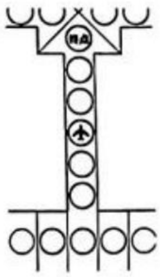
好题欣赏——2025 年第 3 期

1.　飞行棋是一种家喻户晓的竞技游戏，玩家根据骰子(骰子为均匀的正六面体)正面朝上的点数确定飞机往前走的步数，刚好走到终点处算“到达”，如果玩家投掷的骰子点数超出到达终点所需的步数，则飞机须往回走超出点数对应的步数.在一次游戏中，飞机距终点只剩 3 步(如图所示)，设该玩家到达终点时投掷骰子的次数为 X ，则 $E\left(X\right)=$（　　）



A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

【解析】由题意得，

$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{6},P\left(X=2\right)=\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6},\cdots,P\left(X=n\right)=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6},$$

故 $E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot n=6$，选 D。

【注意公式】如果 $|x|<1$，则 $f\left(x\right)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+\cdots=\frac{1}{1-x}$，从而

$$f'\left(x\right)=1+2x+3x^{2}+4x^{3}+5x^{4}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^{2}},$$

因此 $E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot n=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot n=\frac{1}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^{2}}=6$

另解：由题意知 $X\sim G\left(p\right)$（几何分布），其中 $p=\frac{1}{6}$，故 $E\left(X\right)=\frac{1}{p}=6$

注意公式：如果 $X\sim G\left(p\right)$，$E\left(X\right)=\frac{1}{p}$，$D\left(X\right)=\frac{1-p}{p^{2}}$

2.　**（湖北省部分市州 2025 年元月高三期末联考数学第 8 题）**已知 $a\neq0$，$\left(ax^{2}+bx+c\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)\leq0$ 对任意 $x\in\left[0,8\right]$ 恒成立，则 $2b+c-\frac{1}{a}$ 的最小值为(　　　)

A. 4　　　　B. 6　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. $2\sqrt{2}$

【解析】令 $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$，$g\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)$,

显然，$x\in[0,1]$时，$g(x)\ge 0$，则$f(x)\le 0$恒成立；

$x\in[1,7]$时，$g(x)\le 0$，则$f(x)\ge 0$恒成立；

$x\in[7,8]$时，$g(x)\ge 0$，则$f(x)\le 0$恒成立；

易知$f(1)=g(1)=0$，$f(7)=g(7)=0$，

综上，$x\in[1,7]$时$f(x)\ge 0$，$x\in[7,8]$时$f(x)\le 0$

且$x=1$和$x=7$为方程$ax^2+bx+c=0$之二根，故$\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=8\\ \dfrac{c}{a}=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-8a\\ c=7a\end{cases}$且$a<0$，

故$2b+c-\dfrac{1}{a}=-16a+7a-\dfrac{1}{a}=-9a-\dfrac{1}{a}\ge 2\sqrt{(-9a)\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=6$，当且仅当$a=-\dfrac{1}{3}$时取等号；故

$2b+c-\dfrac{1}{a}$的最小值为 6，选 B。

3. **（2025 年 1 月八省联考第 8 题）**已知函数$f(x)=x|x-a|-2a^2$，若当$x>2$时，

$f(x)>0$，则a的取值范围是(　　　)

A. $(-\infty,1]$　　　B. $[-2,1]$　　　C. $[-1,2]$　　　D. $[-1,+\infty)$

【巧解】特殊值法。因$f(2)=2|2-a|-2a^2$，由于$|a|$充分大时，$2|2-a|-2a^2<0$，排除 AD。

若$a=2$，则$f(x)=x^2-2x-8$，则$f(2)=-8<0$，排除 C；

最终，选 B。

【法二】极限的思想（仍为特殊值法）。由题意知：

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)\ge 0\Rightarrow 2|2-a|-2a^2\ge 0\ge|2-a|\ge a^2$，解得$-2\le a\le 1$，此乃$x>2$时，$f(x)>0$的必要条件。结合选择支，只能选 B。

4. 若函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$恰有三个零点，两个极值点，则$\omega$的取值范围是

（　　）

A. $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{17}{6}\right]$　　　B. $\left[\dfrac{11}{6},\dfrac{7}{3}\right)$　　　C. $\left[\dfrac{11}{6},\dfrac{17}{6}\right)$　　　D. $\left[\dfrac{7}{3},\dfrac{20}{6}\right)$

【解析】令$t=\omega x-\dfrac{\pi}{3}$，则$t\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$，问题等价于函数$y=\sin t$在$\left(-\dfrac{\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$上恰有三个零点和两个极值点；

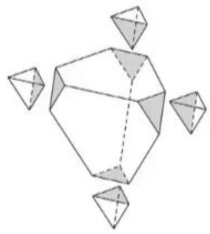
由 $y=\sin t$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上恰有三个零点知：$2\pi<\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\le 3\pi\Rightarrow\dfrac{7}{3}<\omega\le\dfrac{10}{3}$ ①

因 $y'=\cos t$，由 $y'=\cos t$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 恰有两个零点知：

$\dfrac{3\pi}{2}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{11}{6}<\omega\le\dfrac{17}{6}$ ②

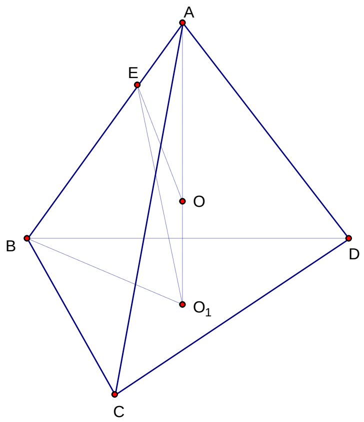
结合①②得 $\dfrac{7}{3}<\omega\le\dfrac{17}{6}$，选 A。

5. 已知棱长为 8 的正四面体，沿着四个顶点的方向各切下一个棱长为 2 的小正四面体（如图），剩余中间部分的八面体可以装入一个球形容器内（容器壁厚度忽略不计）。则该球形容器表面积的最小值为（　　）



A. 12π　　B. 24π　　C. 36π　　D. 48π

【解析】设正四面体 $A-BCD$ 的中心为 O，棱长为 a，参考下图



则 $OA=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a=2\sqrt{6},\cos\angle BAO=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，由余弦定理得

$r^2=|OE|^2=|EA|^2+|OA|^2-2|EA|\cdot|OA|\cos\angle EAO=2^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2-2\cdot2\cdot\left(2\sqrt{6}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=12$，故

球形容器表面积的最小值为 $4\pi r^2=48\pi$，选 D。

6. （2024 届株洲市一模　多选）设 $\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}\left(n\in N^*\right)$ 的整数部分为 a_n，小数部分为 b_n，则下列说法中正确的是（　　）

A．数列$\{a_n+b_n\}$是等比数列　　B．数列$\{a_n\}$是递增数列

C．$b_n(a_n+b_n)=1$　　D．$(1-b_n)(a_n+b_n)=1$

【解析】因为$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}=1$，显然$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}>1,0<\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}<1$，

又因为

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}=2\left[C_{2n+1}^{1}\left(\sqrt{5}\right)^{2n}\cdot 2+C_{2n+1}^{3}\left(\sqrt{5}\right)^{2n-2}\cdot 2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}\cdot 2^{2n+1}\right]\in Z$，

所以，$b_n=\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1},a_n=\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}$，

对于 A，$a_n+b_n=\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}$，显然数列$\{a_n+b_n\}$是等比数列，故 A 正确；

对于 B，因为$\sqrt{5}+2>1,0<\sqrt{5}-2<1$，所以$\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}$递增，$\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}$递减，

故$a_n=\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}$单调递增，故 B 正确；

对于 C，$b_n(a_n+b_n)=\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}=1$，故 C 正确；

对于 D，$(1-b_n)(a_n+b_n)=\left[1-\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}\right]\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{2n+1}-1\neq 1$，故 D 错；

综上，选 ABC。

7.　（湖南省永州市 2024 届高三第二次模拟考试　多选）下列结论正确的是（　　）

A，已知样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$的方差为 2，则数据$2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$的方差为 4

B. 已知概率$P(B|A)=\dfrac{1}{3},P(AB)=\dfrac{1}{4}$，则$P(A)=\dfrac{3}{4}$

C. 样本数据 6, 8, 8, 8, 7, 9, 10, 8 的第 75 百分位数为 8.5

D、已知$\left(1-\sqrt{2}\right)^5=a+b\sqrt{2}$（$a,b$为有理数），则$a=41$

【解析】对于 A，目标数据的方差应为$2^2\times 2=8$，故 A 错；

对于 B，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(A)=3P(AB)=3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，B 对；

对于 C，$75\%\times 8=6$，故题目中 8 个数的第 75 百分位数为$\dfrac{1}{2}(8+9)=8.5$（由小到大第 6，7 两个数的平均数），C 对；

对于 D，$\left(1-\sqrt{2}\right)^5=1^5+C_5^1 1^4\left(-\sqrt{2}\right)+C_5^2 1^3\left(-\sqrt{2}\right)^2+C_5^3 1^2\left(-\sqrt{2}\right)^3+C_5^4 1^1\left(-\sqrt{2}\right)^4+\left(-\sqrt{2}\right)^5$

$=a+b\sqrt{2}$，显然，$a=1+C_5^2\left(-\sqrt{2}\right)^2+C_5^4\left(-\sqrt{2}\right)^4=41$，D 对。

综上，选 BCD。

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}$（　　）

A. 在$[0,\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},\pi]$上递增,在$[\pi,\frac{3\pi}{2}),(\frac{3\pi}{2},2\pi]$上递减

B. 在$[0,\frac{\pi}{2}),(\pi,\frac{3\pi}{2}]$上递增,在$[\frac{\pi}{2},\pi),(\frac{3\pi}{2},2\pi]$上递减

C. 在$(\frac{\pi}{2},\pi],(\frac{3\pi}{2},2\pi]$上递增,在$[0,\frac{\pi}{2}),(\pi,\frac{3\pi}{2}]$上递减

D. 在$[0,\frac{3\pi}{2}),(\frac{3\pi}{2},\pi]$上递增,在$[0,\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},2\pi]$上递减

【解析】 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}=\dfrac{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}}{\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{\cos x}$

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 或 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时 $\sin x\ge 0$　$f(x)=\sqrt{2}\tan x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},\pi]$上为增函数

当 $x\in[\pi,\frac{3\pi}{2})$ 或 $x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 时 $\sin x\le 0$　$f(x)=-\sqrt{2}\tan x$ 在$[\pi,\frac{3\pi}{2}),(\frac{3\pi}{2},2\pi]$上为减函数.

综上，选 A。

9. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1, g(x)=mx$，若对于任一实数 x， $f(x)$与 $g(x)$的值至少有一个为正数，则实数 m 的取值范围是

A.（0，2）　　B.（0，8）　　C.（2，8）　　D.（－∞，0）

【解析】当 $m\le 0$ 时，显然不成立

当 $m>0$ 时，因 $f(0)=1>0$ 当 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2}\ge 0$ 即 $0<m\le 4$ 时结论显然成立；

当 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2}<0$ 时只要 $\Delta=4(4-m)^2-8m=4(m-8)(m-2)<0$ 即可，即 $4<m<8$

综上，$0<m<8$，选 B。

10. 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,2)$ 的距离与 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为（　　　）

$(A)\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　$(B)3$　　$(C)\sqrt{5}$　　$(D)\dfrac{9}{2}$

【解析】依题设 P 在抛物线准线的投影为 P'，抛物线的焦点为 F，则 $F(\frac{1}{2},0)$，依抛物线的定义知 P 到该抛物线准线的距离为 $|PP'|=|PF|$，则点 P 到点 $A(0,2)$ 的距离与 P 到该抛物线准线的距

离之和 $d=|PF|+|PA|\geq|AF|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AA_1,CC_1 的中点，则在空间中与三条直线 A_1D_1,EF,CD 都相交的直线

(A) 不存在　　(B) 有且只有两条　(C) 有且只有三条　　(D) 有无数条

【解析】在 EF 上任意取一点 M，直线 A_1D_1 与 M 确定一个平面，这个平面与 CD 有且仅有 1 个交点 N， 当 M 取不同的位置就确定不同的平面，从而与 CD 有不同的交点，N 而直线 MN 与这 3 条异面直线都有交点的。选 D

12. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数,且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数,则满足 $f(x)=f(\frac{x+3}{x+4})$ 的所有 x 之和为(　　)

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

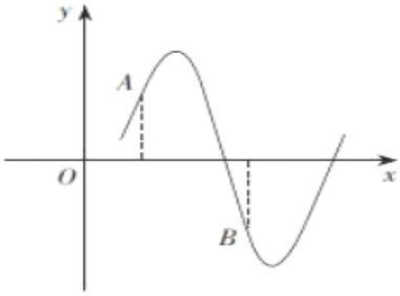
【解析】依题当满足 $f(x)=f(\frac{x+3}{x+4})$ 时，即 $x=\frac{x+3}{x+4}$ 时，得 $x^2+3x-3=0$，此时 $x_1+x_2=-3.$ 又 $f(x)$ 是连续的偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，$\therefore$ 另一种情形是 $f(-x)=f(\frac{x+3}{x+4})$，即 $-x=\frac{x+3}{x+4}$，得 $x^2+5x+3=0$，$\therefore x_3+x_4=-5.$ $\therefore$ 满足 $f(x)=f(\frac{x+3}{x+4})$ 的所有 x 之和为 $-3+(-5)=-8.$

13. 设曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a=$（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

【解析】由 $y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},y'=-\frac{2}{(x-1)^2},y'|_{x=3}=-\frac{1}{2},-a=2,a=-2$

14. （重庆八中 2025 届高三下 2 月第二次周考）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图所示，$f(x)$ 的图像经过 $A\left(\frac{\pi}{4},1\right),B\left(\frac{5\pi}{4},-1\right)$ 两点，将 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图像，则函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值为（　　）



A． $-\sqrt{2}$　　B． $\sqrt{2}$　　C． $-\sqrt{3}$　　D． -1

【解析】从图像看（注意补图和对称性）$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi$，故$T=2\pi$，故$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，故$\omega=1$，

故 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$，由于 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，考虑到$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=-\frac{\pi}{12}$，

从而 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，

故 $g(x)=2\sin\left(\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{12}\right)=2\cos x$，

故 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值为 $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}$，选 A。

15.　**（重庆八中 2025 届高三下 2 月第二次周考）**.已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在区间$[-1,0]$上单调递增，且满足 $f(4-x)=f(x)$， $f(2-x)=-f(x)$，则（　　）

A． $\sum_{k=1}^{10}f(k)=0$　　B． $f(0.9)+f(1.2)>0$

C． $f(2.5)<f(\log_2 80)$　　D． $f(\sin 1)<f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

【解析】由 $f(4-x)=f(x)$ 知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，由 $f(2-x)=-f(x)$ 知 $f(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 中心对称，进而知 $f(x)$ 为周期函数，周期 $T=4|2-1|=4$。

易知： $f(1)=0$， $f(0)+f(2)=0$；由于 $f(0)=f(4)$，故 $f(4)+f(2)=0$

由于$\begin{cases}f(-1)+f(3)=0\\f(-1)=f(3)\end{cases}\Rightarrow f(-1)=f(3)=0$，

综上，得 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，

故 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=f(1)+f(2)=f(2)=-f(0)$，由于 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，且

$f(-1)=0$，故 $f(0)\neq 0$，故 A 错；

由于 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，且 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，故 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，考虑到 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，故 $f(0.9)+f(1.2)=f(1.2)-f(1.1)<0$，故 B 错；

$f(\log_2 80)=f(\log_2 16+\log_2 5)=f(4+\log_2 5)=f(\log_2 5)$，

由于 $\log_2 5\in(2,3)$，且 $\log_2 5<2.5$（事实上，此等价于 $2\log_2 5<5\Leftrightarrow \log_2 25<\log_2 32$），考虑到 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，故 $f(\log_2 5)<f(2.5)$，故 C 错；

综上，选 D。

事实上，$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=f(-\ln 2)=-f(2+\ln 2)=-f(2-\ln 2)=f(\ln 2)$

故，只需判断 $f(\sin 1)<f(\ln 2)$ 是否正确，

由于 $\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.7$，而 $\ln 2<0.7$，故 $\sin 1>\ln 2$，故 $f(\sin 1)<f(\ln 2)$，故 D 正确。

16. （**重庆八中 2025 届高三下 2 月第二次周考 多选**）.若函数 $f(x)=2\sin^2 x\cdot\log_2\sin x+2\cos^2 x\cdot\log_2\cos x$，则（　　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为 π

B．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称；

C．$f(x)$ 的最小值为 -1

D．$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，$k\in Z$

【解析】由题意知 $\sin x>0,\cos x>0$，故 x 在第一象限，此时 $x+\pi$ 不在定义域内，$f(x+\pi)=f(x)$ 不成立，故 A 错；

由于 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2 x\cdot\log_2\cos x+2\sin^2 x\cdot\log_2\sin x=f(x)$，故 B 正确；

易知，$f(x)=\sin^2 x\cdot\log_2\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\log_2\cos^2 x$，令 $t=\sin^2 x$，则

$f(x)=g(t)=t\cdot\log_2 t+(1-t)\cdot\log_2(1-t)$，$t\in(0,1)$，

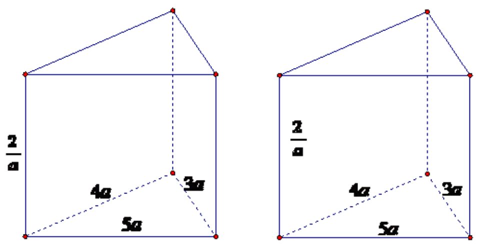
显然 $g'(t)=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln t-\ln(1-t)\right]$，显然 $g'(t)$ 单调递增，由于 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，易知 $\frac{1}{2}$ 为 $g(t)$

的极小点，故 $g(t)$ 的最小值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\log_2\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)=-1$，C 对；

同上，易知 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，由 $\sin^2 x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，且结合函数 $f(x)$ 的定义域知：$x\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f(x)$ 单调递减，故 D 对；

综上，选 BCD。

17. **（上海高考）**有两个相同的直三棱柱，高为 $\frac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a,4a,5a(a>0)$。用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，表面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是____。



【解析】两个相同的直三棱柱并排放拼成一个三棱柱或四棱柱，有三种情况

四棱柱有一种，就是边长为 $5a$ 的边重合在一起，表面积为 $24a^2+28$

三棱柱有两种，边长为 $4a$ 的边重合在一起，表面积为 $24a^2+32$

边长为 $3a$ 的边重合在一起，表面积为 $24a^2+36$

两个相同的直三棱柱竖直放在一起，有一种情况，表面积为 $12a^2+48$

最小的是一个四棱柱，这说明 $24a^2+28<12a^2+48\Rightarrow 12a^2<20\Rightarrow 0<a<\frac{\sqrt{15}}{3}$

18. 用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵。对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+....+(-1)^n na_{in}$，$i=1,2,3,\cdots,n!$。例如：用 1，2，3 可得数阵如图，由于此数阵中每一列各数之和都是 12，所以，$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$，那么，在用 1，2，3，4，5 形成的数阵中，$b_1+b_2+\cdots+b_{120}$=________。

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

【解析】在用 1，2，3，4，5 形成的数阵中，每一列各数之和都是 360，

$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=-360+2\times360-3\times360+4\times360-5\times360=-1080$

19. 设 $n\in N^*$，则 $C_n^1+C_n^2 6+C_n^3 6^2+\cdots+C_n^n 6^{n-1}=$__________。

【解析】由 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ 得

故 $(1+6)^n=C_n^0+6C_n^1+C_n^2 6^2+\cdots+C_n^n 6^n=7^n$，

故 $C_n^1+C_n^2 6+C_n^3 6^2+\cdots+C_n^n 6^{n-1}=\frac{1}{6}\left(6C_n^1+C_n^2 6^2+C_n^3 6^3+\cdots+C_n^n 6^n\right)=\frac{1}{6}\left(7^n-1\right)$

20. 已知 α、β 均为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，则 $\tan\alpha=$_____.

【巧解】极限思想下，取 $\beta=0,\alpha=\frac{\pi}{4}$，得 $\tan\alpha=1$。

【法二】$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow 1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha-\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1+\tan\beta}{1+\tan\beta}=1$.

21. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$。如果在一种算法中，计算 $x_0^k(k=2,3,4,\cdots,n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法，计算 $P_3\left(x_0\right)$ 的值共需要 9 次运算（6 次乘法，3 次加法），那么计算 $P_{10}\left(x_0\right)$ 的值共需要_____________ 次运算。下面给出一种减少运算次数的算法：$P_0\left(x\right)=a_0,P_{k+1}\left(x\right)=xP_k\left(x\right)+a_{k+1}\left(k=0,1,2,\cdots,n-1\right)$，利用该算法，计算 $P_3\left(x_0\right)$ 的值共需要 6 次运算，计算 $P_{10}\left(x_0\right)$ 的值共需要________次运算.

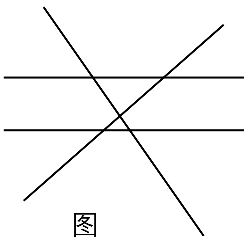
【解析】由题意知道 ${x_0}^k$ 的值需要 $k-1$ 次运算, 即进行 $k-1$ 次 x_0 的乘法运算可得到 ${x_0}^k$ 的结果，对于 $P_3(x_0)=a_0{x_0}^3+a_1{x_0}^2+a_2x_0+a_3$，这里 $a_0{x_0}^3=a_0\times x_0\times x_0\times x_0$ 进行了 3 次运算, $a_1{x_0}^2=a_1\times x_0\times x_0$ 进行了 2 次运算, a_2x_0 进行 1 次运算, 最后 $a_0{x_0}^3,a_1{x_0}^2,a_2x_0,a_3$ 之间的加法运算进行了 3 次，这样 $P_3(x_0)$ 总共进行了 $3+2+1+3=9$ 次运算，对于 $P_n(x_0)$ $=a_0{x_0}^n+a_1{x_0}^{n-1}+\ldots+a_n$ 总共进行了 $n+n-1+n-2+\ldots+1=\frac{(n+1)n}{2}$ 次乘法运算及 n 次加法运算，故总共进行了 $\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(n+3)}{2}$ 次

由改进算法可知：

$P_n(x_0)=x_0P_{n-1}(x_0)+a_n$, $P_{n-1}(x_0)=x_0P_{n-2}(x_0)+a_{n-1}$ ... $P_1(x_0)=P_0(x_0)+a_1$, $P_0(x_0)=a_0$

运算次数从后往前算和为：$2+2+\ldots+2=2n$ 次

22. 设平面内有 n 条直线 $(n\geq 3)$，其中有且仅有两条直线互相平行，任意三条直线不过同一点．若用 $f(n)$ 表示这 n 条直线交点的个数，则 $f(4)=$___________；当 $n>4$ 时，$f(n)=$__________.（用 n 表示）



图

【解析】由图可得 $f(4)=5$，

由 $f(3)=2$，$f(4)=5$，$f(5)=9$，

$f(6)=14$，可推得

$\because n$ 每增加 1，则交点增加 $(n-1)$ 个，

$\therefore f(n)=2+3+4+\cdots+(n-1)=\dfrac{(2+n-1)(n-2)}{2}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$

23. （1）某地区足球比赛共有 12 个队参加，每队都要与其他各队在主客场分别比赛一次，则共有（　　）场比赛

（2）用 0，1，2，…，9 这 10 个数字可以排成（　　　）个无重复数字的四位偶数。

【解析】(1）如果将每一场比赛看成主场队在前、客场队在后的一个排列，则问题等价于从 12 个不同对象中取 2 个对象的排列数，故共有 $A_{12}^2=132$ 场比赛。

（2）分两类，第一类的末位为 0，有 A_9^3 个；

第二类的末位为 2，4，6，8 这 4 个数中的某一个，这类数可分三步完成，第一步确定末位，有 A_4^1 种方法，第二步确定首位，因其不能为 0，故有 A_8^1 种方法，第三步确定中间两位，有 A_8^2 种方法，由分步计数乘法原理，第二类数有 $A_4^1A_8^1A_8^2$ 个。

综上，满足要求的四位偶数有

$A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2=9\times8\times7+4\times8\times8\times7=2296$ 个

24. （1） 6 本不同的书平均分成 3 堆, 每堆 2 本，共有______不同的分法

（2）7 人站成一排 , 其中甲乙相邻且丙丁相邻, 共有多少种不同的排法.

【解析】(1)：分三步取书得 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 种方法, 但这里出现重复计数的现象, 3 堆书并无顺序，故共有 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=30$ 种不同的分法。

（2）将甲乙捆绑看成一个对象，丙丁捆绑后也看成一个对象，5 个对象的排列数为 A_5^5；另外，甲乙以及丙丁自身会可交换顺序，分别产生 A_2^2 个排列。由分步计数原理可得共有 $A_5^5A_2^2A_2^2=480$ 种不同的排法。

25. 对于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15$，则该方程有______组正整数解，有____组非负整数解。

【解析】在桌上从左到右排 15 个苹果，相邻两个苹果之间有 1 个空隙，共 14 个空隙，现从这 14 个空隙中任取 9 个空隙，分别在其中插一支筷子，从左到右，第 1 支筷子左边的苹果数赋给 x_1，第 1、2 两支筷子之间的苹果数赋给 x_2，…，第 8、9 两支筷子间的苹果数赋给 x_9，第 9 支筷子右边的苹果数赋给 x_{10}，因此，题中所给方程的正整数解的个数为 C_{14}^9

如果 x_i 为非负整数，则

$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15\Rightarrow(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_{10}+1)=25$，

令 $y_i=x_i+1$，则 y_i 为正整数，考虑到 y_i 与 x_i 是一一对应的，而 $y_1+y_2+\cdots+y_{10}=25$ 有 C_{24}^{9} 组正整数解，故 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=15$ 有 C_{24}^{9} 组非负整数解。

26. $f(x,y)=(x+\cos y)^2+(2x+3+\sin y)^2$ 的值域为_____。

【解析】令 $P(x,2x+3),Q(-\cos y,-\sin y)$，则 $f(x,y)=|PQ|^2$，显然 P 在直线 $l:y=2x+3$ 上，Q 在单位圆 $O:x^2+y^2=1$ 上。

数形结合，易知圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{3}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，故 $|PQ|\in\left[\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1,+\infty\right)$，故

$|PQ|^2\in\left[\dfrac{14-6\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$

27. 已知 $a+b+ab=89$，则 $a+b=$_____。

【解析】观察题目所给等式左边的特点，作如下操作，

$a+b+ab=89\Rightarrow a+b+ab+1=90\Rightarrow(a+1)(b+1)=90=90\times1=45\times2$

$=15\times6=5\times18=3\times30$，

故，可令 $\begin{cases}a+1=45\\b+1=2\end{cases}$，$\begin{cases}a+1=30\\b+1=3\end{cases}$，$\begin{cases}a+1=18\\b+1=5\end{cases}$，$\begin{cases}a+1=15\\b+1=6\end{cases}$，$\begin{cases}a+1=10\\b+1=9\end{cases}$ 考虑到 a,b 的对等性，

故 $a+b$ 的值为 45，31，21，19，17

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

（Ⅰ）证明 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

证明（Ⅰ）：由 $a_{n+1}=3a_n+1$ 得 $a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3(a_n+\dfrac{1}{2})$。

又 $a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，所以 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列。

$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{2}$，因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

（Ⅱ）：由（Ⅰ）知 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3^n-1}$

因为当 $n\geq1$ 时，$3^n-1\geq2\times3^{n-1}$，所以 $\dfrac{1}{3^n-1}\leq\dfrac{1}{2\times3^{n-1}}$。

于是 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})<\frac{3}{2}$ 。

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 n 项的和为 S_n，且满足 $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\ge 2)$ 。

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列；

（2）证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$S_1+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\ldots+\frac{1}{n}S_n<\frac{3}{2}$.

证明：（1）由题意知：当 $n\ge 2$ 时，$S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$，故 $S_{n-1}-S_n=2S_nS_{n-1}$，

易知：$S_n\ne 0$，故 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，又 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$

所以，$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

（2）：由（1）可知，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+(n-1)\times 2=2n-1$，$\therefore S_n=\frac{1}{2n-1}$，$\therefore$ 当 $n\ge 2$ 时，

$$\frac{1}{n}S_n=\frac{1}{n(2n-1)}<\frac{1}{n(2n-2)}=\frac{1}{2n(n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

从而，$S_1+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\cdots+\frac{1}{n}S_n<1+\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{3}{2}$

30. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=\frac{4}{3}(a_n-1),n\in N^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=\log_2 a_n$，记数列 $\{\frac{1}{(b_n-1)(b_n+1)}\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{1}{2}$.

(1) **【解析】**当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=\frac{4}{3}(a_1-1)$，解得 $a_1=4$，

当 $n\ge 2$ 时，有 $S_{n-1}=\frac{4}{3}(a_{n-1}-1)$，则

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{4}{3}(a_n-1)-\frac{4}{3}(a_{n-1}-1)$，即 $a_n=4a_{n-1}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $q=4$ 为公比，以 $a_1=4$ 为首项的等比数列

$\therefore a_n = 4\times 4^{n-1} = 4^n (n\in N^*)$.

（2）**证明：**由（1）有 $b_n = \log_2 a_n = \log_2 4^n = 2n$ ，故

$$\frac{1}{(b_n+1)(b_n-1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n+1})$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

易知数列 $\{T_n\}$ 为递增数列，$\therefore T_1 \le T_n < \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{3} \le T_n < \frac{1}{2}$.