§ 3.2 函数零点与方程

3.2.1 相关概念与性质

1、函数零点的概念

凡使 $f(x)=0$ 的实数 x，我们称其为函数 $f(x)$ 的零点，严格说来，零点是一个数，而不是点。从函数零点的定义不难发现：

函数 $f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 有实数解 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有交点。

事实上，$f(x)$ 之图像与 x 轴交点的横坐标就是 $f(x)$ 的零点，因此，求函数 $f(x)$ 的零点，往往通过解方程 $f(x)=0$ 实现。

另外，两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像之交点问题，往往也等价于方程 $f(x)-g(x)=0$ 的解的问题，或者新函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的零点问题。

2、连续函数的零点存在性定理。

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（高中阶段可等价成其图像是连续不断的），且 $f(a)\cdot f(b)\le 0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少存在一个零点。

【注意】 如果 $f(a)\cdot f(b)>0$，不能说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上就没有零点。

3、重要结论

（1）如函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，且 $f(x)$ 有 n 个零点，则这 n 个零点之和为 na

（2）如函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，且他们图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = na$

（3）如函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图像关于点 (a,b) 中心对称，且他们图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=na+nb$

4、如果函数 $f(x)$ 为单调函数，则 $f(x)$ 最多只有一个零点。

3.2.2 典型例题

例 1. 若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间（　　）

A、(a,b) 和 (b,c) 内　　　　B、$(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

C、(b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内　　　　D、$(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

【解析】由题意知：$f\left(a\right)=\left(a-b\right)\left(a-c\right)>0$，$f\left(b\right)=\left(b-c\right)\left(b-a\right)<0$，$f\left(c\right)=\left(c-a\right)\left(c-b\right)>0$

因此，$f(x)$ 在 $\left(a,b\right)$ 和 $\left(b,c\right)$ 内分别至少有一个零点，依题意，只能选 A。

例 2（1）函数 $f(x)=\log_3 x+x-3$ 的零点一定在区间(　　　　).

A．$(0,1)$　　　B．$\left(1,2\right)$　　　C．$\left(2,3\right)$　　　D．$\left(3,4\right)$

（2）已知函数 $f(x)=x^2+x+a$ 在区间 $(0,1)$ 上有零点，则实数 a 的取值范围是_______

【解析】（1）易知 $f(x)=\log_3 x+x-3$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续单调递增函数，

又 $f(2)=\log_3 2-1<0, f(3)=1>0$

$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_3 x+x-3$ 有唯一的零点，且零点在区间 $(2,3)$ 内.

（2）函数 $f(x)=x^2+x+a$ 的对称轴为直线 $x=-\dfrac{1}{2}$，因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a<0 \\ 2+a>0 \end{cases}$，解得 $-2<a<0$

例 3（1）函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f(\dfrac{1}{2}+x)=f(\dfrac{1}{2}-x)$，并且方程 $f(x)=0$ 有三个实根，则这三个实根的和为___

（2）(**全国 II**) 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$

（A）0　　　（B）m　　　（C）$2m$　　　（D）$4m$

【解析】(1)：由 $f(\dfrac{1}{2}+x)=f(\dfrac{1}{2}-x)$ 知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，

故 $f(x)=0$ 的 3 根之和为 $3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

（2）由 $f(x)+f(-x)=2$、$y=1+\dfrac{1}{x}$ 知：$f(x)$ 与 y 的图像均关于点 $(0,1)$ 对称，故 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=m$

例4（全国I）已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a=$（）

A．$-\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．1

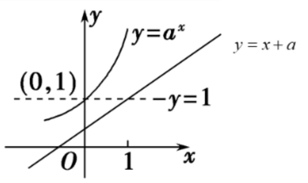
【解析】易知x^2-2x、$e^{x-1}+e^{-x+1}$的图像均关于直线$x=1$对称，故$f(x)$的图像关于直线$x=1$对称。由题意：1必为$f(x)$的零点，由$f(1)=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，选C。

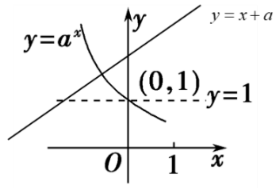
注意重要结论：$f(x-a)+f(b-x)$的图像关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称。对称轴由$x-a=b-x$解得。

例5、若方程$a^x-x-a=0$有两个实数解，则a的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　　　B．$(0,1)$　　　　C．$(0,2)$　　　　D．$(0,+\infty)$

【解析】$a^x-x-a=0\Rightarrow a^x=x+a$，分别画出$y=a^x$和$y=x+a$的图像，易知$a<1$时，两函数之图像不可能有2个交点。只能选A。





例6（1）已知函数$f(x)=ax^2+|x-a|$（$a\in R$），试讨论关于x的方程$f(x)=x^3$的解的个数。

（2）已知方程$9^x-2\cdot 3^x+(3k-1)=0$有两个实根，则实数k的取值范围为（　　　）

【解析】（1）$f(x)=x^3\Rightarrow|x-a|=x^3-ax^2\geq 0\Rightarrow x\geq a$，所以$x-a=x^3-ax^2$，得$(x+1)(x-1)(x-a)=0$，故$-1\leq a<1$时，2解；

$a\geq 1$时，1解；$a<-1$时，3解

（2）令$3^x=t$，则方程化为$t^2-2t+(3k-1)=0$；　(*)

要使原方程有两个实根，方程(*)必须有两个不相等的正根t_1,t_2

故，$\begin{cases}\Delta=(-2)^2-4(3k-1)>0\\ t_1t_2=3k-1>0\\ t_1+t_2=2\end{cases}$，解得$\frac{1}{3}<k<\frac{2}{3}$，所以，实数$k$的取值范围是$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

例7.已知$a>1$，方程$e^x+x-a=0$与$\ln x+x-a=0$的根分别为x_1,x_2，则$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$的取值范围为________

【解法一】由题意知$e^{x_1}+x_1-a=0$，$\ln x_2+e^{\ln x_2}-a=0$；故$x_1,\ln x_2$均为函数$f(x)=e^x+x-a$的零点，而函数$f(x)$显然是单调递增函数，因此$x_1=\ln x_2$；

从而，由 $e^{x_1}+x_1-a=0 \Rightarrow e^{\ln x_2}+x_1-a=0 \Rightarrow x_1+x_2=a$

从而，$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=a^2\in(1,+\infty)$

【解法二】 由题意知：$e^{x_1}=-x_1+a$，$\ln x_2=-x_2+a$，也即点 $P(x_1,e^{x_1}), Q(x_2,\ln x_2)$ 分别为曲线 $y=e^x$、$y=\ln x$ 与直线 $y=-x+a$ 的交点；

考虑到 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 互为反函数，其图像关于直线 $y=x$ 对称，刚好直线 $y=x$ 与直线 $y=-x+a$ 互相垂直，

因此，$P(x_1,e^{x_1}), Q(x_2,\ln x_2)$ 两点关于直线 $y=x$ 对称，其中点 $M(x_0,y_0)$ 必为直线 $y=x$ 与直线 $y=-x+a$ 的交点

解 $\begin{cases} y=-x+a \\ y=x \end{cases}$ 得 $x_0=\dfrac{a}{2}$，故 $x_1+x_2=2x_0=a$

故 $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2=a^2\in(1,+\infty)$

例 8、设 x,y 均为实数，满足：$(x-1)^3+2020(x-1)=-1,\quad (y-1)^3+2020(y-1)=1$，则 $x+y=$（　　　）

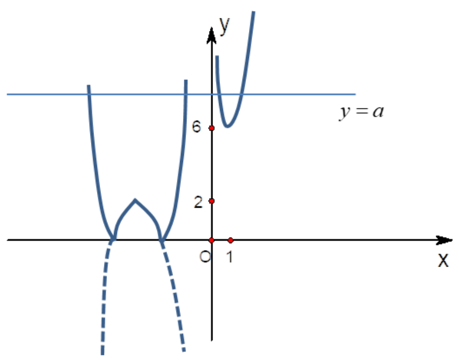
【解析】 由题意知：$(x-1)^3+2020(x-1)+1=0$，$(1-y)^3+2020(1-y)+1=0$

作函数 $f(t)=t^3+2020t+1$，则题目条件变为 $f(x-1)=f(1-y)=0$

因 $f(t)$ 为单调递增函数，因此必有 $x-1=1-y$，即 $x+y=2$

例 9. 若函数 $f(x)=\left|\dfrac{x^2+4x+1}{x}\right|-a$ 的图象与 x 轴恰有四个不同的交点，则实数 a 的取值范围为___

【解析】 问题等价于 $\left|x+\dfrac{1}{x}+4\right|=a$ 有 4 个解，令 $g(x)=\left|x+\dfrac{1}{x}+4\right|$，问题进一步转化为 $g(x)$ 的图像与直线 $y=a$ 有 4 个交点；画出 $g(x)$ 的图像如下。



从图像不难得到 a 的取值范围为 $(0,2)\cup(6,+\infty)$

例 10、设a,b,c为实数，$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$，$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$。记集合$S=\{x|f(x)=0,x\in R\},T=\{x|g(x)=0,x\in R\}$.若$|S|$，$|T|$分别为集合$S,T$的元素个数，则下列结论不可能的是（　　）

（A）$|S|=1$ 且 $|T|=0$　　　（B）$|S|=1$ 且 $|T|=1$

（C）$|S|=2$ 且 $|T|=2$　　　（D）$|S|=2$ 且 $|T|=3$

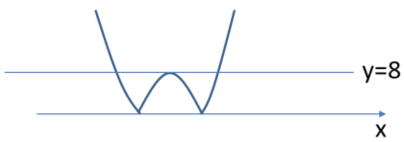
【解析】题中涉及三个参数a,b,c，难得讨论，因此我们从 D 选项中的$|T|=3$着手，因为这意味着$c\neq 0$,且一元二次方程$cx^2+bx+1=0$的判别式$\Delta>0$,同时$x=-\dfrac{1}{a}$不是$cx^2+bx+1=0$的解；由于此时cx^2+bx+1的判别式与x^2+bx+c的判别式相同，故$x^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根；考虑到$x=-\dfrac{1}{a}$不是$cx^2+bx+1=0$的解，得$c(-\dfrac{1}{a})^2+b(-\dfrac{1}{a})+1\neq 0\Rightarrow a^2-ab+c\neq 0$，即$x=-a$不是$x^2+bx+c=0$的解，因此$|S|=3$，故选项 D 不可能，选 D。

例 11、已知函数$f(x)=x^2-2ax-3a^2$,且方程$\left|f(x)\right|=8$有三个不同的实根，则实数a =_____.

【解析】问题$\Leftrightarrow y=|f(x)|$的图像与直线$y=8$有 3 个不同的交点，求a的值。

显然，$a=0$不满足要求，

由$\Delta=16a^2>0$知$f(x)$的图像与x轴有两个不同交点，故$|f(x)|$的图像如图所示，



由$f_{\min}(x)=f(a)=-4a^2$知$y=\left|f(x)\right|$与直线$y=8$有三个不同的交点，

需$4a^2=8$，解得$a=\pm\sqrt{2}$

例 12．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-2}-1, & x\geq 0\\ x+2, & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，则方程$f[g(x)]-1=0$的根为____

【解析】由$f[g(x)]-1=0$得$f[g(x)]=1$。设$t=g(x)$，则$f(t)=1$

若$t\geq 0$，则由$f(t)=2^{t-2}-1=1$，得$2^{t-2}=2$，解得$t=3$，

若$t<0$，则由$f(t)=t+2=1$，解得$t=-1$

下面解方程 $g(x)=t$，先解 $g(x)=3$

当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=x^2-2x$，解 $x^2-2x=3$ 得 $x=3$ 或 $x=-1$（舍）

当 $x<0$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，解 $\dfrac{1}{x}=3$ 得 $x=\dfrac{1}{3}$（舍），

再解 $g(x)=-1$

当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=x^2-2x$，解 $x^2-2x=-1$ 得 $x=1$

当 $x<0$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，解 $\dfrac{1}{x}=-1$ 得 $x=-1$

综上 $x=3$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$，

即，方程 $f[g(x)]-1=0$ 的根有 3 或 1 或 − 1，

例 13．已知 x_1 是方程 $x\ln x=2018$ 的根，x_2 是方程 $xe^x=2018$ 的根，则 x_1x_2 等于（　　）

A．1009　　B．2018　　C．4038　　D．不能确定

【解析】 易知 $x_1\ln x_1=x_2e^{x_2}=2018$，即 $e^{\ln x_1}\ln x_1=x_2e^{x_2}$，令 $f(x)=xe^x(x>0)$，由 $f(a)-f(b)=ae^a-be^b=ae^a-ae^b+ae^b-be^b=a(e^a-e^b)+e^b(a-b)$ 知 $f(x)$ 为单调递增函数，又 $f(\ln x_1)=f(x_2)$，故 $\ln x_1=x_2$，从而 $x_1x_2=x_1\ln x_1=2018$

【法二】 由题意知 $x_1\ln x_1=x_2e^{x_2}=2018$，即

$\ln x_1+\ln(\ln x_1)-\ln 2018=x_2+\ln x_2-\ln 2018=0$

令 $f(x)=x+\ln x-\ln 2018$，显然 $f(x)$ 为单调递增函数，且 $f(\ln x_1)=f(x_2)=0$

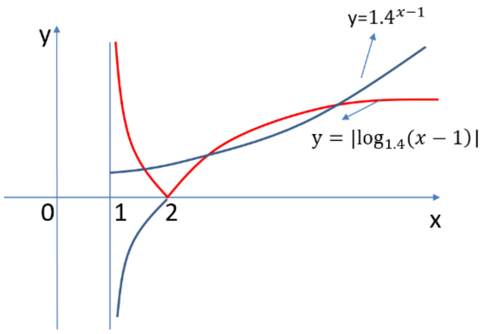
故 $\ln x_1=x_2$，从而由 $\ln x_1+\ln(\ln x_1)-\ln 2018=0$，$\ln x_1+\ln x_2-\ln 2018=0$，

得 $x_1x_2=2018$

例 14．已知关于 x 的方程 $\left|\log_{1.4}|x-1|\right|=1.4^{|x-1|}$，则该方程的所有根的和为（　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．6

【解析】 因 $y=1.4^{|x-1|}-\left|\log_{1.4}|x-1|\right|$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，因此只需考察 $x>1$ 的情况，即考察，$1.4^{x-1}-|\log_{1.4}(x-1)|=0$ 有几个根即可。在同一坐标系中，画出函数 $y=1.4^{x-1}$ 和 $y=|\log_{1.4}(x-1)|$ 的图像（$x>1$），如图所示



从图像看，二者有 3 个交点；考虑到对称性，$y=1.4^{x-1}$ 和 $y=\left|\log_{1.4}(x-1)\right|$ 的图像在 $x<1$ 时也有 3 个交点，因此，题中的方程有 6 个根，其和为 6.

【法二】 因 $y=1.4^{|x-1|}-\left|\log_{1.4}|x-1|\right|$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，因此只需考察 $x>1$ 的情况，即考察 $1.4^{x-1}-\left|\log_{1.4}(x-1)\right|=0$ 有几个根即可。

令 $f(x)=1.4^{x-1}-\left|\log_{1.4}(x-1)\right|(x>1)$

$x\in(1,2)$ 时，$f(x)=1.4^{x-1}+\log_{1.4}(x-1)$ 为单调递增函数，考虑到 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$，$f(2)=1.4>0$，故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有唯一一个零点

又，$f(3)=1.4^2-\log_{1.4}2<1.4^2-\log_{1.4}1.4^2=1.4^2-2<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，

因此，$f(x)$ 在 $(2,3)$ 和 $(3,+\infty)$ 上各至少有一个零点，(结合选择支，不必再玩了)，

故方程 $1.4^{x-1}-\left|\log_{1.4}(x-1)\right|=0$ 在 $x>1$ 时有 3 个根，

结合对称性知：题中方程有 6 个根，故其和为 $6\times1=6$

例 15. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0,b,c\in R)$，且 $f(1)=-\dfrac{a}{2}$，求证：函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点。

【证明】 因 $f(1)=-\dfrac{a}{2}<0$，因此，只需证明：$f(0)>0$ 或 $f(2)>0$ 即可，

假设 $f(0)\le 0, f(2)\le 0$，则 $c\le 0$，且 $4a+2b+c\le 0$，

因 $f(1)=-\dfrac{a}{2}=a+b+c$，得 $b+c=-\dfrac{3}{2}a$

故，$4a+2b+c=4a+2(b+c)-c=a-c>0$，此与 $4a+2b+c\le 0$ 矛盾，

故 $f(0)>0$ 或 $f(2)>0$

不妨设 $f(0)>0$，根据连续函数的零点存在性定理：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上，进而在 $(0,2)$ 上至少有一个零点，证毕。

例 16.有一道题“若函数 $f\left(x\right)=24ax^2+4x-1$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 内恰有一个零点，求实数 a 的取值范围”，某同学给出了如下解答：由 $f\left(-1\right)f\left(1\right)=\left(24a-5\right)\left(24a+3\right)<0$，解得 $-\frac{1}{8}<a<\frac{5}{24}$。所以，实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},\frac{5}{24}\right)$。

上述解答正确吗？若不正确，请说明理由，并给出正确的解答。

【解析】不正确，比如 $f(x)$ 的图像与 x 轴相切，而切点又位于 $(-1,1)$ 时，上面的做法就明显错误。事实上，此时 $\Delta=16+96a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$，此时 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有一个零点 $x=\frac{1}{2}$，但 $(-\frac{1}{8},\frac{5}{24})$ 中不含 $-\frac{1}{6}$。

【正解】 $a=0$ 时，$f(x)=4x-1$，显然它在 $(-1,1)$ 上恰有一个零点 $\frac{1}{4}$，满足要求；

$a\neq 0$ 时，分两种情况

① $f(x)$ 有唯一一个零点，且位于 $(-1,1)$ 内，由 $\Delta=16+96a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$，此时 $f(x)$ 有唯一一个零点 $\frac{1}{2}\in(-1,1)$，满足要求；

② $f(x)$ 有两个零点，其中一个位于 $(-1,1)$，此时，由 $f(-1)f(1)<0$，解得 $a\in(-\frac{1}{8},\frac{5}{24})$；

综上，a 的取值范围为：$(-\frac{1}{8},\frac{5}{24})\cup\{-\frac{1}{6}\}$。

例 17.已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$，$g(x)=x^2-\frac{11}{3}x+\frac{3}{2}$，

（1）$a\in R$，若关于 x 的方程 $\log_4[\frac{3}{2}f(x-1)-\frac{3}{4}]=\log_2(\sqrt{a-x})-\log_2(\sqrt{4-x})$ 有两个不同解，求实数 a 的范围；

（2）若关于 x 的方程：$x[f(x)+g(x)]-mx=0$ 有三个不同解 $0,x_1,x_2(x_1<x_2)$，且对任意的 $x\in[x_1,x_2]$，$x[f(x)+g(x)]<m(x-1)$ 恒成立，求实数 m 的范围.

【解析】（1）原方程化简为 $\log_4(x-1)=\log_2\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{4-x}}$，且 $\begin{cases}x<a\\1<x<4\end{cases}$，即 $(x-1)=(\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{4-x}})^2$，

即 $x-1=\frac{a-x}{4-x}$，且方程要有解，则 $a>1$，

① 若$1<a\le 4$，则此时$1<x<a\le 4$，方程为$x^2-6x+a+4=0$，$\Delta=20-4a>0$，方程的解为$x=3\pm\sqrt{5-a}$，仅有$x=3-\sqrt{5-a}$符合$1<x<a\le 4$；不合题意。

② 若 $a>4$，此时 $1<x<4$，$\Delta=20-4a>0$，即 $4<a<5$，方程的解为 $x=3\pm\sqrt{5-a}\in(1,4)$均符合题意，

综上$4<a<5$；

(2) $x[f(x)+g(x)]-mx=0$等价于$x(x^2-3x+2-m)=0$，则x_1,x_2为$x^2-3x+2-m=0$的两个不同根，所以$\Delta=9-4(2-m)>0$，解得$m>-\frac{1}{4}$，

令$h(x)=x(x^2-3x+2-m)$，则$x\in[x_1,x_2]$

$x[f(x)+g(x)]<m(x-1)\Leftrightarrow -m>h(x)$恒成立，

取$x=x_1$，得$-m>h(x_1)=0$，故$m<0$，

综上，得初步范围：$-\frac{1}{4}<m<0,$

下证$m\in(-\frac{1}{4},0)$时，原不等式恒成立。

由韦达定理$x_1x_2=2-m>0, x_1+x_2=3>0$，所以$0<x_1<x_2$，则对任意$x\in[x_1,x_2]$，

$h(x)=x(x-x_1)(x-x_2)\le 0$，且$h_{\max}(x)=h(x_1)=0$，

又，$-m>h(x)$恒成立$\Leftrightarrow -m>h(x)_{\max}$，故$-m>0$，得$m<0$

综上，$-\frac{1}{4}<m<0$。