## § 4.3 三角函数的图像与性质

### 4.3.1 相关概念

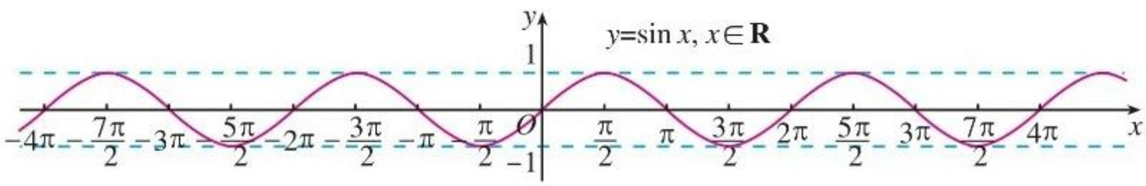
### 正、余弦函数的图像

对于正弦函数 $y=\sin x$，我们知道它是奇函数，同时，由于 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，故 $2\pi$ 为其一个周期，事实上，$2\pi$ 还是正弦函数 $y=\sin x$ 的最小正周期。下面我们利用特殊角的三角函数来研究它的图像。我们知道：

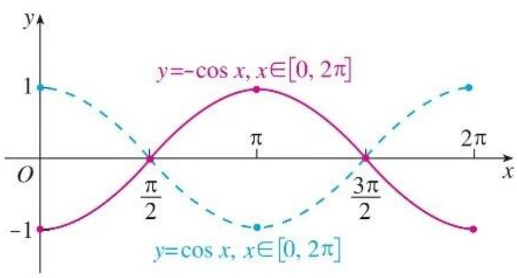
$$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\pi=0,\sin\frac{3\pi}{2}=-1,\sin 2\pi=0,$$

也即 $y=\sin x$ 的图像经过如下五点：$O(0,0),P_1(\frac{\pi}{2},1),P_2(\pi,0),P_3(\frac{3\pi}{2},-1)$ ,$P_4(2\pi,0)$

将这五个点用光滑曲线连接起来，并借助 $y=\sin x$ 的奇函数性质和周期性，就得到了 $y=\sin x$ 的图像，如下图所示。




由于 $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，因此，我们将 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位（纵坐标不变），就可得到 $y=\cos x$ 的图像，如果还想得到 $y=-\cos x$ 的图像，只需将 $y=\cos x$ 的图像沿 $x$ 轴翻折，如下图所示。



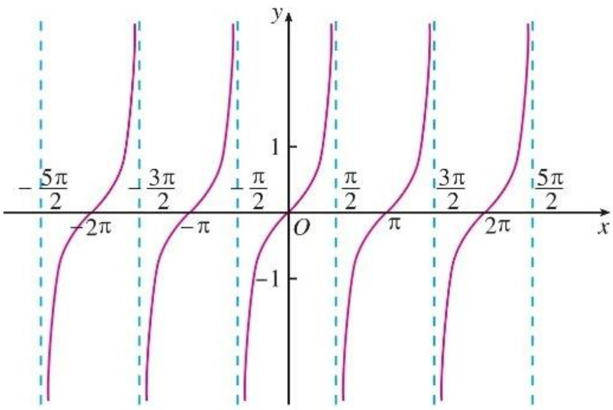

### 正切函数 $y=\tan x$ 的图像

由于 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，我们知道它是奇函数，且其定义域为：$x\in R$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$。考虑到 $\tan(x+\pi)=\tan x$，因此，正切函数 $y=\tan x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数。故，我们可以通过 $y=\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图像，得到 $y=\tan x$ 在整个定义域内的图像。受**“五点法”**画正弦函数

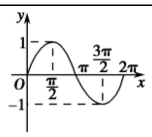
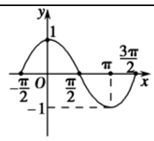
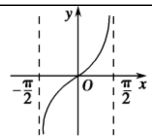
图像的启发，我们知道 $y=\tan x$ 的图像经过如下这些点

$$O(0,0)\text{，}\ P_1(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3})\text{，}\ P_2(\frac{\pi}{4},1)\text{，}\ P_3(\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$$

并考虑到 $x\to\frac{\pi}{2}$（从小于 $\frac{\pi}{2}$ 的方向）时，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\to+\infty$，故，$y=\tan x$ 的图像如下图所示。

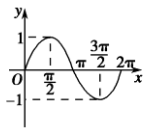
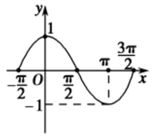
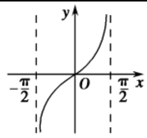



## 三角函数的图象和性质梳理

| 函数性质 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ |
|---|---|---|---|
| 定义域 | $R$ | $R$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ |
| 图象 |  |  |  |
| 值域 | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $R$ |
| 对称性 | 对称轴：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>对称中心：$(k\pi,0)$ | 对称轴：$x=k\pi$<br>对称中心：$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$ | 无对称轴<br>对称中心：$(\frac{k\pi}{2},0)$ |
| 周期 | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ |

## 三角函数的图象和性质（续）

| 函数性质 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ |
|---|---|---|---|
| 奇偶性 | 奇 | 偶 | 奇 |

| 图象 |  |  |  |
|---|---|---|---|
| 单调性 | $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 上单增 | $[2k\pi,2k\pi+\pi]$上单减 | $[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}]$上，单增 |
| | $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ 上单减 | $[2k\pi-\pi,2k\pi]$上单增 | |

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像

（1） $|A|$ 叫振幅，$\omega$ 叫角频率，$\omega x+\varphi$ 叫相位，$\varphi$ 叫初相

（2） 最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，

（3） $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$。

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像:

为简单计，不妨令 $A>0,\omega>0$。利用前面的知识，将 $y=\sin x$ 的图像向左或右平移 $|\varphi|$ 个单位，得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像，再把所得图像的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），则得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像，最后，将所得图像的纵坐标变为原来的 $A$ 倍（横坐标不变），则得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像。

## 4.3.2 典型例题

**例 1** (1)．若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4}+\alpha)$ 是偶函数，则 $\alpha$ 的值为________

(2) 在函数 $y=\sin|x|$、$y=|\sin x|$、$y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$、$y=\cos(2x+\frac{2\pi}{3})$、$y=\cos|2x|$ 中，最小正周期为 $\pi$ 的函数的个数为（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

**【解析】**(1) 要使 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4}+\alpha)$ 为偶函数，需 $\frac{\pi}{4}+\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

解得 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}(k \in Z)$，$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$.

（2）由 $y = \sin|x|$ 的图象知，它是非周期函数，另外，$\cos|2x| = \cos 2x$，故选 D。

**例 2.**已知函数 $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图像为 $C$。

（1）为了得到函数 $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图像，只要把 $C$ 上所有的点（　　）

A．向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度　　B．向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

C．向右平移 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度　　D．向左平移 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度

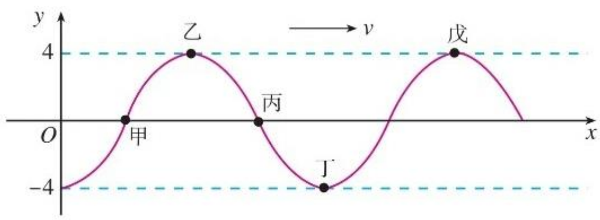
（2）为了得到函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图像，只要把 $C$ 上所有的点（　　）

A．横坐标伸长到原来的两倍，纵坐标不变　　B．横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变

C．纵坐标伸长到原来的两倍，横坐标不变　　D．纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，横坐标不变

**【解析】**（1）C；（2）B

**例 3.**下图为一向右传播的绳波在某一时刻绳子各点的位置图，经过 $\frac{1}{2}$ 周期后，乙点的位置将移至何处?




**【解析】**这是波动图，绳上各点只做上下振动（横坐标不变），经过 $\frac{1}{2}$ 周期，质点乙从波峰变到波谷，也就是说：此时处于它关于 $x$ 轴的对称点位置。

**延伸问题：**同样是经过 $\frac{1}{2}$ 周期，丙的位置不变。事实上质点丙先向上移动（上坡下，下坡上），到达波峰需要 $\frac{1}{4}$ 周期，接着从波峰向下移动，又经 $\frac{1}{4}$ 周期，回到原来的位置。

**例 4.**已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 上存在零点、且在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上存在最值，

则$\omega$的最小值为（　　）

A．$2$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．$\frac{6}{5}$　　　　D．$\frac{3}{4}$

**【解析】**注意：$y=\sin x$的零点为$k\pi(k\in Z)$，最值点为$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

由题意知：存在$x_1\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$、整数$k_1$，使得$\omega x_1+\varphi=k_1\pi$，　　①

以及$x_2\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$和整数$k_2$，使得$\omega x_2+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$，　　②

②-①得　$\omega(x_2-x_1)=(k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}$，故$\omega=\frac{(k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}}{x_2-x_1}$，

显然，要$\omega(>0)$最小，需$x_2-x_1$最大，且$(k_2-k_1)$最小，

易知$x_2-x_1$最大可取$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$，$(k_2-k_1)$最小为0，

故$\omega$的最小值为$\frac{\pi}{2}\times\frac{12}{5\pi}=\frac{6}{5}$，选C。

**例 5.**将函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再向上平移 1 个单位，得到$g(x)$的图像，若$g(x_1)g(x_2)=9$，且$x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$，则$2x_1-x_2$的最大值为（　　）

A．$\frac{25\pi}{6}$　　　　B．$\frac{35\pi}{6}$　　　　C．$\frac{17\pi}{4}$　　　　D．$\frac{49\pi}{12}$

**【解析】**易知$g(x)=2\sin(2(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{6})+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$

由$g(x_1)g(x_2)=9$知：　$\sin(2x_1+\frac{\pi}{3})=\sin(2x_2+\frac{\pi}{3})=1$

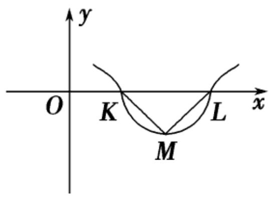
因此$2x_1+\frac{\pi}{3}=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}$，$2x_2+\frac{\pi}{3}=2k_2\pi+\frac{\pi}{2}$，

得$x_1=k_1\pi+\frac{\pi}{12},x_2=k_2\pi+\frac{\pi}{12}$（$k_1,k_2$为整数），

要$2x_1-x_2$最大，考虑到$x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$，因此$k_1=1$，此时$x_1$最大；$k_2=-2$，此时$x_2$最小；即$2x_1-x_2$得最大值为$2(\pi+\frac{\pi}{12})-(-2\pi+\frac{\pi}{12})=\frac{49\pi}{12}$，选D。

**例 6.**已知偶函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，

$\triangle KLM$ 为等腰直角三角形，$\angle KML=90^\circ, |KL|=1$，则 $f(\frac{1}{3})$ 的值为____




**【解析】**$\triangle KLM$ 为等腰直角三角形，$\angle KML=90^\circ, |KL|=1$，所以 $A=\frac{1}{2}, T=2, \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，

又 $f(x)$ 是偶函数，$0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin(\pi x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\cos\pi x$，

所以 $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}$

**例 7（全国 I）** 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}), x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 $\omega$ 的最大值为

（A）11　　（B）9　　（C）7　　（D）5

**【解析】** 注意到函数 $\sin x$ 的零点为 $k\pi$，其图像的对称轴为直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$

故，由题意知，存在 $k_1,k_2\in Z$，使得 $-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi$，$\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$；

故，$2\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$，

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，$11x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{31\pi}{36},\frac{16\pi}{9})$，不合要求；

当 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ 时，$11x-\frac{\pi}{4}\in(\frac{13\pi}{36},\frac{23\pi}{18})$，不合要求；

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，$9x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$，

$\sin t$ 在 $(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ 单调递减，满足要求，选 B

**例 8.** 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若方程 $|f(x_1)-g(x_2)|=4$ 的根 $x_1,x_2$ 满足 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{6}$，则 $\varphi$ 的值是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　　B．$\dfrac{\pi}{6}$　　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

**【解析】** 由题 $g\left(x\right)=2\sin\left[2\left(x-\varphi\right)\right]=2\sin\left(2x-2\varphi\right)$，

则 $\left|f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|=\left|2\sin 2x_1-2\sin\left(2x_2-2\varphi\right)\right|=4$，即 $\left|\sin 2x_1-\sin\left(2x_2-2\varphi\right)\right|=2$

不妨设 $\sin 2x_1=1$，$\sin(2x_2-2\varphi)=-1$

则 $2x_1=2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$2x_2-2\varphi=2k_2\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k_1,k_2\in Z$，

$\left|x_1-x_2\right|=\left|k_1\pi+\dfrac{\pi}{4}-\left(k_2\pi-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)\right|=\left|\left(k_1-k_2\right)\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right|$

又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\left|\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right|=\dfrac{\pi}{2}-\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$；

同理当 $\sin 2x_1=-1$，$\sin(2x_2-2\varphi)=1$，仍得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

综上，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。

**例** 9.函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x$ $(\omega>0)$ 与函数 $y=g(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称，且 $g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{3})$，则 $\omega$ 的最小值等于

$A$　1　　　$B$　2　　　$C$　3　　　$D$　4

**【解析】** $f(x)=2(\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$，由题意知 $f(x)+g(\dfrac{2\pi}{3}-x)=0$，

又 $g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{3})\Rightarrow g(\dfrac{2\pi}{3}-x)=f(\dfrac{\pi}{3}-x)$，故 $f(x)+f(\dfrac{\pi}{3}-x)=0$，

$f(x)$ 的图像关于 $(\dfrac{\pi}{6},0)$ 对称，故 $f(\dfrac{\pi}{6})=0$，即 $\sin(\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3})=0$

故，$\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow\omega=6k-2(k\in Z)$

因 $\omega>0$，故 $\omega$ 的最小值为 4.选 D。

**例** 10（1）函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$ 的图象在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 内有且仅有一条对称轴，则实数 $\omega$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(1,5\right)$　　　B．$\left(1,+\infty\right)$　　　C．$\left[1,5\right)$　　　D．$\left[1,+\infty\right)$

（2）若函数 $f(x)=2\sin\left(4x+\varphi\right)\left(\varphi<0\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{24}$ 对称，则 $\varphi$ 的最大值为（　　）

A. $-\dfrac{5\pi}{3}$　　　B. $-\dfrac{2\pi}{3}$　　　C. $-\dfrac{\pi}{6}$　　　D. $-\dfrac{5\pi}{6}$

**【解析】**易知 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{4}]$，即 $\sin t$ 在 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{4}]$ 只有一条对称轴，

故，$\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $\omega\in\left[1,5\right)$，故选 C.

（2）易知：$4\times\dfrac{\pi}{24}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in Z)$，

因 $\varphi<0$，故 $\varphi_{\max}=-\dfrac{2\pi}{3}$，选 B。

**例 11.**（1）求函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right)+\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的周期和单调递增区间；

（2）求函数 $f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ 的最大值和最小值

**【解析】**（1）$f(x)=\sin 4x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 4x\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin 4x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 4x\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\sin 4x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\cos 4x=\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin 4x+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos 4x)$

$=\sqrt{2}(\sin 4x\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos 4x\sin\dfrac{\pi}{12})=\sqrt{2}\sin(4x+\dfrac{\pi}{12})$，

故，$f(x)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$；

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<4x+\dfrac{\pi}{12}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，解得：$\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{7\pi}{48}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{48}(k\in Z)$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{7\pi}{48},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{48}](k\in Z)$

（2）$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\varphi$ 满足：$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$。

故 $f(x)_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$，$f(x)_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}$。

**例 12.**已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，且 $f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-4$，则 $\left|x_1+x_2\right|$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】$\because f\left(x\right)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

又 $f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-4$，即 $2\sin\left(x_1-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sin\left(x_2-\frac{\pi}{3}\right)=-4$，$\therefore \sin\left(x_1-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x_2-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，

由 $x_1,x_2$ 地位的对等性，不妨令 $\sin\left(x_1-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 且 $\sin\left(x_2-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ .

$\therefore x_1-\frac{\pi}{3}=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}$，$x_2-\frac{\pi}{3}=2k_2\pi-\frac{\pi}{2}$，$\left(k_1,k_2\in\mathbf{Z}\right)$，$\therefore x_1+x_2=2\left(k_1+k_2\right)\pi+\frac{2\pi}{3}\left(k_1,k_2\in\mathbf{Z}\right)$，

显然，当 $k_1+k_2=0$ 时，$\left|x_1+x_2\right|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$，故选 C.

**例 13.**已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$，若将其图象向右平移 $\varphi$（$\varphi>0$）个单位后所得的图象关于原点对称，则 $\varphi$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{12}$　　D．$\frac{5\pi}{12}$

【解析】$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，将其图像向右平移 $\varphi$ $(\varphi>0)$ 个单位后得到 $g(x)=\sin[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{6}]=\sin(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6})$，

由题意知：$g(x)$ 为奇函数，故 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=k\pi$，即 $\varphi=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{N})$，

因 $\varphi>0$，故 $\varphi$ 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$. 故选 C.

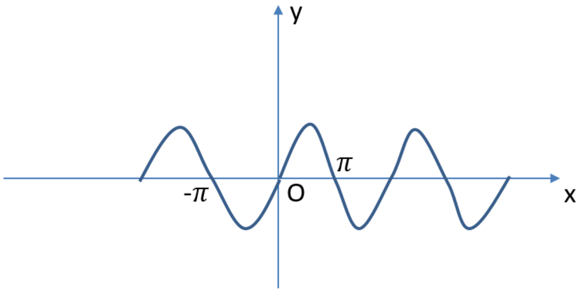
**例 14.**已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ 上恰有一个最大值点和一个最小值点，则实数 $\omega$ 的取值范围为（　　）

A. $[\frac{8}{3},7)$　　B. $[\frac{8}{3},4)$　　C. $[4,\frac{20}{3})$　　D. $(\frac{20}{3},7)$

【解析】易知：$f(x)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

故 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]$，

问题等价于 $\sin t$ 在 $[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]$ 恰有一个最大点和一个最小点，所以




取 $\omega=\frac{8}{3}$，则 $[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]=[-\frac{\pi}{2},\frac{19\pi}{18}]$，满足要求，排除 C，D

取 $\omega=5$，则 $[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]=[-\frac{13\pi}{12},\frac{11\pi}{6}]$，不满足要求，排除 A，最终选 B。

**【解法二】** 易知 $f(x)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

故 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]$，

问题等价于 $\sin t$ 在 $[-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}]$ 恰有一个最大点和一个最小点，注意到 $\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ 距离 $\frac{\pi}{2}$ 较近，所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\le\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}\\-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\le-\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{8}{3}\le\omega<4$，选 B。

**例 15.** 已知函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$，若 $f(\frac{7}{4}\pi)+f(\frac{11}{4}\pi)=0$，且 $f(x)$ 在 $(\frac{7}{4}\pi,\frac{11}{4}\pi)$ 上是增函数，则 $f(x)$ 的最小正周期为(　　　)

A．$9\pi$　　　B. $\frac{9}{2}\pi$　　　C. $4\pi$　　　D. $3\pi$

**【解析】**: $\frac{7}{4}\pi$ 和 $\frac{11}{4}\pi$ 的中点 $\frac{9}{4}\pi$ 一定是 $f(x)$ 的零点，

故 $\frac{9}{4}\pi\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $\omega=\frac{4}{9}k+\frac{2}{9}$

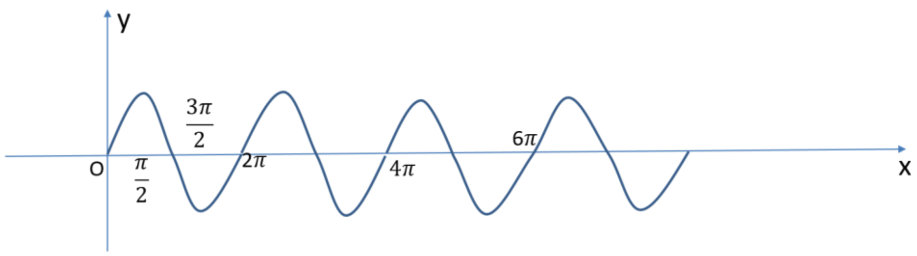
如 $\omega=\frac{2}{9}$，则 $x\in(\frac{7}{4}\pi,\frac{11}{4}\pi)$ 时，$\omega x\in(\frac{7}{18}\pi,\frac{11}{18}\pi)$ 与第二象限有交集，不合题意

如 $\omega=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，则 $x\in(\frac{7}{4}\pi,\frac{11}{4}\pi)$ 时，$\omega x\in(\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi)$ 在三、四象限，符合题意，故的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，选 D

**例 16.**已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le 6\pi$，且 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_n\right)\right|=12\left(n\ge 2,n\in N^*\right)$，则 $n$ 的最小值为（　　）

A. 6　　　B. 10　　　C. 8　　　D. 12

**【解析 】**易知 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin x$，数形结合：取 $x_1=0,x_2=\dfrac{\pi}{2},x_3=\dfrac{3\pi}{2},\cdots,x_8=6\pi$，可满足要求。选 C。




**例 17（1）（全国卷）**函数 $f\left(x\right)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0，\pi\right)$ 的零点个数为________.

（2） $f\left(x\right)=\tan(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的单调递增区间为________

（3） $f\left(x\right)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图像的对称中心为________，对称轴为_________，单调递增区间为__

**【解析】**（1） $x\in\left[0，\pi\right)$ 时，$3x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{19\pi}{6})$，问题等价于 $\cos t$ 在 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{19\pi}{6})$ 上的零点个数问题，显然，$\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}$ 均满足要求，故有 3 个零点。

（2）因 $\tan x$ 的单调递增区间为 $(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，解 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x-\dfrac{\pi}{3}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}$，即 $\tan(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12})(k\in Z)$

（3）因 $\cos x$ 的对称中心为 $(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0)$，

解 $2x-\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}$，故 $\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的对称中心为 $(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12},0)$

由于 $\cos x$ 的对称轴为直线 $x=k\pi$，

解 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$ 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，故 $\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ 的对称轴为直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$；

由于 $\cos x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$

解 $2k\pi-\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi$ 得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，故 $\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间为 $(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6})$

注意：以上的 $k\in Z$。

**例 18.** 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\theta)$ 为偶函数 $(0<\theta<\pi)$，其图像与直线 $y=2$ 某两个交点的横坐标分别为 $x_1,x_2$，若 $|x_2-x_1|$ 的最小值为 $\pi$，则该函数在区间（　　）上是增函数。

A．$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$　　C．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

**【解析】** 因 $y=2\sin(\omega x+\theta)$ 为偶函数，且 $0<\theta<\pi$，故 $\theta=\frac{\pi}{2}$，进而得 $y=2\cos\omega x$

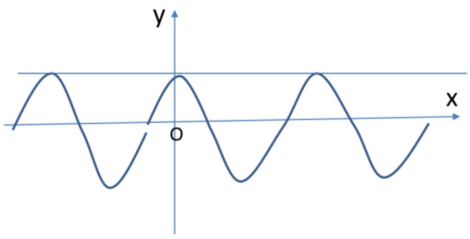
又，易知 $y=2\cos\omega x$ 的周期为 $\pi$，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$，故 $y=2\cos 2x$；

因 $\cos x$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\pi,2k\pi)$，

令 $2k\pi-\pi<2x<2k\pi$，得 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi(k\in Z)$

即，$y=2\cos 2x$ 的单调递增区间为 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi)(k\in Z)$

显然，取 $k=0$ 时，选项 A 满足要求，故选 A。




**例 19（全国 I）** 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数　② $f(x)$ 在区间（$\frac{\pi}{2},\pi$）单调递增　③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点

④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

**【解析】** ①显然正确。

$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$f\left(x\right)=2\sin x$，单调递减，②错

显然$f\left(x\right)\le 2$，因$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$，故④正确。

综上，选 C。

事实上，$f(x)=\sin|x|+|\sin\ x|=\begin{cases}-2\sin x, & x\in[-\pi,0]\\ 2\sin x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$，

显然，$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上只有 3 个零点。③错。

**例 20**（1）不等式$\sqrt{3}+2\cos x\ge 0$的解集是________.

（2）函数$y=\sqrt{\sin x-\cos x}$的定义域为______

**【解析】**⑴由题意得$\cos x\ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$，知其解集为$[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}](k\in Z)$

⑵解$\sin x\ge\cos x$得函数的定义域为$[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}](k\in Z)$

**【解法二】**易知$y=\sqrt{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}$，

由$2k\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\pi$得$2k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{4}$