第一章　集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念及运算

1.1.1 集合的概念

1.　集合

有共同属性的一组对象的全体称为集合。集合一般用大写字母表示，比如 A、B 等；集合中的对象称为集合的元素，元素一般用小写字母表示，比如 a,b 等。

如果 x 属于集合 A，表示成 $x\in A$，读做“x 属于 A”，否则，用 $x\notin A$ 表示，读作“x 不属于 A”；不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示。

2.　集合的三性

确定性、唯一性、无序性。从集合的描述看，集合具有确定性，也就是对任何一个对象（元素），它是否属于某个集合，是可以判断的，比如“高一三班的所有高个子”就不能够成一个集合，因为什么叫高个子没有标准，无法界定。唯一性，是指集合中的元素都是不相同的。而无序性，则是指集合中的元素没有顺序，比如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{1,3,2\}$ 是同一个集合。

3.　集合的表示

列举法、描述法和图示法。

列举法

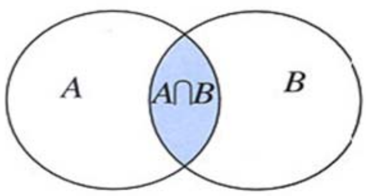
就是将集合中的元素一个一个的列出来，比如“10 以内的非负偶数”可以表示成 $\{0,2,4,6,8,10\}$。

描述法

先写一对大括号，再在其中写一条竖线，竖线左边表示元素，右边表示元素的属性（条件）。比如“一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根组成的集合”可以表示成 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$

图示法

用图形的方式表示。比如集合 A、B 的公共部分可以用下图中的阴影部分表示。



$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且}x\in B\}$

4.　常用的几个集合符号

（1）$\mathbf{N}$（自然数集）　　（2）$\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$，正整数集）

（3）$\mathbf{Q}$（有理数集）　　（4）$\mathbf{Z}$（整数集）

（5）$\mathbf{R}$（实数集）　　　　　　　　（6）$\varnothing$（空集）。

5.　子集和真子集

如果集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，记做 $B \subseteq A$，读做“B 包含于 A”；如果集合 B 是集合 A 的子集，且 A 中至少有一个元素 $a \notin B$，则称 B 为 A 的真子集，记做 $B \subset A$（有时也表示成 $B \subsetneq A$）。

显然，任何一个集合都是它自身的子集，而空集是任何非空集合的真子集。

6.　有限集与其子集的个数问题

如果一个集合的元素为有限个，则称这个集合为有限集，否则称为无限集。对于有限集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$A$ 有

（1）2^n 个子集（包括它自己和空集）

（2）$2^n - 1$ 个真子集（不包括它自己）

（3）$2^n - 2$ 个非空真子集（它自己和空集都除去）

1.1.2 集合的运算

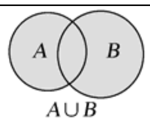
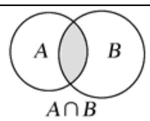
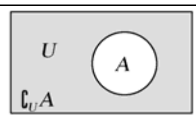
1.　集合的运算

(1)并运算：将两个或两个以上的集合的所有元素整合进一个集合，称为对这些集合进行“并”运算，最终的集合称为这些集合的“并集”。“并”运算用符号“$\cup$”表示。

(2)交运算：将两个或两个以上的集合的公共元素整合进一个集合，称为对这些集合进行“交”运算，最终的集合称为这些集合的“交集”。“交”运算用符号“$\cap$”表示。

(3) 补运算：假定集合 A 为集合 U 的子集，则称 U 中不属于 A 的元素组成的集合为集合 A 的补集，用 $C_U A$ 表示。求 $C_U A$ 的过程称为对 A 做“补”运算。

集合的基本运算（图示）

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
符号表示	$A \cup B$	$A \cap B$	全集为 U，则集合 A 的补集为 $C_U A$
图形表示			
集合表示	$\{x \mid x \in A 或 x \in B\}$	$\{x \mid x \in A 且 x \in B\}$	$\{x \mid x \in U 且 x \notin A\}$

2.　集合的运算律

（1）交换律　　$A \cap B = B \cap A$，　　$A \cup B = B \cup A$

（2）结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

（3）分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（4）0-1 律　$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\cup A=A$，$U\cap A=A$，$U\cup A=U$（$U$ 是全集）

（5）幂等律　$A\cap A=A$，$A\cup A=A$

（6）互补律　$A\cap C_U A=\varnothing$，$A\cup C_U A=U$，$C_U U=\varnothing$，$C_U\varnothing=U$

（7）反演律（德摩根公式）　$C_U(A\cap B)=C_U A\cup C_U B$；$C_U(A\cup B)=C_U A\cap C_U B$

3.　映射

令 A,B 为两个非空集合，如果存在一个对应规则 f，使得对 A 中任意一个元素 x，按照对应规则 f，在 B 中都有唯一的一个元素 y 与 x 对应，则称这个对应规则 f 为从 A 到 B 的映射。y 称做 x 在映射 f 下的象，记做 $y=f(x)$，x 称做 y 的原象。

如集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ 均为有限集，则任意一个 $A\to B$ 的映射都需要分 n 步来完成；

第一步，将 a_1 对应到 B 中去，如果没什么限制，有 m 种对应方式

第二步，将 a_2 对应到 B 中去，如果没什么限制，也有 m 种对应方式

……

第 n 步，将 a_n 对应到 B 中去，如果没什么限制，仍有 m 种对应方式

因此，如果没什么限制，$A\to B$ 可作 $m\times m\times\cdots\times m=m^n$ 个不同的映射；

4.　有限集中元素的个数（容斥原理）

（1）$card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)$

（2）$card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-card(B\cap C)$
$-card(C\cap A)+card(A\cap B\cap C)$

注意：有限集 A 中元素的个数有时也用 $|A|$ 表示，比 $cardA$ 少写几个字。

5.　集合与区间

（1）令 $a<b$，为方便，我们经常将集合 $\{x\mid a<x<b\}$、$\{x\mid a\le x<b\}$、$\{x\mid a<x\le b\}$、$\{x\mid a\le x\le b\}$ 分别记为 (a,b)、$[a,b)$、$(a,b]$、$[a,b]$，后面四者都称为区间，并依次称为开区间、左闭右开区间、左开右闭区间和闭区间。

（2）$\{x\mid x<a\}$、$\{x\mid x\le a\}$、$\{x\mid x>a\}$、$\{x\mid x\ge a\}$ 分别记为 $(-\infty,a)$、$(-\infty,a]$、$(a,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$

6.　集合的划分（剖分）

把一个集合 M 分成若干个非空的子集：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果满足

（1）$A_i \cap A_j = \varnothing (1 \le i, j \le n, i \ne j)$　　　　（2）$\bigcup\limits_{i}^{n} A_i = M$

则称这些子集的全体为集合 M 的一个划分，其中的每一个子集叫做集合 M 的一个类。

7.　有限数集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 子集的三个重要性质

（1）A 的所有非空子集的元素之和为 $2^{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

（2）A 的所有非空子集的元素之积为 $(a_1 \bullet a_2 \bullet \cdots \bullet a_n)^{2^{n-1}}$

（3）如令 A 的所有非空子集分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^n-1}$，令 A_k 中所有元素之积为 b_k，则

$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^k-1} = (1 + a_1)(1 + a_2) \bullet \cdots \bullet (1 + a_n) - 1$

1.1.3 典型例题

例1、（1）若集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的元素是 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\triangle ABC$ 一定不是（　　）

A．锐角三角形　　　B．直角三角形　　　C．　钝角三角形　　　D．等腰三角形

（2）若集合 $A = \{x \in N \mid x \le \sqrt{10}\}$，$a = 2\sqrt{2}$，则下列结论正确的是(　　)

A. $\{a\} \subseteq A$　　　B. $a \subseteq A$　　　C.　$\{a\} \in A$　　　D. $a \notin A$

【解析】(1) 由集合中元素的互异性知 a, b, c 互不相同，故△ ABC 一定不是等腰三角形。选 D.

(2) 由题意知 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，故 $a \notin A$。选 D。

【注意】元素与集合之间的关系是**属于**和**不属于**关系，集合与集合的关系是**包含**和**不包含**的关系，所以 B、C 是明显错误的。

例2、用符号“$\in$”或“$\notin$”填空

（1）$0\_N, \sqrt{5}\_N$，$\sqrt{16}\_\_N$

（2）$-\dfrac{1}{2}\_\_Q, \pi\_\_Q, e\_\_C_R Q$（$e$ 是个无理数）

（3）$\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\_\_\_\{x \mid x = a + \sqrt{6}b, a \in Q, b \in Q\}$

【解析】:（1）$0 \in N$，　$\sqrt{5} \notin N$，　$\sqrt{16} \in N$

（2）$-\dfrac{1}{2} \in Q$，$\pi \notin Q$，$e \in C_R Q$（e 是个无理数）

（3）因 $(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2 = 4 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{3}} = 6$，所以 $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$=0+\sqrt{6}\times 1$，故$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\in\left\{x\mid x=a+\sqrt{6}b,a\in Q,b\in Q\right\}$

例3、判断正误(在括号内打“√”或“×”)

⑴任何集合都有两个子集(　　)

⑵已知集合$A=\{x\mid y=x^2\},B=\{y\mid y=x^2\}$，则$A=B$（　　）

⑶若$A=\{x\mid x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4},n\in N^*\},B=\{x\mid x=\frac{n}{3}+\frac{1}{2},n\in N^*\}$，则$A\cap B=\varnothing$(　　)

⑷若$A\cap B=A\cap C$，则$B=C$(　　)

【解析】：⑴错误。空集只有一个子集，就是它本身；

⑵错误。$A=(-\infty,+\infty),B=[0,+\infty)$，故$A\neq B$；

（3）对。事实上，如果$A\cap B\neq\varnothing$，则必存在正整数n,m，使得$\frac{n}{2}+\frac{1}{4}=\frac{m}{3}+\frac{1}{2}$，即$6n-4m=3$，

上式左边为偶数，右边为奇数，不可能。

（4）显然不对。比如（4）中取$A=\varnothing$，则B,C可为任意集合。

例4、设集合$A=\{x\mid x^2+2x+a=0\}$非空，则A中所有元素之和为______。

【解析】当$\Delta=0$，即$a=1$时，$x^2+2x+a=0$有两个相等的实根$x_1=x_2=-1$，故$A=\{-1\}$，A中所有元素之和为-1；

当$\Delta>0$时，方程$x^2+2x+a=0$有不相等的两个根，此时由韦达定理知：$x_1+x_2=-2$，此时A中所有元素之和为-2。

【注意】此题很容易出错，不少同学直接用韦达定理，得A中所有元素之和为-2；忽略了方程有两个相等根的情况。

例5、（1)设全集$U=\{x\mid x\in N^*,x<6\}$,集合$A=\{1,3\},B=\{3,5\}$,则$C_U(A\cup B)$)等于(　　)

A. $\{1,4\}$　　B. $\{1,5\}$　　C. $\{2,5\}$　　D. $\{2,4\}$

（2）已知集合$A=\{0,1,2\}$，则集合$B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}$中元素的个数是(　　)

A.1　　B.3　　C.5　　D.9

【解析】(1) 由题意得$A\cup B=\{1,3,5\}$；又$U=\{1,2,3,4,5\}$，$\therefore C_U(A\cup B)=\{2,4\}$。选 D。

(2) 当$x=0$时，$x-y=0,-1,-2$；当$x=1$时，$x-y=1,0,-1$；当$x=2$时，$x-y=2,1,0$，根据集合中元素的互异性可知B的元素为$-2,-1,0,1,2$，共 5 个。

例6、已知集合$A=\left\{x\middle|x=28n+20m,n,m\in Z\right\},B=\left\{x\middle|x=12n+18m,n,m\in Z\right\}$，则$A\cap B$中最小的正整数为______。

【解析】$28n+20m=4(7n+5m)$，$12n+18m=6(2n+3m)$，由于 7 与 5 互素，2 与 3 互素，故由初等数论的知识知：存在$n_1,m_1,n_2,m_2\in Z$，使得$7n_1+5m_1=1$及$2n_2+3m_2=1$。从而，A中元素均为 4 的倍数，B中元素均为 6 的倍数，因此，$A\cap B$中最小的正整数为 12。

【注意】缺乏初等数论的同学也可以这样思考：

因为$7\times3+5\times(-4)=1$，故$\{x|x=7n+5m,n,m\in Z\}=Z$，从而

$A=\{x|x=28n+20m,n,m\in Z\}=\{x|x=4(7n+5m),n,m\in Z\}=\{x|x=4k,k\in Z\}$，

同理，$5\times2+3\times(-3)=1$，故$B=\{x|x=6p,p\in Z\}$。

例7、已知集合$A=\{a,a+b,a+2b\},B=\{a,ac,ac^2\}$，若$A=B$，则实数$c=$____。

【解析】$A=B\Rightarrow\{a+b,a+2b\}=\{ac,ac^2\}$，故$\begin{cases}a+b=ac\\a+2b=ac^2\end{cases}$或$\begin{cases}a+b=ac^2\\a+2b=ac\end{cases}$；

如$\begin{cases}a+b=ac\\a+2b=ac^2\end{cases}$，则$b=ac^2-ac$，进而得$a+2(ac^2-ac)=ac^2\Rightarrow ac^2-2ac+a=0$，

易知$a\neq0$，故$c^2-2c+1=0$，得$c=1$，舍去；由$\begin{cases}a+b=ac^2\\a+2b=ac\end{cases}$解得$c=-\frac{1}{2}$；

综上，$c=-\frac{1}{2}$。

例8、1872 年德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称“戴德金分割”），并把实数理论建立在严格的科学基础上，从而结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了数学史上的第一次大危机。将有理数集Q划分为两个非空的子集M和N，且满足$M\cup N=Q,M\cap N=\varnothing$，$M$中的每一个元素都小于$N$中的每一个元素，则称$(M,N)$为戴德金分割。试判断下列选项中，可能成立的是（　　）

A．$M=\{x\in Q|x<0\},N=\{x\in Q|x>0\}$满足戴德金分割

B．M没有最大元素，N有一个最小元素

C．M有一个最大元素，N有一个最小元素

D．M没有最大元素，N也没有最小元素

【解析】对于 A，$M\cup N\neq Q$，故 A 错。

对于 B，取$M=\{x|x<0,x\in Q\},N=\{x|x\geq0,x\in Q\}$即可，B 对；

对于 C，设a为M的最大元，b为N的最小元，由题意知$a<b$，与$M\cup N=Q$矛盾，C 错；

对于 D，取$M=\{x|x<\sqrt{2},x\in Q\},N=\{x|x>\sqrt{2},x\in Q\}$，显然满足要求，D 对；

综上，选 BD。

例9、（全国卷）(1) 设$a,b\in R$，集合$\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$，则$b-a=$（　　　）

A．1　　　　B．-1　　　　C．2　　　　D．-2

(2)(全国卷)对于数集$A=\left\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\right\},B=\left\{a+b,1,a-b+5\right\}$。若$A=B$，则实数$a=$_____，$b=$_

【解析】(1) 设$a,b\in R$，集合$\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$，

$\because$ $a\neq 0$，$\therefore$ $a+b=0,a=-b$，$\therefore$ $\frac{b}{a}=-1$，$\therefore$ $a=-1,b=1$，则$b-a=2$，选 C。

(2) 因$A=B$，所以$a+2+(a+1)^2+a^2+3a+3=a+b+1+a-b+5$，即$2a^2+4a=0$，故$a=0$或$a=-2$；

如$a=0$，则$A=\left\{1,2,3\right\}$，此时$B=\left\{1,b,5-b\right\}$，由$A=B$得$b=2$或$b=3$

如$a=-2$，则$(a+1)^2=a^2+3a+3=1$，不符合集合中元素互异性要求，舍去。

综上，$a=0$，$b=2$或$b=3$。

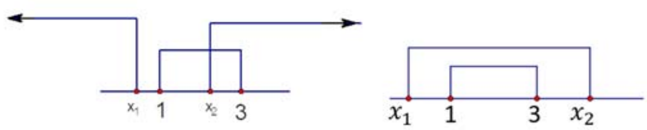
例10、（全国 II 卷）设$a\in R$，函数$f(x)=ax^2-2x-2a$，若$f(x)>0$的解集为A，$B=\left\{x\,|\,1<x<3\right\},A\cap B\neq\varnothing$，则实数$a$的取值范围为（　　　）

【解析】若$a=0$，则由$f\left(x\right)>0\Rightarrow -2x>0\Rightarrow x<0$，此时，$A\cap B=\varnothing$，与题设矛盾，因此$a\neq 0$。

令 $f\left(x\right)=0$，解得其两根为$x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，由韦达定理知$x_1<0,\ x_2>0$

(i) 当$a>0$时，$A=(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$，

因$x_1<0$，故$A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow x_2<3$，解$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$得$a>\frac{6}{7}$



(ii) 当$a<0$时，$A=(x_1,x_2)$，

因$x_1<1$，故$A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow x_2>1$，解$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$得$a<-2$

综上，使$A\cap B\neq\varnothing$成立的a的取值范围为$(-\infty,-2)\cup(\frac{6}{7},+\infty)$

例11、某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱兵乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为多少?

【解析】我们用A表示喜欢篮球运动的人的集合，B表示喜欢乒乓球运动的人的集合，C表示两者都不喜欢的人的集合，则由

$$30=Card(A\cup B\cup C)=ard(A)+Card(B)+Card(C)-Card(A\cap B)$$

$$-Card(A\cap C)-Card(B\cap C)+Card(A\cap B\cap C)$$

$$=15+10+8-Card(A\cap B)-0-0+0=33-Card(A\cap B)$$

得$Card(A\cap B)=3$

因此喜欢篮球但不喜欢乒乓球的人数为15-3=12（人）。

例12、**（全国卷）**不大于1000的正整数中，既不是3的倍数，也不是5的倍数共有(　　)个

【解析】设不大于1000的正整数集合为全集I，其中3的倍数的集合为A，5的倍数的集合为B，则$|A|=[\frac{1000}{3}]=333$，$|B|=[\frac{1000}{5}]=200$，$|A\cap B|=[\frac{1000}{15}]=66$。

因此，$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=333+200-66=467$。

所以，不大于1000的正整数中，既不是3的倍数，也不是5的倍数共有

$\left|C_I(A\cup B)\right|=1000-|A\cup B|=533$（个）。

【方法与技巧】互斥原理、正难则反。

例13、**（全国高中数学联赛）**设集合$A=\left\{a_1,a_2,a_3,a_4\right\}$，若$A$中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为$B=\left\{-1,3,5,8\right\}$，则集合$A=$(　　　　)

【解析】不妨令

$a_1+a_2+a_3=-1$　　　　(1)

$a_1+a_2+a_4=3$　　　　(2)

$a_2+a_3+a_4=5$　　　　(3)

$a_1+a_3+a_4=8$　　　　(4)

（1）+（2）+（3）+（4）得：$3\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)=\left(-1\right)+3+5+8=15$，

故$a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合A的四个元素分别为

$5-\left(-1\right)=6,\ 5-3=2,\ 5-5=0,\ 5-8=-3$，即$A=\left\{-3,0,2,6\right\}$。

【法二】易知，A的每个元素会出现在3个三元子集中，因此所有三元子集的元素之和为

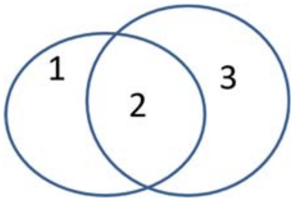
$3\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)=\left(-1\right)+3+5+8=15$，故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是，集合 A 的四个元素分别为

$5-\left(-1\right)=6,\ 5-3=2,\ 5-5=0,\ 5-8=-3$，即 $A=\left\{-3,0,2,6\right\}$。

例14、设 $I=\left\{0,1,2,3,4,5,6\right\}$，且集合 $A\cup B=I$，问这样的 $A,\ B$ 有多少组?

【解析】我们构造如图所示的 3 个抽屉。将 I 中的 7 个元素全部放到这 3 个抽屉里面，放完后，将 1、2 两个抽屉的元素组成集合 A，2、3 两个抽屉的元素组成集合 B，这样，就得到一个 $(A,\ B)$ 组，很明显，我们只需搞清楚有多少种不同的放法。

由于 I 中每一元素 x 有 3 种放法，因此，一共有 $3\times3\times\cdots\times3=3^7$ 种放法，故这样的 $(A,\ B)$ 有 3^7 组。



例15、给定实数 $a(a\neq0)$，$f:R\to R$ 对任意实数 x 均满足 $f(f(x))=xf(x)+a$，则满足 $f(x)=0$ 的 x 的个数为（　　）

A.0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【解析】易知：$f(f(0))=a$；

假设 x_0 满足 $f(x_0)=0$，由 $f(f(x_0))=x_0f(x_0)+a\Rightarrow f(0)=a\Rightarrow f(f(0))=f(a)$，故 $f(a)=a$，

因而，$f(f(a))=f(a)\Rightarrow af(a)+a=a\Rightarrow a^2=0\Rightarrow a=0$，与题设矛盾。

故，满足 $f(x)=x$ 的 x 之个数为 0 个，选 A。

例16、对于集合 A，若满足：$a\in A$，且 $a-1\notin A, a+1\notin A$，则称 a 为集合 A 的“孤立元素”，则集合 $M=\{1,2,3,\cdots,10\}$ 的无“孤立元素”的含 4 个元素的子集个数共有（　　）

A. 28　　　　B.36　　　　C.49　　　　D. 175

【解析】：由题意知：　x 是 A 的孤立元，意味着 x 左右两个数均不在 A 中，因此，不含孤立元的子集可如下分类

（1）$\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\cdots,\{1,2,9,10\}$，共 7 个

（2）$\{2,3,4,5\},\{2,3,5,6\},\cdots,\{2,3,9,10\}$，共 6 个

（3）$\{3,4,5,6\},\{3,4,6,7\},\cdots,\{3,4,9,10\}$，共 5 个

…..

（7）$\{7,8,9,10\}$，共 1 个

故，共有 28 个无孤立元的四元子集。选 A。

例17、已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}, B=\{x|x^2+2x-8=0\}$，$C=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$

（1）若 $A\cap B\subseteq C$，求实数 a 的值；

（2）若 $A\cap C\neq\varnothing, B\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值。

【解】（1）根据题意可知 $A=\{2,3\}$，$B=\{2,-4\}$，$\therefore A\cap B=\{2\}$

$\because A\cap B\subseteq C, \therefore 2\in C$

又$\because C=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$\therefore 4-2a+a^2-19=0\Rightarrow a^2-2a-15=0$

解得 $a=5$ 或 $a=-3$，$\therefore$ 实数 a 的值为 5 或 -3

（2）$\because B\cap C=\varnothing$，$\therefore 2\notin C$

又$\because A\cap C\neq\varnothing$，$\therefore 3\in C$，$\therefore 9-3a+a^2-19=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$

若 $a=5, C=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，不符合题意，舍；

若 $a=-2, C=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{-5,3\}$，符合题意；

综上所述，$a=-2$

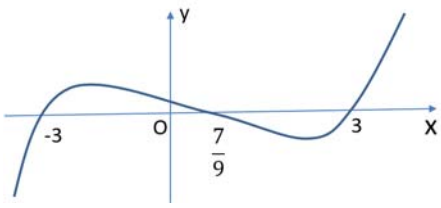
例18、☆已知关于 x 的不等式 $\dfrac{mx-7}{x^2-m}<0$ 的解集为 S

（1）当 $m=9$ 时，求集合 S；

（2）若 $5\in S$ 且 $7\notin S$，求实数 m 的取值范围。

【解】若 $m=9$，则 $\dfrac{mx-7}{x^2-m}<0\Leftrightarrow\dfrac{9x-7}{x^2-9}<0\Leftrightarrow(x+3)\left(x-\dfrac{7}{9}\right)(x-3)<0$

$\Leftrightarrow x<-3$ 或 $\dfrac{7}{9}<x<3\Rightarrow$ 原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup\left(\dfrac{7}{9},3\right)$（参考下图中的“奇穿偶切法”，后面相关章节中会详细讲）



（2）$5\in S\Leftrightarrow\dfrac{5m-7}{25-m}<0\Leftrightarrow m<\dfrac{7}{5}$ 或 $m>25$　　①

同理，$7\in S \Leftrightarrow \dfrac{7m-7}{49-m}<0 \Leftrightarrow m<1$ 或 $m>49$，

于是 $7\notin S \Leftrightarrow 1\le m\le 49$　　②

①、②$\Rightarrow$ 实数 m 的取值范围为 $\left[1,\dfrac{7}{5}\right)\cup\left(25,49\right]$。

例19、已知集合 $A=\{x\mid x\ge 2 \text{或} x\le -3\}, B=\{x\mid \left|\dfrac{3-x}{2}\right|<1\}, C=\{x\mid m+1\le x\le 2m-1\}$

（1）　求 $A\cap B$ 及 $(C_R A)\cap B$；

（2）　若 $B\cup C=B$，求实数 m 的取值范围。

【解】（1）$\left|\dfrac{3-x}{2}\right|<1 \Rightarrow |x-3|<2 \Rightarrow -2<x-3<2 \Rightarrow 1<x<5$，即 $B=(1,5)$，

故 $A\cap B=[2,5)$，由题意知 $C_R A=(-3,2)$，故 $(C_R A)\cap B=(1,2)$

综上，$A\cap B=[2,5)$，$(C_R A)\cap B=(1,2)$。

（2）$B\cup C=B \Rightarrow C\subseteq B$，

当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$C=\varnothing$，满足要求；

当 $m+1\le 2m-1$，即 $m\ge 2$ 时，由 $B=(1,5)$，$C=[m+1,2m-1]$，且 $C\subseteq B$ 得

$\begin{cases} m+1>1 \\ 2m-1<5 \end{cases} \Rightarrow 0<m<3$，故 $2\le m<3$，

综上，m 的取值范围为 $(-\infty,3)$。