第 6 章——复数

6.1 复数的概念与运算

在初中，我们无法解 $x^2+1=0$ 这样的方程，为了让类似这样的方程有解，以及进一步研究数学的需要，我们习惯了数系的扩充（我们曾经将自然数扩充到整数，不够用，又将整数扩充到有理数，并引入无理数，从而得到实数系），在此，我们只需要引入一个虚数单位 i，并规定 $i^2=-1$，从而，就可引入新的形如下面的数：

$z=a+bi$，其中 $a,b\in R$

我们将这样的数称为复数，其中 a 叫复数 z 的实部，记作 $\mathrm{Re}(z)$，b 叫复数 z 的虚部，记作 $\mathrm{Im}(z)$，全体复数组成的集合叫复数集，用 C 表示。

对于复数 $z=a+bi$，如 $b=0$，则 z 退化为实数；如 $a\neq 0,b\neq 0$，此时也称 z 为虚数，如 $a=0,b\neq 0$，则称 z 为纯虚数

复数的模：对于复数 $z=a+bi$，我们称 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 z 的模。

共轭复数：对于复数 $z=a+bi$，我们将 $a-bi$ 叫作 z 的共轭复数，并用 $\bar{z}$ 表示，即 $\bar{z}=a-bi$。

很明显，复数 $z=a+bi$ 跟平面直角坐标系中的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的，此时的平面，我们也称为复平面。显然，

$z=a+bi$ 的模就是点 $Z(a,b)$ 到原点的距离。复平面上，y 轴上的点对应复数的虚部，因此 y 轴也叫虚轴；x 轴上的点对应复数的实部，因此 x 轴也叫实轴。

很明显，复数 $z=a+bi$ 也与复平面中的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 一一对应，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 $|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$ 也就是复数 $z=a+bi$ 的模，必要时，可将复数 $z=a+bi$ 等同于向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$。

复数的相等：我们规定复数 $z_1=a+bi$ 与复数 $z_2=c+di$ 相等，当且仅当 $a=c,b=d$（即实部与实部相等，虚部与虚部相等）

复数的加法：如 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

复数的减法：如 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则 $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$

即两个复数相加减，实部与实部相加减，虚部与虚部相加减。

复数的乘法：如 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则 $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

复数的除法：如 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

进一步，我们有

（1）$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，（2）$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，（3）$|z^n|=|z|^n$

（4）$||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$，（5）$|z|^2=|\bar{z}|^2=z\bar{z}$，（6）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

（7）$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，（8）$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

代数基本定理

一元 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\ne0)$ 在复数范围内必有 n 个零点。

推论：一元 n 次实系数多项式方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(a_n\ne0,a_i\in R)$ 的虚根成对出现，即如果 z_0 是上述方程的一个根，则 $\overline{z_0}$ 也必为上述方程的一个根。

推论：一元三次实系数方程 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0(a_3\ne0,a_i\in R)$ 至少有一个实数根。

复数的三角表示

对于复数 $z=a+bi$，我们知道，它对应复平面上的点 $Z(a,b)$，在复平面上，以 Ox 为始边，反时针方向旋转到 OZ 的位置，得 $\angle xOZ$，如果记 $\angle xOZ=\theta$，$|OZ|=r$，则 $a=r\cos\theta,b=r\sin\theta$，从而 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，这种形式称为复数的三角表示。其中 θ 称为复数 z 的辐角，若 $0\le\theta<2\pi$，则 θ 称为复数 z 的辐角主值，也角复数 z 的主辐角，用 $\arg(z)$ 表示，当然，此处的 $r=|OZ|=\sqrt{a^2+b^2}$ 就是前面提到的复数 z 的模。

复数的指数表示

我们规定：$e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$，则复数 $z=a+bi$ 可以如下表示

$z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{\theta i}$，此 θ 为复数 $z=a+bi$ 的主辐角，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $z=a+bi$ 的模，并将 $z=re^{\theta i}$ 称为复数 z 的指数表示。

复数乘除法的几何意义

令 $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)=r_1e^{\alpha i},z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)=r_2e^{\beta i}$，$z_1,z_2$ 在复平面上对应的点分别记为 Z_1,Z_2 则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{(\alpha+\beta)i}=r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{(\alpha-\beta)i}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$

显然：复数 $z_1z_2\Leftrightarrow$ 将 OZ_1 反时针方向旋转 β 到 OZ 位置，并让 $|OZ|=r_1r_2$，此时，点 Z 对应

的复数即为 z_1z_2；

复数 $\dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow$ 将 OZ_1 顺时针方向旋转 β 到 OZ 位置，并让 $|OZ|=\dfrac{r_1}{r_2}$，此时，点 Z 对应的复数即为 $\dfrac{z_1}{z_2}$

棣莫佛定理

如果复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。

即，复数的 $n(n\in N^*)$ 次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，辐角等于这个复数辐角的 n 倍。

重要结论：若 $z^n=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),k=0,1,\ \cdots,\ n-1$$

特别地，$\omega^n=1$，称 ω 为 1 的一个 n 次单位根，如果记 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则 1 的全部 n 次单位根为 $\omega^0,\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$。

例如，方程 $x^3-1=0$ 的三个根分别为 $\omega_0=1,\omega_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3},\omega_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$，如果令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，则上面的三个根也可以表示成 $\omega^0,\omega^1,\omega^2$。

重要结论：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

事实上，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

6.2 典型例题

例 1.判断正误(在括号内打“√”或“×”)

（1）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 中，虚部为 bi.(　　)

（2）复数中有相等复数的概念，因此复数可以比较大小.(　　)

（3）原点是实轴与虚轴的交点.(　　)

（4）复数的模实质上就是复平面内复数对应的点到原点的距离，也就是复数对应的向量的模.(　　)

（5）z_1,z_2 为复数，若 $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}>0$，则 $z_1^{\,2}>-z_2^{\,2}$。(　　)

（6）z_1,z_2 为复数，则 $|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2$。(　　)

【解析】(1)虚部为 b；(2)虚数不可以比较大小。(3)、(4) 明显对；

（5）$z_1^{\,2}+z_2^{\,2}$ 为实数，不能保证 $z_1^{\,2}$、$z_2^{\,2}$ 也为实数；

（6）$|z_1-z_2|^2$为实数，但$(z_1+z_2)^2-4z_1z_2$可以为虚数。

综上，(1)×　　(2)×　　(3)√　　(4)√　　（5）×　　（6）×

例 2(1).设 z 是复数，则下列命题中的假命题是(　　)

A.若 $z^2\geq 0$，则 z 是实数　　　B.若 $z^2<0$，则 z 是虚数

C.若 z 是虚数，则 $z^2\geq 0$　　　D.若 z 是纯虚数，则 $z^2<0$

（2）设 z_1,z_2 是复数，则下列命题中的假命题是(　　)

A.若$|z_1-z_2|=0$，则$\overline{z_1}=\overline{z_2}$　　　B.若 $z_1=\overline{z_2}$，则$\overline{z_1}=z_2$

C.若$|z_1|=|z_2|$，则 $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$　　　D.若$|z_1|=|z_2|$，则 $z_1{}^2=z_2{}^2$

【解析】（1）取 $z=i$，则 $z^2=-1<0$，选 C.

如令 $z=x+yi$，则 $z^2=(x^2-y^2)+2xyi$，

对于 A、B 选项，说明 z^2 为实数，故 $xy=0$，

对于 A：必有 $y=0$，故 z 为实数，A 对；

对于 B：必有 $x=0,y\neq 0$，故 z 为纯虚数，B 对；

D 显然正确。

（2）A 中，$|z_1-z_2|=0$，则 $z_1=z_2$，故 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$，成立.

B 中，$z_1=\overline{z_2}$，则 $\overline{z_1}=z_2$，成立.

C 中，$|z_1|=|z_2|$，则$|z_1|^2=|z_2|^2$，即 $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$，正确.

D 中，取 $z_1=1+\sqrt{3}i,z_2=2$，则$|z_1|=|z_2|=2$，但 $z_1{}^2\neq z_2{}^2$

综上，选 D。

例 3（1）(全国Ⅰ)设$(1+2i)(a+i)$的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 a =(　　)

A.－3　　　B.－2　　　C.2　　　D.3

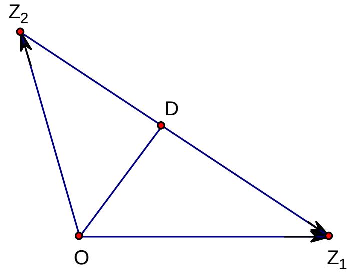
（2）(全国 II)设复数 z_1,z_2 满足$|z_1|=|z_2|=2$，且 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$，则$|z_1-z_2|=$___

【解析】（1）因为$(1+2i)(a+i)=(a-2)+(2a+1)i$，

所以$a-2=2a+1$，解得$a=-3$，故选 A.

（2）数形结合，令$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2})$，则$|\overrightarrow{OD}|=1$，

易知$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$的夹角为120°，故$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{Z_2Z_1}|=2\sqrt{3}$



【法二】令 $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$，由题意得

$a^2+b^2=4$ ① $c^2+d^2=4$ ②

$a+c=\sqrt{3}$ ③ $b+d=1$ ④

由①②③④易得 $ac+bd=-2$，故

$|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=\sqrt{8-2\times(-2)}=2\sqrt{3}$

例 4(1)(**上海高考**)若 $1+\sqrt{2}\,i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根,则(　　)

A．$b=2,c=3$． B．$b=-2,c=3$． C．$b=-2,c=-1$ D．$b=2,c=-1$．

(2) ☆．已知复数数 $z_1=m+(4-m^2)i(m\in R),z_2=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)i(\lambda,\theta\in R)$，且 $z_1=z_2$，求 λ 的取值范围

【解析】(1)：由于 $1+\sqrt{2}\,i$ 为实系数多项式方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根，因此 $1-\sqrt{2}\,i$ 也必为其一根，由韦达定理易得正确选项为 B。

(2) $z_1=z_2\Rightarrow\begin{cases}m=2\cos\theta\\4-m^2=\lambda+3\sin\theta\end{cases}$，故

$$\begin{aligned}\lambda&=4-m^2-3\sin\theta=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta\\&=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta=4\sin^2\theta-3\sin\theta\\&=4\sin^2\theta-3\sin\theta=(2\sin\theta-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\in[-\frac{9}{16},7]\end{aligned}$$

例 5（1）若 $z=1+2i$，则 $\dfrac{4i}{z\bar{z}-1}=$(　　)

A.1 B.－1 C.i D.－i

（2）若复数 $(m^2-m)+mi$ 为纯虚数，则实数 m 的值为(　　)

A.－1 B.0 C.1 D.2

【解析】(1) $\dfrac{4i}{z\bar{z}-1}=\dfrac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=i$

（2）因为复数$(m^2-m)+mi$为纯虚数，

所以$\begin{cases} m^2-m=0 \\ m\neq 0 \end{cases}$，解得$m=1$，故选 C.

例 6（1）(全国Ⅱ)设复数z_1,z_2在复平面内的对应点关于虚轴对称，$z_1=2+i$，则$z_1z_2=$(　　)

A.－5　　　B.5　　　C.－4＋i　　　D.－4－i

（2）(全国Ⅱ)已知$z=(m+3)+(m-1)i$在复平面内对应的点在第四象限，则实数m的取值范围是(　　)

A.(－3，1)　　　B.(－1，3)　　　C.(1，＋∞)　　　D.(－∞，－3)

【解析】：(1)由题意得$z_2=-2+i$，$\therefore z_1z_2=(2+i)(-2+i)=-5$，故选 A.

（2）由复数$z=(m+3)+(m-1)i$在复平面内对应的点在第四象限得

$\begin{cases} m+3>0 \\ m-1<0 \end{cases}$，解得$-3<m<1$，故选 A.

例 7(1)在复平面上，一个正方形的四个顶点按逆时针方向依次为Z_1,Z_2,Z_3,O（O为坐标原点)，其中Z_1对应的复数为$1+\sqrt{3}i$，则Z_1,Z_3所对应的复数的乘积$z_1z_3=$______

(2)已知复数$z_k=\sqrt{3}\cos\theta_k+i(\sqrt{3}\sin\theta_k+\sqrt{3})(\theta\in R)$对应复平面内的动点$Z_k(k=1,2)$，模为$\sqrt{3}$的纯虚数$z_3$对应复平面内的点$Z_3$，若$\overrightarrow{Z_3Z_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{Z_3Z_2}$，则$|z_1-z_2|=$（　　　）

A.$\sqrt{3}$　　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　　C. 3　　　D. $3\sqrt{3}$

【解析】（1）　$z_3=(1+\sqrt{3}i)(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=-\sqrt{3}+i$

故，$z_1z_3=(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+i)=-2\sqrt{3}-2i$

（2）　由题意知：$z_1-z_3=\frac{1}{2}(z_2-z_3)$，故$z_3=2z_1-z_2$，

因z_3是模为$\sqrt{3}$的纯虚数，故$2\sqrt{3}\cos\theta_1-\sqrt{3}\cos\theta_2=0$，

$2\sqrt{3}\sin\theta_1-\sqrt{3}\sin\theta_2+\sqrt{3}=\pm\sqrt{3}$

且只能是$2\sqrt{3}\sin\theta_1-\sqrt{3}\sin\theta_2=-2\sqrt{3}$，即

$\begin{cases} 2\cos\theta_1-\cos\theta_2=0 \\ 2\sin\theta_1-\sin\theta_2=-2 \end{cases}$，得$\sin\theta_1=-\frac{7}{8}$，故

$|z_1-z_2|=\sqrt{3[(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2]}$

$=\sqrt{3[\cos^2\theta_1+(\sin\theta_1+2)^2]}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，选 B。

例 8(1)在复平面内，把与复数$3-\sqrt{3}i$对应的向量绕原点O按顺时针方向旋转60°，求与所得的向量对应的复数（用代数形式表示）。

(2) $z=\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^6}{(-1+i)^4}(3+4i)^2$，则$|z|=$_____ （3）计算$(-1+\sqrt{3}i)^6(-1+i)^4$

【解析】（1）所求复数为$(3-\sqrt{3}i)[\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)]=(3-\sqrt{3}i)(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=-2\sqrt{3}i$

（2）$|z|=\dfrac{|-1+\sqrt{3}i|^6}{|-1+i|^4}|3+4i|^2=\dfrac{2^6}{(\sqrt{2})^4}\times 5^2=400$

（3）$(-1+\sqrt{3}i)^6(-1+i)^4=[2(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)]^6[\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i)]^4$

$=2^8(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})^6(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})^4$

$=2^8(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-2^8$

例 9.**求证：**（1）$(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)=i$

（2）$(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=\cos 5\theta-i\sin 5\theta$

【证明】（1）：$(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)=(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=i$，证毕。

（2）$(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$

$=[\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)][\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)]$

$=\cos(-5\theta)+i\sin(-5\theta)=\cos 5\theta-i\sin 5\theta$

证毕。

例 10（1）复数$\sin 40^\circ-i\cos 40^\circ$的辐角主值为（　　）

A. 40°　　B. 140°　　C. 220°　　D. 310°

（2）复数$6+5i$与$-3+4i$分别表示向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$，则表示向量$\overrightarrow{BA}$的复数为_________

（3）如果向量$\overrightarrow{OZ}$对应复数$4i$，$\overrightarrow{OZ}$绕O点按逆时针方向旋转45°后再把模变成原来的$\sqrt{2}$倍得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，那么与$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数是_______（用代数形式表示）。

【解析】（1）：$\sin 40^\circ-i\cos 40^\circ=\cos 50^\circ-i\sin 50^\circ=\cos 310^\circ+i\sin 310^\circ$，

故其辐角的主值为310°，选 D。

（2）：$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，故其对应的复数为$(6+5i)-(-3+4i)=9+i$

（3）：$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数为

$4i\times[\sqrt{2}]e^{i\times45^\circ}=4\sqrt{2}i(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)=4\sqrt{2}i(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=-4+i$

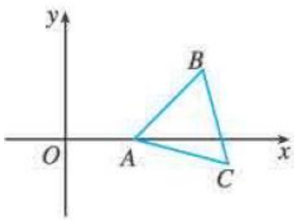
【法二】$\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数为 $4e^{i\times90^\circ}\times\sqrt{2}\times e^{i\times45^\circ}=4\sqrt{2}e^{i\times135^\circ}=4\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=-4+i$

例 11.在复平面的上半平面内有一个菱形 $OABC,\angle AOC=120^\circ$，点 A 所对应的复数为 $2+i$，求另外两个顶点 B,C 所对用的复数。

【解析】依题意，向量 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为 $\overrightarrow{OA}$ 按逆时针方向分别旋转 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 而得，故 B 对应的复数为 $(2+i)e^{\frac{\pi}{3}i}=(2+i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}+1}{2}i$

C 对应的复数为 $(2+i)e^{\frac{2\pi}{3}i}=(2+i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}i$，

例 12.如图，复平面内的 $\triangle ABC$ 是等边三角形，它的两个顶点 A,B 的坐标分别是 $(1,0),(2,1)$，求点 C 的坐标。



【解析】易知 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，其对应的复数为 $z_1=1+i$，

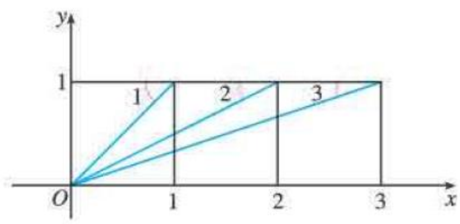
令 $C(x,y)$，则 $\overrightarrow{AC}=(x-1,y)$，其的复数为 $z_2=(x-1)+yi$，依题意得

$z_2=z_1e^{-\frac{\pi}{3}i}=(1+i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$，

即 $x-1=\frac{1+\sqrt{3}}{2},y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，故 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，

从而得 C 点的坐标为 $(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$

例 13.如图，已知平面内并列的三个全等的正方形，利用复数证明 $\angle1+\angle2+\angle3=\frac{\pi}{2}$。



【解析】如图，令 A,B,C 三点所对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3，为方便，令 $\angle 1,\angle 2,\angle 3$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$，

很显然，$z_1=1+i,z_2=2+i,z_3=3+i$，当然也有

$z_1=\sqrt{2}e^{i\theta_1},z_2=\sqrt{5}e^{i\theta_2},z_3=\sqrt{10}e^{i\theta_3}$，

故，$z_1z_2z_3=10e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$，

又，$z_1z_2z_3=(1+i)(2+i)(3+i)=10i=10e^{\frac{\pi}{2}i}$

故 $10e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=10e^{\frac{\pi}{2}i}$，故 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\dfrac{\pi}{2}$，

即 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\dfrac{\pi}{2}$，证毕。

例 14（1）在复平面内，复数 $6+5i,-2+3i$ 对应的点分别为 A,B，若 C 为线段 AB 的中点，则点 C 对应的复数是(　　)

A.4＋8i　　B.8＋2i　　C.2＋4i　　D.4＋i

（2）已知复数 $z=\dfrac{(4-3i)(1+i)}{3+4i}$，则 $|\bar{z}|=$_____

【解析】（1）易知 $A(6,5),B(-2,3)$，$\therefore$线段 AB 的中点 $C(2,4)$，则点 C 对应的复数为 $z=2+4i$

（2）$|\bar{z}|=|z|=\dfrac{|(4-3i)(1+i)|}{|3+4i|}=\dfrac{|(4-3i)||(1+i)|}{|3+4i|}=|1+i|=\sqrt{2}$

例 15.化简与求值：（1）$\dfrac{(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)}$　　（2）$\dfrac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}$

（3）求 $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{100}$ 的值

【解析】（1）：由棣模佛定理知：原式$=\dfrac{\cos 9\theta+i\sin 9\theta}{\cos 8\theta+i\sin 8\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

（2）原式$=\dfrac{\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\cos(-2\varphi)+i\sin(-2\varphi)=\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi$

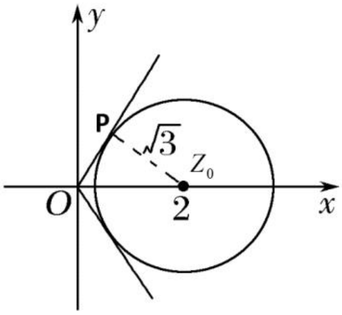
（3）$(1+\sqrt{3}i)^{100}=[2(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)]^{100}=2^{100}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^{100}$

$=2^{100}(\cos\dfrac{100\pi}{3}+i\sin\dfrac{100\pi}{3})=2^{100}(-\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3})=2^{100}(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

例 16.已知复数 $z=x+yi$，且 $|z-2|=\sqrt{3}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为________；最小值为________.

【解析】：令复数 $z=x+yi$ 在复平面上所对应的点为 $P(x,y)$，复数 $z_0=2$ 所对应的点为 Z_0，由 $|z-2|=|z-z_0|=\sqrt{3}$ 知 P 的轨迹为如图所示的以 Z_0 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆。

易知：$\frac{y}{x}$ 为直线 OP 的斜率，显然 $(\frac{y}{x})_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，$(\frac{y}{x})_{\min}=-\sqrt{3}$。



例 17．设复数 z 满足 $|z|<1$ 且 $|\overline{z}+\frac{1}{z}|=\frac{5}{2}$ 则 $|z|=$（　　）

A $\frac{4}{5}$　　　　B $\frac{3}{4}$　　　　C $\frac{2}{3}$　　　　D $\frac{1}{2}$

【解析】 由 $|\overline{z}+\frac{1}{z}|=\frac{5}{2}\Rightarrow|z||\overline{z}+\frac{1}{z}|=\frac{5}{2}|z|\Rightarrow|z\overline{z}+1|=\frac{5}{2}|z|\Rightarrow|z|^2+1=\frac{5}{2}|z|$，

解得 $|z|=2$（舍去）、$\frac{1}{2}$。

故正确选项为 D

例 18（上海交大自招）设 $\lambda\in R$，若二次方程 $(1-i)x^2+(\lambda+i)x+1+\lambda i=0$ 有两个虚根，求 λ 满足的充要条件

【解析】若方程有实根，原方程整理得 $(x^2+\lambda x+1)+(x^2-x-\lambda)i=0$，则

$\begin{cases}x^2+\lambda x+1=0\\x^2-x-\lambda=0\end{cases}$ 有实数解，由此得 $(\lambda+1)x+(\lambda+1)=0$

如 $\lambda=-1$，则 $x^2-x+1=0$（判别式 $\Delta<0$）无实根，所以 $\lambda\neq-1$

从而只能是 $x=-1$，得 $\lambda=2$

所以当 $\lambda\neq 2$ 时，方程无实根，即原方程有两个虚根的充要条件为 $\lambda\neq 2$。

例 19. $\triangle ABC$ 的顶点 A 表示的复数为 $3i$，底边 BC 在实轴上滑动，且 $|BC|=2$，求 $\triangle ABC$ 的外心轨迹。

【解析】设外心 M 对应的复数为 $z=x+yi(x,y\in R),B,C$ 两点对应的复数分别是 $b,b+2$.因为外心 M 是三边垂直平分线的交点，

而 AB 的垂直平分线方程为 $|z-b|=|z-3i|$，BC 的垂直平分线的方程为 $|z-b|=|z-b-2|$，所以点 M 对应的复数 z 满足 $|z-b|=|z-3i|=|z-b-2|$，

即$|(x-b)+yi|=|x+(y-3)i|=|(x-b-2)+yi|$

消去b解得$x^2=6(y-\frac{4}{3})$.

所以$\triangle ABC$的外心轨迹是抛物线。

例 20（复旦自招） 设z_1,z_2为一对共轭复数，如果$|z_1-z_2|=\sqrt{6}$且$\frac{z_1}{z_2^2}$为实数，那么$|z_1|=|z_2|$ =______。

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．3　　D．$\sqrt{6}$

【解析】 令$z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$z_2=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

由$|z_1-z_2|=r|2i\sin\theta|=\sqrt{6}$知$\sin\theta\neq 0$，

由$\frac{z_1}{z_2^2}=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r^2[\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)]}=\frac{1}{r}(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$为实数知$\sin 3\theta=0$，即$3\sin\theta-4\sin^3\theta=0$

因$\sin\theta\neq 0$，故$3-4\sin^2\theta=0$，故$|\sin\theta|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由$|z_1-z_2|=r|2i\sin\theta|=\sqrt{3}r=\sqrt{6}$知$r=\sqrt{2}$

$|z_1|=|z_2|=r=\sqrt{2}$，选 A.

例 21（北大博雅） 设a,b,c为实数，$a,c\neq 0$，方程$ax^2+bx+c=0$的两个虚根x_1,x_2满足$\frac{{x_1}^2}{x_2}$为实数，则$\sum_{k=0}^{2015}(\frac{x_1}{x_2})^k$等于（　　）

A. 1　　B. 0　　C. $\sqrt{3}i$　　D. 前三个答案均不对

【解析】 由题意$x_1=\overline{x_2}$，故$\frac{{x_1}^2}{x_2}=\overline{\left(\frac{{x_1}^2}{x_2}\right)}=\frac{\overline{x_1}^2}{\overline{x_2}}=\frac{{x_2}^2}{x_1}\Rightarrow {x_1}^3={x_2}^3\Rightarrow(\frac{x_1}{x_2})^3=1$

令$\frac{x_1}{x_2}=\omega$，则$\omega^3=1$，故$\sum_{k=0}^{2015}(\frac{x_1}{x_2})^k=\frac{1-\omega^{2016}}{1-\omega}=\frac{1-1}{1-\omega}=0$，选 B。

例 22（中国科技大学自招） 复数z_1,z_2满足$|z_1|=2,|z_2|=3,|z_1+z_2|=4$，则$\frac{z_1}{z_2}=$（　　）

【解析】 令$z_1=2(\cos\alpha+i\sin\alpha),z_2=3(\cos\beta+i\sin\beta)$，其中$\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，

$z_1+z_2=(2\cos\alpha+3\cos\beta)+i(2\sin\alpha+3\sin\beta)$

$|z_1+z_2|=4 \Rightarrow \sqrt{(2\cos\alpha+3\cos\beta)^2+(2\sin\alpha+3\sin\beta)^2}=4$

化简得：$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

即$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{4}$，故$\sin(\alpha-\beta)=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

故，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{3}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{6}$

例23． 设复数z_1,z_2满足$\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0$，且$\mathrm{Re}(z_1{}^2)=\mathrm{Re}(z_2{}^2)=2$，（其中$\mathrm{Re}(z)$表示复数$z$的实部），则$\mathrm{Re}(z_1z_2)$的最小值为______

【解析】：设$z_k=x_k+y_ki(k=1,2,x_k,y_k\in R)$。由条件知

$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,x_k{}^2-y_k{}^2=\mathrm{Re}(z_k{}^2)=2$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}((x_1+y_1i)(x_2+y_2i))=x_1x_2-y_1y_2=\sqrt{(y_1{}^2+2)(y_2{}^2+2)}-y_1y_2\\&=\sqrt{y_1{}^2y_2{}^2+2(y_1{}^2+y_2{}^2)+4}-y_1y_2\\&\geq\sqrt{y_1{}^2y_2{}^2+4|y_1y_2|+4}-y_1y_2=(|y_1y_2|+2)-y_1y_2\geq 2\end{aligned}$$

又当$z_1=z_2=\sqrt{2}$时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$，故$\mathrm{Re}(z_1z_2)$的最小值为2。