好题欣赏——2025年第7期

1.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，在其渐近线上存在一点 P，满足 $\|PF_1|-|PF_2\|=2b$，则该双曲线离心率的取值范围为（　　）

A．$\left(1,\sqrt{2}\right)$　　B．$\left(\sqrt{2},2\right)$　　C．$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　　D．$\left(2,3\right)$

【解析】易知 P 点在双曲线 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 上，问题等价于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线与双曲线 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 有交点，前者的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，后者的渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，结合双曲线的性质，只需 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，即 $\frac{b^2}{a^2}<1$，也即 $e^2-1<1$，故 $1<e<\sqrt{2}$，选 A。

2.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，$\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{OA}$，若在双曲线的渐近线上存在点 M，使得 $\angle AMB=90^\circ$，则双曲线 C 的离心率的取值范围为（　　）

A．$[\frac{3\sqrt{5}}{5},+\infty)$　　B．$(1,\frac{3\sqrt{5}}{5}]$　　C．$[\sqrt{5},+\infty)$　　D．$(1,\sqrt{5}]$

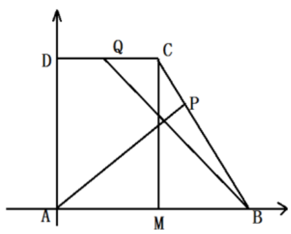
【解析】由 $\angle AMB=90^\circ$ 知，渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 与圆 $\left(x-3a\right)^2+y^2=4a^2$ 有交点，答案 B。

3.在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD,CD=1,AB=BC=2,\angle BCD=120^\circ$，动点 P 和 Q 分别在线段 BC 和 CD 上，且 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{8\lambda}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 的最大值为（　　）

A．-2　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{9}{8}$

【解析】因为 $AB//CD$，$CD=1$，$AB=BC=2$，$\angle BCD=120^\circ$，所以 $ABCD$ 是直角梯形，且 $CM=\sqrt{3}$，$\angle BCM=30^\circ$，

以 AB 所在直线为 x 轴，以 AD 所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系：



因为 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{8\lambda}\overrightarrow{DC}$，动点 P 和 Q 分别在线段 BC 和 CD 上，则 $\lambda\in\left(0,1\right]$，$B\left(2,0\right)$，

$P\left(2-\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$，$Q\left(\frac{1}{8\lambda},\sqrt{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=\left(2-\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{8\lambda}-2,\sqrt{3}\right)=5\lambda+\frac{1}{4\lambda}-4-\frac{1}{8}$，

令 $f\left(\lambda\right)=5\lambda+\frac{1}{4\lambda}-4-\frac{1}{8}$ 且 $\lambda\in\left(0,1\right]$，由基本不等式可知，当 $\lambda=1$ 时可取得最大值，

则 $f(\lambda)_{\max}=f(1)=5+\frac{1}{4}-4-\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$．故选 D．

4.已知$\triangle ABC$中，$|AB|=2,|AC|=4,\angle BAC=60^\circ,P$ 为线段 AC 上任意一点，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的范围是（　　）

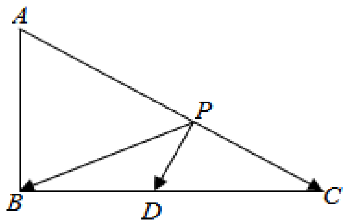
A．$[1,4]$　　B．$[0,4]$　　C．$\left[-\frac{9}{4},4\right]$　　D．$[-2,4]$

【巧解】如图，令 D 为 BC 的中点，由题意知 $BD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，由中线定理知

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=PD^2-BD^2=PD^2-3$，

易知 D 到 AC 的距离 $h=DC\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=\sqrt{7}$，故

$h^2-3\le PD^2-3\le AD^2-2\Rightarrow\le-\frac{9}{4}\le PD^2-3\le4$，即 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围为$\left[-\frac{9}{4},4\right]$，选 C。



5.记 O 为坐标原点，已知向量 $\overrightarrow{OA}=(3,2),\overrightarrow{OB}=(0,-2)$，又有点 C，满足$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{5}{2}$，则 $\angle ABC$ 的取值范围为（　　）

A．$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　C．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

【解析】因$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{5}{2}$，点 C 在以点 A 为圆心，$\frac{5}{2}$ 为半径的圆周上．可得$\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$，如图可知，当直线 BC 与圆周相切时，$\angle ABC$ 有最大值为$\frac{\pi}{6}$，当 A,B,C 三点共线时 $\angle ABC$ 有最小值为 0，所以 $\angle ABC$ 的取值范围为$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$．选 A．

6.若 O 为$\triangle ABC$所在平面内一点，且 $\overrightarrow{PO}=\frac{a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$，其中，$a,b,c$ 分别为顶点 A,B,C 所对的边长，P 为$\triangle ABC$所在平面上任意一点。则 O 必为$\triangle ABC$的（　　）。

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

【解析】$\overrightarrow{PO}=\frac{a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$

$\Rightarrow(a+b+c)\overrightarrow{PO}=a(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})+b(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})+c(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})\Rightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

故 O 为$\triangle ABC$的内心，选 B。

7.设 $S=x^2+2xy+2y^2+2x+1$，其中 $x\in R,y\in R$，则 S 的最小值为（　　）

A．1　　B． -1　　C． $-\dfrac{3}{4}$　　D．0

【解析】: $x^2+(2y+2)x+(2y^2+1-S)=0$，由 $\Delta=(2y+2)^2-4(2y^2+1-S)\ge 0$

得 $S\ge y^2-2y=(y-1)^2-1\ge -1$．当且仅当 $y=1,x=-2$ 时，$S_{\min}=-1$．选 B．

【法二】：$S=x^2+2xy+2y^2+2x+1=x^2+2(y+1)x+(y+1)^2+y^2-2y$

$=(x+y+1)^2+(y-1)^2-1\ge -1$．

当且仅当 $y=1,x=-2$ 时，$S_{\min}=-1$．选 B．

8.函数 $f(x)=\ln|x-1|-x+3$ 的零点个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【解析】$f(x)=0\Leftrightarrow \ln|x-1|=x-3$，所以 $f(x)$ 的零点个数即函数 $y=\ln|x-1|$ 与函数 $y=x-3$ 的交点的个数，作图可知有 3 个交点，选 D．

9.若函数 $f(x)$ 的图像与函数 $y=(x-2)e^{2-x}$ 的图像关于点(1，0)对称，且方程 $f(x)=mx^2$ 只有一个实根，则实数 m 的取值范围为(　　)

A.$[0，e)$　　B.$(-\infty，e)$　　C.$\{e\}$　　D.$(-\infty，0)\cup\{e\}$

【解析】利用公式：如函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称，则

$f(x)=2b-g(2a-x),\ g(x)=2b-f(2a-x)$

回到本题，易得 $f(x)=xe^x$，问题转化为 $xe^x=mx^2$ 只有一解，进而转化为 $e^x=mx$ 无解

过原点作 $h(x)=e^x$ 的切线，易得切点为 $(1,e)$，该点处切线的斜率为 e，故，要让 $e^x=mx$ 无解，需 $0\le m<e$，选 A。

10.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 $P\left(x_0,\dfrac{5}{2}\right)$ 为双曲线上一点，若 ΔPF_1F_2 的内切圆半径为 1，且圆心 G 到原点 O 的距离为 $\sqrt{5}$，则双曲线的方程为

A. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{8y^2}{25}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2y^2}{25}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{50}=1$

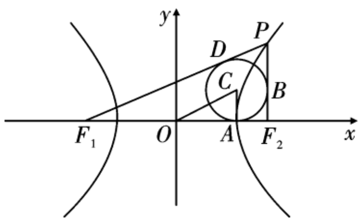
【解析】如图，设圆 C 与 F_1F_2，PF_2，PF_1 的切点分别为 A，B，D．$PF_1-PF_2=2a$，即

$PD+DF_1-(PB+BF_2)=2a$，又

$\because PD=PB$，$F_1D=F_1A$，$F_2B=F_2A$，故 $F_1A-F_2A=2a$，即 $F_1O+OA-(F_2O-OA)=2a$，

故 $OA=a$，故 $OC=\sqrt{a^2+1}=\sqrt{5}$，即 $a=2$．又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times 2c\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5c}{2}$，且

$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times(|PF_1|+|PF_2|+2c)\times 1=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)+c$，故得



$|PF_1|+|PF_2|=3c$．又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，故 $|PF_1|=\dfrac{3c+2a}{2}$，

$|PF_2|=\dfrac{3c-2a}{2}$．又 $|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+\dfrac{25}{4}}$，

$|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+\frac{25}{4}}$，联立化简得 $x_0=3$．又因点 $P\left(3,\frac{5}{2}\right)$ 在双曲线上，所以 $\frac{9}{4}-\frac{25}{4b^2}=1$，联立解得 $b=\sqrt{5}$，故选 B.

11.(巴蜀中学 2025 届高三适应性月考八) 已知关于 x 的方程 $e^{ax}+e^{a(2-x)}=-x^2+2x+b$ 有解,则 $b-a+1$ 的最小值为____________________

【解析】: 原方程等价于 $e^{ax}+e^{a(2-x)}+x^2-2x=b$ 有解，令 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{a(2-x)}+x^2-2x$,因为

$f(x)=f(2-x)$,所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称， $f'(x)=a[\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{a(2-x)}]+2(x-1)$, $f''(x)=$

$a^2[\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{a(2-x)}]+2\geq 2a^2\mathrm{e}^{2a}+2>0$ 所以 $f'(x)$ 在 R 上单调递增，又因为 $f'(1)=0$,所以当

$x<1, f'(x)<0$,当 $x>1, f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递

增， $f(x)\geqslant f(1)=2\mathrm{e}^a-1$，故 $b\geqslant 2\mathrm{e}^a-1$；所以 $b-a+1\geqslant 2\mathrm{e}^a-a$ ，令 $g(x)=2\mathrm{e}^x-x$，

$g'(x)=2\mathrm{e}^x-1$,则 $g(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上单调递减，在 $(-\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，则

$g(x)\geqslant g(-\ln 2)=1+\ln 2$,故 $b-a+1\geqslant 1+\ln 2$,当且仅当 $a=-\ln 2, b=0$ 时取得等号.

法二： 在研究 $f(x)$ 单调性的时候，可以先研究 $x>1$， $f'(x)=a[\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{a(2-x)}]+2(x-1)$,则

$2(x-1)>0$,而无论 a 是正还是负，函数 $y=a[\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{a(2-x)}]$ 可以通过复合函数单调性易得为单

增，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，再根据对称性，得 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

法三： 首先函数 $y=e^{ax}+e^{a(2-x)}$ 与函数 $y=-x^2+2x+b$ 都关于 $x=1$ 对称，且

$e^{ax}+e^{a(2-x)}\geqslant 2\sqrt{e^{ax}?e^{a(2-x)}}=2e^a$， $-x^2+2x+b\leqslant 1+b$，因为该方程有解，故 $2e^a\leqslant 1+b$，下面过程同方法一.

12.(2025 年全国高中数学联赛重庆预赛) 设函数 $f(x)=x\sin(2\pi\ln x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值为 a ,在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 b ,在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 c，则 $\frac{bc}{a}=$____。

【解析】 由 $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}>0, f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}>0$ 且 $e^{-\frac{3}{4}}\in(0,1]$， $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\in[1,2]$ 知 $a>0, b>0$，又

$f(ex)=ef(x)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值 a 即为在 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$ 上的最大值}。又 $x\in\left[\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$

时， $f(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值 b 即为在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值，从而 $b=ea$，又

$f(x)$在$\left[\mathrm{e},\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right]$上递增且$[\mathrm{e},3]\subseteq\left[\mathrm{e},\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right]$，所以$c=f(3)=3\sin(2\pi\ln3)$， 所以

$\frac{bc}{a}=3\mathrm{e}\sin(2\pi\ln 3)$。

13.(2025 年中等数学增刊模拟题)若集合$\{1,2,3,4,5\}$的子集A,B满足$|A||B|=|A\cap B||A\cup B|$

则符合条件的有序集合对(A,B)有——对.

【解析】因为$|A||B|=|A\cap B||A\cup B|$，所以结合题中等式及韦达定理，可得

$\{|\mathrm{A}|,|\mathrm{B}|\}=\{|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|,|\mathrm{A}\cup\mathrm{B}|\}$，这表明，必有$A\subseteq B$或$B\subseteq A$.

当$A=B$时，由A,B是集合$\{1,2,3,4,5\}$的子集，知符合条件的集合对有$2^5=32$对.

当$A\neq B$时，不妨设$A\subsetneq B$，此时$|A|=|A\cap B|,|B|=|A\cup B|$，

知符合条件的集合对有 $C_5^0(2^5-1)+C_5^1(2^4-1)+C_5^2(2^3-1)+C_5^3(2^2-1)+C_5^4(2^1-1)=211$

对.

综上所述，符合条件的有序集合对 (A,B) 共有 $2\times211+32=454$ 对.

14.(2025 年中等数学增刊模拟题)设P是双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$上的任意一点，过点$P$的直线$l$与双曲线的两条渐近线分别交于$A,B$两点。若$\vec{P}A\overrightarrow{PB}=-48$，则直线$l$的倾斜角是_____。

【解析】易知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为$3x\pm2y=0\ldots$,

设$P(x_0,y_0)$，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$，其中$\alpha$为直线$l$的倾斜角，$t$为参数，代入①式得$3(x_0+t\cos\alpha)\pm2(y_0+t\sin\alpha)=0$，所以$t_1=-\frac{3x_0+2y_0}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$，

$t_2=\frac{3x_0-2y_0}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}$，则$\overrightarrow{PA}\,\overrightarrow{PB}=t_1t_2=-\frac{9x_0^2-4y_0^2}{4\sin^2\alpha-9\cos^2\alpha}=-48$，

又$9x_0^2-4y_0^2=36$，于是$\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$，从而，直线l的倾斜角是$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$。

15.(2025 年四川高联赛预赛)$\sin^3 20^\circ+\sin^3 40^\circ-\sin^3 80^\circ=$____.

【解析】令$a=\sin20^\circ,b=\sin40^\circ,c=\sin80^\circ$,则$a+b-c=\sin20^\circ+\sin\left(60^\circ-20^\circ\right)-$

$\sin\left(60^\circ+20^\circ\right)=\sin20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20^\circ-\frac{1}{2}\sin20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20^\circ-\frac{1}{2}\sin20^\circ=0$,

所以 $a^3+b^3-c^3=(a+b-c)\left(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ac\right)-3abc$

$=-3abc=-3\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ\ \ =-3\sin 20^\circ\sin\left(60^\circ-20^\circ\right)\sin\left(60^\circ+20^\circ\right)$

$=-\dfrac{3}{4}\sin\left(3\times 20^\circ\right)=-\dfrac{3}{4}\sin 60^\circ=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$,

所以 $\sin^3 20^\circ+\sin^3 40^\circ-\sin^3 80^\circ=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

16.空间四点 A,B,C,D 满足 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2,\left|\overrightarrow{BC}\right|=3,\left|\overrightarrow{CD}\right|=4,\left|\overrightarrow{DA}\right|=7$，则 $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}$ 的值为___

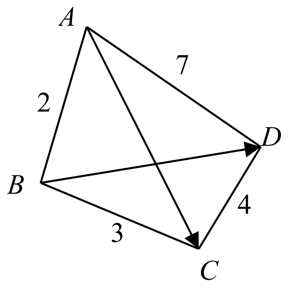
【巧解】 由斯坦纳定理的推论得:

$$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=\frac{\left(|AD|^2+|BC|^2\right)-\left(|AB|^2+|CD|^2\right)}{2}=\frac{\left(7^2+3^2\right)-\left(2^2+4^2\right)}{2}=19$$

【法二】 $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)\bullet\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DB}$

$$=-\frac{\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}+\frac{\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{AB}^2}{2}$$

$$=-\frac{4^2+\overrightarrow{DB}^2-3^2}{2}+\frac{7^2+\overrightarrow{DB}^2-2^2}{2}=19$$



【注】 这里用到了**向量余弦定理**，即

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}$$

17.已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，点 O 为三角形外接圆的圆心，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\left(x,y\in R\right)$，且 $x+2y=1$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为________________.

【解析】 取 AC 中点为 D，则 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}\left(x,y\in R\right)$，又 $x+2y=1$，所以 O,B,D 三点共线，又因为 OD 为弦心距，所以 $OD\perp AC$，故 $AB=BC=4$，所以

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=8\sin B\le 8$，当且仅当 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时取得等号

18.(2025 年全国高中数学联赛重庆预赛)在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$ 的最小值为_____。

【解析】 由题意得 $\dfrac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\dfrac{2a^2+bc}{bc\sin A}=\dfrac{2\left(b^2+c^2-2bc\cos A\right)+bc}{bc\sin A}$

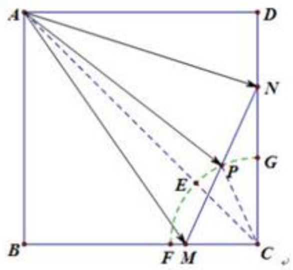
$\ge\dfrac{2\left(2bc-2bc\cos A\right)+bc}{bc\sin A}=\dfrac{5-4\cos A}{\sin A}$,

又由 $3\sin A+4\cos A=5\sin\left(A+\varphi\right)\le 5$ 及 $\sin A>0$ 可得 $\dfrac{5-4\cos A}{\sin A}\ge 3$,

所以原式≥ 3，当 $b=c$ 及 $A=\frac{\pi}{2}-\varphi$(其中$\tan\varphi=\frac{4}{3}$)时等号成立,

所以$\frac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$的最小值为 3。

19.在正方形$ABCD$中，$AB=2,M,N$分别是边BC,CD上的两个动点，且$MN=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AN}$的取值范围是________________.



【解析】因为$MN=\sqrt{2}$为定值，所以优先考虑使用**极化恒等式（也称中线定理）**，设P为MN的中点，则

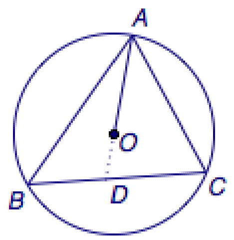
$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AN}=|AP|^2-|MP|^2=|AP|^2-\frac{1}{2}$$

这来关键就要找到点P的运动轨迹，注意到$\triangle MNC$为直角三角形，CP是斜边上的中线等于斜边的一半，即$|CP|=\frac{1}{2}|MN|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故点$P$在以$C$为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的$\frac{1}{4}$圆弧$FEG$上运动

故$|AE|\leq|AP|\leq AG$，即$\frac{9}{2}\leq|AP|^2\leq\frac{17}{2}-2\sqrt{2}$

所以$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AN}\in\left[4,8-2\sqrt{2}\right]$

20.已知单位圆O为$\triangle ABC$的外接圆，且$\tan A=2$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y$的最大值为



【解析】如图，延长AO交边BC于点D，设$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}$

则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AO}=\frac{x}{\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{y}{\lambda}\overrightarrow{AC}$

由 B,C,D 三点共线可知 $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\lambda}=1$，从而

$$x+y=\lambda=\frac{|AO|}{|AO|+|OD|}=\frac{1}{1+|OD|}$$

显然当OD取最小值，即$OD\perp BC$时，$x+y$取得最大值，此时$\triangle ABC$为等腰三角形，可得

$$x+y=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$$

21.已知$\vec{a},\vec{b}$是两个互相垂直的单位向量，且$\vec{c}\bullet\vec{a}=\vec{c}\bullet\vec{b}=1$，则对任意的正实数$t$，$|\vec{c}+t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}|$的最小值是________

【解析】令$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，则$\vec{c}=(1,1)$，故$\vec{c}+t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}=\left(1+t,1+\frac{1}{t}\right)$，

故$\left|\vec{c}+t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|=\sqrt{(1+t)^2+\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}+1\right)^2-1}$，

考虑到$t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$，故$\left|\vec{c}+t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|\geq\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$，易知等号可取。

22.关于x的不等式$\left(x^2-1\right)^{2017}+x^{4034}+2x^2-1\leq 0$的解集为______。

【解析】显然本题可以利用同构的思想。

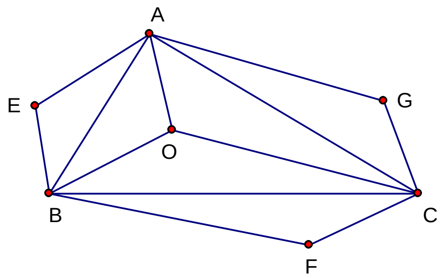
$(x^2-1)^{2017}+x^{4034}+2x^2-1\leq 0\Rightarrow(x^2-1)^{2017}+(x^2-1)\leq(-x^2)^{2017}+(-x^2)$。

令$f\left(x\right)=x^{2017}+x$，则$f\left(x\right)$单调递增，原不等式变为$f\left(x^2-1\right)\leq f\left(-x^2\right)$，从而得

$$x^2-1\leq -x^2\Rightarrow x^2\leq\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

23.设O为$\triangle ABC$的内心，$AB=5,AC=6,BC=7$，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(0\leq x,y,z\leq 1)$，则动点$P$的轨迹所覆盖的平面区域的面积为______

【解析】由向量加法的平行四边形法则，易知P的轨迹覆盖的平面区域为如下多边形$AEBFCG$



其面积为$2S_{\triangle ABC}=12\sqrt{6}$。

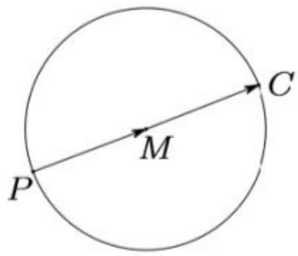
24. (浙江大学 2025年强基计划)单位圆上有三点A,B,C，AB为直径，P为圆内一点(含圆周),则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$的最大值与最小值的乘积的整数部分为_______

【解析】设AB中点为M，则

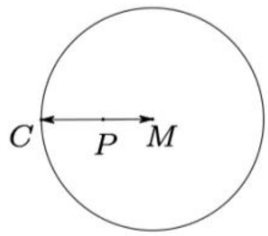
$$f(P,C)=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)^2-\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)^2}{4}+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$$

$$=|PM|^2-\frac{1}{4}|AB|^2+2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PM}=|PM|^2+2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PM}-1,$$

一方面，$f\left(P,C\right)\leq 1+2\times 2-1=4$，当$PC$为直径时取等号，所以$f\left(P,C\right)$最大值为 4;



另一方面，$f(P,C)\geqslant|PM|^2-2(1-|PM|)|PM|-1=3|PM|^2-2|PM|-1\geqslant-\dfrac{4}{3}$，当 $|PM|=\dfrac{1}{3}$ 且 C 在 MP 延长线上时取等，所以 $f(P,C)$ 最小值为 $-\dfrac{4}{3}$。



因此，$f(P,C)$ 的最大值与最小值之积为 $-\dfrac{16}{3}$，其整数部分为 -6。

25.(中科大 2025 强基计划)将 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 这 10 个数重新进行排列，得到数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$，满足对任意 $1\leqslant i\leqslant 10$ 都有 $|a_i-i|\leqslant 1$ 的数列 $\{a_n\}$ 的个数为______。

【解析】：设 M_n 表示将 $1,2,3,\cdots,n$ 重新排列，满足对任意 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有 $|a_i-i|\leqslant 1$ 的数列 $\{a_n\}$ 的个数。显然 $M_1=1,M_2=2.$

当 $n\geqslant 3$ 时，考虑最后一项 a_n 的值，易知 $a_n=n$ 或 $n-1$：

①若 $a_n=n$，则只需将 $1,2,3,\cdots,n-1$ 重新排列，使其满足 $|a_i-i|\leqslant 1$ 恒成立，

这样的数列有 M_{n-1} 个，

②若 $a_n=n-1$，则 $a_{n-1}=n$，同理可知符合题意的数列有 M_{n-2} 个，

由此可知，当 $n\geqslant 3$ 时，$M_n=M_{n-1}+M_{n-2}$，依次计算，可得

$M_3=3,M_4=5,M_5=8,M_6=13,M_7=21,M_8=34,M_9=55,M_{10}=89.$

26.已知函数 $f(x)=ae^{2x}-ae^x-xe^x$（$a\geq 0$，$e=2.718\cdots$，e 为自然对数的底数），若 $f(x)\geq 0$ 对于 $x\in R$ 恒成立.

（1）求实数 a 的值；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一极值点 x_0，且 $\dfrac{\ln 2}{2e}+\dfrac{1}{4e^2}\leq f(x_0)<\dfrac{1}{4}$.

【解析】（1）由 $f(x)=e^x(ae^x-a-x)\geq 0$，可得 $g(x)=ae^x-a-x\geq 0$，

因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)\geq g(0)$，从而 $x=0$ 是 $g(x)$ 的一个极小值点，

由于 $g'(x)=ae^x-1$，所以 $g'(0)=a-1=0$，即 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$g(x)=e^x-1-x$，$g'(x)=e^x-1$，

$\because x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$\therefore g(x)\ge g(0)=0$，故 $a=1$.

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{2x}-e^{x}-xe^{x}$，$f'(x)=e^{x}(2e^{x}-x-2)$.

令 $h(x)=2e^{x}-x-2$，则 $h'(x)=2e^{x}-1$，

$\because x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上为减函数；

$x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(-\ln 2,+\infty)$ 上为增函数，

由于 $h(-1)<0$，$h(-2)>0$，所以在 $(-2,-1)$ 上存在 $x=x_0$ 满足 $h(x_0)=0$，

$\because h(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上为减函数，

$\therefore x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为增函数，

$x\in(x_0,-\ln 2)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(x_0,-\ln 2)$ 上为减函数，

$x\in(-\ln 2,0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\ln 2,0)$ 上为减函数，

$x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

因此 $f(x)$ 在 $(-\ln 2,+\infty)$ 上只有一个极小值点 0，

综上可知，$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $x_0\in(-2,-1)$.

$\because h(x_0)=0$，$\therefore 2e^{x_0}-x_0-2=0$，

所以 $f(x_0)=e^{2x_0}-e^{x_0}-x_0e^{x_0}=(\dfrac{x_0+2}{2})^2-(\dfrac{x_0+2}{2})(x_0+1)=-\dfrac{x_0{}^2+2x_0}{4}$，$x_0\in(-2,-1)$，

$\because x\in(-2,-1)$ 时，$-\dfrac{x^2+2x}{4}<\dfrac{1}{4}$，$\therefore f(x_0)<\dfrac{1}{4}$；

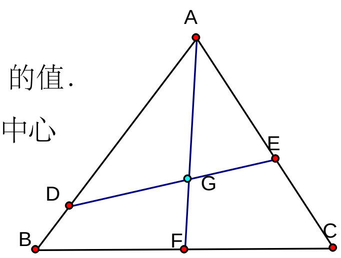
$\because \ln\dfrac{1}{2e}\in(-2,-1)$，$\therefore f(x_0)\ge f(\ln\dfrac{1}{2e})=\dfrac{\ln 2}{2e}+\dfrac{1}{4e^2}$；

综上知：$\dfrac{\ln 2}{2e}+\dfrac{1}{4e^2}\le f(x_0)<\dfrac{1}{4}$.

27.如图，已知点 G 是边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的中心，线段 DE 经过点 G，并绕点 G 转动，分别交边 AB,AC 于点 D,E；设 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AC}$，其中 $0<m\le 1$，$0<n\le 1$.

（1）求表达式 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的值，并说明理由；

（2）求 ΔADE 面积的最大和最小值，并指出相应的 m、n 的值.



【解析】:（1）如图延长 AG 交 BC 与 F，$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的中心

$\therefore F$ 为 BC 的中点，则有 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\because \overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

$\therefore \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2m}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2n}\overrightarrow{AE}$　　即 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3m}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3n}\overrightarrow{AE}$

$\because D,G,E$ 三点共线，$\therefore \frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1$，故 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$

（2）$\because \triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，$\therefore \left|AD\right|=m$，$\left|AE\right|=n$，$\therefore S_{\Delta ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn$

由 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$，$0<m\le 1,0<n\le 1$，$\therefore n=\frac{m}{3m-1},1\le\frac{1}{m}\le 2$　即 $\frac{1}{2}\le m\le 1$。

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{m^2}{3m-1}$

设 $t=m-\frac{1}{3}$，则 $m=t+\frac{1}{3}$（$\frac{1}{6}\le t\le\frac{2}{3}$），$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(t+\frac{1}{9t}+\frac{2}{3}\right)$

易知 $f(t)=t+\frac{1}{9t}$ 在 $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$ 为减函数，在 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 为增函数。

$\therefore t=\frac{1}{3}$，即 $m=n=\frac{2}{3}$，时，$f(t)$ 取得最小值 $\frac{2}{3}$，即 $S_{\Delta ADE}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

又 $f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$，$\therefore f(t)$ 取得最大值是 $\frac{5}{6}$，

则 $S_{\Delta ADE}$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{8}$，此时 $m=\frac{1}{2},n=\frac{2}{5}$ 或 $m=1,n=\frac{1}{2}$

28.我们知道，函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为奇函数.可以将其推广为:函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 是奇函数.已知函数 $f(x)=5-\frac{2}{x+1}$

⑴求函数 $y=f(x)$ 图像的对称中心;

⑵已知函数 $g(x)$ 关于点 $(1,1)$ 对称，且当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)=x^2+mx-m$.若对任意 $x_1\in[0,2]$，总存在 $x_2\in\left[-\frac{5}{7},1\right]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，求实数 m 的取值范围.

【解析】（1）设 $f(x)$ 的对称中心为 (a,b)，由题意 $f(x+a)-b$ 为奇函数，

故 $f(x+a)-b+f(-x+a)-b=0$，即 $5-\frac{2}{x+a+1}+5-\frac{2}{-x+a+1}-2b=0$，化简得

$(b-5)x^2-(b-5)(a+1)^2-2(a+1)=0$，故 $b=5,a=-1$，

即 $f(x)$ 对称中心为 $(-1,5)$

（注意：如果是选填题，$f(x)=\frac{5x+3}{x+1}$，可以直接得其对称中心为 $(-1,5)$）

（2）令 $f(x)$ 的值域为 A，$g(x)$ 的值域为 B，问题等价于 $B\subseteq A$，在此条件下求 m 的取值范围；

由于 $f(x)=5-\frac{2}{x+1}$ 在 $\left[-\frac{5}{7},1\right]$ 上单调递增，而 $f\left(-\frac{5}{7}\right)=-2,\ f(1)=4$，故 $A=[-2,4]$

现分析 $g(x)=x^2+mx-m$ 在 $[0,1]$ 上的情况，对称轴 $x=-\frac{m}{2}$

① $-\frac{m}{2}\le 0$，也即 $m\ge 0$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因 $g(x)$ 关于 $(1,1)$ 中心对称，故 $g(x)$ 在 $[1,2]$，进而在 $[0,2]$ 上都单调递增；

故 $g(x)_{\min}=g(0)=-m$，$g(x)_{\max}=g(2)=2-g(0)=2+m$，此时 $B=[-m,2+m]$，由 $[-m,2+m]\subseteq[-2,4]$，由 $\begin{cases}m\ge 0\\-m\le 2+m\\-m\ge -2\\2+m\le 4\end{cases}$，解得 $0\le m\le 2$；

② $-\frac{m}{2}\ge 1$，也即 $m\le -2$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$，进而在整个 $[0,2]$ 上单调递减，此时

$B=[2+m,-m]$，由 $\begin{cases}m\le -2\\2+m\le -m\\-m\le 4\\2+m\ge -2\end{cases}$，解得 $-4\le m\le -2$；

③ 当 $0<-\frac{m}{2}<1$，也即 $-2<m<0$ 时，$g(x)$ 在 $\left[0,-\frac{m}{2}\right]$ 和 $\left[2+\frac{m}{2},2\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\frac{m}{2},2+\frac{m}{2}\right]$ 上单调递增，故

$$g(x)_{\min}=\min\left\{g\left(-\frac{m}{2}\right),g(2)\right\},\quad g(x)_{\max}=\max\left\{g(0),g\left(2+\frac{m}{2}\right)\right\}$$

由于 $B\subseteq[-2,4]$，此时 $\begin{cases}-2<m<0\\g\left(-\frac{m}{2}\right)=-\frac{m^2}{4}-m\ge -2\\g(2)=2-g(0)=2+m\ge -2\\g(0)=-m\le 4\\g\left(2+\frac{m}{2}\right)=2-g\left(-\frac{m}{2}\right)=2+\frac{m^2}{4}+m\le 4\end{cases}$，解得 $-2<m<0$

综上所述，$m\in[-4,2]$

29.已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x(m\in\mathbf{R})$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，求实数 m 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$\ln x_1+\ln x_2>2$.

【解析】（1）由函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，知 $f'(x)\le 0$ 恒成立，

$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x\Rightarrow f'(x)=\ln x-mx$.

由 $f'(x)\le 0$ 恒成立可知 $\ln x-mx\le 0$ 恒成立，则 $m\ge\left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$，

设 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$， 由 $\varphi'(x)>0\Rightarrow x\in(0,\mathrm{e})$，$\varphi'(x)<0\Rightarrow x>\mathrm{e}$ 知，

函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减，$\therefore\varphi(x)_{\max}=\varphi(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\therefore m\ge\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（2）由（1）知 $f'(x)=\ln x-mx$．由函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个极值点 x_1，x_2，且

$x_1<x_2$，知 $\begin{cases}\ln x_1-mx_1=0\\ \ln x_2-mx_2=0\end{cases}$，则 $m=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$ 且 $m=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

联立得 $\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，即 $\ln x_1+\ln x_2=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}$，

设 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则 $\ln x_1+\ln x_2=\frac{(t+1)\cdot\ln t}{t-1}$， 要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，只需证 $\frac{(t+1)\cdot\ln t}{t-1}>2$，只需证 $\ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}$，只需证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$.

构造函数 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$.

故 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $t\in(0,1)$ 上递增，$g(t)<g(1)=0$，即 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$，

所以 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

【注意】问题（2）也可考虑对数平均值不等式，易知且$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}=m$，故

$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{\ln x_1+\ln x_2}$，由对数平均值不等式知$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，故

$\dfrac{x_1+x_2}{\ln x_1+\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，从而得$\ln x_1+\ln x_2>2$，然后将对数平均值不等式补证一下就行了。

30.**【隐零点问题】**已知函数 $f(x)=tx+\ln x(t\in R)$

（1）当$t=-1$时，证明：$f(x)\le -1$

（2）若对于定义域内任意x, $f(x)\le xe^{2x}-1$恒成立，求t的范围?

【解析】（1）其实就是贝努利不等式，略。

（2）解法一：$f(x)\le xe^{2x}-1\Leftrightarrow t\le e^{2x}-\dfrac{\ln x+1}{x}$，

令$g(x)=e^{2x}-\dfrac{\ln x+1}{x}$，则$t\le g(x)_{\min}$

由（1）知：$\ln x\le x-1$，故$\ln(xe^{2x})\le xe^{2x}-1\Rightarrow \ln x+2x\le xe^{2x}-1\Rightarrow e^{2x}-\dfrac{\ln x+1}{x}\ge 2$，仅当

$xe^{2x}=1$时取等号，因此$g(x)_{\min}=2$，故$t\in(-\infty,2]$

【解法二】问题等价于$t\le e^{2x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$恒成立

令$g(x)=e^{2x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$，则需$t\le g_{\min}(x)$

易得$g'(x)=\dfrac{2x^2e^{2x}+\ln x}{x^2}$；

考虑到$h(x)=2x^2e^{2x}+\ln x$单调递增，且$h(1)=2e^2>0, h(\dfrac{1}{4})=\dfrac{\sqrt{e}}{8}-\ln 4<0$，故$h(x)$，也即

$g'(x)$有唯一零点x_0，即$2{x_0}^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$

易知x_0为$g(x)$的极小点，从而$g_{\min}(x)=g(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$

由$2{x_0}^2e^{2x_0}+\ln x_0=0\Rightarrow 2x_0e^{2x_0}=\dfrac{-\ln x_0}{x_0}\Rightarrow \ln 2x_0+2x_0=\ln(\ln\dfrac{1}{x_0})+\ln\dfrac{1}{x_0}$；

注意到函数$x+\ln x$为单调函数，因此，必有$2x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，即$\dfrac{1}{x_0}=e^{2x_0}$；

从而 $g_{\min}(x)=e^{2x_0}-\frac{1}{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-\frac{-2x_0}{x_0}=2$；

综上，$t\le 2$