§ 8.2 圆的方程以及直线与圆、圆与圆的位置关系

8.2.1 相关概念

学习提纲

1、了解圆的方程

2、了解直线和圆、圆与圆的位置关系及其判断标准

3、了解圆的切线方程，相交弦方程

1．圆的定义：平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹是圆．这个定点叫做圆的圆心，定长称为该圆的半径。

2．圆的标准方程

在平面直角坐标系中，设动点 $P(x,y)$，圆心 $C(a,b)$，半径为 r，由圆的定义有 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$，即

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

此即为：以 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的标准方程．

特别地，以原点为圆心，半径为 $r(r>0)$ 的圆的标准方程为 $x^2+y^2=r^2$

3．圆的一般方程

有时，我们也把圆的方程写成如下形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (*)$$

由于 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \Leftrightarrow (x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$

因此，(*) 表示圆的方程，前提是 $D^2+E^2-4F>0$

事实上，如 $D^2+E^2-4F=0$，方程（*）表示一个点 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$

如 $D^2+E^2-4F<0$，则方程（*）不表示任何图形．

4、点与圆的位置关系

设点 $P(x_0,y_0)$，圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则

(1)若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$，则点 P 在圆外；

(2)若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ 则点 P 在圆上；

(3)若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$，则点 P 在圆内．

5．直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有三种：**相离、相切、相交**．

判断直线与圆的位置关系常见的有两种方法：

(1)代数法：直线方程与圆的方程联立，化简得一元二次方程，令其判别式为Δ，则

$\Delta<0\Leftrightarrow$相离；　$\Delta=0\Leftrightarrow$相切；　$\Delta>0\Leftrightarrow$相交；

(2)几何法：利用圆心到直线的距离d和圆半径r的大小关系：

$d<r\Leftrightarrow$相交；　$d=r\Leftrightarrow$相切；　$d>r\Leftrightarrow$相离．

6．圆与圆的位置关系的判定

设$\odot C_1$：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2(r_1>0)$，　$\odot C_2$：$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2(r_2>0)$，

则有：

$|C_1C_2|>r_1+r_2\Leftrightarrow\odot C_1$与$\odot C_2$相离；

$|C_1C_2|=r_1+r_2\Leftrightarrow\odot C_1$与$\odot C_2$外切；

$|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2\Leftrightarrow\odot C_1$与$\odot C_2$相交；

$|C_1C_2|=|r_1-r_2|(r_1\neq r_2)\Leftrightarrow\odot C_1$与$\odot C_2$内切；

$|C_1C_2|<|r_1-r_2|\Leftrightarrow\odot C_1$与$\odot C_2$内含；

一条规律

过圆外一点M可作两条直线与圆相切，求切线方程时，可先设出方程，再用圆心到切线的距离等于半径列出方程求出切线的斜率．

求直线被圆所截得弦长的两种常用方法

(1)几何方法

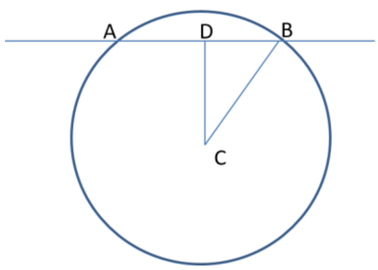
圆心到弦所在直线的距离、半弦长、半径构成直角三角形，用勾股定理．

(2)代数方法

运用根与系数关系及弦长公式

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}$$

说明：圆的弦长、弦心距的计算常用几何方法．



7、切线方程，切点弦方程，相交弦方程

（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 上，则过 P 的切线之方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 外，则过 P 可作两条切线，设切点为 A,B，则切点弦 AB 所在直线的方程为

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

（3）如果圆 $C_1:(x-a)^2+(y-b)^2=r_1^2$ 与 $C_2:(x-c)^2+(y-d)^2=r_2^2$ 交于 A,B 两点，则相交弦 AB 所在直线的方程为

$(x-a)^2+(y-b)^2-[(x-c)^2+(y-d)^2]=r_1^2-r_2^2$

8.2.2 典型例题

例 1（1）若点 $(1,1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的内部，则实数 a 的取值范围是(　　).

A．$-1<a<1$　　B．$0<a<1$　　C．$a>1$ 或 $a<-1$　　D．$a=\pm1$

（2）方程 $(x-1)(x-7)+(y-2)(y-10)=0$ 表示什么曲线?

【解】（1）因为点 $(1,1)$ 在圆的内部，$\therefore (1-a)^2+(1+a)^2<4$，$\therefore -1<a<1$

（2）$(x-1)(x-7)+(y-2)(y-10)=0 \Rightarrow x^2+y^2-8x-12y+27=0$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y-6)^2=25$

故，原方程表示的曲线为以点 $(4,6)$ 为圆心，5 为半径的圆。

例 2.已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切，圆心在直线 $x+y=0$ 上，则圆 C 的方程为(　　).

A．$(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　B．$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C．$(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D．$(x+1)^2+(y+1)^2=2$

【解】设圆心坐标为 $(a,-a)$，则 $\frac{|a-(-a)|}{\sqrt{2}}=\frac{|a-(-a)-4|}{\sqrt{2}}$，即 $|a|=|a-2|$，解得 $a=1$。故圆心坐标为 $(1,-1)$，半径 $r=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

例 3.经过点 $A(5,2),B(3,2)$，圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上的圆的方程为________.

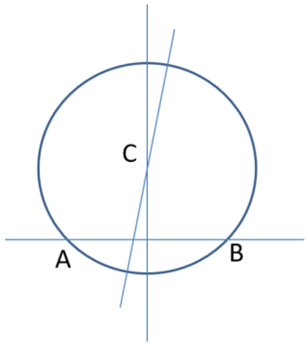
【解】显然，弦 $AB//x$ 轴，其垂直平分线方程为：$x=4$

故，圆心为直线$x=4$和直线$2x-y-3=0$的交点，解$\begin{cases}2x-y-3=0\\x=4\end{cases}$得圆心$C(4,5)$

可设圆的方程为$(x-4)^2+(y-5)^2=r^2$，

又圆过$B(3,2)$，即$(3-4)^2+(2-5)^2=r^2$，$\therefore r^2=10$，

$\therefore$圆的方程为$(x-4)^2+(y-5)^2=10$。



例 4（1）过点$A(4,1)$的圆C与直线$x-y-1=0$相切于点$B(2,1)$，则圆C的方程为________

（2）已知圆$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$与圆$C_2:x^2+y^2=10$相交于A,B两点，求AB所在直线的方程

【解】(1)：由已知圆C过$A(4,1),B(2,1)$两点，$\therefore$直线AB的垂直平分线$x=3$过圆心C，

又圆C与直线$y=x-1$相切于点$B(2,1)$，$\therefore k_{BC}=-1$，

$\therefore$直线BC的方程为$y-1=-(x-2)$，得$y=-x+3$，

由$\begin{cases}y=-x+3\\x=3\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$，得圆心$C$的坐标为$(3,0)$，

$\therefore r=|BC|=\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$，$\therefore$圆的方程为 $(x-3)^2+y^2=2$

(2)：易知两圆确实相交，故相交弦AB所在直线的方程为

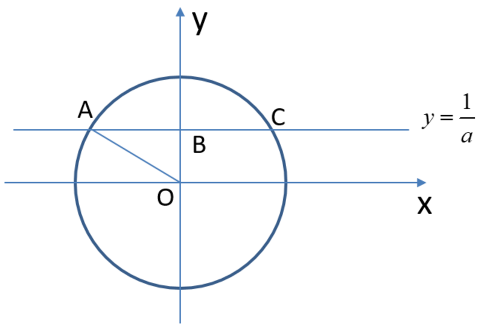
$(x-2)^2+(y-3)^2-(x^2+y^2)=1-10$，化简得$2x+3y-11=0$

例 5.若圆$x^2+y^2=4$与圆$x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$的公共弦的长为$2\sqrt{3}$，则$a=$______

【解】易知两圆公共弦所在的直线方程为$x^2+y^2+2ay-6-(x^2+y^2)=0-4$，即$y=\dfrac{1}{a}$

又$a>0$，结合圆心到弦的距离、半弦长、圆半径三者间的关系，利用勾股定理得，

$\dfrac{1}{a}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，故$a=1$



例 6.若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点，则直线 l 斜率的取值范围为（　　）.

A．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　C. $[\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$

【解】易知过 A 且垂直于 x 轴的直线与圆无公共点，故，直线 l 的斜率存在。

设直线 l 的方程为：$y=k(x-4)$，即 $kx-y-4k=0$

题中曲线为圆，圆心 $(2,0)$，半径为 1，

由 $\frac{|2k-4k|}{\sqrt{1+k^2}}\le 1$，化简得 $k^2\le\frac{1}{3}$，

解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 C。

例 7.若曲线 C_1：$x^2+y^2-2x=0$ 与曲线 C_2：$y(y-mx-m)=0$ 有四个不同的交点，则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\infty-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

【解】C_1 为圆：$(x-1)^2+y^2=1$，圆心 $(1,0)$，半径 1；

C_2 为直线：$y=0$ 或 l：$mx-y+m=0$，

显然 $y=0$ 与圆 C_1 有两个交点，

故圆心 C_1 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m\times 1-1\times 0+m|}{\sqrt{m^2+1}}<1$，

解得 $m\in(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，但 $m=0$ 显然该舍去，故选 B

例 8（1）圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的

差是(　　).

A．30　　　　B．18　　　　C．$6\sqrt{2}$　　　　D．$5\sqrt{2}$

(2) 已知圆$(x-1)^2+(y+2)^2=6$与直线$2x+y-5=0$的位置关系是(　　).

A．相切　　　　B．相交但直线不过圆心　　　　C．相交过圆心　　　　D．相离

【解】(1) 易知圆的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=18$，故圆心坐标为$(2,2)$，半径为$3\sqrt{2}$。

因圆心到直线$x+y-14=0$的距离为$\frac{|2+2-14|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

故，圆上的点到直线$x+y-14=0$的最大距离为$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，最小距离为$5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。

故最大距离与最小距离的差为$6\sqrt{2}$

(2) 由题意知圆心$(1,-2)$到直线$2x+y-5=0$的距离

$d=\frac{|2\times1-2-5|}{\sqrt{2^2+1}}=\sqrt{5}<\sqrt{6}$ 且$2\times1+(-2)-5\neq0$，

因此该直线与圆相交但不过圆心．选 B。

例 9．圆$x^2+y^2-4x=0$在点$P(1,\sqrt{3})$处的切线方程为(　　).

A．$x+\sqrt{3}y-2=0$　　B．$x+\sqrt{3}y-4=0$　　C．$x-\sqrt{3}y+4=0$　　D．$x-\sqrt{3}y+2=0$

【解】圆的方程为$(x-2)^2+y^2=4$，圆心坐标为$(2,0)$，半径为2，点P在圆上，且易知过P的切线斜率存在，

设切线方程为$y-\sqrt{3}=k(x-1)$，即$kx-y-k+\sqrt{3}=0$，

$\therefore\frac{|2k-k+\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$切线方程为，即$x-\sqrt{3}y+2=0$.

【巧解】直接用公式。易知$P(1,\sqrt{3})$在圆上，

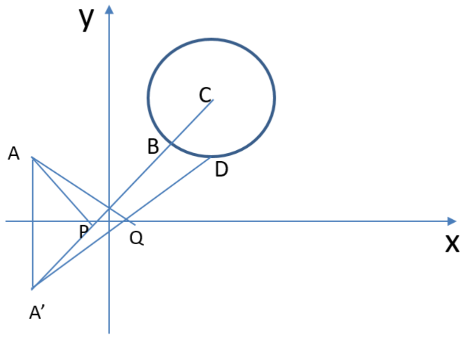
故，P处的切线方程为$x_0x+y_0y-4\times\frac{x+x_0}{2}=0$，

将$x_0=1,y_0=\sqrt{3}$代入上式化简即得：$x-\sqrt{3}y+2=0$

例 10．一束光线从点$A(-1,1)$出发，经x轴反射到圆$C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$上所经过的最短路程是（　　）

A、4　　　　B、5　　　　C、$3\sqrt{2}-1$　　　　D、$2\sqrt{6}$

【解】显然 $A(-1,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-1,-1)$，易知圆心 $C(2,3)$，圆半径为 1，故所求最短路程 $|A'C|-1=\sqrt{3^2+4^2}-1=4$，选 A。



例 11.在圆 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 内，过点 $E(0,1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为(　　).

A．$5\sqrt{2}$　　B．$10\sqrt{2}$　　C．$15\sqrt{2}$　　D．$20\sqrt{2}$

【解】$x^2+y^2-2x-6y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=10$

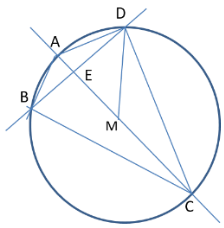
故，圆心 $M(1,3)$、半径是 $\sqrt{10}$；

因 $E(0,1)$ 位于圆内，且易知 $|EM|=\sqrt{5}$，故过点 $E(0,1)$ 的最短弦长

$|BD|=2\sqrt{r^2-|EM|^2}=2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$，

过点 $E(0,1)$ 的最长弦长等于该圆的直径，即 $|AC|=2\sqrt{10}$，且 $AC\perp BD$，

因此四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|AC|\times|BD|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times2\sqrt{5}=10\sqrt{2}$，选 B.



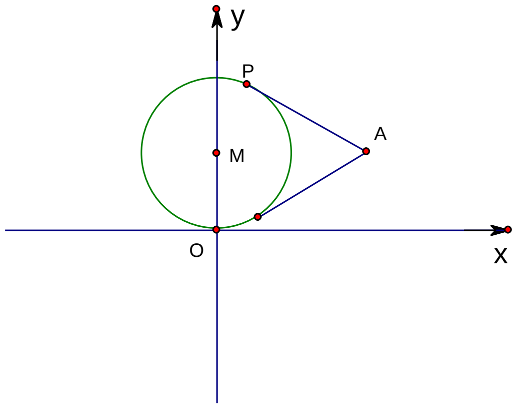
例 12.已知点 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上运动，则 $\frac{y-1}{x-2}$ 的最大值与最小值分别为______.

【解】如图，设 $A(2,1)$，则 $\frac{y-1}{x-2}$ 表示直线 PA 的斜率，令其为 k，显然，PA 与圆相切时，k 分别取得最大值和最小值。

设 PA 的方程为：$y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+1-2k=0$

由$\dfrac{|-1+1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

故$\dfrac{y-1}{x-2}$得最大值和最小值分别为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$和$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

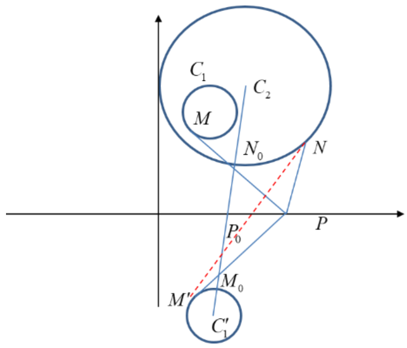


例 13．已知圆$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆$C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M,N分别是圆C_1,C_2上的动点，P为x轴上的动点，则$|PM|+|PN|$的最小值为（　　）

A、 $5\sqrt{2}-4$　　　B、$\sqrt{17}-1$　　　C、$6-2\sqrt{2}$　　　D、$\sqrt{17}$

【解】易知：$C_1(2,3)$，$C_2(3,4)$，数形结合，令圆C_1关于x轴的对称圆为圆C_1'，其圆心为$C_1'(2,-3)$，令圆C_2、C_1'连心线分别交两圆于N_0、M_0，则M_0N_0即为所求，

$M_0N_0=\sqrt{50}-(1+3)=5\sqrt{2}-4$，选 A



例 14.已知光线l： $4x+(m+4)y-2m=0$及圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，如果l射到x轴上后，反射光线与圆C始终有公共点，求m的取值范围?

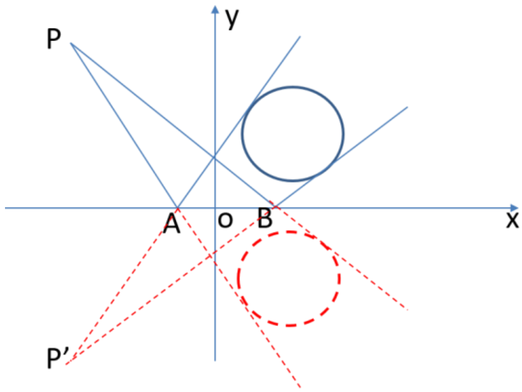
【解】易知圆心$C(1,1)$，圆半径为 1，光线l过定点$P(-2,2)$，则$P(-2,2)$关于x轴的对称点$P'(-2,-2)$，设过P'的圆的切线方程为：$y+2=k(x+2)$，即$kx-y+2k-2=0$，

因此有$\dfrac{|k-1+2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

解得 $k_1=\frac{9-\sqrt{17}}{8},k_2=\frac{9+\sqrt{17}}{8}$

如图，易得 $A(\frac{1-\sqrt{17}}{4},0),B(\frac{1+\sqrt{17}}{4},0)$，从而有 $\frac{1-\sqrt{17}}{4}\le\frac{m}{2}\le\frac{1+\sqrt{17}}{4}$，

解得 $\frac{1-\sqrt{17}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{17}}{2}$



例 15（全国 I） 已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 $l:2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过 P 作 $\odot M$ 的切线 PA,PB，切点为 A,B，当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$　　C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

【解】 易知$\odot M$：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$，故 $M(1,1),r=2$

因 $AB\perp PM$，故 $|PM|\cdot|AB|=2S_{PAMB}=4S_{\triangle PAM}=4\times\frac{1}{2}r\times|PA|=4|PA|$

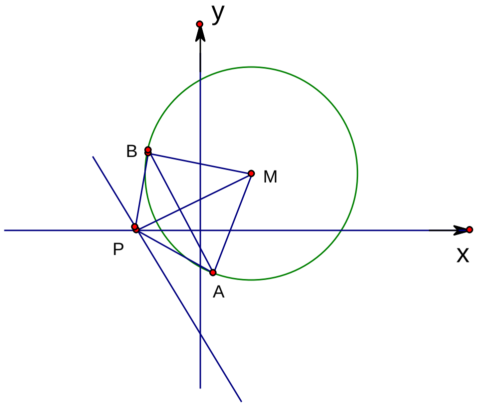
$=4\sqrt{|PM|^2-4}$

因此，问题$\Leftrightarrow|PM|$最小，此时需 $PM\perp l$，故 $k_{PM}=\frac{1}{2}$，从而 PM 的方程为:

$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$，

将其与 l 的方程联立，解得 $P(-1,0)$，故切点弦方程为 $(x-1)(-1-1)+(y-1)(0-1)=4$，

即 $2x+y+1=0$，选 D。



例 16.如图，已知圆 $C_1: x^2+y^2=4$，圆 $C_2: x^2+y^2=16$，点 $M(1,0)$，动点 P,Q 分别在圆 C_1,C_2 上，且 $MP\perp MQ$，则线段 PQ 的取值范围为 ____

【解】 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由题意有

$PQ^2=MP^2+MQ^2=(x_1-1)^2+y_1^2+(x_2-1)^2+y_2^2=22-2(x_1+x_2)$，

令 $F(x_0,y_0)$ 为 PQ 的中点，则 $x_1+x_2=2x_0$，

故 $PQ^2=4MF^2=4[(x_0-1)^2+{y_0}^2]=22-4x_0$，

化简得 $(x_0-\dfrac{1}{2})^2+{y_0}^2=\dfrac{19}{4}$，

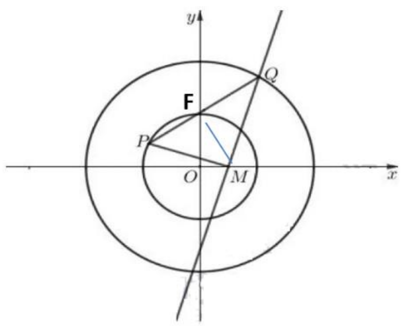
即 F 在圆 $(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{19}{4}$ 上，令其圆心为 $N(\dfrac{1}{2},0)$，

因 $MN=\dfrac{1}{2}$，故 M 在圆 N 内。

故，$\dfrac{\sqrt{19}}{2}-MN\le MF\le NM+\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

即，$\dfrac{\sqrt{19}-1}{2}\le MF\le\dfrac{\sqrt{19}+1}{2}$，

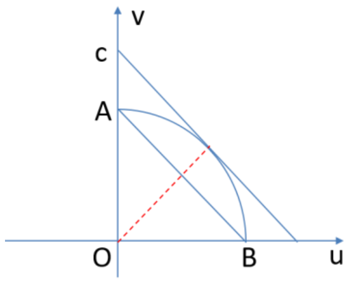
从而 $\sqrt{19}-1\le PQ\le\sqrt{19}+1$



例 17.求函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2+3x-x^2}$ 的最大值和最小值?

【解】令 $u=\sqrt{x^2-3x+2}, v=\sqrt{2+3x-x^2}$，则 $u^2+v^2=4, v=-u+y$，

建立如图所示的 uOv 平面直角坐标系，则点 (u,v) 在以原点为圆心，2 为半径的圆位于第一象限的弧上，而 y 为直线 $v=-u+y$ 在 v 轴上的截距，显然，直线 $v=-u+y$ 与圆相切时，截距 y 最大，最大值为 $2\sqrt{2}$，直线与 AB 重合时，截距 y 最小，最小值为 2.



例 18.已知 $\odot M: x^2+(y-2)^2=1$，Q 是 x 轴上的动点，QA, QB 分别切 $\odot M$ 于 A, B 两点.

(1)若 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，求 $|MQ|, Q$ 点的坐标以及直线 MQ 的方程;

(2)求证：直线 AB 恒过定点.

(1) **【解】** 设直线 MQ 交 AB 于点 P，则 $|AP|=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，

又 $|AM|=1, AP\perp MQ, AM\perp AQ$，得 $|MP|=\sqrt{1^2-\dfrac{8}{9}}=\dfrac{1}{3}$，

又 $\because |MQ|=\dfrac{|MA|^2}{|MP|}$，$\therefore |MQ|=3$.

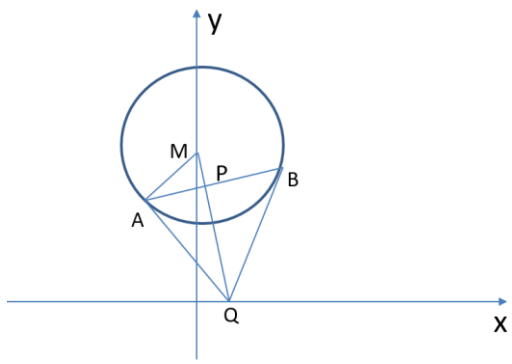
设 $Q(x,0)$，而点 $M(0,2)$，由 $\sqrt{x^2+2^2}=3$，得 $x=\pm\sqrt{5}$，

则 Q 点的坐标为 $(\sqrt{5},0)$ 或 $(-\sqrt{5},0)$.

从而直线 MQ 的方程为 $2x+\sqrt{5}y-2\sqrt{5}=0$ 或 $2x-\sqrt{5}y+2\sqrt{5}=0$。

(2)**证明** 设 $Q(m,0)$，则切点弦 AB 的方程为 $xm+(y-2)(0-2)=1$，即 $mx-2y+3=0$

显然 AB 恒过定点 $(0,\dfrac{3}{2})$



例 19．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1)求圆 C 的方程;

(2)若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB$，求 a 的值.

【解】 (1) 曲线 $y=x^2-6x+1$ 与 y 轴的交点为 $K(0,1)$，与 x 轴的交点为 $L\left(3+2\sqrt{2},0\right),M\left(3-2\sqrt{2},0\right)$。

故可设圆心 $C(3,t)$，则有 $3^2+(t-1)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+t^2$，

解得 $t=1$，则圆 C 的半径为 $\sqrt{3^2+(t-1)^2}=3$.

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$。

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

其坐标满足方程组：$\begin{cases}x-y+a=0\\(x-3)^2+(y-1)^2=9\end{cases}$

消去 y，得到方程 $2x^2+(2a-8)x+a^2-2a+1=0$

由已知可得，判别式 $\Delta=56-16a-4a^2>0$

此时，$x_1+x_2=4-a,x_1x_2=\dfrac{a^2-2a+1}{2}$　　　①

由于 $OA\perp OB$，可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$。

又 $y_1=x_1+a,y_2=x_2+a$，所以 $2x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2=0$　　　②

由①，②得 $a=-1$，满足 $\Delta>0$，故 $a=-1$.

例 20.已知点 $P(0,5)$ 及圆 $C:x^2+y^2+4x-12y+24=0$。

(1)若直线 l 过点 P 且被圆 C 截得的线段长为 $4\sqrt{3}$，求 l 的方程;

(2)求过 P 点的圆 C 的弦的中点的轨迹方程.

【解】(1)如图所示，圆$C:(x+2)^2+(y-6)^2=16$，设D是线段AB的中点，则$CD\perp AB$，

$\therefore \left|AD\right|=2\sqrt{3},\left|AC\right|=4$，$C$点坐标为$\left(-2,6\right)$。

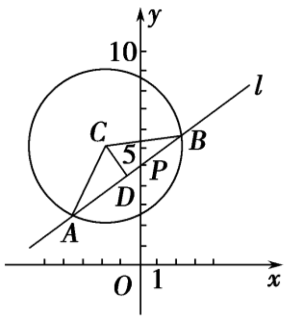
在$Rt\triangle ACD$R 中，可得$\left|CD\right|=2$.

设所求直线l方程为：$kx-y+5=0$。

则$|CD|=\dfrac{\left|-2k-6+5\right|}{\sqrt{k^2+\left(-1\right)^2}}=2$，解得$k=\dfrac{3}{4}$。

又，l的斜率不存在时，也满足题意，此时方程为$x=0$。

$\therefore$所求直线l的方程为$x=0$或$3x-4y+20=0$。



(2)设过P点的圆C的弦的中点为$D\left(x,y\right)$，则$CD\perp PD$，

即$\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{PD}=0\Rightarrow\left(x+2,y-6\right)\bullet\left(x,y-5\right)=0$，即$x^2+y^2+2x-11y+30=0$。