§ 2.4 幂函数、一元二次函数与不等式

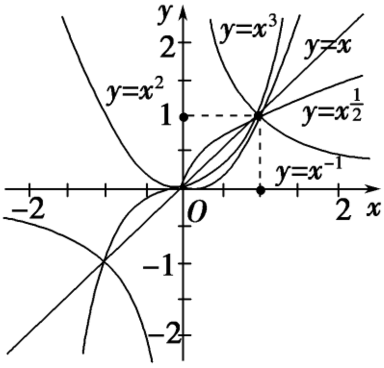
2.4.1 相关概念

1．幂函数的定义

一般地，形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$的函数称为幂函数，其中底数 x 是自变量，α 为常数.

2．幂函数的图象

在同一平面直角坐标系下，幂函数 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=x^{\frac{1}{2}},y=x^{-1}$ 的图象分别如图.



上面五个函数是学习和研究幂函数性质（图像、单调性、对称性、奇偶性等）的代表，需熟练掌握。

3．幂函数的性质

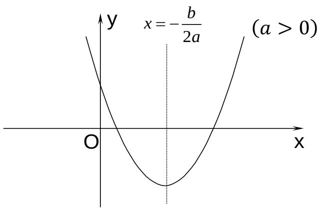
（1）所有幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像均过定点 $(1,1)$

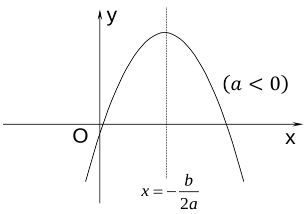
（2）如 $\alpha>0$，所有幂函数的图像均过原点，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

（3）如 $\alpha<0$，所有幂函数在 $(0,+\infty)$ 上都单调递减。

4．一元二次函数及其性质

定义： 形如 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函数，叫一元二次函数。其图像如下





对称轴	顶点	开口方向及最值	
$x=-\dfrac{b}{2a}$	$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$	$a>0$ 时开口向上 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$a<0$ 时开口向下 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

如 $a>0$，则 $x>-\frac{b}{2a}$（对称轴右边）时单调递增，$x<-\frac{b}{2a}$（对称轴左边）时单调递减。

如 $a<0$，则 $x<-\frac{b}{2a}$（对称轴左边）时单调递增，$x>-\frac{b}{2a}$（对称轴右边）时单调递减。

【注意】求解二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[m,n]$ 上的最值，要分析对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 是否经过此区间，然后用函数的单调性解决。

5．一元二次不等式的解集

不妨设 $a>0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集如下

（1）如 $\Delta<0$，其解集为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）如 $\Delta\geq 0$，其解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$，其中 x_1,x_2 为 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，且 $x_1\leq x_2$，

$ax^2+bx+c<0$ 的解集如下

（1）如 $\Delta<0$，则其解集为 $\varnothing$；

（2）如 $\Delta\geq 0$，则其解集为 (x_1,x_2)，其中 x_1,x_2 为 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，且 $x_1\leq x_2$

开口向下的情况可参照上面的解法求解，也可转化为开口向上的情况求解。

6．几个基本不等式

（1）对任意的 x,y，都有 $x^2+y^2\geq 2xy$，以及 $x^2+y^2\geq -2xy$

（2）平均值不等式：如 $x,y\geq 0$，则 $x+y\geq 2\sqrt{xy}, xy\leq(\frac{x+y}{2})^2$

推广：如 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，或 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

（3）绝对值不等式：$|x\pm y|\leq|x|+|y|$，$|x|-|y|\leq|x\pm y|$

（4）柯西不等式：$ax+by\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$，

$$ax+by+cz\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

如 $a,b,c,x,y,z\geq 0$，则

$(a+b)(x+y)\geq(\sqrt{ax}+\sqrt{by})^2$，$(a+b+c)(x+y+z)\geq(\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz})^2$

以 $ax+by\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ 为例，等号在 $a:b=x:y$ 时取得。

2.4.2 典型例题

例 1（1）下列函数是幂函数的是（　　）

A. $y=2^{x}$　　B. $y=\dfrac{2}{x}$　　C. $y=(x+1)^{2}$　　D. $y=\sqrt[3]{x^{2}}$

（2）函数 $f(x)=(m^{2}-m-1)x^{m^{2}-2m-3}$ 是幂函数，且在 $x\in(0,+\infty)$ 上是减函数，则实数 $m=$ ______.

【解析】（1）幂函数形如 $y=x^{\alpha}$，故 A、B、C 均错

$y=\sqrt[3]{x^{2}}=x^{\frac{2}{3}}$，是幂函数，选 D。

（2）由题意知 $\begin{cases}m^{2}-m-1=1\\ m^{2}-2m-3<0\end{cases}$，解得 $m=2$

例 2（1）比较下列各组数的大小

$1.3^{1.2}$ 和 $1.4^{1.2}$　　$1.3^{0.2}$ 和 $1.4^{0.2}$　　$1.3^{-1.2}$ 和 $1.4^{-1.2}$　　$1.3^{-0.2}$ 和 $1.4^{-0.2}$

（2）已知幂函数 $f(x)=x^{m^{2}-2m-3}\left(m\in N^{*}\right)$ 的图象关于 y 轴对称，且在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是减函数，则 $m=$ _____.

【解析】（1）对于幂函数 x^{a}

$a>0$ 时，在 $[0,+\infty)$ 上是增函数；$a<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，因此有

$1.3^{1.2}<1.4^{1.2}$，$1.3^{0.2}<1.4^{0.2}$，$1.3^{-1.2}>1.4^{-1.2}$，$1.3^{-0.2}>1.4^{-0.2}$。

【注意】：底数相同比指数，指数相同比底数。

（2）$\because$ 函数在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递减，　$\therefore m^{2}-2m-3<0$，解得 $-1<m<3$.

$\because m\in N^{*}$，$\therefore m\in 1,2$。

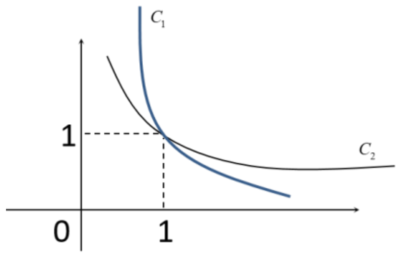
又函数的图象关于 y 轴对称，　$\therefore m^{2}-2m-3$ 是偶数，

$\therefore m=1$。

例 3（1）若 $(a+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2a)^{-\frac{1}{3}}$，$a$ 的取值范围为（　　）

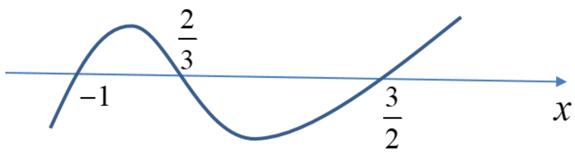
（2）如图：曲线 C_1 与 C_2 分别是 $y=x^{m}$，$y=x^{n}$ 在第一象限的图象，则(　　)

A．$n<m<0$　　B．$m<n<0$　　C．$n>m>0$　　D．$m>n>0$



【解析】（1）原不等式$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}-\frac{1}{3-2a}<0 \Leftrightarrow \frac{(2-3a)}{(a+1)(3-2a)}<0$

$\Leftrightarrow (a+1)(3-2a)(2-3a)<0$



如上图，利用“奇穿偶切法”，得原不等式的解集为$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

（2）由图像看，二者都是减函数，故$m<0,n<0$

又，$x\in(0,1)$时，从图像看：$x^m>x^n\Rightarrow x^{m-n}>1$，故$m-n<0$，即$m<n$

综上，$m<n<0$，选 B。

例 4.二次函数$f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$的图象与$x$轴的两个交点分别在开区间$(0,1)$与$(1,2)$ 上，求实数k的取值范围。

【解析】易知函数$f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$的开口向上，其与$x$轴的两个交点分别在开区间$(0,1)$与$(1,2)$ 上，则必有$\begin{cases}f(0)>0\\f(1)<0\\f(2)>0\end{cases}$，即$\begin{cases}k^2-k-2>0\\k^2-2k-8<0\\k^2-3k>0\end{cases}$，

解之得：其解集为$(-2,-1)\cup(3,4)$，

即实数k的取值范围为$(-2,-1)\cup(3,4)$。

例 5（1）已知函数$f(x)=x+x^3,x_1,x_2,x_3\in R$，$x_1+x_2<0$，$x_2+x_3<0$，$x_1+x_3<0$，则$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$的值（　　　）

A．一定大于 0　　　B.一定小于 0　　　C.等于 0　　　D. 正负都有可能

（2）若不等式$\frac{ax-1}{x+b}>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$，则不等式$\frac{bx+1}{ax+1}<0$的解集是________

【解析】（1）显然$f(x)$为单调递增的奇函数，

由 $x_1+x_2<0$ 知 $x_1<-x_2$，故 $f(x_1)<f(-x_2)=-f(x_2)$，即 $f(x_1)+f(x_2)<0$

同理，$f(x_2)+f(x_3)<0$，$f(x_1)+f(x_3)<0$，故 $2[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]<0$，

即 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<0$，选 B。

(2) $\dfrac{ax-1}{x+b}>0\Rightarrow(ax-1)(x+b)>0$，故 $a<0$，且 $x_1=-1,x_2=2$ 是方程 $(ax-1)(x+b)=0$ 的两个根。

解 $\begin{cases}(-a-1)(-1+b)=0\\(2a-1)(2+b)=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$，

$\therefore \dfrac{bx+1}{ax+1}=\dfrac{-2x+1}{-x+1}<0\Leftrightarrow(-2x+1)(-x+1)<0\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$

例 6（1）已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2x+2$ 的定义域和值域均为 $\left[1,b\right]$，则 b 等于(　　).

A．3　　　　B．2 或 3　　　　C．2　　　　D．1 或 2

(2) 对任意 $x\in R$, 函数 $f\left(x\right)=x^2-2x-\left|x-1-a\right|-\left|x-2\right|+4$ 的值非负，则实数 a 的最小值为（　　　）

A $-\dfrac{11}{8}$　　　　B -5　　　　C -3　　　　D -2

【解析】（1）易知函数 $f\left(x\right)=x^2-2x+2$ 的对称轴为直线 $x=1$，所以函数在 $\left[1,b\right]$ 上递增，

由已知条件 $\begin{cases}f\left(1\right)=1\\f\left(b\right)=b\\b>1\end{cases}$，即 $\begin{cases}b^2-3b+2=0=1\\b>1\end{cases}$，解得 $b=2$。

(2) 由题意知 $x^2-2x-|x-1-a|-|x-2|-4\geq 0$ 恒成立

即 $x^2-2x+4\geq|x-1-a|+|x-2|\geq|x-1-a-(x-2)|=|a-1|$ 恒成立，从而

$|a-1|\leq(x^2-2x+4)_{\min}=3$，解得 $-2\leq a\leq 4$，

因此，实数 a 的最小值为 -2，选 D。

例 7（1）若函数 $f\left(x\right)=\left(x+a\right)\left(bx+2a\right)$（常数 $a,b\in R$）是偶函数，且它的值域为 $\left(-\infty,4\right]$，则该函数的解析式 $f\left(x\right)=$_____

(2) 如 $f(x)=-x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f\left(2+t\right)=f\left(2-t\right)$,那么

(A) $f\left(5\right)<f\left(1\right)<f\left(4\right)$　　　　(B) $f\left(1\right)<f\left(5\right)<f\left(4\right)$

(C) $f\left(5\right)<f\left(4\right)<f\left(1\right)$　　　　(D) $f\left(4\right)<f\left(1\right)<f\left(5\right)$

【解析】（1） $f\left(x\right)=\left(x+a\right)\left(bx+2a\right)=bx^2+\left(ab+2a\right)x+2a^2$

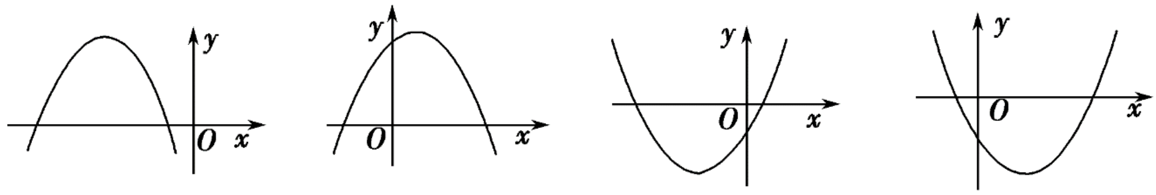
由 $f(x)$ 是偶函数知 $ab+2a=0$，得 $a=0$ 或 $b=-2$

如 $a=0$，则 $f(x)=bx^2$，其值域不可能为 $\left(-\infty,4\right]$，故只能是 $b=-2$

故 $f(x)=-2x^2+2a^2$，由其最大值 $2a^2=4$，最终得 $f(x)=-2x^2+4$

（2）由题意知，$x=\dfrac{(2+t)+(2-t)}{2}=2$ 为 $f(x)$ 的对称轴，且 $f(x)$ 开口向下，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值，且离对称轴越远，函数值越小。故选 C。

例 8、设 $abc>0$，二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是(　　).



A　　　B　　　C　　　D

【解析】若 $a>0,b>0,c>0$，函数图像开口向上，考虑到 $f(0)=c>0$，无选项

因此，a,b,c 三数必定一正两负

如 $a>0$，则 $b<0,c<0$，图像开口向上，且对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，选项 D 有可能；

若 $a<0$，图像开口向下，选项 A 中 $c<0$，此时 $b>0$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，与选项 A 不符合；

选项 B 中 $c>0$，此时只能 $b<0$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$，与选项 B 不符合.

综上，只能选 D.

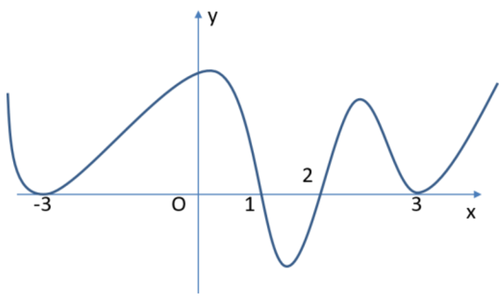
例 9（1）若函数 $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+2\left|x-a\right|$ 的最小值为 5，则 $a=$ ____

（2）不等式 $(x+3)^2(x-1)(x-2)^3(x-3)^2>0$ 的解集为______

【解析】（1） $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+2\left|x-a\right|=\left|x+1\right|+\left|x-a\right|+\left|x-a\right|$

故 $f\left(x\right)$ 的最小值为 $f(a)$，从而得 $\left|a+1\right|=5$，解得 $a=4$ 或 $a=-6$

（2）令 $f\left(x\right)=(x+3)^2(x-1)(x-2)^3(x-3)^2$，则其图像如图所示，$f\left(x\right)$ 的零点分别为 $-3,1,2,3$，结合草图，利用奇穿偶切的思想，得解集为 $(-\infty-3)\cup(-3,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$



例 10．已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2},3)$，则 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为（　　）

【解析】 显然 $a<0$，且 $-\frac{1}{2},3$ 必为 $ax^2+bx+c=0$ 之二根；由 $-\frac{1}{2}\times 3=\frac{c}{a}$ 知 $c>0$；

又，如果 $t(t\neq 0)$ 为 $ax^2+bx+c=0$ 之根，即 $at^2+bt+c=0$，

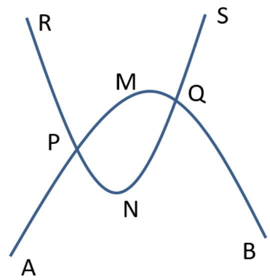
从而有 $a+b\times\frac{1}{t}+c\times\frac{1}{t^2}=0$，即 $\frac{1}{t}$ 为方程 $cx^2+bx+a=0$ 的根，因此 $-2,\frac{1}{3}$ 为方程 $cx^2+bx+a=0$ 的二根，

易知，故 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $(-2,\frac{1}{3})$

例 11．函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$，$g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$. 设 $H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，$\max\{p,q\}$ 表示 p,q 中的较大值，$\min\{p,q\}$ 表示 p,q 中的较小值，记 $H_1(x)$ 的最小值为 A，$H_2(x)$ 的最大值为 B，则 $A-B=$（　　）

A. $a^2-2a-16$　　B. $a^2+2a-16$　　C. -16　　D. 16

【解析】 函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$，$g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$ 如图所以，设二者图像的交点分别为 P,Q，则函数 $H_1(x)$ 对应的图像为图中的曲线 RPMQS，函数 $H_2(x)$ 的图像为图中的 曲线 APNQB；显然 $A=y_P,B=y_Q$，且因 $y_P<y_Q$，故 $A-B\leq 0$，只能选 C.



例 12．已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值为______

【解析】 令 $x+2y=t$，则 $x=t-2y$，因此 $x+2y+2xy=8\Rightarrow t+2y(t-2y)=8$，即 $-4y^2+2ty+t-8=0$，

由于此关于 y 的一元二次方程有解，故 $\Delta=(2t)^2+16(t-8)\ge 0$，即

$t^2+4t-32\ge 0$，解得 $t\ge 4$ 或 $t\le -8$（舍去），当且仅当 $x=2,y=1$ 时，$t=4$，即 $x+2y$ 的最小值为 4.

【法二】 令 $x+2y=t$，由题意得：$x+2y+x\times 2y=8\le x+2y+(\frac{x+2y}{2})^2$，

即 $t^2+4t-32\ge 0$，解得 $t\le -8$（舍去）或 $t\ge 4$。

易验证等号可取，故 $x+2y$ 的最小值为 4.

例 13（1）设正数 x,y 满足：$x>y,x+2y=3$，则 $\frac{1}{x-y}+\frac{9}{x+5y}$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{8}{3}$　　　B．$\frac{11}{4}$　　　C．4　　　D．2

（2）函数 $y=x-3+\sqrt{10-9x^2}$ 的最大值为______

【解析】（1）由题意知 $2x+4y=6$，故

$$\frac{1}{x-y}+\frac{9}{x+5y}=\frac{1}{6}[(x-y)+(x+5y)](\frac{1}{x-y}+\frac{9}{x+5y})$$

$\ge\frac{1}{6}\left(\sqrt{(x-y)\frac{1}{x-y}}+\sqrt{(x+5y)\frac{9}{x+5y}}\right)^2=\frac{8}{3}$，仅当 $\frac{1}{x-y}:\frac{9}{x+5y}=(x-y):(x+5y)$，

也即 $x=2,y=\frac{1}{2}$ 时取等号。

（2）$x-3+\sqrt{10-9x^2}=\frac{1}{3}\times 3x+1\times\sqrt{10-9x^2}-3\le\sqrt{(\frac{1}{3})^2+1^2}\sqrt{9x^2+(10-9x^2)}-3$

$$=\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3};$$

仅当 $\frac{1}{3}:(3x)=1:\sqrt{10-9x^2}$，即 $x=\frac{1}{3}$ 时取等号。

注意柯西不等式： $ax+by\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$

例 14、函数 $f(x)=x^2-2x+2$ 在闭区间 $[t,t+1](t\in R)$ 上的最小值记为 $g(t)$.

⑴试写出 $g(t)$ 的函数表达式;

⑵作 $g(t)$ 的图象并写出 $g(t)$ 的最小值.

【解析】(1)：易知函数 $f(x)$ 的对称轴为直线 $x=1$

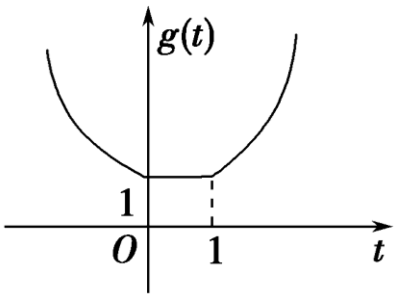
当区间 $[t,t+1]$ 在对称轴的左边，也即 $t\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递减，因此 $g(t)=f(t+1)=t^2+1$

当区间 $[t,t+1]$ 在对称轴的右边，也即 $t\ge 1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递增，因此 $g(t)=f(t)=t^2-2t+2$

当对称轴穿过区间 $[t,t+1]$，也即 $0<t<1$ 时，$g(t)=f(1)=1$。

综上，$g(t)=\begin{cases}t^2+1, & t\le 0\\ 1, & 0<t<1\\ t^2-2t+2, & t\ge 1\end{cases}$

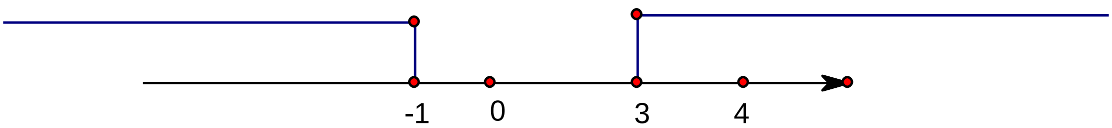
(2) $g(t)$ 的图象如图所示，可知 $g(t)$ 在 $(-\infty,0]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增，因此 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上取到最小值 1.



例 15、已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x-3>0\right\},B=\left\{x\middle|ax^2+bx+c\le 0,a,b,c\in R,ac\ne 0\right\}$，若 $A\cap B=(3,4]$，$A\cup B=R$，求 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a}{c^2}$ 的最小值

【解析】由题意知：$a>0$，否则，不可能有 $A\cap B=(3,4]$ 这样的结构。考虑到 $A=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，故 $x=-1$ 和 $x=4$ 必为方程 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，

由韦达定理得 $\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=3\\ \dfrac{c}{a}=-4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-3a\\ c=-4a\end{cases}$，故 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a}{c^2}=9a+\dfrac{1}{16a}\ge 2\sqrt{9a\times\dfrac{1}{16a}}=\dfrac{3}{2}$



当且仅当 $9a=\dfrac{1}{16a}$，即 $a=\dfrac{1}{12}$ 时取等号。也即 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a}{c^2}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$

例 16.已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $0\le x\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值

【解析】由 $\begin{cases} f(0)=c \\ f(1)=a+b+c \\ f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2}) \\ b=4f(\frac{1}{2})-f(1)-3f(0) \\ c=f(0) \end{cases}$，

故 $|a|=|2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2})|\le 2|f(1)|+2|f(0)|+4|f(\frac{1}{2})|\le 8$

同理：$|b|\le 8, |c|\le 1$，故 $|a|+|b|+|c|\le 17$

又，如取 $f(0)=f(1)=1$，$f(\frac{1}{2})=-1$，则得 $f(x)=8x^2-8x+1$，易验证该函数满足要求，且显然有 $|a|+|b|+|c|=17$，

综上，$|a|+|b|+|c|$ 的最大值为 17。