§ 10.2 等差数列

10.2.1 相关概念

学习提纲与学习目标

1、掌握等差数列的定义、通项公式和前 n 项和公式的求法

2、熟练掌握等差数列的性质，并能利用这些性质解决相应问题

1．等差数列的定义

对于数列$\{a_n\}$，如果对任意的$n\geq 1(n\in N^*)$，都有$a_{n+1}-a_n=d$（常数），则称$\{a_n\}$为等差数列，常数d叫这个等差数列的公差。如a,b,c三个数成等差数列，则称b为a,c的**等差中项**。

2．等差数列的通项公式

若等差数列$\{a_n\}$的首项是a_1，公差是d，则其通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$。

3．等差数列的前n项和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n;$$

4.　数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn$（$A,B$为常数）$\Leftrightarrow \frac{S_n}{n}$为等差数列。

5．等差数列的常用性质

(1)通项公式的推广：$a_n=a_m+\left(n-m\right)d$，$\left(n,m\in N^*\right)$.

(2)若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$，$\left(n,m,p,q\in N^*\right)$.

(3) $a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$，$\left(k,m\in N^*\right)$是公差为$md$的等差数列.

(4)数列$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$也是等差数列.

(5) $S_{2n-1}=\left(2n-1\right)a_n$。

10.2.2 典型例题

例 1（1）（全国 I）设S_n为等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，若$3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则$a_5=$

A．-12　　　　B．-10　　　　C．10　　　　D．12

（2）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，前n项和为S_n,则“$d>0$”是"$S_4+S_6>2S_5$"的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【解】（1）$3S_3=S_2+S_4\Rightarrow 3S_3=S_3-a_3+a_4+S_3=2S_3+d$

$\Rightarrow S_3 = d \Rightarrow 3a_2 = d \Rightarrow 3(a_1 + d) = d$，

因 $a_1 = 2$，故 $d = -3$，故 $a_5 = a_1 + 4d = -10$，选 C。

（2）$(S_4 + S_6) - 2S_5 = (S_4 - S_5) + (S_6 - S_5) = a_6 - a_5 = d$，

因此，$d > 0 \Rightarrow S_4 + S_6 > 2S_5$　，反之亦然

故 $d > 0$ 是 $S_4 + S_6 > 2S_5$ 的充分必要条件，选 C。

例 2．设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，若 $a_6 = 2$ 且 $S_5 = 30$，则 S_8 等于(　　)．

A．31　　B．32　　C．33　　D．34

【解】 由已知可得 $\begin{cases} a_1 + 5d = 2 \\ 5a_1 + 10d = 30 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{26}{3} \\ d = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$，$\therefore$ $S_8 = 8a_1 + \dfrac{8 \times 7}{2} d = 32$。

例 3（1） 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_4 + a_8 = 16$，则该数列前 11 项和 $S_{11} =$（　　）

A．58　　B．88　　C．143　　D．176

（2）已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$3a_5 + 7a_{11} = 8$，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_9 + S_{21} =$（　　）

A．8　　B．16　　C．24　　D．32

【解】（1） $a_4 + a_8 = 16 \Rightarrow a_6 = 8$，故 $S_{11} = 11a_6 = 88$，选 B。

【法二】 $S_{11} = \dfrac{11(a_1 + a_{11})}{2} = \dfrac{11(a_4 + a_8)}{2} = \dfrac{11 \times 16}{2} = 88$，选 B.

（2）$S_9 + S_{21} = 9a_5 + 21a_{11} = 3(3a_5 + 7a_{11}) = 3 \times 8 = 24$

【注意】 对于等差数列

如 $n + m = p + q$，则 $a_n + a_m = a_p + a_q$；　　（2）$S_{2n-1} = (2n-1)a_n$

例 4 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_4 + a_5 = 24$，$S_6 = 48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为（　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【解】 $a_4 + a_5 = a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24$，$S_6 = 6a_1 + \dfrac{6 \times 5}{2} d = 48$，故 $\begin{cases} 2a_1 + 7d = 24 \\ 6a_1 + 15d = 48 \end{cases}$，

解得 $d = 4$，选 C。

【解法二】 $a_4 + a_5 = 24 \Rightarrow a_3 + a_6 = 24$　　　　（1）

$S_6 = 48 \Rightarrow \dfrac{6}{2}(a_1 + a_6) = 48 \Rightarrow a_1 + a_6 = 16$　　　　（2）

（1）-（2）得：$2d = 8$，故 $d = 4$，选 C。

例 5.已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n，对任意正整数n，都有$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+6}{n+1}$，则$\frac{a_{10}}{b_{10}}=$（　　　　）

【解】由等差数列的性质知：$S_{21}=21a_{10}$，$T_{21}=21b_{10}$，故

$\frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{2\times10+6}{10+1}=\frac{26}{11}$

例 6（1）.已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和为A_n和B_n，且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$，则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$的个数是_____

（2）两个等差数列$\{a_n\},\{b_n\},\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}=\frac{7n+2}{n+3}$,则$\frac{a_5}{b_5}=$__________.

【巧解】（1）直接用公式：$A_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$B_{2n-1}=(2n-1)b_n$

故$\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}=\frac{14n+38}{2n+2}=7+\frac{12}{n+1}$

因n为正整数，故$n=1,2,3,5,11$时，$\frac{a_n}{b_n}$为整数，即$\frac{a_n}{b_n}$为整数的n的个数是 5.

（2）令$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$\frac{a_5}{b_5}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{7\times9+2}{9+3}=\frac{65}{12}$

例 7.⑴若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0,a_7+a_{10}<0$,则当$n=$_____时,$\{a_n\}$的前$n$项和最大.

⑵ 已知等差数列的公差$d<0$，前n项和记为S_n，满足$S_{20}>0,S_{21}<0$，则当$n=$________时，S_n达到最大值.

【解】⑴ $a_7+a_8+a_9=3a_8>0\Rightarrow a_8>0$，

$a_7+a_{10}=a_8+a_9<0\Rightarrow a_9<0$，故$S_8$最大

⑵由$S_{21}=21a_{11}<0$知：$a_{11}<0$，

$\because S_{20}=10\left(a_{10}+a_{11}\right)>0$，$\therefore a_{10}>0$，

又，$d<0$，数列为单调递减数列，

$\therefore n=10$时，S_n最大.

例 8．在等差数列$\{a_n\}$中，若$S_4=1,S_8=4$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$的值为（　　）

A．9　　　　B．12　　　　C．16　　　　D．17

【解】 $S_4=1, S_8-S_4=3,$

因 $S_4, S_8-S_4, S_{12}-S_8, S_{16}-S_{12}, S_{20}-S_{16}$ 成等差数列，易知该数列为 $1,3,5,7,9$

故，$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{16}=9$

例 9．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{S_6}{S_{12}}=$__________

【解】：由题意知，$S_3, S_6-S_3, S_9-S_6, S_{12}-S_9$ 成等差数列，

如 $S_3=m$，则 $S_6=3m$，从而 $S_6-S_3=2m$，故上面等差数列的公差为 m

从而 $S_9-S_6=3m,\ S_{12}-S_9=4m$

进而得 $S_9=6m$，$S_{12}=10m$，故 $\frac{S_6}{S_{12}}=\frac{3m}{10m}=\frac{3}{10}$

例 10.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若公差 $d>0,\ (S_8-S_5)(S_9-S_5)<0$，则（　　）

A．$|a_7|>|a_8|$　　　　B．$|a_7|<|a_8|$　　　　C．$|a_7|=|a_8|$　　　　D．$a_7=0$

【解】：因 $d>0$，故由 $(S_8-S_5)(S_9-S_5)<0$ 知 $\begin{cases}S_8-S_5<0\\S_9-S_5>0\end{cases}$，从而有

$$\begin{cases}a_6+a_7+a_8<0\\a_6+a_7+a_8+a_9>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a_7<0\\2(a_7+a_8)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_7<0\\a_7+a_8>0\end{cases}$$

故 $|a_8|>|a_7|$，选 B。

例 11（全国 II）等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$（　　）

【解】 $a_1+a_4=a_2+a_3=5$，进而得 $a_2=2$，$a_n=n$，故 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$$

例 12．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $m>1$ 且 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，$S_{2m-1}=38$，则 m 等于（　　　）

A．38　　　　B．20　　　　C．10　　　　D．9

【解】由 $a_{m-1}+a_{m+1}-{a_m}^2=0$ 得 $2a_m-a_m^2=0$，解得 $a_m=2$（$a_m=0$ 舍去，否则 $S_{2m-1}=(2m-1)a_m=0$），$S_{2m-1}=(2m-1)a_m=38$，故 $2m-1=19$，解得 $m=10$

例 13．已知单调递增的等差数列 $\left\{a_n\right\}$，满足 $\left|a_{10}\cdot a_{11}\right|>a_{10}\cdot a_{11}$，且 ${a_{10}}^2<{a_{11}}^2$，S_n 为其前 n 项

和，则（　　）

A、$a_8+a_{12}>0$　　　　B、$S_1,S_2,\cdots S_{19}$ 都小于零，S_{10} 为 S_n 的最小值

C、$a_8+a_{13}<0$　　　　D、$S_1,S_2,\cdots S_{20}$ 都小于零，S_{10} 为 S_n 的最小值

【解析】 由 $|a_{10}\cdot a_{11}|>a_{10}\cdot a_{11}$ 知：$a_{10}\cdot a_{11}<0$，再由 $\{a_n\}$ 单调递增知：$a_{10}<0,\ a_{11}>0$

另外，$a_{10}{}^2<a_{11}{}^2\Rightarrow|a_{10}|<|a_{11}|\Rightarrow a_{11}+a_{10}>0$

从而知：$a_8+a_{12}=2a_{10}<0,\ a_8+a_{13}=a_{11}+a_{10}>0$，A、C 均错。

又，$S_{19}=\dfrac{19(a_1+a_{19})}{2}=19a_{10}<0, S_{20}=\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})>0$，B 对 D 错。

综上，选 B。

进一步，由于 $a_{10}<0$, 故 $S_1,S_2,\cdots,S_{10}<0$，且 $S_1<S_2<\cdots<S_{10}<0$

考虑到 $a_{11}>0$，故从 S_{11} 开始，S_n 开始递增，但 $S_{19}<0$，故 $S_{11},S_{12},\cdots,S_{18}<0$，

综上，$S_1,S_2,\cdots S_{19}$ 都小于零，S_{10} 为 S_n 的最小值。

例 14．等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{20}=S_{40}$，下列结论中一定正确的是（　　）

A．S_{30} 是 S_n 中的最大值　　B．S_{30} 是 S_n 中的最小值　　C．$S_{30}=0$　　D．$S_{60}=0$

【巧解】 由题意知：S_{20}，$S_{40}-S_{20}$，$S_{60}-S_{40}$ 成等差数列，

也即 $S_{20},0,\ S_{60}-S_{40}$ 成等差数列，故 $S_{20}+\left(S_{60}-S_{40}\right)=2\times0=0$，

故 $S_{60}=S_{40}-S_{20}=0$，选 D。

【法二】 令 $S_n=An^2+Bn$（A,B 为常数）

故，$S_{20}=400A+20B$，$S_{40}=1600A+40B$

$S_{20}=S_{40}\Rightarrow400A+20B=1600A+40B\Rightarrow60A+B=0\Rightarrow B=-60A$

故，$S_n=An^2-60A\cdot n$

故 $S_{60}=3600A-3600A=0$，选 D。

例 15．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_{2020}>0,S_{2021}<0$，对任意正整数 n，都有 $|a_n|\geq|a_k|$，则 k 的值为（　　）

A．1008　　B．1009　　C．1010　　D．1011

【解】 注意等差数列的性质：$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$

$$\begin{cases}S_{2020}>0\Rightarrow a_{1010}+a_{1011}=a_1+a_{2020}>0\\S_{2021}<0\Rightarrow a_{1011}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{1011}<0\\a_{1010}>0\\|a_{1010}|>|a_{1011}|\end{cases},$$

故$\{a_n\}$为递减数列，且$n \le 1010$时，$a_n > a_{1010} > 0$，故$|a_n| > |a_{1010}| > |a_{1011}|$

$n \ge 1011$时，$a_n < a_{1011} < 0$，故$|a_n| > |a_{1011}|$

综上，对任意的正整数n，都有$|a_n| > |a_{1011}|$，故$k = 1011$，选 D.

例 16.在数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 2$，$(a_{n+1}-1)(a_n-1)+2a_{n+1}-2a_n = 0(n \in \mathbf{N}^*)$，若$a_n < \frac{51}{50}$，则$n$的最小值为__________.

【解析】易知$a_n \ne 1$（否则，由$(a_n-1)(a_{n-1}-1)+2a_n-2a_{n-1}=0 \Rightarrow a_{n-1}=1 \Rightarrow a_1=1$）；

另外，$(a_{n+1}-1)(a_n-1)+2a_{n+1}-2a_n = 0 \Rightarrow (a_{n+1}-1)(a_n-1)+2(a_{n+1}-1)-2(a_n-1)=0$

$\Rightarrow 2[(a_n-1)-(a_{n+1}-1)] = (a_{n+1}-1)(a_n-1)$

$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a_n-1}=1+\frac{1}{2}(n-1) \Rightarrow a_n = 1+\frac{2}{n+1}$

由$a_n < \frac{51}{50} \Rightarrow 1+\frac{2}{n+1} < 1+\frac{1}{50} \Rightarrow n > 99$，

故最小的$n = 100$

例 17. 设$\{a_n\}$为单调递增数列，首项$a_1 = 4$，且满足${a_{n+1}}^2+{a_n}^2+16 = 8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}\cdot a_n$，$n \in N^*$，则$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}=$（　　）

A、$-2n(2n-1)$　　B、$-3n(n+3)$　　C、$-4n(2n+1)$　　D、$-6n(n+1)$

【解】由$a_1 = 4$及${a_{n+1}}^2+{a_n}^2+16 = 8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}\cdot a_n$得$a_2 = 16$

由${a_{n+1}}^2+{a_n}^2+16 = 8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}\cdot a_n$得${a_{n+2}}^2+{a_{n+1}}^2+16 = 8(a_{n+2}+a_{n+1})+2a_{n+2}\cdot a_{n+1}$

两式相减得${a_{n+2}}^2-{a_n}^2 = 8(a_{n+2}-a_n)+2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$，即$a_{n+2}+a_n = 8+2a_{n+1}$，

故$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n) = 8$，

故$a_n-a_{n-1} = (a_2-a_1)+8(n-2) = 8n-4$，

利用累加法得：$a_n-a_1 = 8\sum_{k=2}^{n}k-4(n-1) = 4n^2-4$，故$a_n = 4n^2$

从而，$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-a_{2k}) = -4\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = -4n(2n+1)$

【解法二】由$a_1 = 4$及${a_{n+1}}^2+{a_n}^2+16 = 8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}\cdot a_n$，易求得$a_2 = 16$，进而得$a_3 = 36, a_4 = 64$；

验证：$n = 1$时，$a_1-a_2 = -12$，排除 A 选项。

$n = 2$时，$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n} = a_1-a_2+a_3-a_4 = -40$

只有选项 C 满足此要求，选 C。

例 18（全国 I）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数.

(Ⅰ)证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

（Ⅱ）是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

(I)【证明】由题设，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1, a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1.$

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}.$

由于$a_{n+1}\neq 0$，所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda.$

（II）由题设，$a_1=1$，$a_1a_2=\lambda S_1-1$，可得$a_2=\lambda-1$；

由（I）知，$a_3=\lambda+1.$

令$2a_2=a_1+a_3$，解得$\lambda=4$，

故$a_{n+2}-a_n=4$，由此可得$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1，公差为 4 的等差数列，$a_{2n-1}=4n-3$；$\{a_{2n}\}$是首项为 3，公差为 4 的等差数列，$a_{2n}=4n-1.$

下面观察数列$\{a_n\}$中任意相邻的三个项：a_{2n-1},a_{2n},a_{2n+1}

显然，$a_{2n}-a_{2n-1}=a_{2n+1}-a_{2n}=2$，

故$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，公差为 2 的等差数列。

因此存在$\lambda=4$，使得数列$\{a_n\}$为等差数列。

例 19．若正实数数列$\{c_n\}$满足$c_{n+1}^2\leq c_nc_{n+2}\left(n\in N^*\right)$，则称$\{c_n\}$是一个对数凸数列；若实数列$\{d_n\}$满足$2d_{n+1}\leq d_n+d_{n+2}$，则称$\{d_n\}$是一个凸数列。已知$\{a_n\}$是一个对数凸数列，$b_n=\ln a_n$。

（1）证明：$a_1a_{10}\geq a_5a_6$；

（2）若$a_1a_2\cdots a_{2024}=1$，证明：$a_{1012}a_{1013}\leq 1$；

（3）若$b_1=1,b_{2024}=2024$，求b_{10}的最大值。

(I)【证明】由题意得：$a_{n+1}^2\leq a_na_{n+2}$，$\therefore \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\geq\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\geq\cdots\geq\dfrac{a_2}{a_1}$，

故$\dfrac{a_{10}}{a_9}\geq\dfrac{a_9}{a_8}\geq\dfrac{a_8}{a_7}\geq\cdots\geq\dfrac{a_3}{a_2}\geq\dfrac{a_2}{a_1}$

$\therefore a_1a_{10} \geq a_2a_9 \geq a_3a_8 \geq a_4a_7 \geq a_5a_6$，

故 $a_1a_{10} \geq a_5a_6$，证毕。

（2）**证明：** 因 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，$\therefore \dfrac{a_{2024}}{a_{2023}} \geq \dfrac{a_{2023}}{a_{2022}} \geq \dfrac{a_{2022}}{a_{2021}} \geq \cdots \geq \dfrac{a_3}{a_2} \geq \dfrac{a_2}{a_1}$，

故 $a_1a_{2024} \geq a_2a_{2023} \geq a_3a_{2022} \geq \cdots \geq a_{1011}a_{1014} \geq a_{1012}a_{1013}$，

故 $\left(a_{1012}a_{1013}\right)^{1012} \leq a_1a_2\cdots a_{2024} = 1$，

$\therefore a_{1012}a_{1013} \leq 1$，证毕。

（3）**解：** 由 $a_{n+1}^2 \leq a_na_{n+2}$ 得 $\ln\left(a_{n+1}^2\right) \leq \ln\left(a_na_{n+2}\right)$，$\therefore 2b_{n+1} \leq b_n + b_{n+2}$，

也即 $b_{n+1} - b_n \leq b_{n+2} - b_{n+1}$，

$\therefore b_{2024} - b_{2023} \geq b_{11} - b_{10}, b_{2022} - b_{2021} \geq b_{11} - b_{10}, \cdots, b_{11} - b_{10} \geq b_{11} - b_{10}$

以上式子累加，得 $b_{2024} - b_{10} \geq 2014\left(b_{11} - b_{10}\right)$ ①

另外，$b_{11} - b_{10} \geq b_{10} - b_9, b_{11} - b_{10} \geq b_9 - b_8, \cdots, b_{11} - b_{10} \geq b_2 - b_1$

以上式子累加得 $9\left(b_{11} - b_{10}\right) \geq b_{10} - b_1$ ②

结合①②得：$\dfrac{b_{2024} - b_{10}}{2014} \geq b_{11} - b_{10} \geq \dfrac{b_{10} - b_1}{9}$，

$\therefore \dfrac{2024 - b_{10}}{2014} \geq \dfrac{b_{10} - 1}{9}$，化简得 $b_{10} \leq 10$，

另外，显然有 $b_n = n$ 符合题意，此时 $b_{10} = 10$，

综上，b_{10} 的最大值为 10。