好题欣赏——2025 年第 6 期

1.已知函数 $f(x)=e^x+ax+b-3(a,b\in R)$ 在区间 $[1,2]$ 上总存在零点，则 $a^2+(b-4)^2$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{(e+1)^2}{2}$　　B．$\dfrac{4}{13}$　　C．$\dfrac{(e^2+1)^2}{5}$　　D．$\dfrac{8}{e^4}$

【解析】 由 $e^x+ax+b-3=0\Rightarrow ax+(b-4)=-e^x-1$

$$\Rightarrow e^x+1=|ax+(b-4)|\le\sqrt{x^2+1}\sqrt{a^2+(b-4)^2}$$

$$\Rightarrow |ax+(b-4)|\le\sqrt{x^2+1}\sqrt{a^2+(b-4)^2}\Rightarrow a^2+(b-4)^2\ge\frac{(e^x+1)^2}{x^2+1},$$

令 $g(x)=\dfrac{(e^x+1)^2}{x^2+1}$，

则 $g'(x)=\dfrac{(e^x+1)^2}{x^2+1}=\dfrac{2(e^x+1)e^x(x^2+1)-2x(e^x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{2(e^x+1)\left[e^x x(x-1)+(e^x-x)\right]}{(x^2+1)^2}>0(x\in[1,2]),$$

故 $g(x)$ 单调递增，因此 $g(x)_{\min}=g(1)=\dfrac{(e+1)^2}{2}$，

即 $a^2+(b-4)^2$ 的最小值为 $\dfrac{(e+1)^2}{2}$，在 $x:1=a:(b-4)$，也即 $a=b-4$，$x=1$ 时取得。选 A。

2.已知 a,b 为非负实数，且 $2a+b=1$，则 $\dfrac{2a^2}{a+1}+\dfrac{b^2+1}{b}$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】 分子次数高于分母，对分子利用配方加裂分降次。

$$\frac{2a^2}{a+1}+\frac{b^2+1}{b}=\frac{2(a^2-1)+2}{a+1}+b+\frac{1}{b}=2(a-1)+\frac{2}{a+1}+b+\frac{1}{b}$$

$$=2a+b-2+\frac{2}{a+1}+\frac{1}{b}=-1+\frac{4}{2a+2}+\frac{1}{b}=-1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2a+2}+\frac{1}{b}\right)\left[(2a+2)+b\right]$$

$\ge -1+\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{4}+\sqrt{1}\right)^2=2$，易知等号可取，选 B。

3.已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域为 R，记 $g(x)=f'(x)$，$f(2x+1)$ 和 $g(x+2)$ 均为偶函数，则

A. $f(1)=f(2)$ B. $f(1)=f(3)$ C. $f(1)=f(4)$ D. $f(1)=f(5)$

【解析】 因 $f(2x+1)$ 为偶函数，故 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，又因 $g(x+2)$ 为偶函数，故 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，也即函数 $f'(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，故 $f(x)$ 的图像关于点 $(2,\lambda)$ 中心对称（其中的 λ 待定），故 $f(x)$ 的一个周期为 $T=4|1-2|=4$，从而 $f(1)=f(5)$，选 D。

【注意】 如果函数 $f'(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 关于点 (a,λ) 中心对称，其中的 λ 不定，如果题目中没有别的限制条件，λ 可以为任意常数；如果 $f'(x)$ 关于 (a,b) 中心对称，则 $f(x)$ 的图像必关于直线 $x=a$ 对称。

当然，如果函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 中心对称，则 $f'(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称；如果 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，则 $f'(x)$ 的图像必关于点 $(a,0)$ 中心对称。

4.已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ D. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【解析】 可以运用下面方法求解：如图，由已知可设 $|F_2B|=n$，则

$|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有

$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n,\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$．在 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得

$\begin{cases}4n^2+4-2\cdot 2n\cdot 2\cdot\cos\angle AF_2F_1=4n^2,\\ n^2+4-2\cdot n\cdot 2\cdot\cos\angle BF_2F_1=9n^2\end{cases}$，又 $\angle AF_2F_1$，$\angle BF_2F_1$ 互补，

$\therefore\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，两式消去 $\cos\angle AF_2F_1$，$\cos\angle BF_2F_1$，得 $3n^2+6=11n^2$，解

$n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． $\therefore 2a=4n=2\sqrt{3},\therefore a=\sqrt{3},\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2,\therefore$ 所求椭圆方程为

$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，故选 B．

【法二】 如图，由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有

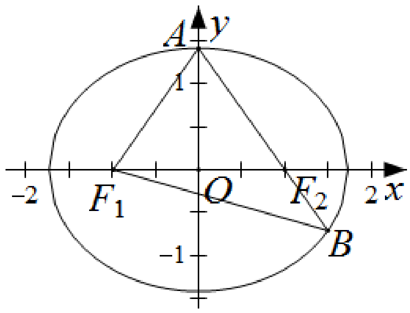
$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n,\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$．在 $\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理推论得

$\cos\angle F_1AB=\dfrac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot 2n\cdot 3n}=\dfrac{1}{3}$. 在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理得$4n^2+4n^2-2\cdot 2n\cdot 2n\cdot\dfrac{1}{3}=4$,

解得$n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$, $\therefore a=\sqrt{3}$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$, $\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，故选

B.



【法三】设$|F_2B|=n$，则$|AF_2|=2n$, $|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有

$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n\Rightarrow 2n=a$, 故$|AF_2|=a=2n$, 从而$|AF_1|=a=2n$; 知$A$为椭圆短轴顶点，如上图所示。

令$\angle F_1AF_2=2\theta$，在$\triangle AF_1B$中，由余弦定理得$\cos 2\theta=\dfrac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot 2n\cdot 3n}=\dfrac{1}{3}$,

而$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\dfrac{b}{a})^2-1=\dfrac{1}{3}$，得$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，选 B。

5.关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin\ x|$有下述四个结论:

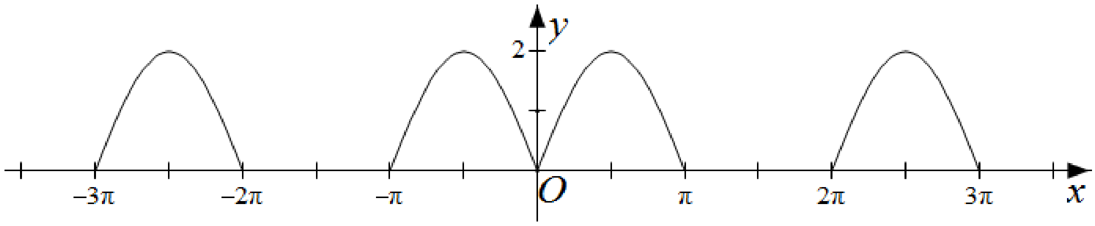
① $f(x)$是偶函数　　② $f(x)$在区间（$\dfrac{\pi}{2},\pi$）单调递增

③ $f(x)$在$[-\pi,\pi]$有 4 个零点　　④ $f(x)$的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是（　　）

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

【解析】画出函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$的图象，由图象可得①④正确，故选 C.



【法二】 $\because f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，故①正确．当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$时，$f(x)=2\sin x$，它在区间$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减，故②错误．当$0\le x\le\pi$时，$f(x)=2\sin x$，它有两个零点：$0,\pi$；当$-\pi\le x<0$时，

$f(x)=\sin(-x)-\sin x=-2\sin x$，它有一个零点：$-\pi$，故$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有$3$个零点：$-\pi,0,\pi$，故③错误．当$x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时，$f(x)=2\sin x$；当$x\in[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时，$f(x)=\sin x-\sin x=0$，又$f(x)$为偶函数，$\therefore f(x)$的最大值为$2$，故④正确．综上所述，①④　　正确，故选 C．

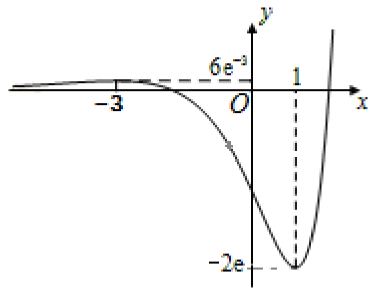
6.已知函数$f(x)=(x^2-3)e^x$，设关于x的方程$f^2(x)-mf(x)-\dfrac{12}{e^2}=0(m\in R)$有$n$个不同的实数解，则$n$的所有可能的值为（　　）

A．3　　　B．1 或 3　　　C．4 或 6　　　D．3 或 4 或 6

【解析】 $f'(x)=(x-1)(x+3)e^x$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,-3)$和$(1,+\infty)$上单增，$(-3,1)$上单减

又当$x\to-\infty$时$f(x)\to0$，$x\to+\infty$时$f(x)\to+\infty$，

故$f(x)$的图象大致如下图所示：



令$f(x)=t$，则方程$t^2-mt-\dfrac{12}{e^2}=0$必有两根$t_1,t_2\ (t_1<t_2)$且$t_1t_2=-\dfrac{12}{e^2}$，

当$t_1=-2e$时恰有$t_2=6e^{-3}$，此时$f(x)=t_1$有 1 个根，$f(x)=t_2$有 2 个根；

当$t_1<-2e$时必有$0<t_2<6e^{-3}$，此时$f(x)=t_1$无根，$f(x)=t_2$有 3 个根；

当$-2e<t_1<0$时必有$t_2>6e^{-3}$，此时$f(x)=t_1$有 2 个根，$f(x)=t_2$有 1 个根；

综上，对任意$m\in R$，方程均有3个根.

7.设函数$f(x)=e^{x}(ax^{2}+3a-2)-x$，若存在$x_0\in\left(0,+\infty\right)$使得不等式$f\left(x_0\right)<1$成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A、（0，1）　　B、$(-\infty,1)$　　C、$(0,\frac{4}{3})$　　D、$(-\infty,\frac{4}{3})$

【解析】分离参数， $f(x)=e^{x}(ax^{2}+3a-2)-x<1\Rightarrow a(x^{2}+3)<\frac{x+1}{e^{x}}+2$，设

$g(x)=a(x^{2}+3)$，$h(x)=\frac{x+1}{e^{x}}+2$，原命题等价于当$x>0$时，曲线$y=g(x)$上**有某个点**位于曲线$y=h(x)$下方。因$h'(x)=\frac{-x}{e^{x}}<0$，故$h(x)$在$(0,+\infty)$上单减，$h(0)=3$，

$x\to+\infty,h(x)\to 2$，结合函数图象知：当$a<0$时，$g\left(x\right)$图像开口向下，必存在点在$y=h(x)$下方；当$a=0$时，显然满足；当$a>0$ 时，$g\left(x\right)$图像开口向上，只需$g\left(x\right)_{\min}=g(0)<3$即$a<1$；综上，$a\in(-\infty,1)$.

【另解】 取$x_0\to 0$，由$\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{x}(ax^{2}+3a-2)-x\right]=3a-2<1$，得$a<1$，选 B。

8.已知函数$f(x)=\ln x+a$，$g(x)=ax+b+1$，若$\forall x>0$，$f(x)\le g(x)$，则$\frac{b}{a}$的最小值是（
）

A．$1+e$　　B．$1-e$　　C．e^{-1}　　D．$2e^{-1}$

【解析】 $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow h(x)=\ln x-ax+a-b-1\le 0\Leftrightarrow h(x)_{\max}\le 0$恒成立

因$h'(x)=\frac{1-ax}{x}$，显然$a\le 0$时$h(x)$无最大值，故必有$a>0$，且易知$h(x)_{\max}=h(\frac{1}{a})$，从而

$h(\frac{1}{a})\le 0\Rightarrow b\ge a-2-\ln a\Rightarrow\frac{b}{a}\ge 1-\frac{2}{a}-\frac{\ln a}{a}$

现考虑函数$m(a)=1-\frac{2}{a}-\frac{\ln a}{a}$，令$t=\frac{1}{a}$，则$m(a)=n(t)=1-2t+t\ln t$

显然$n'(t)=\ln t-1$，易知$t=e$时$n(t)$取得最小值$1-e$，选 B。

9.知函数$f(x)=x^{3}+x^{2}+\frac{4}{3}x+\frac{13}{27}$，等差数列$\{a_n\}$满足：$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{99})=11$，则下列可以作为$\{a_n\}$的通项公式的是（　　）

A、$\frac{n}{3}-17$　　B、$\frac{2n}{3}-33$　　C、$\frac{n}{2}-45$　　D、$49-n$

【解析】 令$f''(x)=6x+2=0$，得$x=-\frac{1}{3}$，故$f(x)$图像的对称中心为$(-\frac{1}{3},f(-\frac{1}{3}))$，即$(-\frac{1}{3},\frac{1}{9})$。考虑到$\{a_n\}$为等差数列，$a_1,a_2,\cdots,a_{99}$关于$a_{50}$对称，因此$a_{50}=-\frac{1}{3}$，只能选 A。

【备注】三次多项式函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像是中心对称图形，其对称中心的坐标为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$

10.若函数 $f(x)=ax+\ln x-\frac{x^2}{x-\ln x}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(1,\frac{e}{e-1}-\frac{1}{e})$　　B.$[1,\frac{e}{e-1}-\frac{1}{e}]$　　C. $(\frac{1}{e}-\frac{e}{e-1},-1)$　　D. $[\frac{1}{e}-\frac{e}{e-1},-1]$

【解析】由题意可得 $a=\frac{x}{x-\ln x}-\frac{\ln x}{x}, x\in(0,+\infty)$ 有 3 个不同解，令 $g(x)=\frac{x}{x-\ln x}-\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x(1-\ln x)(2x-\ln x)}{x^2(x-\ln x)^2}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，令 $y=2x-\ln x$，则 $y'=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，当$x\in(0,\frac{1}{2})$, $y'<0$, y 递减；当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$, $y'>0$, y 递增，则 $y_{\min}=1-\ln\frac{1}{2}=1+\ln 2>0$，则当$x\in(0,+\infty)$ 时，恒有 $2x-\ln x>0$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=e$，且 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减；$x\in(1,e)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增；$x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$, $g(x)$ 递减，则 $g(x)$ 的极小值为 $g(1)=1$, $g(x)$ 的极大值为 $g(e)=\frac{e}{e-1}-\frac{1}{e}$，结合函数图象可得实数 a 的取值范围是 $(1,\frac{e}{e-1}-\frac{1}{e})$.

11.☆已知 C 为线段 AB 上一点，P 为直线 AB 外一点，满足 $|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=2$, $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{5}$，$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}$，$I$ 为 PC 上一点，$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}\right)(\lambda>0)$，则 $\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$ 的值为(　　　)

（A）1　　（B）2　　（C）$\sqrt{5}-1$　　（D）$\sqrt{5}$

提示：由 $\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}$ 知 PC 为 $\angle APB$ 的角平分线，由

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|})\Rightarrow\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AI}=(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|})$，故 AI 为 $\angle PAB$ 的角平分线，从而知 I 为 $\triangle APB$ 的内心。$\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=|BI|\cos\angle ABI$ 为 B 点处的切线长，容易算得其为 $\sqrt{5}-1$，选 C。

12.已知边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，以 O 为圆心，6 为半径作圆；若点 E 在圆 O 上运动，则（　　）

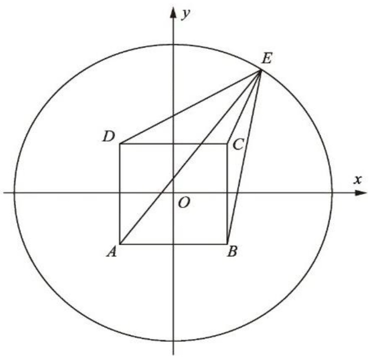
A．$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=72$

B．$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=56$

C．$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=36$

D．$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=28$

【解析】作出图形如下所示，以O为坐标原点，线段BC,AB的垂直平分线分别为x,y轴建立平面直角坐标系xOy；观察可知，$A(-2,-2),B(2,-2),C(2,2),D(-2,2)$，设$E(x,y)$，则$x^2+y^2=36$，故$\overrightarrow{EA}=(-2-x,-2-y)$，$\overrightarrow{EB}=(2-x,-2-y)$，$\overrightarrow{EC}=(2-x,2-y)$，$\overrightarrow{ED}=(-2-x,2-y)$，故$\overrightarrow{EA}\,\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\,\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\,\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\,\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})=4\overrightarrow{EO}$
$=144,\overrightarrow{EA}?\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\,\overrightarrow{ED}=56$，故选 B 项



【另解】易知$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EB}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}\right)+\overrightarrow{ED}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EA}\right)$

$2\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EO}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}\right)=4\overrightarrow{EO}^2=4\times6^2=144$，A、C 均错；

而$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{EO}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)=2\left(6^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)=56$，选 B。

【这里用到了矩形的性质和中线定理】。

13.已知曲线C_1,C_2的方程分别为$f_1(x,y)=0,f_2(x,y)=0$，则“$f_1(x_0,y_0)=f_2(x_0,y_0)$”是“点$M(x_0,y_0)$是曲线$C_1$与$C_2$的交点”的

A、充分不必要条件　　　　　　　　B、必要不充分条件

C、充要条件　　　　　　　　　　　D、既不充分也不必要条件

【解析】必要性显然，但充分性未必，因为$f_1(x_0,y_0)=f_2(x_0,y_0)$甚至不能保证点$M(x_0,y_0)$是曲线$C_1,C_2$上的点，比如$C_1,C_2$分别为直线$x+y-1=0$和$3x+y-1=0$，显然$f_1(0,0)=f_2(0,0)=-1$，但点$(0,0)$不在两条直线上，更谈不上是它们的交点了。

14.方程$\left(x^2+3y^2-3\right)\sqrt{x-4}=0$表示的曲线是（　　　）

A.一个椭圆和一条直线　　　　　　　　B.一个椭圆和一条射线

C．一条直线　　　　　　　　　　　　D.一个椭圆

【解析】由题意知：$x^2+3y^2-3=0$或$x-4=0$，但考虑到$x\geq4$，此时$x^2+3y^2-3=0$舍去，故$x-4=0$，此代表一条直线，选 C。

15.（衡水中学）设e_1，e_2分别为具有公共焦点F_1与F_2的椭圆和双曲线的离心率，P为两曲线的

一个公共点，且满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\dfrac{e_1^2+e_2^2}{(e_1e_2)^2}$的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.不确定

【提示】令椭圆和双曲线的方程分别为$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\left(a_1>b_1>0\right)$和$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1\left(a_2>0,b_2>0\right)$，显然，$\triangle F_1PF_2$为二者共同的焦点三角形，由焦点三角形的面积公式得

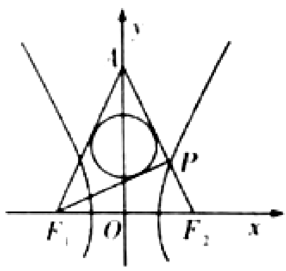
$$b_1^2\tan\frac{90^\circ}{2}=\frac{b_2^2}{\tan\frac{90^\circ}{2}}\Rightarrow b_1^2=b_2^2\Rightarrow a_1^2-c^2=c^2-a_2^2\Rightarrow a_1^2+a_2^2=2c^2\Rightarrow\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$$，选C。

16.已知直线$x+ay=a+2(a\in R)$与圆$x^2+y^2-2x-2y-7=0$交于M,N两点，则线段MN的长的最小值为（　　）

（A）$4\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{2}$

【解析】题中直线显然过定点$P(2,1)$，而圆的标准方程为：$(x-1)^2+(y-1)^2=9$，易知P在圆内，设圆心为C，则$CP\perp MN$时MN最短，此时$MN=2\sqrt{r^2-CP^2}=2\sqrt{9-8}=2$

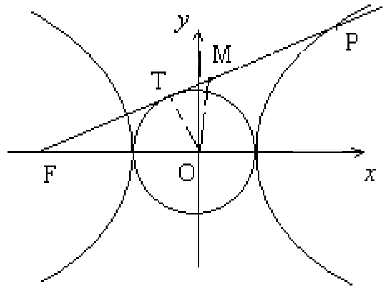
17.如图，F_1,F_2为双曲线C的左右焦点，且$|F_1F_2|=2$，若双曲线C右支上存在点P，使得$PF_1\perp PF_2$，设直线PF_2与y轴交于点A，且ΔAPF_1的内切圆半径为$\dfrac{1}{2}$，则双曲线的离心率为（　　）



A．2　　B．4　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

【巧解】因为$PF_1\perp PF_2$，且ΔAPF_1的内切圆半径为$\dfrac{1}{2}$，所以$|PF_1|+|PA|-|AF_1|=1$，所以$|PF_2|+2a+|PA|-|AF_1|=1$，即$|AF_2|-|AF_1|=1-2a$，由图形的对称性知，$|AF_2|=|AF_1|$，所以$a=\dfrac{1}{2}$，又因为$|F_1F_2|=2$，所以$2c=2\Rightarrow c=1$，所以双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=2$，故选A.

18.从双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点$F$引圆$x^2+y^2=a^2$的切线，切点为$T$，延长$FT$交双曲线右支于$P$点，若$M$为线段$FP$的中点，$O$为坐标原点，则$|MO|-|MT|$与$b-a$的大小关系为（　　）



A．$|MO|-|MT|>b-a$　　B.$|MO|-|MT|=b-a$

C．$|MO|-|MT|<b-a$　　D.不确定

【解析】令 F_2 为双曲线的右焦点，易知 OM 为 $\triangle FPF_2$ 的中位线，故 $OM=\frac{1}{2}PF_2$；

另外，由 $OT=a$ 知，$FT=b$，

故 $OM-MT=\frac{1}{2}PF_2-(MF-FT)=\frac{1}{2}PF_2-(\frac{1}{2}PF-FT)=\frac{1}{2}(PF_2-PF)+FT=b-a$

19.已知点 P 在以 F 为左焦点的双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 上运动，点 A 满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，则点 A 到原点的最近距离为

A、1　　B、$\sqrt{2}$　　C、$\sqrt{3}$　　D、2

【巧解】因 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，所以 A 在以 FP 为直径的圆上，该圆与 $x^2+y^2=a^2$ 相切，因此，两圆的连心线与双曲线左支的交点可作为 P，切点为 A 即满足要求，故 OA 的最小值为 1，选 A。

【解法二】令 D 为 FP 的中点，F_2 为双曲线的右焦点，连接 AD,OD,OA,PF_2，显然 OD 为 $\triangle PFF_2$ 的中位线，又 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，故 $AD=\frac{1}{2}PF$，故。

$OA\geq OD-DA=\frac{1}{2}PF_2-\frac{1}{2}PF=\frac{1}{2}(PF_2-PF)=\frac{1}{2}\times 2a=1$，选 A。

20.（全国 II 卷）设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为（　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\frac{63}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

【速解】直接利用公式，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\theta}=\frac{9}{4}$

21.（多选题）已知曲线 C 的方程为 $\frac{x|x|}{4}+y^2=1$，点 $A(1,0)$，则

A．曲线 C 上的点到 A 的最近距离为 1

B. 以 A 为圆心、1 为半径的圆与曲线 C 有三个公共点；

C. 存在无数条过点 A 的直线与曲线 C 有唯一公共点；

D．存在过点 A 的直线与曲线 C 有四个公共点；

【解析】$\frac{x|x|}{4}+y^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1, & x\geq 0\\ y^2-\frac{x^2}{4}=1, & x<0\end{cases}$，设 $P(x,y)$ 为图像在第一象限上的点，则有

$PA^2=(x-1)^2+y^2=\frac{3}{4}x^2-2x+2\ (0\leq x\leq 2)$，故 $|PA|^2_{\min}=\frac{2}{3}$，即 $|PA|_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，A 错。

因 $\frac{\sqrt{6}}{3}<1$，且椭圆右顶点、上顶点到点 A 的距离分别为 $1,\sqrt{2}$，故椭圆上恰有三个点到 A 的距离为 1，B 对；

由于 $y^2-\frac{x^2}{4}=1(<0)$ 与 $y=k(x-1)$ 无交点时，$-\frac{\sqrt{5}}{5}<k<\frac{\sqrt{5}}{5}$，此时直线只与椭圆有一个交点，C 对；

由于过 A 的直线与椭圆只有一个交点，与双曲线最多两个交点，故与曲线 C 至多有三个公共点，D 错。

综上，选 BC。

22.已知直线 $x+ay=a+2(a\in R)$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 交于 M,N 两点，则线段 MN 的长的最小值为（　　）

（A）$4\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{2}$

【解析】题中直线显然过定点 $P(2,1)$，而圆的标准方程为：$(x-1)^2+(y-1)^2=9$，易知 P 在圆内，设圆心为 C，则 $CP\perp MN$ 时 MN 最短，此时 $MN=2\sqrt{r^2-CP^2}=2\sqrt{9-8}=2$

23.已知非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 互相垂直，则 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}+2\vec{b}$ 的夹角余弦值的最小值是______

解：$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}+2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}^2+2\vec{b}^2}{\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2}\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2}}$，令 $\vec{a}^2=x,\vec{b}^2=y$，

则 $\cos\theta=\frac{x+2y}{\sqrt{x+y}\sqrt{x+4y}}=\sqrt{\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+5xy+4y^2}}=\sqrt{1-\frac{xy}{x^2+5xy+4y^2}}\ge\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

24.已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 最大值为__________________。

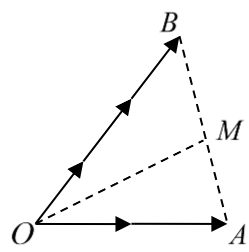
【解析】（方程构造法）构造方程 $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2-(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2=24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}{24}-\frac{(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2}{24}=\frac{1}{24}-\frac{(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2}{24}\le\frac{1}{24}$，当且仅当 $2\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{4}$ 时，上式等号成立.

解法 2：（不等式法）对于条件 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=1$，则有 $4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{ab}=1$，

又因 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2\ge0$，则有 $4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2\ge12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le1-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 最大值为 $\frac{1}{24}$

解法 3：（极化恒等式法）设 $2\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$3\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，取 AB 的中点为 M，$|OM|=\frac{1}{2}$，对于 ΔOAB，因 $\angle BOA$ 可以变化，当 $\angle BOA$ 趋向于 0 度时，$|MB|$ 趋向于 0，而 $|OM|=\frac{1}{2}$，则 $2\boldsymbol{a}\cdot3\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{MB}^2\le\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$，



因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 最大值为 $\frac{1}{24}$

25.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且对任意单位向量 $\vec{e}$，均有

$\left|\vec{a}\vec{e}\right|+|\vec{b}\vec{e}|\le\sqrt{6}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为_____

【解析】 由题意知：$\sqrt{6}\ge|\vec{a}\vec{e}|+|\vec{b}\vec{e}|\ge|\vec{a}\vec{e}+\vec{b}\vec{e}|=|(\vec{a}+\vec{b})\vec{e}|$，故$\sqrt{6}\ge|(\vec{a}+\vec{b})\vec{e}|_{\max}$，

又$|(\vec{a}+\vec{b})\vec{e}|\le|\vec{a}+\vec{b}||\vec{e}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，故$|(\vec{a}+\vec{b})\vec{e}|_{\max}=|\vec{a}+\vec{b}|$，从而

$|\vec{a}+\vec{b}|\le\sqrt{6}$，即$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}\le 6\Rightarrow\vec{a}\vec{b}\le\frac{1}{2}$，易知等号可取，故$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为$\frac{1}{2}$。

26.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=3,|\vec{a}+2\vec{b}|=6,\ \vec{a}^2+\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=-9$，则$|\vec{b}|=$_____

【提示】 $\vec{a}^2+\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})=-9$，故

$|3\vec{b}|=|(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})|=\sqrt{[(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})]^2}=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2-2(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})^2}$

$=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$，故$|\vec{b}|=\sqrt{7}$

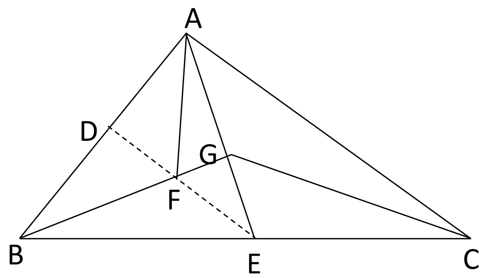
27.若x,y为实数，则$|2x+y|,|x-y|,|1+y|$这三个数中的最大数的最小值是_________

【解析】 $\max\{|2x+y|,|x-y|,|1+y|\}\ge\frac{1}{6}(|2x+y|+2|x-y|+3|1+y|)$

$\ge\frac{1}{6}|(2x+y)-2(x-y)-3(1+y)|=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=0,y=-\frac{1}{2}$时取到最小值。

28.已知G是$\triangle ABC$的重心，若满足$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$的点$P$在$\triangle GBC$内部，则$\mu$的取值范围是_______。

【解析】（特殊位置+分析）如图，令D为AB中点，E为BC中点，DE交BG于F。易知$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{DF}$，从而$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+2\mu\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+4\mu\overrightarrow{DF}$



显然，P只能在FE上动。当P位于E时，$2\mu=1$，即$\mu=\frac{1}{2}$；当P位于F时，$4\mu=1$，即$\mu=\frac{1}{4}$。综上，$\mu\in(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$

29.已知函数$f(x)=(x-1)e^x-x^2$，$g(x)=ae^x-2ax+a^2-10(a\in R)$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）当$x>0$时，$f(x)>g(x)$恒成立，求实数a的取值范围.

【解析】 (1) $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-2x$，$f'(1)=e-2$

$f(1)=-1$,所求切线方程为 $y=(e-2)x+1-e$

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=(x-a-1)e^{x}-x^{2}+2ax-a^{2}+10(x>0)$

$h'(x)=e^{x}+(x-a-1)e^{x}-2x+2a=(x-a)(e^{x}-2)$

① 当 $a\le 0$ 时，$x-a>0$，$0<x<\ln 2$ 时，$h'(x)<0$；$x>\ln 2$ 时，$h'(x)>0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上是减函数，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore h(x)\ge h(\ln 2)=-a^{2}+(2\ln 2-2)a-\ln^{2}2+2\ln 2+8>0$

$\therefore (a-\ln 2-2)(a-\ln 2+4)<0$，即 $\ln 2-4<a\le 0$

② 当 $0<a<\ln 2$ 时，$h(x)$ 在 $(0,a)$ 上是增函数，在 $(a,\ln 2)$ 上是减函数，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上是增函数，要使 $h(x)>0$，

则 $\begin{cases}h(\ln 2)>0\\ h(0)\ge 0\end{cases}$，解得 $0<a<\ln 2$

③ 当 $a=\ln 2$ 时，$h'(x)\ge 0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$h(0)=9-\ln 2-\ln^{2}2>0$，成立

④ 当 $a>\ln 2$ 时，$h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上是增函数，在 $(\ln 2,a)$ 上是减函数，在 $(a,+\infty)$ 上是增函数，要使 $h(x)>0$，则 $\begin{cases}h(a)>0\\ h(0)\ge 0\end{cases}$，解得 $\ln 2<a<\ln 10$

综上，实数 a 的取值范围为 $(\ln 2-4,\ln 10)$

30.已知函数 $u(x)=\dfrac{a}{x}-\ln x(a\in R)$

（Ⅰ）若曲线 $u(x)$ 与直线 $y=0$ 相切，求 a 的值.

（Ⅱ）若 $e+1<a<2e$, 设 $f(x)=|u(x)|-\dfrac{\ln x}{x}$, 求证：$f(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，且 $|x_2-x_1|<e$.（e 为自然对数的底数）

【解析】（Ⅰ）设切点 $P(x_0,0)$ $\because u'(x)=\dfrac{a+x}{-x^{2}}$, $\therefore k=\dfrac{a+x_0}{-x_0{}^{2}}=0$, $\therefore a=-x_0$.

又切点在函数 $u(x)$ 上，$\therefore u(x_0)=0$, 即 $\dfrac{a}{x_0}-\ln x_0=0\Rightarrow \ln x_0=-1$,

$\therefore x_0=\dfrac{1}{e}$, $\therefore a=-\dfrac{1}{e}$.

（Ⅱ）证明:不妨设 $x_1<x_2$，$\because u'(x)=-\dfrac{a}{x^{2}}-\dfrac{1}{x}<0$，所以 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $u(e)=\frac{a}{e}-1>0, u(2e)=\frac{a}{2e}-\ln 2e<0$，

所以必存在 $x_0\in(e,2e)$，使得 $u(x_0)=0$，即 $\frac{a}{x_0}=\ln x_0$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x}-\ln x-\frac{\ln x}{x}, 0<x\le x_0\\ \ln x-\frac{a}{x}-\frac{\ln x}{x}, x>x_0\end{cases}.$$

①当 $0<x\le x_0$ 时，$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-x-(a+1)}{x^2}\le\frac{x-1-x-(a+1)}{x^2}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0]$ 上单调递减，

注意到 $f(e)=\frac{a}{e}-1-\frac{1}{e}>0$，$f(x_0)=\frac{a}{x_0}-\ln x_0-\frac{\ln x_0}{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}<0$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0]$ 上存在零点 x_1，且 $e<x_1<x_0$.

②当 $x>x_0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x+x+(a-1)}{x^2}>0$ 所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(x_0)=\ln x_0-\frac{a}{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}<0$，

且 $f(2e)=\ln 2e-\frac{a}{2e}-\frac{\ln 2e}{2e}>\ln 2e-1-\frac{1}{2e}-\frac{\ln 2}{2e}>\frac{4}{5}\ln 2-\frac{1}{2e}>\frac{4}{5}\bullet\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0,2e)$ 上必存在零点 x_2，且 $x_0<x_2<2e$.

综上，$f(x)$ 有两个不同的零点 x_1、x_2，且 $|x_2-x_1|=x_2-x_1<2e-e=e$.

31.已知函数 $f(x)=a\ln x-bx-3(a\in R$ 且 $a\ne 0)$

（1）若 $a=b$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a=1$ 时，设 $g(x)=f(x)+3$，若 $g(x)$ 有两个相异零点 x_1，x_2，求证：$\ln x_1+\ln x_2>2$.

【解析】（1）由 $f(x)=a\ln x-ax-3$ 知 $f'(x)=\frac{a(1-x)}{x}$

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,1)$，单调减区间是 $(1,+\infty)$，

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1,+\infty)$，单调减区间是 $(0,1)$.

（2）$g(x)=\ln x-bx$，设 $g(x)$ 的两个相异零点为 x_1，x_2，设 $x_1>x_2>0$，

$\because g(x_1)=0$，$g(x_2)=0$，$\therefore \ln x_1-bx_1=0$，$\ln x_2-bx_2=0$，

$\therefore \ln x_1-\ln x_2=b(x_1-x_2)$，$\ln x_1+\ln x_2=b(x_1+x_2)$，

要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，即证 $b(x_1+x_2)>2$，

即 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，即 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，

设 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$ 上式转化为 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$（$t>1$），

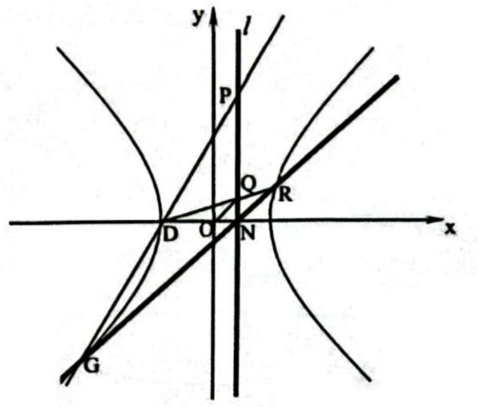
设 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(t)>g(1)=0$，$\therefore \ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$.

32.（2024 届宜荆荆随高三 10 月联考）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过 C 上的动点 M 作曲线 C 的两渐近线的垂线，垂足分别为 A 和 B，$\triangle ABM$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$。

（1） 求曲线 C 的方程；

（2） 如图，曲线 C 的左顶点为 D，点 N 位于原点与右顶点之间，过点 N 的直线与曲线 C 交于 G,R 两点，直线 l 过 N 且垂直于 x 轴，直线 DG,DR 分别与 l 交于 P,Q 两点，若 O,D,P,Q 四点共圆，求点 N 的坐标。



【解析】（1）由离心率 $e=2$ 知 $\dfrac{c}{a}=2$，又 $c^2=a^2+b^2$，得 $b=\sqrt{3}a$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$，即 $3x^2-y^2=3a^2$；设 $M(x,y)$，则 M 到两条渐近线的距离分别为：$|MA|=\dfrac{|\sqrt{3}x-y|}{2},|MB|=\dfrac{|\sqrt{3}x+y|}{2}$。易知两渐近线的夹角为 60°，因 M,A,O,B 四点共圆，所以 $\angle AMB=60^\circ$ 或 120°。所以

$S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}|MA||MB|\sin\angle AMB=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{|3x^2-y^2|}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{16}=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$，故 $a^2=1$，进而得 $b^2=3$，

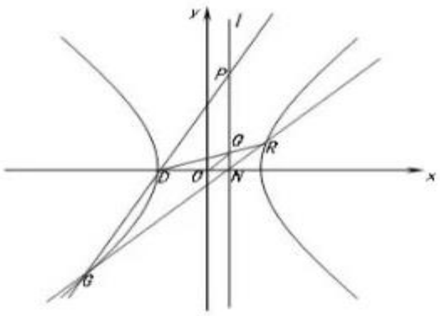
所以曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$。

(2)如图，因 O,D,P,Q 四点共圆，故 $\angle DPQ=\angle NOQ\Rightarrow\tan\angle DPQ=\tan\angle NOQ$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan\angle ODP}=\tan\angle NOQ \Rightarrow k_{DP}k_{OQ}=1$；

设$G(x_1,y_1),R(x_2,y_2),N(t,0),t\in(0,1)$，因$D(-1,0)$，故$l_{DR}:y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x+1)$；

令$x=t$，得$Q\left(t,\dfrac{y_2(t+1)}{x_2+1}\right)$。当$l_{GR}$的斜率为0时，不符合题意。



当l_{GR}的斜率不为0时，设$l_{GR}:x=my+t$，则

$\begin{cases}x=my+t\\3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3m^2-1)y^2+6mty+3(t^2-1)=0$，故$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2-1}\\y_1y_2=\dfrac{3(t^2-1)}{3m^2-1}\end{cases}$，

所以，$k_{DP}k_{OQ}=\dfrac{y_1}{x_1+1}\cdot\dfrac{y_2(t+1)}{t(x_2+1)}=1$，即$\dfrac{t+1}{t}=\dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{y_1y_2}$，

因$\dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{y_1y_2}=\dfrac{m^2y_1y_2+m(t+1)(y_1+y_2)+(t+1)^2}{y_1y_2}=\dfrac{-\dfrac{(t+1)^2}{3m^2-1}}{\dfrac{3(t^2-1)}{3m^2-1}}=-\dfrac{(t+1)^2}{3(t^2-1)}$，

故$\dfrac{t+1}{t}=-\dfrac{(t+1)^2}{3(t^2-1)}$，解得$t=\dfrac{3}{4}\in(0,1)$，符合题意，故$N\left(\dfrac{3}{4},0\right)$