$\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$　　C、$\left(3,2\sqrt{3}\right)$　　D、$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

【解析】由 ΔABC 为锐角三角形以及 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 知 $30^\circ<C<90^\circ$

故 $\sin C\in(\dfrac{1}{2},1)$，由正弦定理知：$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{2\sin 60^\circ}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}\in(\sqrt{3},2\sqrt{3})$，选 B。

例 10．已知 a,b,c 分别为 ΔABC 的三个内角 A,B,C 的对边，a =2，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则 ΔABC 面积的最大值为（　　）

【解析】由正弦定理有 $(2+b)(a-b)=(c-b)c\Rightarrow bc=c^2+b^2-4$，

因此，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，即 $A=60^\circ$。

另外，$bc=c^2+b^2-4\ge 2bc-4\Rightarrow bc\le 4$，故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\le\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

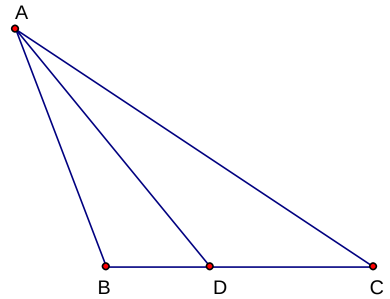
故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

例 11．在 $\triangle ABC$ 中，$B=120^\circ,AB=\sqrt{2}$，A 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$，则 $AC=$________.

【解析】由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\angle ADB}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

解得 $\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle ADB=45^\circ$，从而 $\angle BAD=15^\circ=\angle DAC$

所以 $C=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$，故 $AC=\dfrac{AB\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{6}$



例 12.在锐角ΔABC中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，若$a^2-b^2+ac=0$，则$\frac{\sin A}{\sin B}$的取值范围为（　　）

A．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　B. $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　C. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　D. $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$

【解析】 $a^2-b^2+ac=0 \Rightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2-ac}{2ac}=\frac{c-a}{2a}=\frac{\sin C-\sin A}{2\sin A}$，

故$2\sin A\cos B=\sin C-\sin A=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A$，

即$\sin B\cos A-\cos B\sin A=\sin A$，故$\sin(B-A)=\sin A$

易知$-\frac{\pi}{2}<B-A<\frac{\pi}{2}$，而$0<A<\frac{\pi}{2}$，故$B-A=A$，即$B=2A$

由三角形为锐角三角形知：$A+B=3A>90^\circ \Rightarrow A>30^\circ$，

另外，由$B=2A<90^\circ \Rightarrow A<45^\circ$

故，$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin 2A}=\frac{1}{2\cos A}\in(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$，选 D。

例 13．在$\triangle ABC$中，已知$c=b(1+2\cos A)$，求证：$A=2B$

【证明】：由题意及余弦定理得：$c=b(1+2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$，化简得$a^2=b^2+bc$，

由正弦定理知：$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C$，故$\sin^2 A-\sin^2 B=\sin B\sin C$，

即$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin B\sin C$

由于$A+B=\pi-C$，故$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin C$

又$\sin C\neq 0$，故$\sin(A-B)=\sin B$

故，$A-B=B$或$A-B+B=\pi$，后者显然不可能。

故$A-B=B$，即$A=2B$。证毕。

例 14.在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{1}{3}$。

（1）求$\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\cos 2A$的值；

（2）若$a=\sqrt{3}$，求bc的最大值。

(1) 解：$\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\cos 2A=\dfrac{1-\cos(B+C)}{2}+2\cos^2 A-1=\dfrac{1+\cos A}{2}+2\cos^2 A-1$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3})^2-1=-\frac{1}{9}$$

(2) 由余弦定理知：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，故$3=b^2+c^2-2bc\times\dfrac{1}{3}\geq 2bc-\dfrac{2}{3}bc=\dfrac{4}{3}bc$，

故$bc\leq\dfrac{9}{4}$，当且仅当$b=c=\dfrac{3}{2}$时取等号。

综上，bc的最大值为$\dfrac{9}{4}$。

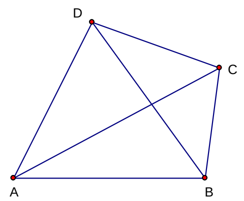
例15. 在四边形$ABCD$中，$B=D=90^\circ, A=60^\circ, AD=5, AB=4$，求$AC$的长及$\dfrac{BC}{CD}$的值。

【解析】：由题意知，四边形$ABCD$内接于圆，该圆即为$\triangle ABC$的外接圆，且AC等于外接圆的直径。

由余弦定理知：$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos A=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos 60^\circ=21$，

故$BD=\sqrt{21}$，从而$AC=2R=\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{7}$，

由勾股定理得



$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{28-16}=2\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{28-25}=\sqrt{3}$，

故，$\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$。

例16. 已知$\triangle ABC$中，$a^2-a=2(b+c), a+2b=2c-3$。

（1）若$\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，求$a,c$；

（2）求$\triangle ABC$的最大角。

【解析】(1)：由题意得 $a^2=a+2b+2c=2c-3+2c=4c-3$，

又，由题意及正弦定理知：$\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{13}}$，即$a^2=\frac{13c^2}{16}$，

故$\frac{13c^2}{16}=4c-3$，解得$c=4$或$c=\frac{12}{13}$，

如$c=\frac{12}{13}$，则$a+2b=2c-3=\frac{24}{13}-3<0$，不可能，故舍去，因此取$c=4$，进而由$\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{13}}$

得$a=\sqrt{13}$

（2）由题意可得：$c=\frac{a^2+3}{4},b=\frac{a^2-2a-3}{4}$，显然$c>b$（注意到$a^2+3>a^2-2a-3$）

由$b>0$知$a^2-2a-3>0$，故$a>3$，故$c>a$（如$c\le a$，则由$\frac{a^2+3}{4}\le a$得$1\le a\le 3$，与$a>3$矛盾），

综上，c为最大边，故角C最大；

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+(\frac{a^2-2a-3}{4})^2-(\frac{a^2+3}{4})^2}{2\times a\times\frac{a^2-2a-3}{4}}=\frac{-a^3+2a^2+3a}{2a(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2},$$

故$C=120^\circ$，即$\triangle ABC$的最大角为C，且为120°。

例17．已知D是$Rt\triangle ABC$斜边 BC上一点，$AB=AD$，记$\angle CAD=\alpha,\angle ABC=\beta$

（1）求证：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$。

（2）若$AC=\sqrt{3}DC$，求β的值。

（1）证明：易知$\angle DAB=90^\circ-\alpha$，故$2\beta+(90^\circ-\alpha)=180^\circ$，从而$2\beta=90^\circ+\alpha$，

因此$\cos 2\beta=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$，移项得$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$，证毕。

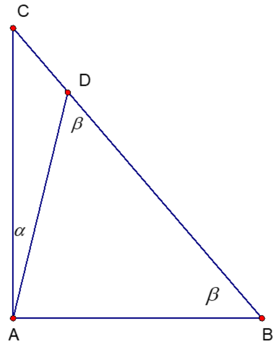
（2）解：在$\triangle ADC$中，因$\frac{AC}{CD}=\sqrt{3}$，由正弦定理得：$\frac{\sin(\pi-\beta)}{\sin\alpha}=\frac{AC}{CD}=\sqrt{3}$，

故$\sin\alpha=\frac{\sin\beta}{\sqrt{3}}$，

由（1）知：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$，

故$\frac{\sin\beta}{\sqrt{3}}+\cos 2\beta=0$，即$\sin\beta+\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)=0$，解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去），

因$\beta\in(0^\circ,90^\circ)$，故$\beta=60^\circ$。



例 18.已知锐角$\triangle ABC$中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5},\sin(A-B)=\frac{1}{5}$。

（1）求证：$\tan A=2\tan B$；

（2）若$AB=3$，求AB边上的高。

（1）证明：由题意知：$\sin(A+B)=3\sin(A-B)$

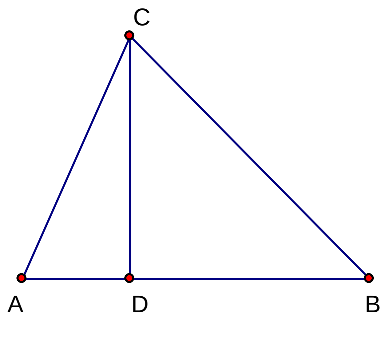
故$\sin A\cos B+\cos A\sin B=3(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$，即$\sin A\cos B=2\cos A\sin B$，

意知：$\cos A\cos B\neq 0$，故$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}=\frac{2\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$，即$\tan A=2\tan B$，证毕。

（2）解：如图，令AB边上的高$CD=h$，令$AD=x$，则$BD=3-x$，

由（1）知：$\tan A=2\tan B$，故$\frac{h}{x}=2\times\frac{h}{3-x}$，解得$x=1$，故$CA=\sqrt{h^2+1},CB=\sqrt{h^2+4}$，

又易知$\cos C=\frac{4}{5}$，由余弦定理知：$\cos C=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA\times CB}$，即



$\frac{4}{5}=\frac{(h^2+1)+(h^2+4)-9}{2\sqrt{h^2+1}\times\sqrt{h^2+4}}$，解得$h^2=10+4\sqrt{6}$或$h^2=10-4\sqrt{6}$（舍去），

由$h^2=10+4\sqrt{6}$得$h=2+\sqrt{6}$，即AB边上的高为$2+\sqrt{6}$。

例 19．在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ,AB=\sqrt{3},BC=1,P$ 为$\triangle ABC$内一点，$\angle BPC=90$

（1）若 $PB=\dfrac{1}{2}$，求 PA；

（2）若 $\angle APB=150^{\circ}$，求 $\tan\angle PBA$

【解析】(1)： 由题意知 $\angle PBC=60^{\circ}$，故 $\angle PBA=30^{\circ}$，

在 $\triangle PAB$ 中利用余弦定理得

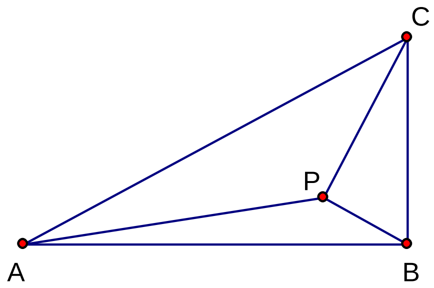
$$PA^2=BP^2+BA^2-2BP\times BA\times\cos\angle PBA=(\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\cos 30^{\circ}=\frac{7}{4},$$

故 $PA=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

(2) 令 $\angle PBA=\alpha$，则 $\angle PCB=\alpha$，故 $PB=\sin\alpha$

由正弦定理知：$\dfrac{PB}{\sin(30^{\circ}-\alpha)}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}$，即 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(30^{\circ}-\alpha)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 150^{\circ}}=2\sqrt{3}$，

即 $4\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，故 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。



例 20. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的一点，AD 平分 $\angle BAC$，且 $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍。

（1）若 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$

（2）若 $AD=1, DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长。

【解析】(1)： 由 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ACD}\Rightarrow\dfrac{BD}{DC}=2$，

由角平分线性质定理知：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}=2$，再由正弦定理知：$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$

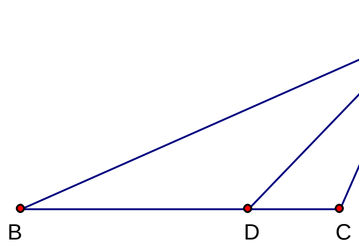
(2)：由（1）知 $BD=2DC=\sqrt{2}$，令 $AC=x$，则 $AB=2x$，

由余弦定理得

$\cos\angle ADB=\frac{DA^2+DB^2-AB^2}{2DA\times DB}=\frac{3-4x^2}{2\sqrt{2}}$

$\cos\angle ADC=\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\times DC}=\frac{\frac{3}{2}-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{3-2x^2}{2\sqrt{2}}$

由$\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$知$\frac{3-4x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{3-2x^2}{2\sqrt{2}}$，解得$x=1$，即$AC=1$。



例 21.在锐角ΔABC中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，满足

$\cos 2A-\cos 2B+2\cos(\frac{\pi}{6}-B)\cos(\frac{\pi}{6}+B)=0$.

（1）求角A的值;

（2）若$b=\sqrt{3}$且$b\le a$，求a的取值范围.

【解析】(1) 由题意得: $2\cos^2 A-2\cos^2 B+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B)=0$

$\Rightarrow 2\cos^2 A-2\cos^2 B+2(\frac{3}{4}\cos^2 B-\frac{1}{4}\sin^2 B)=0\Rightarrow\cos^2 A=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos A=\pm\frac{1}{2}$

因$\vartriangle ABC$为锐角三角形，故$A=\frac{\pi}{3}$

(2) 因$A=\frac{\pi}{3}$，故$B+C=120^\circ$，考虑到三角形为锐角三角形，

故$C=120^\circ-B<90^\circ\Rightarrow B>30^\circ$

又$a\ge b\Rightarrow B\le 60^\circ$，从而$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{\sin B}=\frac{3}{2\sin B}\in[\sqrt{3},3)$