§7.5 空间向量与立体几何

7.5.1 相关概念

学习目标

1.了解空间直角坐标系的概念及其应用；

2.了解空间向量的概念及空间向量的基本定理；

3.掌握空间向量的运算，能用向量的数量积判断向量的共线和垂直；

4.了解直线的方向向量及平面的法向量；

5.能用向量语言表述线线、线面、面面的平行和垂直关系；

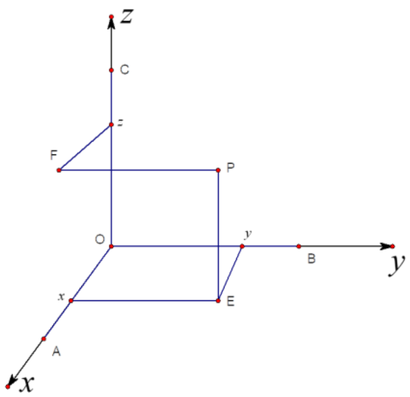
6.能用向量方法解决简单的立体几何问题.

1. 空间直角坐标系及其应用:

如图，设OA,OB,OC是空间中两两垂直的三条射线，分别以OA为x轴正向，OB为y轴正向，OC为z轴正向建立一个坐标系$O-xyz$，则该坐标系就称为空间直角坐标系。

【注意】这里的x轴、y轴、z轴之间的位置关系，符合右手螺旋定则。

显然，在空间直角坐标系$O-xyz$中，空间中的任意一个点P的位置关系，均可以由图中的三个参数x,y,z确定，称(x,y,z)为点P的坐标。



2. 空间向量的有关概念

名称	定义
空间向量	在空间中，具有长度和方向的线段
相等向量	方向相同且模相等的向量
相反向量	方向相反且模相等的向量
共线向量 (或平行向量)	表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合的向量
共面向量	平行于同一平面的向量

3. 空间向量的坐标表示及几个概念

对于空间中的任意一个向量 $\overrightarrow{AB}$，通过平移，可将线段 AB 的端点 A 移到坐标原点，此时，不妨设线段 AB 的端点 B 移动到了 B' 的位置，根据向量相等的定义，我们有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB'}$，设 $B'(x,y,z)$，则记 $\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$，此即空间向量的坐标表示。

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

（1） $\vec{a}$ 的模为 $|\vec{a}|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$

（2） $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$，其中，$\alpha$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角。

（3） 非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 垂直 $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

4. 空间向量的有关定理

(1)共线向量定理

对空间任意两个向量 $\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$，$\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\underline{\vec{a}=\lambda\vec{b}}$。

(2)共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\underline{\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}}$。

(3)空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$，存在有序实数组 (x,y,z)，使得 $\underline{\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}}$，其中，$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$叫做空间的一个基底.

5. 空间向量的数量积及运算律

同平面向量（略）。

6. 空间直线的方向向量

如 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ 为直线 l 上不同的两个点，则称向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为直线 l 的方向向量。

7. 平面的法向量

如直线 $l\perp$ 平面 α，则将直线 l 的**方向向量**称为平面 α 的法向量。

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 α 上的两个不平行向量，则下面的向量

$\vec{n}=(y_1z_2-y_2z_1,-(x_1z_2-x_2z_1),x_1y_2-x_2y_1)$ 为平面 α 的一个法向量（**求平面法向量的快捷方法**）

8. 空间位置关系的向量表示

位置关系		向量表示
直线l_1,l_2的方向向量分别为$\vec{n_1},\vec{n_2}$	$l_1//l_2$	$\vec{n_1}//\vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}=\lambda\vec{n_2}$
	$l_1 \perp l_2$	$\vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}\bullet\vec{n_2}=0$
直线l的方向向量为$\vec{n}$，平面α的法向量为$\vec{m}$	$l//\alpha$	$\vec{n}\perp\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}\bullet\vec{m}=0$
	$l\perp\alpha$	$\vec{n}//\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}=\lambda\vec{m}$
平面α，β的法向量分别为$\vec{n}$，$\vec{m}$	$\alpha//\beta$	$\vec{n}//\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}=\lambda\vec{m}$
	$\alpha\perp\beta$	$\vec{n}\perp\vec{m} \Leftrightarrow \vec{n}\bullet\vec{m}=0$

7.5.2 典型例题

例 1.判断下列结论正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)两直线的方向向量所成的角就是两条直线所成的角.(　　)

(2)直线的方向向量和平面的法向量所成的角就是直线与平面所成的角.(　　)

(3)两个平面的法向量所成的角是这两个平面所成的角.(　　)

(4)两异面直线夹角的范围是$(0,\frac{\pi}{2}]$，直线与平面所成角的范围是$[0,\frac{\pi}{2}]$，二面角的范围是$[0,\pi]$(　　)

【解析】(1)两直线的方向向量所成的角是两条直线所成的角或其补角；

(2)直线的方向向量$\vec{a}$，平面的法向量$\vec{n}$，直线与平面所成的角为θ，则$\sin\theta=|\cos<\vec{a},\vec{n}>|$；

(3)两个平面的法向量所成的角是这两个平面所成的角或其补角.

答案　(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

例 2.判断下列结论正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)直线的方向向量是唯一确定的.(　　)

(2)若直线a的方向向量和平面α的法向量平行，则$a//\alpha$.(　　)

(3)若$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一个基底，则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中至多有一个零向量.(　　)

(4)若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，则$<\vec{a},\vec{b}>$是钝角.(　　)

(5)若两平面的法向量平行，则两平面平行.(　　)

【解析】(1)直线的方向向量不是唯一的，有无数多个；

(2)$a\perp\alpha$；

(3)若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有一个是$\vec{0}$，则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，不能构成一个基底；

(4)若$<\vec{a},\vec{b}>=\pi$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，故不正确；

(5)两个平面可能平行或重合.

答案　(1)×　(2)×　(3)×　(4)×　(5)×

例 3.下列命题：

（1）若A,B,C,D是空间任意四点，则有；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$

（2）$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$是$\vec{a},\vec{b}$共线的充要条件；

（3）若$\vec{a},\vec{b}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$所在直线平行；

（4）对空间任意一点O与不共线的三点A,B,C，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中$x,y,z\in R$），则$P,A,B,C$四点共面.

其中不正确命题的个数是(　　).

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】　①中四点恰好围成一封闭图形，其和为$\vec{0}$，而不是0，故错；

②明显错；

③如果重合呢，故也错；

④中需满足$x+y+z=1$，才有P,A,B,C四点共面，也错。

综上，选 D。

例 4.已知两平面的法向量分别为$\vec{m}=(0,1,0),\vec{n}=(0,1,1)$，则两平面所成的二面角为(　　)

A. 45°　　B. 135°　　C. 45°或135°　　D.90°

【解析】注意（1）：两个平面所成的二面角有四个，但从大小来看，可以只关注两个。

（2）两个平面的法向量，其夹角与二面角的大小，有相等和互补两种情况。

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即$<\vec{m},\vec{n}>=45^\circ$

$\therefore$两平面所成二面角为45°或135°。

例 5.过正方形$ABCD$的顶点A作线段$PA\perp$平面$ABCD$，若$AB=PA$，则平面ABP与平面CDP所成的二面角为________.

【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，设E为PD的中点，连接AE，并设$AB=1$，则$A(0,0,0),D(0,1,0),P(0,0,1)$，$E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

因$PA\perp$平面$ABCD$，故$PA\perp AD$，

又，$AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，故$AD\perp$平面PAB，故$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$为平面$PAB$的一个法向量；

又，$PA\perp$平面$ABCD$，故$PA\perp CD$，

因$AD\perp CD$，而$PA\cap AD=A$，故$CD\perp$平面PAD，

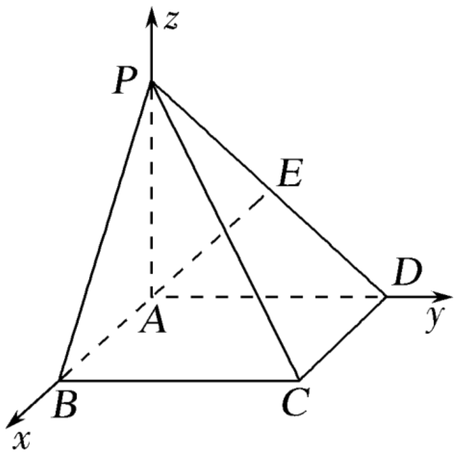
因此，$CD\perp AE$，易知$AE\perp PD$，而$PD\cap CD=D$，

故$AE\perp$平面PCD，

故$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$为平面$PCD$的一个法向量；

显然$<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}>=45^{\circ}$.

故平面PAB与平面PCD所成的二面角为45°或135°



例 6（1）在空间直角坐标系中，$A(1,2,3), B(-2,-1,6), C(3,2,1), D(4,3,0)$，则直线$AB$与$CD$的位置关系是(　　)

A.垂直　　B.平行　　C.异面　　D.相交但不垂直

（2）O为空间中任意一点，A,B,C三点不共线，且$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$,若$P,A,B,C$四点共面，则实数$t=$______

【解析】（1）由题意得，$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3),\overrightarrow{CD}=(1,1,-1)$

$\therefore\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$，$\therefore\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$共线，

又AB与CD没有公共点.　$\therefore$　$AB//CD$

（2）$\because P,A,B,C$四点共面，$\therefore\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+t=1$，解得$t=\frac{1}{8}$。

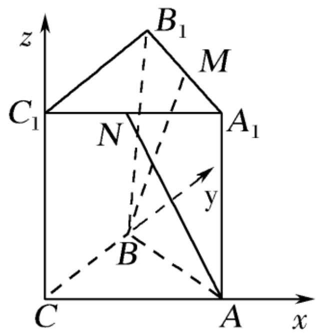
例 7.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90^\circ, M, N$ 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BM 与 AN 所成角的余弦值为(　　)

A. $\dfrac{1}{10}$　　　B. $\dfrac{2}{5}$　　　C. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，设 $BC=2$，则 $B(0,2,0), A(2,0,0), M(1,1,2), N(1,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(1,-1,2), \overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$，故 BM 与 AN 所成角 θ 的余弦值为

$$\cos\theta=|\cos(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AN})|=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$$

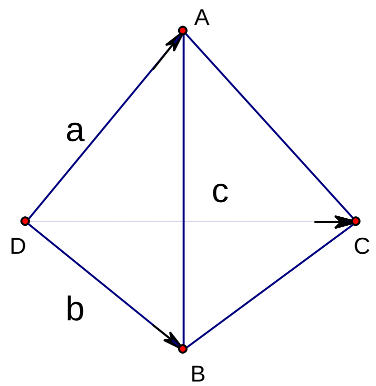


例 8.在空间四边形 $ABCD$ 中，求证：$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=0$

【证明】令 $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}, \mathbf{b}=\overrightarrow{DB}, \mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$

则 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\bullet(-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})\bullet\mathbf{b}+(-\mathbf{a})\bullet(\mathbf{c}-\mathbf{b})$

$=-\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{c}\bullet\mathbf{b}-\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}-\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=0$



例 9.如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AC 的中点，求证：$AB_1//$平面 C_1BD

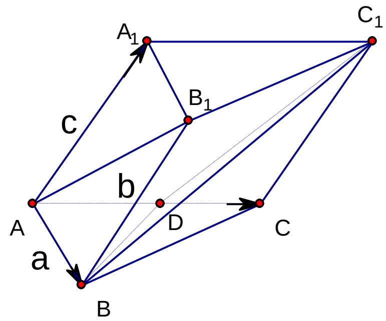
【证明】记 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{AC}=\mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$，则 $\overrightarrow{AB_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$

故，$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{AB_1}$

故，$\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC_1}$ 共面

又，$B_1\notin$平面C_1BD，故$AB_1//$平面C_1BD



例 10.已知E,F,G,H分别是空间四边形$ABCD$的边AB,BC,CD,DA的中点，用向量方法求证:

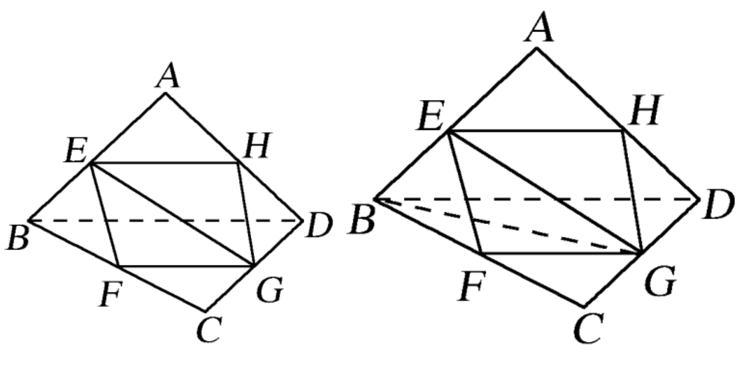
(1) E,F,G,H四点共面;

(2) $BD//$平面$EFGH$.

【证明】(1)连接BG，则$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$

由共面向量定理知E,F,G,H四点共面。



(2)因为$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

又因为E,H,B,D四点不共线，所以$EH//BD$.

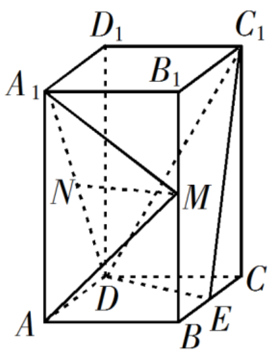
又$EH\subset$平面$EFGH$，$BD\not\subset$平面$EFGH$，

所以$BD//$平面$EFGH$

例 11.如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4, AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点．

（1）证明：$MN//$平面C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值．



【证明】（1）连接 ME，B_1C

$\because M$，E 分别为 BB_1，BC 中点，$\therefore ME$ 为 ΔB_1BC 的中位线

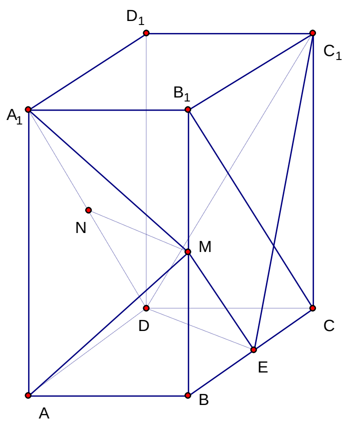
$\therefore ME//B_1C$ 且 $ME=\dfrac{1}{2}B_1C$

又 N 为 A_1D 中点，且 $A_1D\underline{\underline{//}}B_1C$，$\therefore ND//B_1C$ 且 $ND=\dfrac{1}{2}B_1C$

$\therefore ME\underline{\underline{//}}ND$，$\therefore$四边形 $MNDE$ 为平行四边形

$\therefore MN//DE$，又 $MN\not\subset$平面C_1DE，$DE\subset$平面C_1DE

$\therefore MN//$平面C_1DE



（2）**【解析】**设 $AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$

由直四棱柱性质可知：$OO_1\perp$平面$ABCD$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形 $\therefore AC\perp BD$

则以 O 为原点，可建立如图所示的空间直角坐标系：则

$A(\sqrt{3},0,0)$ ， $M\left(0,1,2\right)$ ， $A_1(\sqrt{3},0,4)$ ， $N(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2)$

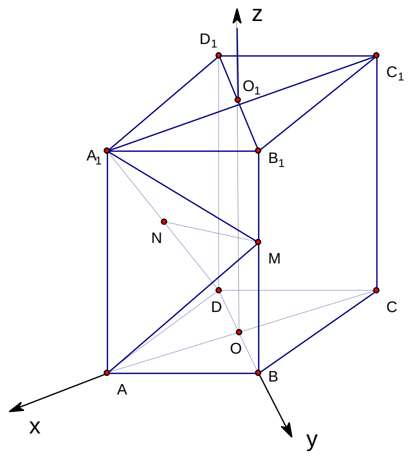
故，$\overrightarrow{MA_1}=(\sqrt{3},-1,2)$ ， $\overrightarrow{MA}=(\sqrt{3},-1,-2)$ ， $\overrightarrow{MN}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0)$

令 $n_1=(x,y,z)$ 为平面 MAA_1 的一个法向量，则

由 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\\ n_1\cdot\overrightarrow{MA}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y+2z=0\\ \sqrt{3}x-y-2z=0\end{cases}$ ，因此 $z=0$ ，

取 $x=1$ ，得 $y=\sqrt{3}$ ，故 $n_1=(1,\sqrt{3},0)$

设 $\vec{n}_2=\left(a,b,c\right)$ 为平面 MA_1N 的一个法向量



由 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\\ n_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}a-b+2c=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3}{2}b=0\end{cases}$

取 $a=\sqrt{3}$ ，解得 $b=1,c=-1$ ，故 $n_2=(\sqrt{3},1,-1)$

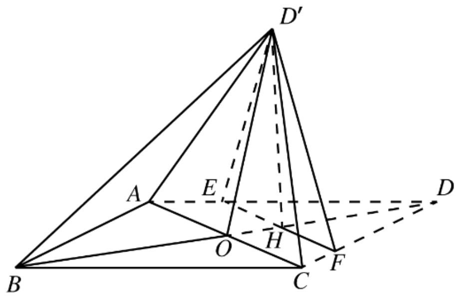
$\therefore \cos<n_1,n_2>=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ， $\therefore \sin<n_1,n_2>=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore$ 二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为：$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

例 12.如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 $O, AB=5, AC=6$ ，点 E,F 分别在 AD,CD 上，$AE=CF=\dfrac{5}{4}$，EF 交 BD 于点 H.将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，$OD'=\sqrt{10}$.

（I）证明：$D'H\perp$平面 $ABCD$;

（II）求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.



⑴ **【证明】**：$\because AE=CF=\dfrac{5}{4}$，$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{CF}{CD}$，$\therefore EF\parallel AC$．

$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore EF\perp BD$，

$\therefore EF\perp DH$，$\therefore EF\perp D'H$．

$\because AC=6$，$\therefore AO=3$；

又 $AB=5$，$AO\perp OB$，$\therefore OB=4$，

$\therefore OH=\dfrac{AE}{AD}\cdot OD=1$，$\therefore DH=D'H=3$，

$\therefore \left|OD'\right|^2=\left|OH\right|^2+\left|D'H\right|^2$，$\therefore D'H\perp OH$．

又$\because OH\cap EF=H$，$\therefore D'H\perp$面 $ABCD$．

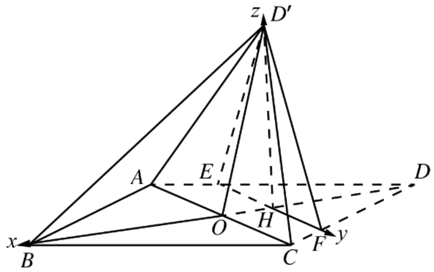
⑵ **【解析】** 建立如图坐标系 $H-xyz$．则 $B(5，0，0)$，$C(1，3，0)$，$D'(0，0，3)$，$A(1，-3，0)$，

$\overrightarrow{AB}=(4，3，0)$，$\overrightarrow{AD'}=(-1，3，3)$，$\overrightarrow{AC}=(0，6，0)$，

设$\overrightarrow{n_1}=(x，y，z)$为平面 ABD' 的一个法向量，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\end{cases}$得$\begin{cases}4x+3y=0\\ -x+3y+3z=0\end{cases}$，取$\begin{cases}x=3\\ y=-4\\ z=5\end{cases}$，$\therefore \overrightarrow{n_1}=(3，-4，5)$．

同理可得平面 $AD'C$ 的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(3，0，1)$，



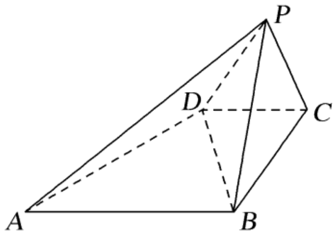
$\therefore \left|\cos\theta\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{|9+5|}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{25}$，

令二面角 $B-D'A-C$ 的平面角为 β，则 $\sin\beta = \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{95}}{25}$

例 13.如图所示，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形，$\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$，$AB = BC = PB = PC = 2CD$，侧面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD$。证明:

(1) $PA \perp BD$；

(2)平面 $PAD \perp$ 平面 PAB



【证明】 (1)取 BC 的中点 O，连接 PO，

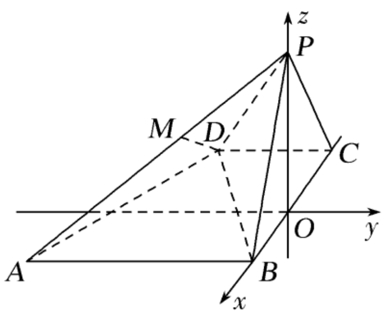
因 $PB = PC$，故 $PO \perp BC$，

$\because$ 平面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD$， $BC = PBC \cap ABCD$，$\therefore$ $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

以 BC 的中点 O 为坐标原点，以 BC 所在直线为 x 轴，

过点 O 与 AB 平行的直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系，如图所示。不妨设 $CD = 1$，则 $AB = BC = 2, PO = \sqrt{3}$，故 $A(1,-2,0), B(1,0,0), D(-1,-1,0), P(0,0,\sqrt{3})$。



$\therefore\ \overrightarrow{BD}=(-2,-1,0),\overrightarrow{PA}=(1,-2,-\sqrt{3})$

$\because\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PA}=-2\times1+(-1)(-2)+0\times(-\sqrt{3})=0$，$\therefore\ \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $PA\perp BD$

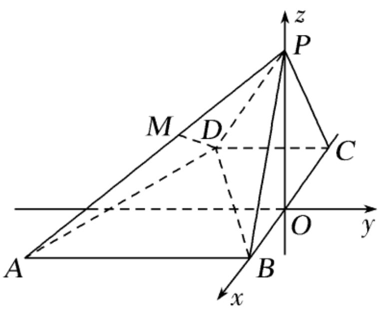
(2)【解析】取 PA 的中点 M，连接 DM，则 $M(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

故，$\overrightarrow{DM}=(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$

$\therefore\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\times1+0\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\sqrt{3}\right)=0$，

$\therefore\ \overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$，即 $DM\perp PB$

$\because\ \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\times1+0\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$



$\therefore\ \overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$，即 $DM\perp PA$，又因 $PA\cap PB=P$

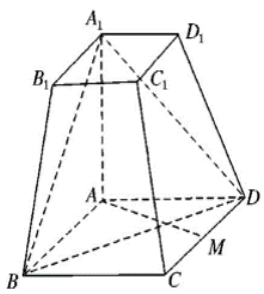
$\therefore\ DM\perp$平面 PAB

$\because DM\subset$平面 PAD，$\therefore$平面 $PAD\perp$平面 PAB。

例 14．如图所示，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=120°,AB=AA_1=2A_1B_1=2$，

（1）若 M 为 CD 中点，求证：$AM\perp$平面 AA_1B_1B；

（2）求直线 DD_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值．



（1）【证明】$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=120°$，连结 AC，则 $\triangle ACD$ 为等边三角形，

又$\because M$为CD中点，$\therefore AM\perp CD$，由$CD// AB$，

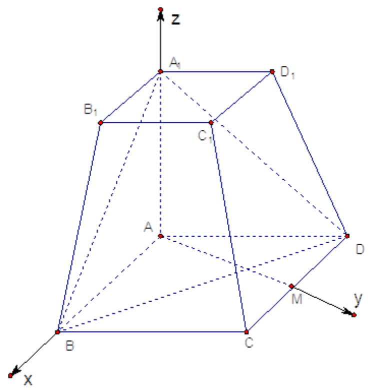
$\therefore AM\perp AB$，

$\because AA_1\perp$底面$ABCD$，$AM\subset$底面$ABCD$，$\therefore AM\perp AA_1$，

又$\because AB\cap AA_1=A$，$\therefore AM\perp$平面AA_1B_1B.

（2）【解析】由（1）知$AM\perp AB$，又$\because AA_1\perp$底面$ABCD$，

所以，我们可以分别以AB,AM,AA_1为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，



$A_1(0,0,2)$、$B(2,0,0)$、$D(-1,\sqrt{3},0)$、$D_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，

$\therefore \overrightarrow{DD_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，

设平面A_1BD的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+\sqrt{3}y=0\\ 2x-2z=0\end{cases}$，

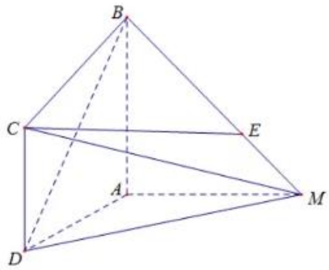
取$x=1$，得$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，

$\therefore$直线DD_1与平面A_1BD所成角θ的正弦值$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DD_1}\right\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DD_1}|}=\frac{1}{5}$.

例 15．如图，在四棱锥$M-ABCD$中，$AB\perp AD,AB=AM=AD=2,MB=2\sqrt{2},MD=2\sqrt{3}$

（1）证明：$AB\perp$平面ADM；

（2）若$CD//AB$且$CD=\frac{2}{3}AB$，E为线段BM上一点，且$BE=2EM$，求直线EC与平面BDM所成角的正弦值。



（1）**【证明】** 因为 $AB=AM=2, MB=2\sqrt{2}$，

所以 $AM^2+AB^2=MB^2$。于是 $AB\perp AM$，

又 $AB\perp AD, AM\cap AD=A, AM\subset$ 平面 ADM， $AD\subset$ 平面 ADM，

所以 $AB\perp$ 平面 ADM .

（2）**【解析】** 因为 $AM=AD=2, MD=2\sqrt{3}$，所以，$\angle MAD=120^\circ$

如图所示，在平面 ADM 内过点 A 作 x 轴垂直于 AM，

又由（1）知 $AB\perp$ 平面 ADM，于是分别以 AM, AB 所在直线为 y, z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$。于是 $D\left(\sqrt{3},-1,0\right), C\left(\sqrt{3},-1,\frac{4}{3}\right), B\left(0,0,2\right), M\left(0,2,0\right)$，

因为 $BE=2EM$，于是 $E\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$。

所以 $\overrightarrow{EC}=\left(\sqrt{3},-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{BM}=\left(0,2,-2\right), \overrightarrow{BD}=\left(\sqrt{3},-1,-2\right)$，

设 $\vec{n}$ 为平面 BDM 的一个法向量，于是 $\begin{cases}\overrightarrow{BM}\bullet\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BD}\bullet\vec{n}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}2y-2z=0\\ \sqrt{3}x-y-2z=0\end{cases}$，取 $z=1$ 得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,1\right)$

设直线 EC 与平面 BDM 所成角为 θ，

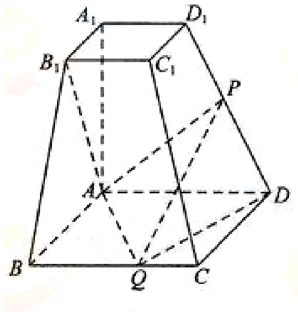
则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EC},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{EC}\bullet\vec{n}}{\left|\overrightarrow{EC}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4\sqrt{5}}{3}\times\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{5}$，

所以直线 EC 与平面 BDM 所成角的正弦值为 $\frac{1}{5}$

例 16.如图，已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形，$A_1A=6$，且 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$，点 P, Q 分别在棱 DD_1, BC 上。

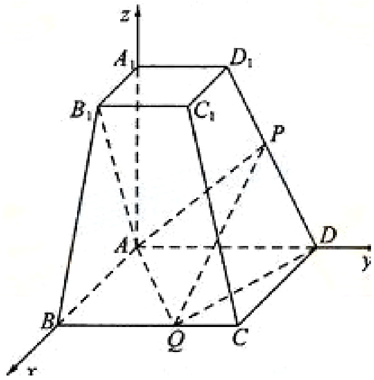
（1）若 P 是 DD_1 的中点，证明：$AB_1 \perp PQ$；

（2）若 PQ // 平面 ABB_1A_1，二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$，求四面体 $ADPQ$ 的体积.



（1）【证明】由题设知，AA_1, AB, AD 两两垂直，以 A 为坐标原点，AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(0,0,0), B_1(3,0,6), D(0,6,0), D_1(0,3,6)$，设 $Q(6,m,0)$，其中 $m=BQ, 0\le m\le 6$



若 P 是 DD_1 的中点，$P(0,\dfrac{9}{2},3), \overrightarrow{PQ}=(6,m-\dfrac{9}{2},-3)$，

又 $\overrightarrow{AB_1}=(3,0,6)$，于是 $\overrightarrow{AB_1}\bullet\overrightarrow{PQ}=18-18=0$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，即 $AB_1\perp PQ$

（2）【解析】由题设知，$\overrightarrow{DQ}=(6,m-6,0), \overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$ 是平面 PQD 内的两个不共线向量。

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 是平面 PQD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{DQ}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6x+(m-6)y=0,\\ -3y+6z=0.\end{cases}$

取 $\overrightarrow{n_1}=(6-m,6,3)$。又平面 AQD 的一个法向量是 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，所以

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\bullet|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}=\dfrac{3}{7}$

解得$m=4$，或$m=8$（舍去），此时$Q(6,4,0)$

设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}(0\le\lambda\le1)$，而$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$，由此得点$P(0,6-3\lambda,6\lambda)$，

所以$\overrightarrow{PQ}=(6,3\lambda-2,-6\lambda)$

因为PQ // 平面ABB_1A_1，且平面ABB_1A_1的一个法向量是$\overrightarrow{n_3}=(0,1,0)$，

所以$\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{n_3}=0$，即$3\lambda-2=0$，得$\lambda=\dfrac{2}{3}$，

从而$P(0,4,4)$，故四面体$ADPQ$的体积$V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ADQ}\bullet h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times4=24$