§ 5.2 平面向量基本定理及其坐标表示

5.2.1 相关概念

学习目标

1、掌握平面向量的基本定理

2、掌握平面向量的坐标表示及相关运算

3、掌握向量平行、垂直的坐标法定义及三点共线的基本性质

4、掌握函数图像平移中的按向量平移

1．向量的坐标表示

我们知道：两个向量如果长度相等，方向相同，则可将他们视为同一个向量。因此，对于平面上任意一个向量$\vec{a}$，我们过坐标原点O作一个向量$\overrightarrow{OA}$，使得$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，此时，如果$A$点的坐标为$(x,y)$，我们就记$\vec{a}=(x,y)$，这就是向量$\vec{a}$的坐标表示。显然

（1） 如$\vec{a}=(x,y)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

（2） 如$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

2．基于坐标表示的向量之运算规则。

如$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则

（1） $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$　　（2） $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

3.向量的共线与垂直

设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$为两个非零向量，则

（1） $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$；　　（2） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$；

证明：（1） $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$存在实数$\lambda$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，即$(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$，

也即$x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2$，故$x_1y_2-x_2y_1=\lambda x_2y_2-\lambda x_2y_2=0$

（2）不妨设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，即$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，不妨设$x_1x_2\neq 0$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow OA\perp OB\Leftrightarrow k_{OA}k_{OB}=-1\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\times\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0;$$

$x_1x_2=0$时的特殊情况留给读者自己证明。

4．平面向量基本定理

如果$\vec{e_1},\vec{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于该平面内的任意向量$\vec{a}$，有且只有一对

实数 λ_1,λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$，向量 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 叫表示这一平面内所有向量的一组基底.

5．基于坐标表示的向量的内积

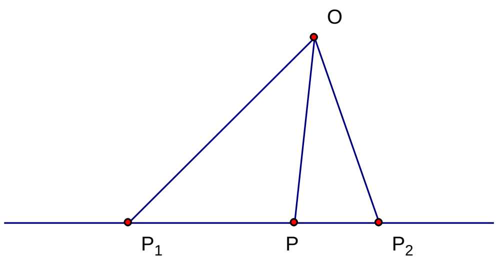
设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

读者可利用**向量余弦定理**自行证明：这里定义的内积跟前面定义的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$（其中 α 为 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角）是一致的。

6.向量的定比分点公式

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的分点,λ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，如图，则

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$$



7.三角形的四心

（1） G 为 ΔABC 的重心：如 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则

$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$，且 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

（2） O 为 ΔABC 外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$

（3） O 为 ΔABC 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

（4） O 为 ΔABC 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

5.2.2 典型例题

例 1.在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a}=(3,2)$ 表示出来的是（　　）

A. $\vec{e_1}=(0,0),\vec{e_2}=(1,2)$　　B . $\vec{e_1}=(-1,2),\vec{e_2}=(5,-2)$

C. $\vec{e_1}=(3,5),\vec{e_2}=(6,10)$　　D. $\vec{e_1}=(2,-3),\vec{e_2}=(-2,3)$

【解析】 由平面向量基本定理知：只有 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是基底才能将 $\vec{a}$ 表示出来，故，$\vec{e_1},\vec{e_2}$ 不平行。

选项 A：零向量与任何一个向量均平行；

选项 C: $\overrightarrow{e_2}=2\overrightarrow{e_1}$，即$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$平行;

选项 D: $\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_2}$，即$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$平行;

只有选项 B 中的$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$不平行，可以作为基底，选 B。

例 2．设$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{e_1}+k\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，若$A$、$B$、$D$三点共线，则$k$的值为

【解析】易知：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})-(\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_1}-4\overrightarrow{e_2}$；

又，A、B、D三点共线，故$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{-4}{k}\Rightarrow k=-8$_

例 3（1）设向量$\vec{a}=(1,-3),\ \vec{b}=(-2,4)$，若表示向量$4\vec{a},\ 3\vec{b}-2\vec{a},\ \vec{c}$的有向线段首尾相接能构成三角形，则向量$\vec{c}=($　　$)$.

A．(4,6)　　　　B．(－4，－6)　　　　C．(4，－6)　　　　D．(－4,6)

（2）已知向量$\vec{a}=(2,-1),\vec{b}=(-1,m),\vec{c}=(-1,2)$，若$((\vec{a}+\vec{b})//\vec{c}$，则$m=$________.

【解析】（1）由题意有$4\vec{a}+(3\vec{b}-2\vec{a})+\vec{c}=\vec{0}$，

故，$\vec{c}=-4\vec{a}-(3\vec{b}-2\vec{a})=-2\vec{a}-3\vec{b}=(-2,6)-(-6,12)=(4,-6)$，选 D。

(2) $(\vec{a}+\vec{b})=(1,m-1)$，因$(\vec{a}+\vec{b})//\vec{c}$，所以$\frac{1}{-1}=\frac{m-1}{2}$，解得$m=-1$

例 4.设点$A(2,0)$，$B(4,2)$,若点P在直线AB上，且$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AP}\right|$,则点$P$的坐标为(　　　)

A．$(3,1)$　　　　B．$(1,-1)$　　　　C．$(3,1)$或$(1,-1)$　　　　D．无数多个

【解析】设$P(x,y)$，由$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AP}\right|$得$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}$，或$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AP}$，

$\overrightarrow{AB}=(2,2),\overrightarrow{AP}=(x-2,y)$，

由$(2,2)=2(x-2,y)$，解得$x=3,y=1$，故$P(3,1)$；

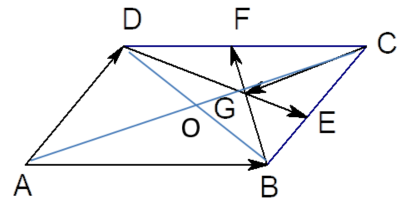
由$(2,2)=-2(x-2,y)$，解得$x=1,y=-1$，故$P(1,-1)$

例 5.如图，▱$ABCD$中，E,F分别是BC,DC的中点，G为BF与DE的交点，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试以$\vec{a}$，$\vec{b}$为基底表示$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CG}$.

【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

G 是△ CBD 的重心，故 $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$



例 6、点 O 在 $\triangle ABC$ 内部且满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\triangle ABC$ 面积与凹四边形 $ABOC$ 面积之比是（　　）

A．0　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．$\frac{5}{4}$　　　　D．$\frac{4}{3}$

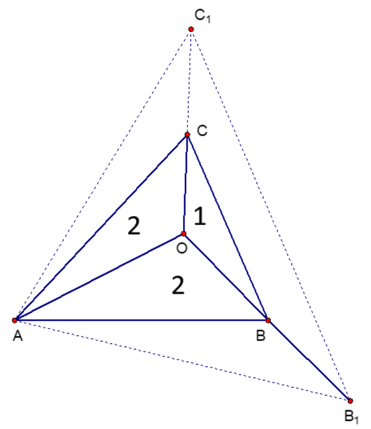
【解析】 由题设有 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABOC}}=\frac{1+2+2}{2+2}=\frac{5}{4}$，选 C。

【法二】：如图，延长 OC 至 C_1，使得 $OC=CC_1$；延长 OB 至 B_1，使得 $OB=BB_1$。

由 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$，故 O 为 $\triangle AB_1C_1$ 的重心。

设 $\triangle OBC$ 的面积为 s，则 $\triangle B_1OC_1$ 的面积为 $4s$，因此 $\triangle AOB$，$\triangle AOC$ 的面积均为 $2s$，

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $5s$，凹四边形 $ABOC$ 的面积为 $4s$，二者之比为 $\frac{5}{4}$



【注意】我们在方法一中实际用到了一个所谓的奔驰定理:

设点 O 为 $\triangle ABC$ 内部任意一点，则满足 $S_{\triangle BOC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\triangle AOC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\triangle AOB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

例 7．已知在 ΔABC 中，$AC=3$，G 为重心，边 AC 的垂直平分线与 BC 交于点 N，且 $\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{NA}=-4$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________

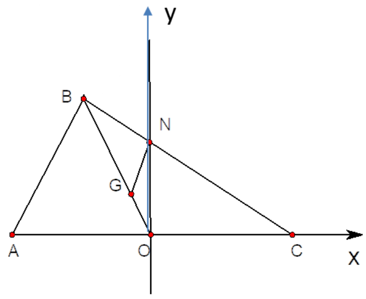
【解析】 以 AC 所在直线为 x 轴，AC 的垂直平分线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标

系，则 $A(-\frac{3}{2},0),C(\frac{3}{2},0)$，令 $B(x,y),N(0,h)$，

则 $G(\frac{x}{3},\frac{y}{3})$，$\overrightarrow{NG}=(\frac{x}{3},\frac{y}{3}-h),\overrightarrow{AC}=(3,0)$

由 $\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{NA}=-4\Rightarrow\overrightarrow{NG}\bullet\overrightarrow{AC}=-4\Rightarrow x=-4$

故，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=3x+\frac{9}{2}=-\frac{15}{2}$。



例 8．函数 $y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$ 的最大值是______

【解析】 $y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}=5\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{5-x}$

构造向量 $\vec{a}=(5,\sqrt{2}),\ \vec{b}=(\sqrt{x-1},\sqrt{5-x})$，

则 $y=\vec{a}\bullet\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{27}\sqrt{4}=6\sqrt{3}$

当且仅当 $\frac{5}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-x}}$，即 $x=\frac{127}{27}$ 时取等号。

即 y 的最大值为 $6\sqrt{3}$。

例 9．17 世纪法国数学家费马在给朋友的一封信中曾提出一个关于三角形的有趣问题：在三角形所在平面内，求一点，使它到三角形每个顶点的距离之和最小，现已证明：在 $\triangle ABC$ 中，若三个内角均小于 120°，则当点 P 满足 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$ 时，点 P 到三角形三个顶点的距离之和最小，点 P 被人们称为费马点。根据以上知识，已知 $\vec{a}$ 为平面内任意一个向量，$\vec{b},\vec{c}$ 是平面内两个互相垂直的向量，且 $\left|\vec{b}\right|=2,\left|\vec{c}\right|=3$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{c}\right|$ 的最小值为______。

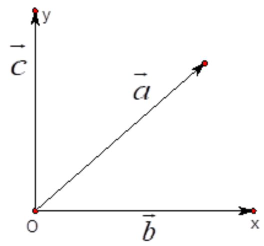
【解析】 以 $\vec{b}$ 为 x 轴，$\vec{c}$ 为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，则 $\vec{b}=(2,0),\vec{c}=(0,3)$，

令 $\vec{a}=(x,y)$，

则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{c}\right|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ (*)

令 $A(0,3),B(-2,0),C(2,0),P(x,y)$，则（*）表示 $|PA|+|PB|+|PC|$，问题转化为求

$|PA|+|PB|+|PC|$的最小值。

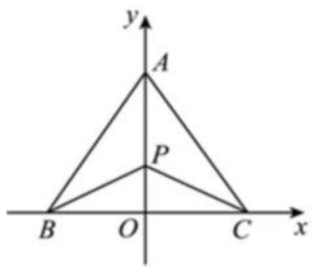


参考下图，易知$\triangle ABC$三个内角均小于120°，故P为$\triangle ABC$的费马点时$|PA|+|PB|+|PC|$将最小。

由于$\triangle ABC$为等腰三角形，此时P在y轴上，故$|PB|=|PC|=\dfrac{2}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$|PA|=3-|PO|=3-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故$|PA|+|PB|+|PC|=2\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\left(3-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=3+2\sqrt{3}$，也即

$|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{c}|$的最小值为$3+2\sqrt{3}$。



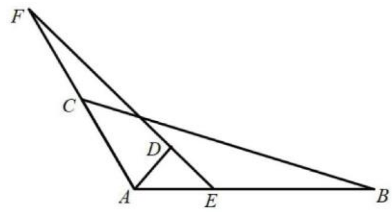
例 10．在$\triangle ABC$中，$AB=2AC=6$，$A=120^{\circ}$，点D满足$\overrightarrow{AD}=\dfrac{x}{3x+3y}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2y}{x+y}\overrightarrow{AC}$，则$|\overrightarrow{AD}|$的最小值为________

【解析】如图，令$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{AE}+\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AF}$，

因$\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=1$，故$D,E,F$三点共线，故$AD\perp EF$时，$|\overrightarrow{AD}|$最小，

易知$AE=2, AF=6$，由余弦定理易得$EF=2\sqrt{13}$

由$\dfrac{1}{2}AE\times AF\times\sin A=\dfrac{1}{2}AD\times EF$，解得$AD=\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$，即$|\overrightarrow{AD}|$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$。



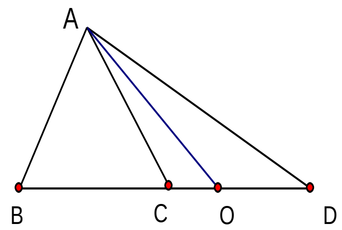
例 11. 在$\triangle ABC$中，点D在线段BC的延长线上，且$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，点$O$在线段$CD$上（点$O$与点$C,D$不重合），若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x$的取值范围是　（　　　　）

A．（0，1）　　　B．（0，$\frac{1}{3}$）　　　C．（－1，0）　　　D．（$-\frac{1}{3}$，0）

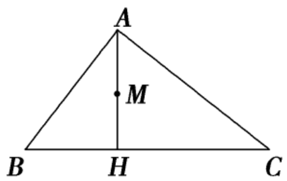
【解析】令$\overrightarrow{CO}=t\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{BC}$，由题意知：$0<t<1$

又，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+t(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-t\overrightarrow{AB}+(1+t)\overrightarrow{AC}$

而$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，故$x=-t\in(-1,0)$；选 C。



例 12.如图所示，在$\triangle ABC$中，H为BC上异于B,C的任一点，M为AH的中点，若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$________.



【解析】　由B,H,C三点共线，可令$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，

又M是AH的中点，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-x)\overrightarrow{AC}$

又$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，故$\lambda+\mu=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(1-x)=\frac{1}{2}$。

例 13.已知G是$\triangle ABC$的重心，若满足$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$的点$P$在$\triangle GBC$内部，则$\mu$的取值范围是（　　　　）

【解析】如图，令D为AB中点，E为BC中点，DE交BG于F。

易知$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{DF}$，

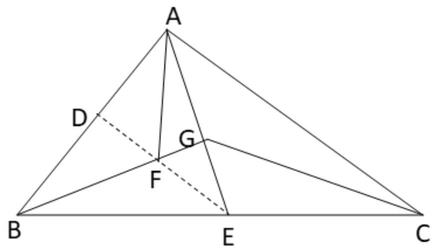
从而$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+2\mu\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+4\mu\overrightarrow{DF}$

显然，P只能在FE上动。

当P位于E时，$2\mu=1$，即$\mu=\frac{1}{2}$；

当P位于F时，$4\mu=1$，即$\mu=\frac{1}{4}$。

综上，$\mu\in(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$。



例 14.设$0\le\theta<2\pi$，已知两个向量$\overrightarrow{OP_1}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{OP_2}=\left(2+\sin\theta,2-\cos\theta\right)$，则向量$\overrightarrow{P_1P_2}$长度的最大值是（　　）

A.$\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{3}$　　　　C.$3\sqrt{2}$　　　　D.$2\sqrt{3}$

【解析】 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(2+\sin\theta-\cos\theta,2-\cos\theta-\sin\theta)$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(2+\sin\theta-\cos\theta)^2+(2-\cos\theta-\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{2(2-\cos\theta)^2+2\sin^2\theta}=\sqrt{10-8\cos\theta}\le\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

易知等号可取，故$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$的最大值为$3\sqrt{2}$。

例 15．已知$\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}),\vec{c}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}),x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=(1,1)$则$x^2+y^2+z^2$的最小值为(　　)

A　1　　　　B　$\frac{4}{3}$　　　　C　$\frac{3}{2}$　　　　D　2

【解析】 $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z,x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2})$

故，$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=1 \\ x-\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z=-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y+z=2x-2 \end{cases}$，因此，

$x^2+y^2+z^2=x^2+\dfrac{(y+z)^2+(y-z)^2}{2}=x^2+2(x-1)^2+\dfrac{2}{3}=3(x-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{4}{3}$，选 B

例 16．如图，$OM\,//\,AB$，点 P 在由射线 OM，线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内(不含边界)运动，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是___；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，y 的取值范围是__

【解析】过 P 作 AB 的平行线，分别交 OA,OB 于 A',B'，令 $OA=\lambda OA'$，则 $OB=\lambda OB'$，且 $\lambda\in(1,+\infty)$

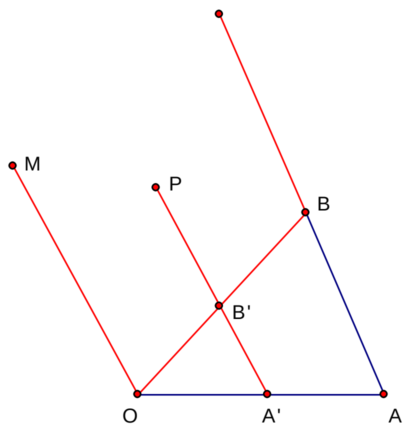
由 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\lambda x\overrightarrow{OA'}+\lambda y\overrightarrow{OB'}$，且 P,B',A' 三点共线知：$\lambda x+\lambda y=1$

考虑到 P 在线段 $A'B'$ 外，且 P 隔 B' 近，隔 A' 远，

故 $\lambda x<0$，进而得 $x<0$，即 $x\in(-\infty,0)$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，由 $\lambda x+\lambda y=1\Rightarrow-\dfrac{\lambda}{2}+\lambda y=1$，

故，$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\lambda}$，因 $\lambda\in(1,+\infty)$，故 $y\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$



例 17．请用向量法证明

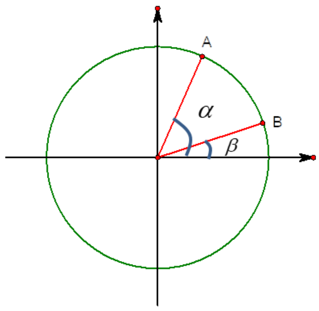
（1）两角差的余弦公式

（2）余弦定理

证明（1）：构造 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$，而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

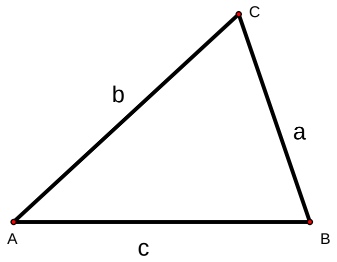
故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



(2)：如图，$\triangle ABC$中，由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$得

$(\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$

即$a^2=b^2+c^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A$



同理可得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

例 18．在$\triangle ABC$中，若$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=1,\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=2$，则$\triangle ABC$的面积的最大值为（　　）

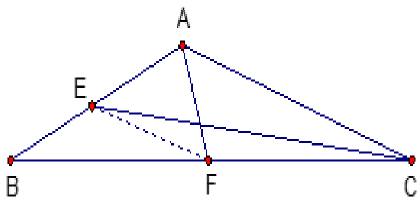
A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

【解析】如图，令E,F分别为AB,BC之中点，由题意知：$\left|AF\right|=\dfrac{1}{2},\left|CE\right|=1$，

考虑到$S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，

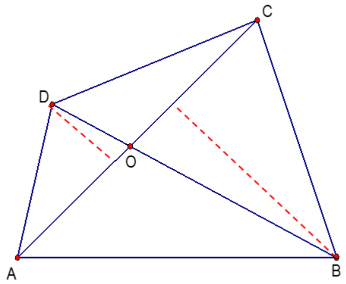
故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{3}S_{AEFC}\le\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}\left|CE\right|\left|AF\right|=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{3}$，当且仅当$AF\perp CE$时取等号，

故选 D。



【注意】我们在这里用到一个重要结论：对于四边形$ABCD$，则

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC||BD|\sin\langle AC,BD\rangle\le\frac{1}{2}|AC||BD|$，仅当 $AC\perp BD$ 时取等号。



例 19．在△ABC 中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC},AC=3BC,\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC$，当 $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}-|\overrightarrow{AB}|$ 最小时，△ABC 的面积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{16}$

【解析】如图，令 E 为 AB 的中点，不妨设 $AC=3x$，由题意知 $DC=x$，$BC=x$，另外，$\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC\Rightarrow\sin\angle ADB=3\sin\angle BAC\Rightarrow AB=3BD$，

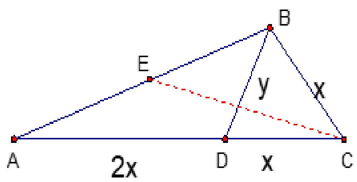
令 $BD=y$，则 $AB=3y$，由平行四边形的性质（两条对角线的平方和等于四条边的平方和）知:

$$(2CE)^2+AB^2=2\left(CA^2+CB^2\right)\Rightarrow 4CE^2=2\left(9x^2+x^2\right)-9y^2$$

故 $CE^2=5x^2-\frac{9y^2}{4}$

对于 $\angle C$，在△ABC 和△BDC 中分别用余弦定理得:

$$\frac{x^2+(3x)^2-(3y)^2}{2x\cdot 3x}=\frac{x^2+x^2-y^2}{2x\cdot x}\Rightarrow x^2=\frac{3}{2}y^2$$



因 $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}\right)\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}\right)=\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}\right)\left(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{CE}^2-\overrightarrow{EB}^2$

故，$\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}-|\overrightarrow{AB}|=CE^2-\frac{9y^2}{4}-3y=5x^2-\frac{9y^2}{4}-\frac{9y^2}{4}-3y=3y^2-3y$，

显然 $y=\frac{1}{2}$ 时 $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}-|\overrightarrow{AB}|$ 取得最小值，此时 $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

从而$\cos C=\frac{x^2+x^2-y^2}{2x\cdot x}=\frac{2y^2}{3y^2}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

从而，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{3\sqrt{5}}{16}$，选 D。