# 习题课

1. 已知 $m,n$ 为异面直线，$m\perp$ 平面 $\alpha$，$n\perp$ 平面 $\beta$，若直线 $l$ 满足 $l\perp m, l\perp n, l\not\subset\alpha, l\not\subset\beta$，则(　　)

A. $\alpha//\beta, l//\alpha$　　　　B. $\alpha$ 与 $\beta$ 相交，且交线平行于 $l$

C. $\alpha\perp\beta$，$l\perp\beta$　　　　D. $\alpha$ 与 $\beta$ 相交，且交线垂直于 $l$

**【解】**借助如图所示的长方体模型，很明显，A、C、D 均错，只能选 B。

2. 已知四边形 $ABCD, AB=BD=DA=2, BC=CD=\sqrt{2}$。现将 $\triangle ABD$ 沿 $BD$ 折起，当二面角 $A-BD-C$ 处于 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 过程中，直线 $AB$ 与 $CD$ 所成角的余弦值取值范围是(　　)

A. $\left[-\dfrac{5\sqrt{2}}{8},\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$　　B. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{8},\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right]$　　C. $\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$　　D. $\left[0,\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right]$

**【解】**如图所示，取 $BD$ 的中点 $E$，连接 $AE,CE$，$\therefore \angle AEC$ 即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，

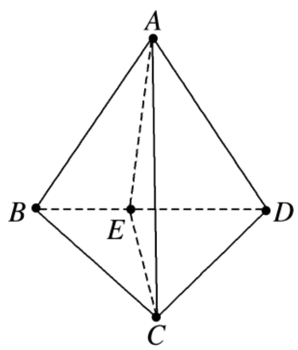
而 $AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cos\angle AEC=4-2\sqrt{3}\cos\angle AEC$,

因 $\angle AEC\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，故 $AC^2\in[1,7]$

由**斯坦纳定理**得

$$\cos(AB,CD)=\frac{|(AD^2+BC^2)-(AC^2+DB^2)|}{2AB\times CD}$$

$$=\frac{|(4+2)-(AC^2+4)|}{2\times2\times\sqrt{2}}=\frac{|2-AC^2|}{4\sqrt{2}}\in[0,\frac{5\sqrt{2}}{8}]$$，选 D。

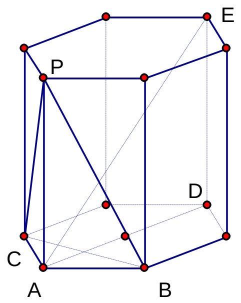



3. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABC$，$\angle BAC=120^\circ, PA=AB=AC=2$，若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A. $10\sqrt{3}\pi$　　B. $18\pi$　　C. $20\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

**【解】**将三棱锥扩充成如图所示的正六棱柱，该正六棱柱的高为$2$，底面是边长为$2$的正六边形，正六棱柱的体对角线$AE$即为所求外接球的直径，即

$4R^2=AE^2=4^2+2^2=20$，故题中三棱锥外接球的表面积为$20\pi$，选 C。




此时，$AP,AB,AM$两两垂直，以$AP,AB,AM$为棱构造一个长方体，长方体的体对角线则为三棱锥$P-ABC$外接圆的直径，即$4R^2=12+2^2+2^2=20$，所以，外接球的面积为$20\pi$。

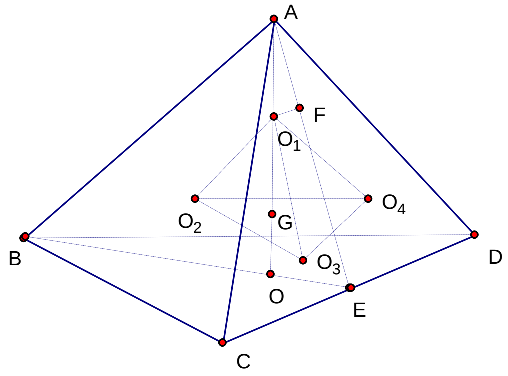
4. **（全国 II）**将半径都为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个正四面体的高的最小值为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$　（B）$2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　（C）$4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　（D）$\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

**【解】**如图，显然 4 个钢球两两相切且每个钢球与正四面体$A-BCD$的面也相切时，正四面体$A-BCD$的高最小。这时 4 个钢球的球心构成一个小正四面体$O_1-O_2O_3O_4$，设$G$、$O$分别为$O_1-O_2O_3O_4$和$A-BCD$底面的重心，易知$A,O_1,G,O$四点共线，设$A-BCD$的棱长为$a$，$AO_1=x$，易知:

$AO=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$O_1G=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$OE=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

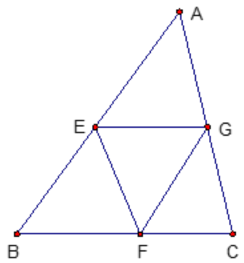
由$\sin\angle O_1AF=\dfrac{1}{x}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{1}{3}$，得$x=3$,故$AO=3+1+O_1G=4+\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$，选(C)



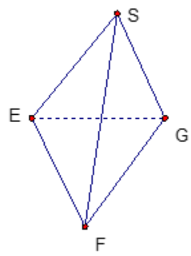

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2\sqrt{m}, AC=2\sqrt{n}, BC=2\sqrt{10}, AB+AC=8, E,F,G$ 分别为 $AB,BC,AC$ 三边中点，将 $\triangle BEF, \triangle AEG, \triangle GCF$ 分别沿 $EF,EG,GF$ 向上折起，使 $A,B,C$ 重合，记为 $S$，则三棱锥 $S-EFG$ 的外接球面积的最小值为(　　)

(A) $\dfrac{29\pi}{2}$　　(B) $2\sqrt{33}\pi$　　(C) $14\pi$　　(D) $9\pi$

**【巧解】**如图一、图二。显然，三棱锥 $S-EFG$ 是对棱长分别为 $\sqrt{m},\sqrt{n},\sqrt{10}$ 的等腰四面体。由等腰四面体的性质知：其外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{m+n+10}$，故其外接球表面积为：$S=4\pi R^2=\dfrac{1}{2}(m+n+10)\pi$



图一



图二

故，只需求出 $m+n$ 的最小值即可

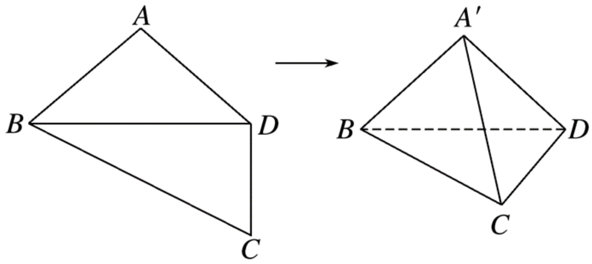
由题意知：$\sqrt{m}+\sqrt{n}=4 \Rightarrow 1\times\sqrt{m}+1\times\sqrt{n}=4 \Rightarrow 4\le\sqrt{2}\times\sqrt{m+n} \Rightarrow m+n\ge 8$

当且仅当 $1:1=\sqrt{m}:\sqrt{n}$，即 $m=n=4$ 时取等号，

故 $S$ 的最小值为 $9\pi$。

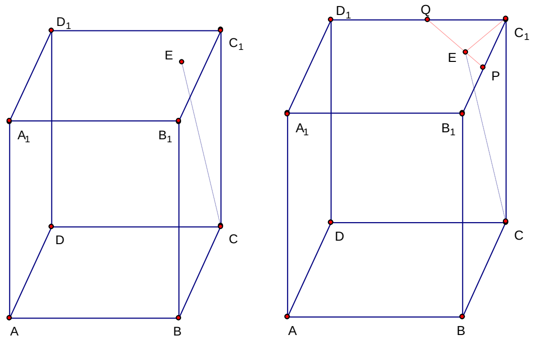
6. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1, BD=\sqrt{2}, BD\perp CD$，将其沿对角线 $BD$ 折成四面体 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 $BCD$，若四面体 $A'-BCD$ 的顶点在同一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A. $3\pi$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　　　C. $4\pi$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$




【解】由图示可得 $BD = A'C = \sqrt{2}, BC = \sqrt{3}, \triangle DBC$ 与 $\triangle A'BC$ 都是以 $BC$ 为斜边的直角三角形，由此可得 $BC$ 中点到四个点 $A', B, C, D$ 的距离相等，即该三棱锥的外接球的直径为 $\sqrt{3}$，所以该外接球的表面积 $S = 4\pi \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3\pi$

7. 如图，一块正方体形木料的上底面有一点 $E$，若经过点 $E$ 在上底面上画一条直线与 $CE$ 垂直，则应该怎样画?




【解】连接 $EC_1$，过 $E$ 作 $EC_1$ 的垂线，交 $B_1C_1$ 于 $P$，交 $D_1C_1$ 于 $Q$，线 $PQ$ 即满足要求。

证明：因 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，而 $PQ \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，故 $CC_1 \perp PQ$；

又，$PQ \perp EC_1$，$EC_1 \cap CC_1 = C_1$，所以 $PQ \perp$ 平面 $ECC_1$，

又因为 $CE \subset$ 平面 $ECC_1$，故 $PQ \perp CE$。

8. 异面直线 $a$，$b$ 成 $80^\circ$ 角，$P$ 为 $a$，$b$ 外的一个定点，若过 $P$ 有且仅有 2 条直线与 $a$，$b$ 所成的角相等且等于 $\alpha$，则角 $\alpha$ 的取值范围为（　　）

A．$(0^\circ, 40^\circ)$　　　B．$(40^\circ, 50^\circ)$　　　C．$(40^\circ, 90^\circ)$　　　D．$(50^\circ, 90^\circ)$

【解】将两异面直线平移到 $P$ 点，分别得到 $AC, BD$，

注意到 $AC, BD$ 相交成 $80^\circ$，$100^\circ$ 两对对顶角。

设 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$。

仔细分析图中的两条角平分线 $EF$ 和 $GH$，会发现过 $P$ 作与 $AC,BD$ 均为 $\alpha$ 的直线 $l$

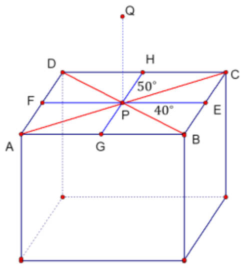
$\alpha = 40^\circ$ 时只有一条；

$\alpha \in (40^\circ, 50^\circ)$ 时有 2 条；

$\alpha = 50^\circ$ 时有 3 条；

$\alpha \in (50^\circ, 90^\circ)$ 时有 4 条。

综上，选 B。



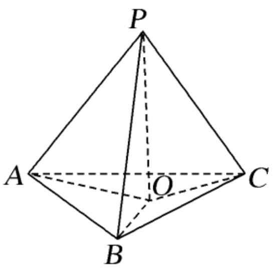

9. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，点 $P$ 在平面 $ABC$ 中的射影为点 $O$，

(1)若 $PA=PB=PC$，则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的________心.

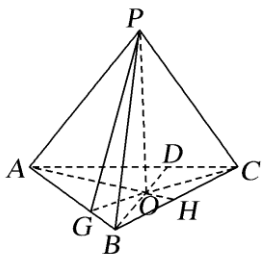
(2)若 $PA\perp PB, PB\perp PC, PC\perp PA$，则点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的________心.

【解】(1) 如图 1，连接 $OA,OB,OC,OP$，在 $\mathbf{Rt}\triangle POA$, $\mathbf{Rt}\triangle POB$ 和 $\mathbf{Rt}\triangle POC$ 中，$PA=PC=PB$，

所以 $OA=OB=OC$，即 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心.




图一




图二

(2)如图 2，$\because PC\perp PA, PB\perp PC, PA\cap PB=P$，$\therefore PC\perp$平面 $PAB$，

$AB\subset$平面 $PAB$，$\therefore PC\perp AB$，

又 $AB\perp PO, PO\cap PC=P, \therefore AB\perp$平面 $PGC$，

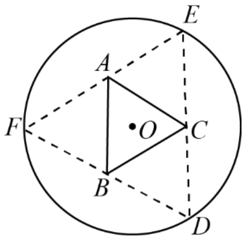
又 $CG\subset$平面 $PGC$，$\therefore AB\perp CG$

即 $CG$ 为 $\triangle ABC$ 边 $AB$ 的高。

同理可证 $BD$，$AH$ 分别为 $\triangle ABC$ 边 $AC,BC$ 上的高，即 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

10. （全国 I）如图，圆形纸片的圆心为 $O$，半径为 5 cm，该纸片上的等边 $\triangle ABC$ 的中心为

$O$。$D,E,F$ 为圆 $O$ 上的点，$\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$ 分别是以 $BC,CA,AB$ 为底边的等腰三角形。沿虚线剪开后，分别以 $BC,CA,AB$ 为折痕折起 $\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$，使得 $D,E,F$ 重合，得到三棱锥。当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：$cm^3$）的最大值为______。




**【解】** 连接 $OD$，设其交 $BC$ 于 $G$，易知 $OD\perp BC$，$BC=2\sqrt{3}\cdot OG$，

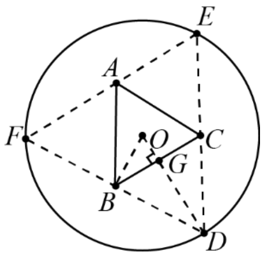
设 $OG=x$，则 $BC=2\sqrt{3}x$，$DG=5-x$

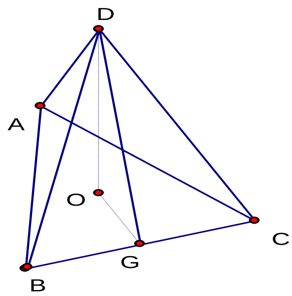
三棱锥的高 $h=\sqrt{DG^2-OG^2}=\sqrt{25-10x}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}x)^2=3\sqrt{3}x^2$

则 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\sqrt{3}x^2\cdot\sqrt{25-10x}=\sqrt{15}\sqrt{5x^4-2x^5}$，易知 $x\in(0,\dfrac{5}{2})$

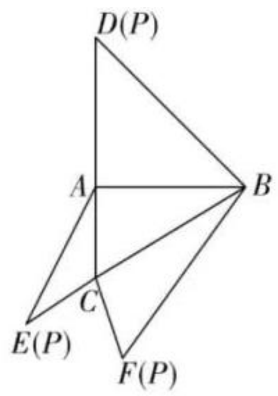
因 $5x^4-2x^5=x^4(5-2x)=2^4\times\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}(5-2x)\le 2^4\left(\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(5-2x)}{5}\right)^5=2^4$

故 $V\le 4\sqrt{15}$




11.（全国 I）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1,AB=AD=\sqrt{3},AB\perp AC,AB\perp AD$，$\angle CAE=30^\circ$，则 $\angle FCB=$______




【解】由已知得 $BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{6}$ ,因 $D,E,F$ 重合于一点，

故 $AE=AD=\sqrt{3},BF=BD=\sqrt{6}$ ,

所以，在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理得

$CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ=1$,

所以，$CE=CF=1$

在 $\triangle BCF$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle FCB=\frac{BC^2+CF^2-BF^2}{2BC\times CF}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times2}=-\frac{1}{4}$$

12. 已知 $\alpha,\beta,\gamma$ 是三个平面，且 $\alpha\cap\beta=a,\alpha\cap\gamma=b,\beta\cap\gamma=c$

（1）$a\cap b=O$，求证：$a,b,c$ 三线共点；

（2）若 $a//b$，则 $a$ 与 $c$，$b$ 与 $c$ 有什么关系？为什么？

**（1）证明：** $a\cap b=O\Rightarrow O\in a$，而 $a\subset\beta$，故 $O\in\beta$；

同理，$O\in\gamma$；

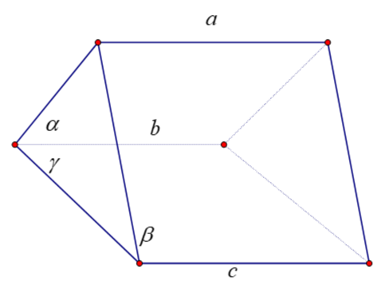
因此 $O\in\gamma\cap\beta$，即 $O\in c$，故 $a,b,c$ 三线共点。

**（2）** $a//c,b//c$，证明如下：如图二

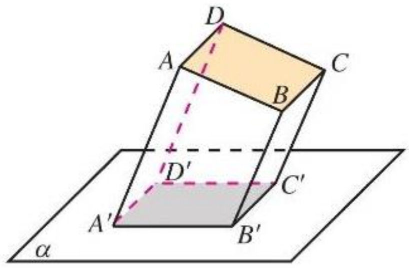
因 $a//b$，$b\subset\gamma$，$a\not\subset\gamma$，故 $a//\gamma$，

又，$a\subset\beta$，$\beta\cap\gamma=c$，故 $a//c$，

又，$a//b$，故 $b//c$。



13. 如图，四边形$A'B'C'D'$是▱$ABCD$在平面$\alpha$上的投影，求证：四边形$A'B'C'D'$是平行四边形。




**证明：** 由投影的定义知：$AA'//BB'//CC'//DD'$，

故：$AA',DD'$共面，$BB',CC'$共面；

由于$AA'//BB'$，$AA'\not\subset$平面$BB'C'C$，$BB'\subset$平面$BB'C'C$，

故$AA'//$平面$BB'C'C$；

由题意知：$AD//BC$，$AD\not\subset$平面$BB'C'C$，$BC\subset$平面$BB'C'C$，

故$AD//$平面$BB'C'C$；

又，$AA'\subset$平面$AA'D'D$，$AD\subset$平面$AA'D'D$，$AA'\cap AD=A$，

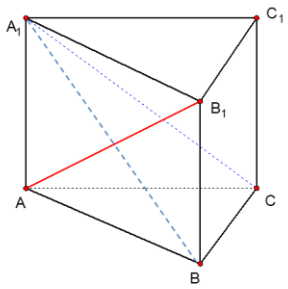
故平面$AA'D'D//$平面$BB'C'C$，

又，$A'D'=$平面$AA'D'D\cap$平面$\alpha$，$B'C'=$平面$BB'C'C\cap$平面$\alpha$

故，$A'D'//B'C'$，

同理可证：$A'B'//C'D'$，所以$A'B'C'D'$为平行四边形。

14. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90^\circ, AA_1=AB$,求证：$A_1C\perp AB_1$




**【证明】** 连接$A_1B$，由题意知：$ABB_1A_1$为正方形，故$AB_1\perp A_1B$

又，$A_1A\perp$平面$ABC$，$BC\subset$平面$ABC$，故$A_1A\perp BC$，

又$BC\perp AB$，$AB\subset$平面$ABA_1$，$AA_1\subset$平面$ABA_1$，$A_1A\cap AB=A$，

故$BC\perp$平面$ABA_1$，

又$AB_1\subset$平面$ABA_1$，故$BC\perp AB_1$

考虑到 $AB_1 \perp A_1B$， $BC \subset$平面 $A_1BC$， $A_1B \subset$平面 $A_1BC$， $A_1B \cap BC = B$，

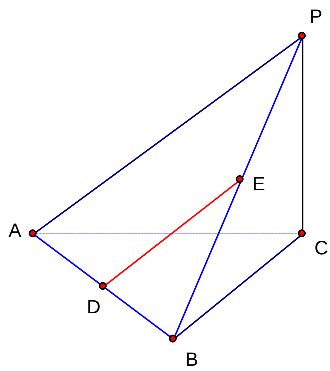
故 $AB_1 \perp$平面 $A_1BC$，

又，$A_1C \subset$平面 $A_1BC$，故 $AB_1 \perp A_1C$，证毕。

15. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PC \perp$底面 $ABC$， $AB \perp BC, D, E$ 分别是 $AB, PB$ 的中点，求证:

（1） $DE//$平面 $PAC$

（2） $AB \perp PB$




**【证明】**（1）由题意知: $DE$ 为 $\triangle PAB$ 的中位线，故 $DE//PA$，

又，$DE \not\subset$平面 $PAC$， $PA \subset$平面 $PAC$，所以 $DE//$平面 $PAC$

（2）因 $PC \perp$平面 $ABC$， $AB \subset$平面 $ABC$，故 $PC \perp AB$，

又，$AB \perp BC$， $BC \subset$平面 $PBC$， $PC \subset$平面 $PBC$， $PC \cap BC = C$，

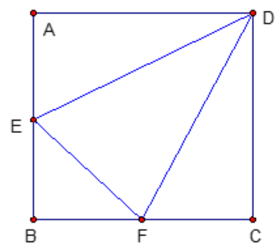
所以，$AB \perp$平面 $PBC$，

又，$PB \subset$平面 $PBC$，故 $AB \perp PB$。

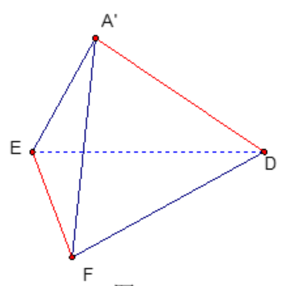
16. 如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中， $E$ 是 $AB$ 的中点， $F$ 是 $BC$ 的中点，将 $\triangle AED, \triangle BEF, \triangle DCF$ 分别沿 $DE, EF, DF$ 折起，使 $A, B, C$ 三点重合于点 $A'$。

（1）求证: $A'D \perp EF$

（2）求三棱锥 $A'-EFD$ 的体积。




图一




图二

（1）**证明**：由题意知：$A'D\perp A'E,A'D\perp A'F$

而$A'E\subset$平面$A'EF$，$A'F\subset$平面$A'EF$，$A'E\cap A'F=A'$，

所以，$A'D\perp$平面$A'EF$，

又，$EF\subset$平面$A'EF$，所以$A'D\perp EF$。

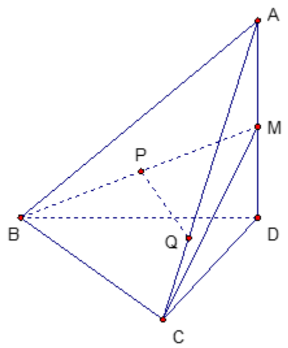
（2）**解**：由题意知：$A'D=2,A'E=A'F=1,EF=\sqrt{2}$

故，$\triangle A'EF$为等腰直角三角形，易得$S_{\triangle A'EF}=\dfrac{1}{2}$

由（1）知：$A'D\perp$平面$A'EF$，

故$V_{A'-EFD}=V_{D-A'EF}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A'EF}\times A'D=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2=\dfrac{1}{3}$

17. 如图，在四面体$A-BCD$中，$AD\perp$平面$BCD$，$M$是$AD$的中点，$P$是$BM$的中点，$Q$在线段$AC$上，且$AQ=3QC$，求证：$PQ//$平面$BCD$。




**证明**：连接$CM$，令$N$为$AC$的中点，$R$为$CM$的中点，连接$NM,PR,QR$，

由$AQ=3CQ$知$CQ=QN$，考虑到$CR=RM$，故$QR//NM$，

又因$NM//CD$，故$QR//CD$，

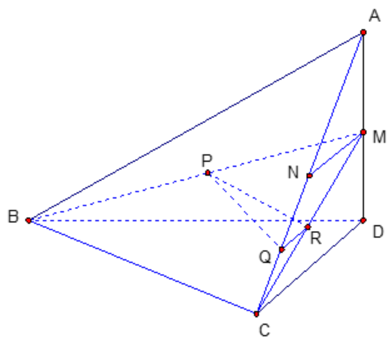
因$QR\not\subset$平面$BCD$，$CD\subset$平面$BCD$，故$QR//$平面$BCD$。

又，$PR//BC$，$PR\not\subset$平面$BCD$，$BC\subset$平面$BCD$，故$PR//$平面$BCD$，

又，$QR\subset$平面$PQR$，$PR\subset$平面$PQR$，$QR\cap PR=R$，

所以平面$PQR//$平面$BCD$，

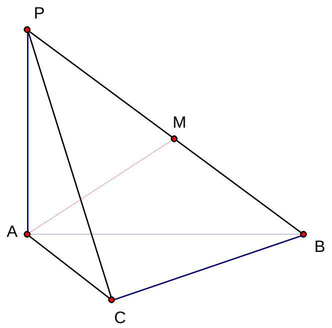
又因$PQ\subset$平面$PQR$，故$PQ//$平面$BCD$。




18. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$PA\perp$底面$ABC$，

（1）求证：平面$PAC\perp$平面$PBC$

（2）若$AC=BC=PA, M$ 是$PB$的中点，求$AM$ 与平面$PBC$所成角的正切值。




**（1）证明**：因$PA\perp$底面$ABC$，$BC\subset$底面$ABC$，所以$PA\perp BC$；

又，$BC\perp AC$，$AC\subset$平面$PAC$，$PA\subset$平面$PAC$，$AC\cap PA=A$，

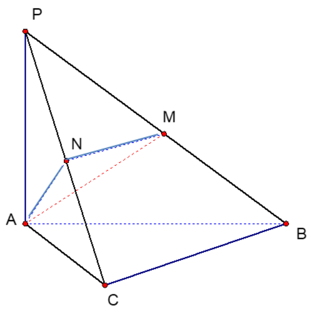
所以，$BC\perp$平面$PAC$，

又因$BC\subset$平面$PBC$，所以平面$PAC\perp$平面$PBC$。

**（2）解**：过$A$作$AN\perp PC$，$N$为垂足，连接$MN$，

由（1）知：$BC\perp$平面$PAC$，而$AN\subset$平面$PAC$，故$BC\perp AN$，

因$BC\subset$平面$PBC$，$PC\subset$平面$PBC$，$BC\cap PC=C$




图二

所以，$AN\perp$平面$PBC$，因此$MN$为$MA$在平面$PBC$上的投影，

故 $\angle AMN$ 即为 $MA$ 与平面 $PBC$ 所成的角，

设 $PA=a$，则由题意知：$AC=BC=a$，

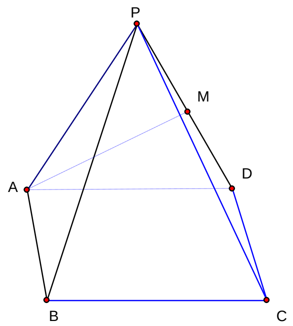
易得：$MN=\frac{a}{2}, AN=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，考虑到 $AN\perp MN$，

故，$\tan\angle AMN=\frac{AN}{MN}=\sqrt{2}$。

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 $PAD$ 是正三角形，侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，$M$ 是 $PD$ 的中点

（1）求证：$AM\perp$平面 $PCD$

（2）求侧面 $PBC$ 与底面 $ABCD$ 所成二面角的余弦值。




**(1)证明:** 因 $DC\perp AD$，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，$AD=$平面 $PAD\cap$平面 $ABCD$，$DC\subset$平面 $ABCD$，

所以，$DC\perp$平面 $PAD$，

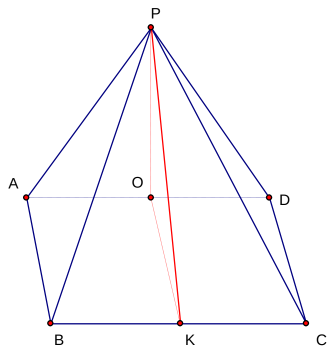
又，$AM\subset$平面 $PAD$，故 $DC\perp AM$

因 $M$ 为 $PD$ 的中点，$\triangle PAD$ 为正三角形，故 $AM\perp PD$；

又，$DC\subset$平面 $PDC$，$PD\subset$平面 $PDC$，$PD\cap DC=D$，

故，$AM\perp$平面 $PDC$。

(2) 过 $P$ 作 $PO\perp AD$，$O$ 为垂足，令 $K$ 为 $BC$ 的中点，连接 $OK, PK$，如下图。



因平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD=$ 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD$，$PO\perp AD$，$PO\subset$ 平面 $PAD$，

故，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，

又因 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，从而 $PO\perp BC$，

易知 $BC\perp OK$，又 $OK\cap PO=O$，$OK$、$PO\subset$ 平面 $PKO$，

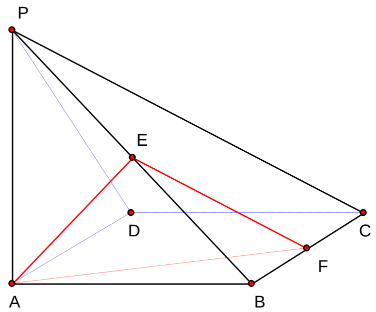
故，$BC\perp$ 平面 $PKO$，从而 $BC\perp PK$

所以，$\angle PKO$ 即为平面 $PBC$ 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a$，易得 $PO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,OK=a$，

因 $\triangle POK$ 为直角三角形，故 $PK=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a$，进而得 $\cos\angle PKO=\dfrac{OK}{PK}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。

20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB$，$E$ 为线段 $PB$ 的中点，$F$ 为线段 $BC$ 上的动点，平面 $AEF$ 与平面 $PBC$ 是否互相垂直？如果垂直，请证明；如果不垂直，请说明理由。




**【证明】**平面 $AEF$ 与平面 $PBC$ 互相垂直，证明如下

由题意：$PA=AB$，$E$ 为 $PB$ 的中点，故 $AE\perp PB$，

因 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，故 $PA\perp BC$，

由题意：$BC\perp AB$，又 $AB$、$PA\subset$ 平面 $PAB$，$PA\cap AB=A$，

故 $BC\perp$ 平面 $PAB$，

因 $AE\subset$ 平面 $PAB$，故 $BC\perp AE$，

考虑到 $AE\perp PB$，且 $PB$、$BC\subset$ 平面 $PBC$，$PB\cap BC=B$，

故 $AE\perp$ 平面 $PBC$，

因 $AE\subset$ 平面 $AEF$，故平面 $AEF\perp$ 平面 $PBC$。

21. 如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，$BC=2EF,AB\perp BC,BC\perp CF,G,H$ 分别为 $AC,BC$ 上的点，平面 $FGH//ABED$。

（1）求证：$BC\perp$ 平面 $EGH$；

（2）若 $AB \perp CF, AB = BC = 2CF = 2$，求二面角 $E-FG-D$ 的余弦值。

**（1）证明**：因为平面 $FGH // ABED$，平面 $BCFE \cap$ 平面 $ABED = BE$，平面 $BCFE \cap$ $GHF = HF$，

所以 $BE // HF$，所以 $BC // EF$，

所以四边形 $BHFE$ 为平行四边形，所以 $BH = EF$，

因为 $BC = 2EF$，所以 $BC = 2BH$，$H$ 为 $BC$ 的中点。

同理，$G$ 为 $AC$ 的中点，所以 $GH // AB$，

因为 $AB \perp BC$，所以 $GH \perp BC$，

又 $HC // EF$ 且 $HC = EF$，所以四边形 $EFCH$ 是平行四边形，

所以 $CF // HE$，

又 $CF \perp BC$，所以 $HE \perp BC$，

又 $HE, GH \subset$ 平面 $EGH$，$HE \cap GH = H$，

所以 $BC \perp$ 平面 $EGH$

**（2）解**：因为 $AB \perp CF, CF // HE, GH // AB$，所以 $HE \perp GH$，

分别以 $HG, HB, HE$ 所在直线为 $x, y, z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$，则 $E(0,01), F(0,-1,1), G(1,0,0), D(1,0,1)$，设 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 $EFG$ 的一个法向量，

因为 $\overrightarrow{EF} = (0,-1,0), \overrightarrow{EG} = (1,0,-1)$，

由 $\vec{m} \bullet \overrightarrow{EF} = 0$ 及 $\vec{m} \bullet \overrightarrow{EG} = 0$ 得 $\begin{cases} -y_1 = 0 \\ x_1 - z_1 = 0 \end{cases}$，取 $x_1 = 1$ 得 $\vec{m} = (1,0,1)$

设 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 $FGD$ 的一个法向量

因为 $\overrightarrow{FG} = (1,1,-1), \overrightarrow{GD} = (0,0,1)$

由 $\vec{n} \bullet \overrightarrow{FG} = 0$ 及 $\vec{n} \bullet \overrightarrow{GD} = 0$ 得 $\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$，取 $x_2 = 1$ 得 $\vec{n} = (1,-1,0)$，

$\cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \dfrac{\vec{n} \bullet \vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \dfrac{1}{2}$，

又，二面角 $E-FG-D$ 为锐二面角，所以二面角 $E-FG-D$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$。