第 3 章 指数函数与对数函数

§ 3.1 指数函数与对数函数

3.1.1 相关概念

1、 反函数

对于函数 $y = f(x)$，设其定义域为 A，值域为 B，我们知道，按照定义，对任意的 $a \in A$，都有唯一的 $b \in B$，满足 $b = f(a)$，即点 $P(a,b)$ 在 $y = f(x)$ 的图像上。如果这里的对应关系 f 比较特殊，即对于值域 B 中的元素 b，在定义域 A 中与 b 对应的元素只有 a 一个元素，这样的话，我们利用 f 可得到另外一个从 $B \to A$ 的对应关系：$f^{-1}: B \to A$，满足 $a = f^{-1}(b)$，易知 $f^{-1}: B \to A$ 是一个函数，我们记为 $y = f^{-1}(x)$，并称其为

$y = f(x)$ 的反函数。易知 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域为 B，值域为 A，满足 $a = f^{-1}(b)$，也即点 $Q(b,a)$ 在 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上，由于 (a,b) 与 (b,a) 关于直线 $y = x$ 对称，故函数与其反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称。

从反函数的定义，我们实际上也得到了反函数的求解方法：

（1） 从 $y = f(x)$ 中反解出 x，不妨假设的得到 $x = \varphi(y)$

（2） 将 $x = \varphi(y)$ 中的 x, y 交换位置，得到 $y = \varphi(x)$，此即为 $y = f(x)$ 的反函数。

很明显，并非每个函数都有反函数。

2、 有理数指数幂

(1)幂的有关概念

①正整数指数幂：$a^n = a \times a \times \cdots \times a$ （n 个 a 相乘，$n \in N^*$）；

②零指数幂：$a^0 = 1(a \neq 0)$；

③负整数指数幂：$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ $(a \neq 0, p \in N^*)$；

④正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ （$a > 0$，$m, n \in N^*$，且 $n > 1$）；

⑤负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a > 0$，$m, n \in N^*$，且 $n > 1$）.

⑥0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

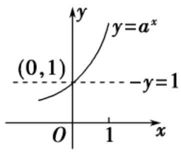
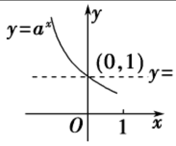
(2)有理数指数幂的性质

① $a^r a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in Q)$　　　② $(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in Q)$

③ $(ab)^r = a^r b^r (a>0, b>0, r\in Q)$

3、 指数函数

形如 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ 的函数叫**指数函数**，其中 a 叫**底数**，x 叫**指数**。指数函数性质如下

$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
性质	过定点 $(0,1)$	
	在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数	在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数

4、 对数

我们把 $a^x=b$ $(a>0, a\neq 1)$ 的解 x_0 称为以 a 为底，b 的对数，记作 $x_0=\log_a b$，其中 a 叫底数，b 叫真数。根据对数的定义，我们有

（1） $\log_a 1=0$；　（2） $\log_a a=1$；　（3） $a^{\log_a N}=N$；　（4） $\log_a a^N=N$

证明：(1)、(2) 留给读者（3） 令 $\log_a N=t$，依定义有 $a^t=N$，故 $a^{\log_a N}=a^t=N$，证毕。

（4） 令 $a^N=t$，根据对数的定义：$N=\log_a t$， 故，$\log_a a^N=\log_a t=N$，证毕。

5、 对数的重要公式

（1） 换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ （a,b 均大于零且不等于 1）；

（2） $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，推广 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$。

仅证明（1），读者自证（2）

（1）　**证明：** 令 $\log_a N=x, \log_b N=y, \log_b a=z$，依对数的定义知：$N=a^x=b^y, a=b^z$ 从而 $a^x=(b^z)^x=b^{zx}$，由 $a^x=b^y$ 得 $b^{zx}=b^y$，因此 $y=zx$，故 $x=\dfrac{y}{z}$，即 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$，证毕。

6、 对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq 1, M>0, N>0$，那么

（1） $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；　　（2） $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

（3） $\log_a M^n=n\log_a M\ (n\in\mathbf{R})$；　　（4） $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

我们仅证公式（1），其余留给读者。

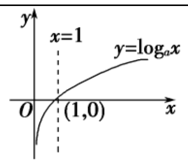
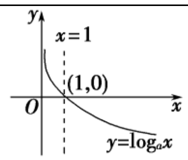
令 $\log_a M=x, \log_a N=y, \log_a MN=z$，由对数的定义知：$M=a^x, N=a^y, MN=a^z$

而 $MN=a^x\times a^y=a^{x+y}$，故 $z=x+y$，即 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$，证毕。

7、 对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq1,x>0)$ 的函数称为对数函数，其中 a 叫底数，x 叫真数。根据对数的定义：我们知道，$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数

对数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	定义域 $(0,+\infty)$；　值域 R；　过定点 $(0,1)$	
	$x>1$ 时，$y>0$；$0<x<1$ 时 $y<0$	$x>1$ 时，$y<0$；$0<x<1$ 时，$y>0$
	是 $(0,+\infty)$ 上的增函数	是 $(0,+\infty)$ 上的减函数

两个特殊的对数函数

1、自然对数函数：以 $e=2.71828\cdots$ 为底的对数，简记为 $y=\ln x$

2、常用对数函数：以 10 为底的对数，简记为 $y=\lg x$

3.1.2 典型例题

例 1（1）函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是________

（2）函数 $y=x^3+1$ 的反函数为________

【解析】（1）$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geq0\\3x-2>0\end{cases}\Rightarrow 0<3x-2\leq1\Rightarrow\dfrac{2}{3}<x\leq1$

（2） $y=x^3+1\Rightarrow x=(y-1)^{\frac{1}{3}}$，故，$y=x^3+1$ 的反函数为 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x\in R)$

例 2（1）如果指数函数 $f(x)=(a-1)^x$ 是 R 上的减函数，则 a 的取值范围是 ______

（2）若函数 $f(x)=1+\dfrac{m}{a^x-1}$ 是奇函数，则 m 为__________。

（3）若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍，则 a 的值为___

【解析】（1）易知 $0<a-1<1$，解得 $1<a<2$。

（2）由 $f(-x)+f(x)=1+\dfrac{m}{a^{-x}-1}+1+\dfrac{m}{a^x-1}=2+\dfrac{ma^x}{1-a^x}+\dfrac{m}{a^x-1}$

$$=2-\frac{m(a^x-1)}{a^x-1}=2-m=0\Rightarrow m=2$$

（3）：因 $0<a<1$，故 $f(x)$ 为 $[a,2a]$ 上的减函数，

故 $\log_a a=3\log_a(2a)\Rightarrow\log_a(2a)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 2a=a^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 8a^3=a\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{8}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

例 3.下列函数中是奇函数的有几个（　　）

①$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$　　②$y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x+3|-3}$　　③$y=\dfrac{|x|}{x}$　　④$y=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】（1），$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\dfrac{a^x(a^{-x}+1)}{a^x(a^{-x}-1)}=\dfrac{a^x+1}{1-a^x}=-f(x)$，为奇函数；

对于（2），因 $-1<x<1$，且 $x\neq 0$，故 $f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{x}$，显然为奇函数；

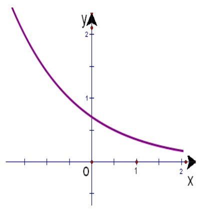
（3）$y=\dfrac{|x|}{x}$ 为奇函数；

（4）$f(-x)=\log_a\dfrac{1-x}{1+x}=-\log_a\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$，为奇函数；

综上，选 D。

例 4、函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图所示，其中 a,b 为常数，则下列结论正确的是（　　）.

A．$a>1,b<0$　　B　$a>1,b>0$　　C．$0<a<1,b>0$　　D．$0<a<1,b<0$



【解析】从图像上看，$f(x)$ 是减函数，因此 $0<a<1$，又，

$f(0)<1\Rightarrow a^{-b}<1\Rightarrow -b>0\Rightarrow b<0$

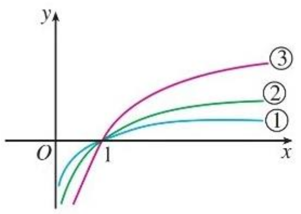
综上，选 D。

例 5.函数 $y=\log_2 x, y=\log_5 x, y=\lg x$ 的图像如图所示。

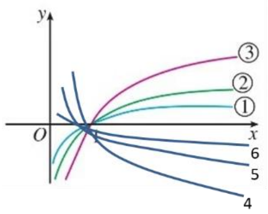
（1）试说明哪个函数对应于哪个图像，并解释为什么；

（2）以已有图像为基础，在同一直角坐标系中画出 $y=\log_{\frac{1}{2}} x, y=\log_{\frac{1}{5}} x$，$y=\log_{\frac{1}{10}} x$ 的图像；

（3）从（2）的图中你发现了什么?



（1）



（2）

【解析】(1) $\log_2 x=\dfrac{\ln x}{\ln 2},\log_5 x=\dfrac{\ln x}{\ln 5},\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$，

显然，$x>1$ 时，有 $\log_2 x>\log_5 x>\lg x$，故 $\log_2 x,\log_5 x,\lg x$ 对应的图像分别是③②①

(2) 易知：$\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x,\log_{\frac{1}{5}} x=-\log_5 x,\log_{\frac{1}{10}} x=-\lg x$，其图像分别如图中的 4,5,6。

（3）从（2）图像中发现：$y=\log_2 x, y=\log_5 x, y=\lg x$ 的图像分别与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x, y=\log_{\frac{1}{5}} x, y=\log_{\frac{1}{10}} x$ 的图像关于 x 轴对称。

例 6．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\ln\left(2-x\right)$，则

A．$f(x)$ 在 $\left(0,2\right)$ 单调递增　　B．$f(x)$ 在 $\left(0,2\right)$ 单调递减

C．$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　D．$y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(1,0\right)$ 对称

【巧解】直接用公式：令 $2-x=x$ 得 $x=1$，故函数 $f\left(x\right)=\ln x+\ln\left(2-x\right)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。选 C。

【解法二】直接法。显然，$f(2-x)=\ln(2-x)+\ln x=f(x)$，

故，$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{x+(2-x)}{2}=1$ 对称。

【注意重要结论】: 如 $f(x)=g(x-a)+g(b-x)$，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称。

对称轴这样求：令 $x-a=b-x$，解得 $x=\dfrac{a+b}{2}$。

例 7．(1) 已知 $\log_a\dfrac{1}{2}<1,\ (\dfrac{1}{2})^a<1,\ a^{\frac{1}{2}}<1$，则实数 a 的取值范围为_______

(2) $\log_{0.2}6,\ \log_{0.3}6,\ \log_{0.4}6$ 的大小顺序为_______

(3) $\log_2 3,\ \log_3 4,\ \log_4 5$ 的大小顺序为_______

【解析】(1) $\log_a\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow\log_a\dfrac{1}{2}<\log_a a$，故 $a<1$ 时，需 $a<\dfrac{1}{2}$； $a>1$ 时，需 $a>\dfrac{1}{2}$；

故 $\log_a\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow a\in(0,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$

$(\dfrac{1}{2})^a<1\Rightarrow a\in(0,+\infty)$； $a^{\frac{1}{2}}<1\Rightarrow a\in(0,1)$

综上，$a\in(0,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},1)$。

(2)：$\log_{0.2}6-\log_{0.3}6=\dfrac{\ln 6}{\ln 0.2}-\dfrac{\ln 6}{\ln 0.3}=\ln 6(\dfrac{\ln 0.3-\ln 0.2}{\ln 0.2\cdot\ln 0.3})>0$，

故 $\log_{0.2}6>\log_{0.3}6$，

同理，$\log_{0.3}6>\log_{0.4}6$，故 $\log_{0.2}6>\log_{0.3}6>\log_{0.4}6$

(3)： $\log_2 9>\log_2 8\Rightarrow 2\log_2 3>3\Rightarrow\log_2 3>\dfrac{3}{2}$，

$\log_3 16<\log_3 27\Rightarrow 2\log_3 4<3\Rightarrow\log_3 4<\dfrac{3}{2}$，

又 $\log_3 4-\log_4 5=\dfrac{\ln 4}{\ln 3}-\dfrac{\ln 5}{\ln 4}=\dfrac{(\ln 4)^2-\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 3\cdot\ln 4}$

对于 $\log_3 4-\log_4 5=\dfrac{(\ln 4)^2-\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 3\cdot\ln 4}$，因

$\ln 3\cdot\ln 5<(\dfrac{\ln 3+\ln 5}{2})^2=(\dfrac{\ln 15}{2})^2<(\dfrac{\ln 16}{2})^2=(\ln 4)^2$，

故 $\log_3 4-\log_4 5>0$，即 $\log_3 4>\log_4 5$，

综上，$\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

【解法二】(高三学生) 考虑函数 $f(x)=\log_x(x+1)(x>1)$，易知 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$，

故 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln x}{x+1}-\dfrac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}<0$，

故 $f(x)$ 单调递减，因此 $f(2)>f(3)>f(4)$，即 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

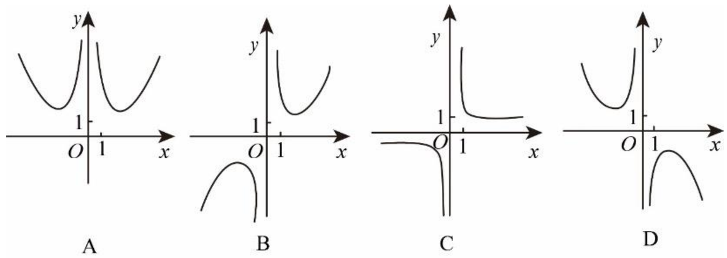
例 8（全国卷）设 $f\left(x\right)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $\left(0,\infty\right)$ 单调递减，则

A． $f(\log_2\dfrac{1}{4})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})$　　B． $f(\log_2\dfrac{1}{4})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})$

C． $f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(\log_2\dfrac{1}{4})$　　D． $f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(\log_2\dfrac{1}{4})$

【解析】由题意知 $f\left(x\right)$ 的图像关于 y 轴对称；又因 $f\left(x\right)$ 在 y 轴右边单减，故自变量离 y 轴越远，函数值越小。因 $|\log_2\dfrac{1}{4}|=2$，$0<2^{-\frac{3}{2}}<2^{-\frac{2}{3}}<2$，故选 C。

例 9．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为　（　　　　）



【解析】因 e^x-e^{-x} 为奇函数，x^2 为偶函数，故 $f(x)$ 为奇函数，排除 A。

又，$f(+\infty)=+\infty$，只能选 B。

例 10、(1)若 $2^a=5^b=10$，求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值.

（2）若 $x\log_3 4=1$，求 4^x+4^{-x} 的值.

（3）化简：$\lg 5\cdot\lg 20+\left(\lg 2\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

【解析】(1) 易知：$a\lg 2=b\lg 5=1$，故 $a=\dfrac{1}{\lg 2}$，$b=\dfrac{1}{\lg 5}$

故，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$。

⑵由已知得：$x=\dfrac{1}{\log_3 4}=\log_4 3$，故 $4^x+4^{-x}=4^{\log_4 3}+4^{-\log_4 3}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

（3）原式$=(\lg 10-\lg 2)(\lg 10+\lg 2)+(\lg 2)^2+\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

$=1-(\lg 2)^2+(\lg 2)^2+\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}-1)=1-1=0$

例 11（1）已知$5^5<8^4,13^4<8^5,a=\log_5 3,b=\log_8 5,c=\log_{13} 8$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

（2）若$a=\dfrac{\ln 2}{2},b=\dfrac{\ln 3}{3},c=\dfrac{\ln 5}{5}$,则(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$b<a<c$

【解析】(1) 易知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_5 3}{\log_8 5}=\log_5 3\cdot\log_5 8<(\dfrac{\log_5 3+\log_5 8}{2})^2=\dfrac{\log_5 24}{4}<\dfrac{1}{2}$，故$a<b$；

又$\begin{cases}5=8^b\\8=13^c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^5=8^{5b}<8^4\\8^4=13^{4c}<8^{5c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5b<4\\5c>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<\dfrac{4}{5}\\c>\dfrac{4}{5}\end{cases}$，

综上，$a<b<c$，选 A。

（2）　$a-b=\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{\ln 3}{3}=\dfrac{3\ln 2-2\ln 3}{6}=\dfrac{\ln 8-\ln 9}{6}<0$，故$a<b$；

同理，$b-c=\dfrac{\ln 3}{3}-\dfrac{\ln 5}{5}=\dfrac{5\ln 3-3\ln 5}{15}=\dfrac{\ln 243-\ln 125}{15}>0$，故$b>c$

观察选择支，只能选 C。

例 12（全国 I）若$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（　　　　）

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

【巧解】取$b=1$，则$2^a+\log_2 a=4$，显然$1<a<2$，A、D 肯定错，B 肯定对；

取$b=2$，则$2^a+\log_2 a=17$，显然$a<4$，排除 C；

综上，选 B。

【解法二】令$f(x)=2^x+\log_2 x$，则$f(x)$单调递增，

$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b=2^{2b}+\log_2 2b-\log_2 2b+\log_2 b$

$\qquad=2^{2b}+\log_2 2b-1<2^{2b}+\log_2 2b$

即$f(a)<f(2b)$，故$a<2b$，选 B。

例 13（1）设$a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则（　　）

A．$a+b<ab<0$　　B．$ab<a+b<0$　　C．$a+b<0<ab$　　D．$ab<0<a+b$

（2）函数 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 的值域是__________.

【解析】(1) 易知 $a>0,\ b<0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_{0.3}0.2+\log_{0.3}2=\log_{0.3}0.4\in(0,1)$，

即 $0<\dfrac{a+b}{ab}<1$，从而 $ab<a+b<0$，选 B。

(2) 由 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Rightarrow e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，由 $e^x>0$，得 $\dfrac{1+y}{1-y}>0\Rightarrow(1+y)(1-y)>0\Rightarrow y\in(-1,1)$

所以，函数的值域为 $(-1,1)$

例 14．已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(3x^2-ax+5\right)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-6]$　　B．$[-8,6)$　　C．$(-8,-6]$　　D．$[-8,+\infty)$

【解析】：由题意知 $3x^2-ax+5$ 在 $[-1,+\infty)$ 上应为增函数

故 $[-1,+\infty)$ 应位于 $y=3x^2-ax+5$ 对称轴的右边，故

即 $\begin{cases}-1\geq-\dfrac{-a}{2\times3}\\3x^2-ax+5>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leq-6\\3\times(-1)^2-a(-1)+5>0\end{cases}\Rightarrow-8<a\leq-6$，选 C。

例 15.（1）若函数 $y=\log_2\left(ax^2+2x+1\right)$ 的定义域为 R，则 a 的范围为__________。

（2）若函数 $y=\log_2\left(ax^2+2x+1\right)$ 的值域为 R，则 a 的范围为__________。

【解析】(1)：问题 $\Leftrightarrow ax^2+2x+1>0$ 恒成立，故 $\begin{cases}a>0\\\Delta=4-4a<0\end{cases}$，解得得 $a>1$

（2）问题 $\Leftrightarrow ax^2+2x+1$ 须取遍所有的正实数，

当 $a=0$ 时，$2x+1$ 符合条件；

当 $a\neq0$ 时，则 $\begin{cases}a>0\\\Delta=4-4a\geq0\end{cases}$，得 $0<a\leq1$

最终，$0\leq a\leq1$

例 16、已知 $y=f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f[f(x)-2\log_2x]=4$，则不等式 $f(x)<6$ 的解集为______

【解析】令 $f(x)-2\log_2x=t$，则 $f(t)=4$

又，$f(t)-2\log_2t=t$，故 $f(t)=2\log_2t+t$

从而 $2\log_2 t+t=4$，考虑到 $2\log_2 t+t$ 单调递增，故 $2\log_2 t+t=4$ 有唯一解 $t=2$

故，$f(x)=2\log_2 x+2$，

故 $f(x)<6\Rightarrow 2\log_2 x+2<6$，即 $\log_2 x<2$，其解集为 $(0,4)$

例 17、设实数 a,b 满足 $\log_b 2<\log_a 2<0$，则 a^a,a^b,b^a 的大小关系为（　　　）

A．$b^a>a^b>a^a$　　B．$b^a>a^a>a^b$　　C．$a^a>b^a>a^b$　　D．$a^a>a^b>b^a$

【解析】 由题意知：$a,b\in(0,1)$，由 $\log_b 2<\log_a 2\Rightarrow \dfrac{\ln 2}{\ln b}<\dfrac{\ln 2}{\ln a}$，从而有 $\ln a<\ln b\Rightarrow a<b$，故 $b^a>a^a>a^b$，选 B。

例 18、若函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，则 $\sum\limits_{i=1}^{2018} f(\dfrac{i}{2019})=$（　　　　）

【解析】注意题目信息暗藏解题思路

考虑到 $f(1-x)=\dfrac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}=\dfrac{a}{a+\sqrt{a}a^x}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}$，

故 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{\sqrt{a}+a^x}{\sqrt{a}+a^x}=1$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{2018} f(\dfrac{i}{2019})=[f(\dfrac{1}{2019})+f(\dfrac{2018}{2019})]+[f(\dfrac{2}{2019})+f(\dfrac{2017}{2019})]+\cdots+=1009$

例 19、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a(x-2),\ x>3\\(5-a)x-3,\ x\le 3\end{cases}$ 满足对任意实数 $x_1\ne x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围为______

【解析】由题意知函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $\begin{cases}a>1\\5-a>0\\\log_a(3-2)\ge(5-a)\times 3-3\end{cases}$，解之得 $4\le a<5$。

例 20．函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，则 $y=f(x)$ 的反函数是（　　）

A．$y=g(x)$　　B．$y=g(-x)$　　C．$y=-g(x)$　　D．$y=-g(-x)$

【解析】令 $P(x,y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数图像上任意一点，则 $Q(y,x)$ 在 $y=f(x)$ 的图像上；又因 $y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 的图像关于 $y+x=0$ 对称，故 $M(-x,-y)$ 在 $y=g(x)$ 的图像上，故 $-y=g(-x)$，从而 $y=-g(-x)$，即 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=-g(-x)$，选 D。

【注意】$P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $Q(y_0,x_0)$，$P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称

点为$Q(-y_0,-x_0)$

例21（1）函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\ (x\in R)$，若对$\forall x\in R$，$f(2x)+f(x^2-m)>0$恒成立，求实数$m$的取值范围；

（2）已知$a,b\in(0,2)$，且满足$a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，求$a+b$的值。

【解析】(1)：因$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，故$f(x)$为奇函数。

又，$f(x)=\dfrac{(2^x+1)-2}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，故$f(x)$单调递增，

故$f(2x)+f(x^2-m)>0\Rightarrow f(x^2-m)>f(-2x)$

从而$x^2-m>-2x$，即$(x+1)^2-m-1>0$恒成立

故，$m+1<[(x+1)^2]_{\min}$，解得$m<-1$。

（2）：$a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b\Rightarrow a^2+2^a=b^2-4b+4+2^{2-b}=(2-b)^2+2^{2-b}$，

因$b\in(0,2)$，易知$2-b\in(0,2)$

令$f(x)=x^2+2^x$，显然$f(x)$为$(0,2)$上的单调递增函数，从而，

由$f(a)=f(2-b)$得$a=2-b$，即$a+b=2$