习题课

1. 下列命题中，正确命题的序号是（　　）

（1）如函数 $f(x)$ 满足：对任意 x, y，都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，则 $f(x)\geq 0$ 恒成立

（2）如函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x, y>0$，都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且对任意 $x>1$，有 $f(x)>0$，则 $f(x)$ 必为单调递增函数

（3）$f(x)=x^3+3x^2+5x+1$ 的图像为中心对称图形

（4）函数 $f(x)$ 的图像既关于点 $(2,3)$ 中心对称，又关于直线 $x=-1$ 对称，则 $f(x)$ 必为周期函数，且 12 为其一个周期

【解】（1）易知 $f(x)=f^2(\frac{x}{2})\geq 0$，（1）对；

（2）设 $0<x_1<x_2$，则 $f(\frac{x_2}{x_1})>0$，故 $f(x_2)=f(x_1\times\frac{x_2}{x_1})=f(x_1)+f(\frac{x_2}{x_1})>f(x_1)$，（2）对；

（3）三次多项式函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像必为中心对称图形，对称中心为 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$，（3）对；

（4）对，其周期为 $4|-1-2|=12$；

综上，正确命题的序号为（1）（2）（3）（4）。

2. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上有（　　）

A． 最小值 $f(m)$　　B.最大值 $f(n)$　　C.最小值 $f(n)$　　D. 最大值 $f(\frac{m+n}{2})$

【解】先获取 $f(x)$ 的单调性，假设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1-x_2)>0$，

$f(x_1)=f(x_2+(x_1-x_2))=f(x_2)+f(x_1-x_2)>f(x_2)$

即 $f(x)$ 单调递减，因此，$f(x)$ 在 $[m,n]$ 有最大值 $f(m)$，最小值 $f(n)$，选 C。

3. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a，b 两数中的最小值。若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为（　　）

A．−2　　B. -1　　C. 1　　D.2

【巧解】因 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，故 $f(0)=f(-1)$；

即$\min\{|0|,|t|\}=\min\{|-1|,|-1+t|\}$，显然$t=1$，选 C。

【正解】 因$f(x)$的图像关于$x=-\dfrac{1}{2}$对称，因此，对$\forall x$，有$f(x)=f(-1-x)$；

从而有$f(-1-x)=\min\{|-1-x|,|-1-x+t|\}=\min\{|x+1|,|x+1-t|\}$

$$=\min\{|x|,|x+t|\}$$

显然$t=1$，选 C。

4. 若函数$y=x^2-6x+8$的定义域为$[1,a]$，值域为$[-1,3]$，则a得取值范围为（　　　　）

A．$(1,3)$　　　B. $(1,5)$　　　C. $(3,5)$　　　D. $[3,5]$

【巧解】 基于选择支，取$a=3$验证，此时函数定义域为$[1,3]$，考虑到函数图像的对称轴为直线$x=3$，故函数在$[1,3]$上递减，其值域为$[f(3),f(1)]=[-1,3]$，满足要求，排除 A，C；再取$a=5$验证，此时函数值域仍为$[-1,3]$，满足要求，排除 B。最终，选 D。

【正解】 当$1<a\le 3$时，函数$[1,a]$上单调递减，故值域为$[f(a),f(1)]=[-1,3]$，故$f(a)=-1$，解得$a=3$；

当$a>3$时，由于$f(3)=-1,f(1)=3$，且$f(x)$在$(3,a]$上单调递增，

令$f(a)=3$，解得$a=1$（舍去）或$a=5$；

综上，a的取值范围为$[3,5]$。

5. $f(x)$在$(-1,1)$上既是奇函数，又是减函数，如$f(1-t)+f(1-t^2)>0$，则t的取值范围是（　　　　）

A．$t>1$或$t<-2$　　　B. $1<t<\sqrt{2}$　　　C. $-2<t<1$　　　D. $t<1$或$t>\sqrt{2}$

【解】 $f(1-t)+f(1-t^2)>0\Rightarrow f(1-t)>-f(1-t^2)\Rightarrow f(1-t)>f(t^2-1)$，

因$f(x)$递减，故$1-t<t^2-1$，解得$t>1$或$t<-2$　　①

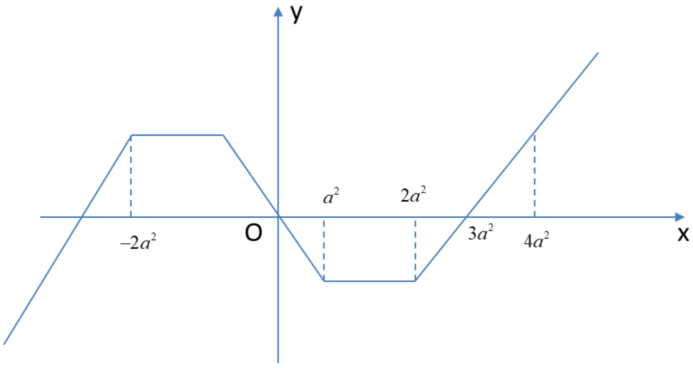
另外，解$\begin{cases}-1<1-t<1\\-1<1-t^2<1\end{cases}$得$0<t<\sqrt{2}$

结合①，得t的取值范围为$(1,\sqrt{2})$，选 B。

6. 已知函数$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当$x\ge 0$时，$f(x)=\dfrac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$.若$\forall x\in R, f(x-1)\le f(x)$,则实数$a$的取值范围为（　　）

A.$[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}]$　　B.$[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}]$　　C. $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　　D.$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

【解】 $f(x-1)\le f(x)$ 意味着 $f(x)$ 的图像向右平移 1 个单位后在原来图像的下方。易知，$x\ge 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x,\ 0\le x\le a^2\\ -a^2, a^2\le x\le 2a^2\\ x-3a^2,\ x\ge 2a^2\end{cases}$，$f(x)$ 图像如下图所示。



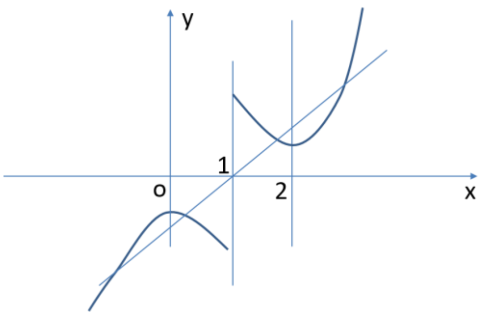
从图像上看，必须有：$1\ge(4a^2-(-2a^2))=6a^2$，解得 $a\in[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}]$，选 B。

7. 对于函数 $y=f(x),y=g(x)$，若存在 x_0，使 $f(x_0)=g(-x_0)$，则称 $M(x_0,f(x_0)),N(-x_0,g(-x_0))$ 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的一对“隐对称点”。已知函数 $f(x)=m(x+1)(x\in R),g(x)$ 是定义在 R 上的函数，且满足 $g(x)+g(2-x)=0$，当 $x>1$ 时，$g(x)=x^2-4x+5$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像恰好存在五对“隐对称点”，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(1-\sqrt{2},0)$　　B. $(2-2\sqrt{2},0)$　　C. $(-\infty,2-2\sqrt{2})$　　D. $(0,2\sqrt{2}-2)$

【解】 很明显，我们的问题 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 与 $g(-x)$ 的图像有 5 个交点，将 x 用 $-x$ 替换，问题 $\Leftrightarrow$ $f(-x)$ 与 $g(x)$ 的图像有 5 个交点。

令 $h(x)=f(-x)=m(1-x)$，问题等价于 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像有 5 个交点，易知 $g(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称，且 $(1,0)$ 为二图像的 1 个交点。根据对称性：问题简化为 $g(x)$ 的图像与 $h(x)$ 的



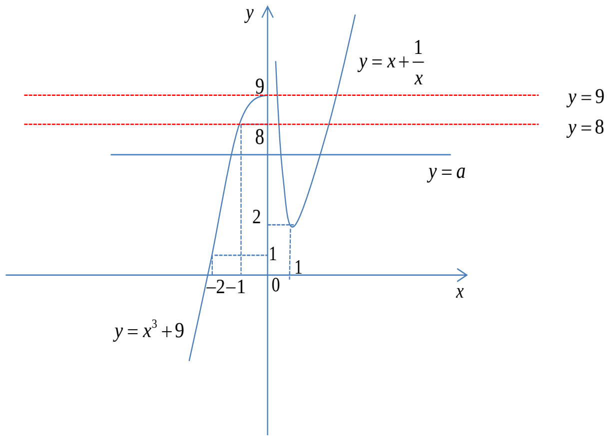
图像在 $x>1$ 时还应有 2 个交点（注意 $h(x)$ 的图像恒过点 $(1,0)$），即方程 $x^2-4x+5=m(1-x)(x>1)$ 有两个不同的解，该方程化简得：$x^2+(m-4)x+5-m=0$，故 $\Delta=(m-4)^2-4(5-m)=m^2-4m-4>0$，解得 $m<2-2\sqrt{2}$ 或 $m>2+2\sqrt{2}$（舍去），

综上，m 的取值范围为 $(-\infty,2-2\sqrt{2})$，选 C。

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x},x>0\\x^3+9,x\le 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f\left(x^2+2x\right)=a$ 有六个不同的实根，则常数 a 的取值范围是（　　）

A、$\left(2,8\right]$　　B、$\left(2,9\right]$　　C、$\left(8,9\right]$　　D、$\left(8,9\right)$

【解】令 $x^2+2x=t$，则 $f(t)=a$，则直线 $y=a$ 与 $f\left(x\right)$ 的图像至少要有 3 个不同的交点。观察选择支，8 和 9 是两个关键数字。先试探 $a=9$ 是否可行，如可行，则排除 A、D，再取 $a=8$ 确定 B、C 谁对；如 $a=9$ 不可行，则排除 B、C，再取 $a=8$ 确定 A、D 谁对。画函数 $f\left(x\right)$ 的图象，如下



易知直线 $y=9$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，由小到大，令其横坐标分别 x_1, x_2, x_3。显然有 $x_1=0$，$0<x_2<1,\ \ x_3>1$。因此

由 $x^2+2x=x_1$，解得 $x=0,\ -2$ 两个不同实根

由 $x^2+2x=x_2$ 知：$\Delta=4+4x_2>0$，方程有两个不同实根

由 $x^2+2x=x_3$ 知：$\Delta=4+4x_3>0$，方程有两个不同实根

易知这 6 个实根互不相同（对应的三个二次函数的对称轴都相同），符合要求，排除 A、D 选项

取 $a=8$，直线 $y=8$ 与 $f(x)$ 的图象仍有 3 个交点，由小到大，令其横坐标分别 x_1, x_2, x_3，易

知 $x_1=-1$，$0<x_2<1,\ \ x_3>1$，

由 $x^2+2x=x_1$，即 $x^2+2x+1=0$，方程有两个相等的实根，因此排除 B，选 C。

9. 已知关于 x 的方程 $x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$ 有且只有一个实根，则实数 a 的取值范围是_

【解】将 $x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$ 看成是关于 a 的二次方程，即转换主元得 $a^2-\left(x^2+2x\right)a+x^3-1=0$，则 $\Delta=\left(x^2+2x\right)^2-4\left(x^3-1\right)=\left(x^2+2\right)^2$

所以 $a=\dfrac{x^2+2x\pm\left(x^2+2\right)}{2}$，即 $a=x-1$ 或 $a=x^2+x+1$

因为 $a=x-1$ 已经有一个根 $x=a+1$，所以 $x^2+x+1-a=0$ 没有实数根，即 $\Delta<0$

故 $1-4(1-a)<0$，解得 $a<\dfrac{3}{4}$

【解法二】 因 $x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0\Rightarrow(x-a-1)(x^2+x+1-a)=0$

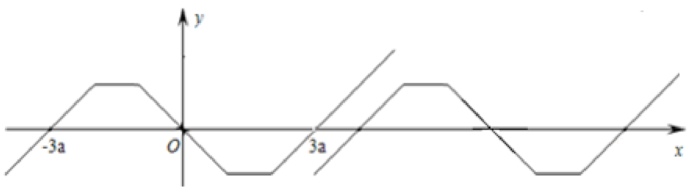
由题意知：方程 $x^2+x+1-a=0$ 无实数根，即 $\Delta=1-4(1-a)<0$，解得 $a<\dfrac{3}{4}$

10. 已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(|x-a|+|x-2a|-|3a|\right)$，若集合 $\left\{x\mid f\left(x-1\right)-f\left(x\right)>0,x\in\mathbf{R}\right\}=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______

【解】两个一次绝对值之和的图象是平底锅，且 $f\left(0\right)=0$

当 $a\leq0$ 时，$f\left(x\right)=x$，显然符合题意

当 $a>0$ 时，画出图象如图所示，



$\left\{x\mid f\left(x-1\right)-f\left(x\right)>0,x\in\mathbf{R}\right\}=\varnothing$ 等价于函数 $y=f\left(x-1\right)$ 的图象任何一点都不能在 $y=f\left(x\right)$ 图象的上方，而 $y=f\left(x-1\right)$ 的图象是将 $y=f\left(x\right)$ 图象向右平移一个单位得到的。

故 $6a\leq1$，即 $0<a\leq\dfrac{1}{6}$，综上得 $a\leq\dfrac{1}{6}$

11. 已知 $f\left(x\right)=ax^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}\left(t-1\leq x\leq t+1\right)$，若 $f_{\max}(x)-f_{\min}(x)\geq\dfrac{1}{4}$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____

【解】如 $a=0$，则 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ 单调递减，故 $f_{\max}(x)-f_{\min}(x)=1\geq\dfrac{1}{4}$，满足要求。

当$a\neq 0$时，$f(x)=ax^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$与$y=ax^2$的图象完全“全等”，即可以通过平移完全重合。

因为t任意，故$[t-1,t+1]$是长度为 2 的任意闭区间，故可用一个区间宽度为 2 的任意区间去截取函数图象，使得图象的最高点与最低点间的纵坐标之差大于等于$\frac{1}{4}$，因此取纵坐标之差最小的状态为$f(x)=ax^2(-1\leq x\leq 1)$，此时$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=|a|-0\geq\frac{1}{4}$

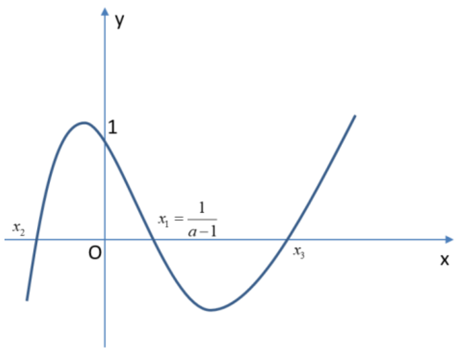
故$a\geq\frac{1}{4}$或$a\leq-\frac{1}{4}$，即a的取值范围为$(-\infty,-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{4},+\infty)\cup\{0\}$。

12. 设$a\in\mathbf{R}$，若$x>0$时，均有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geq 0$，则$a=$__________.

【巧解】有题意知：$x>0$时，$\left[(a-1)x-1\right]$与$\left(x^2-ax-1\right)$同号，由于函数$f(x)=x^2-ax-1$是开口向上的一元二次函数，根据韦达定理，其两根之积为-1，故其必有一负一正两个根，不妨设其为$x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，考虑到$f(0)=-1$，故直线$y=(a-1)x-1$必过$(0,-1),(x_2,0)$两点，显然$x_2=\frac{1}{a-1}$，从而由$f\left(\frac{1}{a-1}\right)=0$解得$a=0$或$a=\frac{3}{2}$，考虑到直线$y=(a-1)x-1$的斜率必须为正，最终，$a=\frac{3}{2}$。

【法二】分析函数$f(x)=\left[(a-1)x-1\right]\left(x^2-ax-1\right)$

易知$a\leq 1$时，函数$f(x)$的最高次项系数为负，不能保证$f(x)\geq 0$在$x>0$时恒成立，因此$a>1$，此时$f(x)$为三次多项式函数，易知$f(x)=0$有 3 个根，其中 1 根为$x_1=\frac{1}{a-1}>0$，另外 2 根由$x^2-ax-1=0$贡献，不妨设其为x_2,x_3，因$x_2x_3=-1<0$（韦达定理），故此 2 根必一正一负，不妨令$x_3>0$。很显然，两个正根必须重合，即$x_1=x_3$，否则$f(x)$在(x_1,x_3)小于 0，与题意不合。



因此，$x_1=\dfrac{1}{a-1}$ 也是方程 $x^2-ax-1=0$ 的一根，代入并解之得 $a=\dfrac{3}{2}$ （$a=0$ 舍去）。

【法三】 将 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geq 0$ 视为关于 a 的二次不等式，即整理为 $\left[xa-(x+1)\right]\left[xa-\left(x^2-1\right)\right]\leq 0$，因为 $x>0$，故 $\left(a-\dfrac{x+1}{x}\right)\left[a-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\leq 0$，

当 $\dfrac{x+1}{x}=x-\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=2$

当 $0<x\leq 2$ 时，$\dfrac{x+1}{x}\geq x-\dfrac{1}{x}$，则 $x-\dfrac{1}{x}\leq a\leq\dfrac{x+1}{x}$，所以 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)_{\max}\leq a\leq\left(\dfrac{x+1}{x}\right)_{\min}$

即 $\dfrac{3}{2}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$，即 $a=\dfrac{3}{2}$

当 $x\geq 2$ 时，$\dfrac{x+1}{x}\leq x-\dfrac{1}{x}$，则 $\dfrac{x+1}{x}\leq a\leq x-\dfrac{1}{x}$，所以 $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)_{\max}\leq a\leq\left(x-\dfrac{1}{x}\right)_{\min}$

即 $\dfrac{3}{2}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$，即 $a=\dfrac{3}{2}$

综上，$a=\dfrac{3}{2}$

13. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3-3ax\left(x\in\left(0,1\right)\right)$，若关于 x 的不等式 $\left|f\left(x\right)\right|>\dfrac{1}{4}$ 的解集为空集，则实数 $a=$__

【解】 问题等价于 $\left|x^3-3ax\right|\leq\dfrac{1}{4}$ 对 $x\in\left(0,1\right)$ 恒成立，求实数 a 的值。下面采用分离参数法

$-\dfrac{1}{4}\leq x^3-3ax\leq\dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{x^3-\frac{1}{4}}{x}\leq 3a\leq\dfrac{x^3+\frac{1}{4}}{x}$

令 $g\left(x\right)=\dfrac{x^3-\frac{1}{4}}{x}=x^2-\dfrac{1}{4x}$，$h\left(x\right)=\dfrac{x^3+\frac{1}{4}}{x}$，则，$g\left(x\right)_{\max}\leq 3a\leq h\left(x\right)_{\min}$

易知 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,1\right)$ 上单调递增，故 $g\left(x\right)_{\max}=\dfrac{3}{4}$，

而 $h(x)=\dfrac{x^3+\frac{1}{4}}{x}=x^2+\dfrac{1}{4x}=x^2+\dfrac{1}{8x}+\dfrac{1}{8x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{1}{8x}\cdot\dfrac{1}{8x}}=\dfrac{3}{4}$

当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{8x}$，即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，故 $h\left(x\right)_{\min}=\dfrac{3}{4}$，故 $\dfrac{3}{4}\leq 3a\leq\dfrac{3}{4}$，即 $a=\dfrac{1}{4}$

14. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2ax+a^2-1$，若关于 x 的不等式 $f\left(f\left(x\right)\right)<0$ 的解集为空集，则

实数 a 的取值范围是____

【解】 $f(x)=x^2-2ax+a^2-1=[x-(a-1)][x-(a+1)]$，所以 $f(x)<0$ 的解集为 $(a-1,a+1)$

所以若使 $f(f(x))<0$ 的解集为空集，就是 $a-1<f(x)<a+1$ 的解集为空，

从而需 $f(x)\ge a+1$ 或 $f(x)\le a-1$ 恒成立

因 $f(x)$ 开口向上，故 $f(x)\le a-1$ 恒成立不可能，

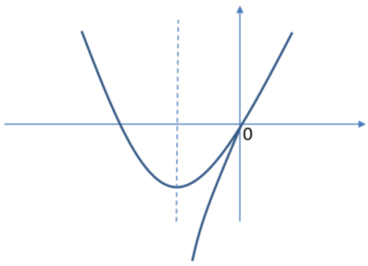
因此，$f(x)\ge a+1$ 恒成立，即 $f_{\min}(x)\ge a+1$

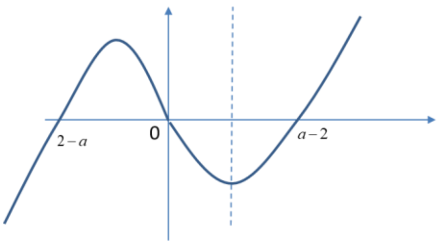
从而得 $-1\ge a+1$，解得 $a\le -2$。

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+(2-a)x$，其中 $a\ge 0$．若对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(x-2\sqrt{a})\le f(x)$，则实数 a 的取值范围是________

【解】当 $-\frac{2-a}{2}\le 0$，即 $0\le a\le 2$ 时，$f(x)$ 是增函数，所以 $f(x-2\sqrt{a})\le f(x)$ 恒成立

当 $-\frac{2-a}{2}>0$，即 $a>2$ 时，则由图象可知，两个自变量的差距 $2\sqrt{a}$ 至少要不小于左右两个零点间的差距 $2(a-2)$，即 $2\sqrt{a}\ge 2(a-2)$，所以 $2<a\le 4$，综上可知，$0\le a\le 4$





16. （1）已知 x,y 为正实数，则 $\frac{4x}{4x+y}+\frac{y}{x+y}$ 的最大值为________.

(2) 已知 x,y 为正实数，且 $x+y=2$，则 $\frac{x^2+2}{x}+\frac{y^2}{y+1}$ 的最小值为________

【解】(1) $\frac{4x}{4x+y}+\frac{y}{x+y}=\frac{4x^2+8xy+y^2}{4x^2+5xy+y^2}=1+\frac{3xy}{4x^2+5xy+y^2}\le 1+\frac{3xy}{5xy+2\sqrt{4x^2y^2}}$

$=1+\frac{3xy}{9xy}=\frac{4}{3}$

当且仅当 $2x=y$ 时取得等号.

(2) $\frac{x^2+2}{x}+\frac{y^2}{y+1}=x+\frac{2}{x}+\frac{(y+1)(y-1)+1}{y+1}=x+\frac{2}{x}+y-1+\frac{1}{y+1}=1+\frac{2}{x}+\frac{1}{y+1}$

$=1+\frac{1}{3}\left[x+\left(y+1\right)\right]\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y+1}\right)=1+\frac{1}{3}\left[2+1+\frac{2\left(y+1\right)}{x}+\frac{x}{y+1}\right]\geq 2+\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【注意】也可用柯西不等式$\left[x+\left(y+1\right)\right]\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y+1}\right)\geq(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2$

17. （1）已知函数$y=\frac{ax^2+bx+6}{x^2+2}$的最小值为$2$，最大值为$6$，求实数$a,b$的值；

（2）已知实数x,y满足 $1\leq x^2+y^2\leq 4$，求$f(x,y)=x^2+xy+y^2$的最小值和最大值。

【解】（1）：原函数去分母，整理得：$(a-y)x^2+bx+(6-2y)=0$

由题意知：y不可能恒为a（否则y不可能有最小值 2 和最大值 6）。

故，$\Delta=b^2-4(a-y)(6-2y)\geq 0$，即$y^2-(a+3)y+3a-\frac{b^2}{8}\leq 0$，

由题意知：2 和 6 必为方程$y^2-(a+3)y+3a-\frac{b^2}{8}=0$之二根，

故$\begin{cases}a+3=8\\3a-\frac{b^2}{8}=12\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=5\\b=\pm 2\sqrt{5}\end{cases}$

（2）由$-\frac{x^2+y^2}{2}\leq xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$得：$f(x,y)\geq x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=-y$且$x^2+y^2=1$时取等号（比如$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$）

$f(x,y)\leq x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}\leq 6$，当且仅当$x=y$且$x^2+y^2=4$时取等号（比如$x=y=\sqrt{2}$），

综上，$f(x,y)$的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为6。

18. 设$y=f\left(x\right)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，对任意的$x\in\mathbf{R}$，恒有$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=x^2$成立，$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{x^2}{2}$，若$y=f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right]$上单调递增，且$f\left(2-a\right)-f\left(a\right)\geq 2-2a$，则$a$的取值范围是__________。

【解】因$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{x^2}{2}$，故$g\left(-x\right)+g\left(x\right)=0$，因此$g\left(x\right)$是$R$上的奇函数；

又因为$f\left(x\right)$、$-\frac{x^2}{2}$在$\left(-\infty,0\right]$上均单调递增，故$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right]$上也单调递增，从而$g\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

又 $f(2-a)-f(a)\ge 2-2a \Rightarrow [f(2-a)-\frac{(2-a)^2}{2}]-[f(a)-\frac{a^2}{2}]\ge 0$，

故，$g(2-a)-g(a)\ge 0$，即 $g(2-a)\ge g(a)$，所以 $2-a\ge a$，得 $a\le 1$

19. 设实数 a 使得不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\ge a^2$ 对任意实数 x 恒成立，则满足条件的 a 组成的集合是__________

【解】 令 $f(x)=|2x-a|+|3x-2a|$，问题等价于 $f(x)_{\min}\ge a^2$，

易知 $f(x)_{\min}=f(\frac{2}{3}a)=|\frac{a}{3}|$，故 $|\frac{a}{3}|\ge a^2$，显然 $a=0$ 满足要求；

当 $a\ne 0$ 时，得 $|a|\le\frac{1}{3}$，得 $-\frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{3}$；

综上，a 的取值范围为 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

【重要结论】 如 $f(x)=|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_n|$，其中 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$

则 $f(x)_{\min}=\begin{cases} f(x_k),\ n=2k-1 \\ f(x),\ n=2k, x\in[x_k,x_{k+1}] \end{cases}$，

例如：$f(x)=|2x-1|+|3x-2|=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{2}{3}\right|+\left|x-\frac{2}{3}\right|+\left|x-\frac{2}{3}\right|$，

因此 $f(x)_{\min}=f(\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$

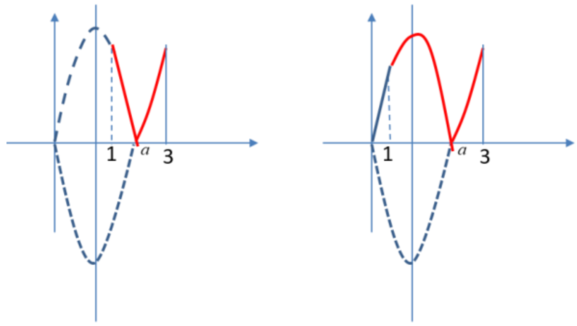
20. 若函数 $f(x)=|x^2-ax|\ (x\in[1,3])$ 的值域为 $[0,f(3)]$，则实数 a 的取值范围为______。

【解】 因 $f(x)=|x(x-a)|$，$x\in[1,3]$，所以函数值 0 只能在 $x=a$ 处取得，从而 $1\le a\le 3$；

故，$f(x)=|x(x-a)|=\begin{cases} x(a-x),\ x\in[1,a] \\ x(x-a),\ x\in[a,3] \end{cases}$，考虑到 $f(3)$ 是最大值，则

（1）当 $\frac{a}{2}<1$，也即 $1\le a<2$ 时，有 $f(1)\le f(3)$，即 $a-1\le 3(3-a)$，解得 $a<\frac{5}{2}$，故 $1\le a<2$；

（2）当 $\frac{a}{2}\ge 1$，也即 $2\le a\le 3$ 时，有 $f(\frac{a}{2})\le f(3)$，即 $\frac{a}{2}(a-\frac{a}{2})\le 3(3-a)$，解得 $-6-6\sqrt{2}\le a\le -6+6\sqrt{2}$，



$2 \le a \le -6+6\sqrt{2}$

综合（1）、（2），最终得$1 \le a \le -6+6\sqrt{2}$

21. 设$a \ge 3$，函数$F(x)=\min\{2|x-1|, x^2-2ax+4a-2\}$,其中$\min\{x,y\}=\begin{cases} x, & x \le y \\ y, & x > y \end{cases}$

（Ⅰ）求使得等式$F(x)=x^2-2ax+4a-2$成立的x的取值范围

（Ⅱ）(i) 求$F(x)$的最小值$m(a)$

(ii) 求$F(x)$在$[0,6]$上的最大值$M(a)$

【解】(I) 由于$a \ge 3$，故

当$x \le 1$时，$\left(x^2-2ax+4a-2\right)-2|x-1| = x^2+2(a-1)(2-x)>0$

当$x>1$时，$\left(x^2-2ax+4a-2\right)-2|x-1| = (x-2)(x-2a)$

所以，使得等式$\mathrm{F}(x)=x^2-2ax+4a-2$成立的$x$的取值范围为$[2,2a]$.

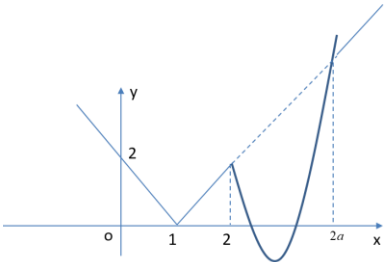
(II) **(i)** 由（I）知$\mathrm{F}(x)=\begin{cases} 2|x-1|, & x \notin [2,2a] \\ x^2-2ax+4a-2, & x \in [2,2a] \end{cases}$，

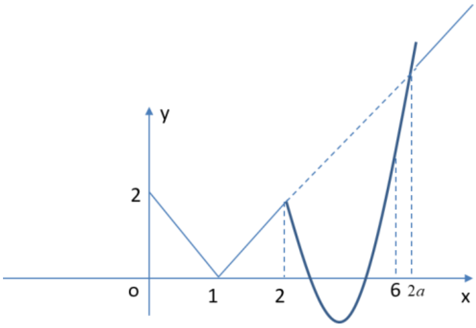
令$g(x)=x^2-2ax+4a-2$，则$g(x)_{\min}=g(a)=-a^2+4a-2$，数形结合知

$m(a)=\min\left\{0,-a^2+4a-2\right\}$，即$m(a)=\begin{cases} 0, & 3 \le a \le 2+\sqrt{2} \\ -a^2+4a-2, & a>2+\sqrt{2} \end{cases}$.

(ii) 由（I）知$\mathrm{F}(x)=\begin{cases} 2|x-1|, & x \notin [2,2a] \\ x^2-2ax+4a-2, & x \in [2,2a] \end{cases}$，数形结合，知

$M(a)=\max\{2,F(6)\}=\max\left\{2,34-8a\right\}=\begin{cases} 34-8a, 3 \le a < 4 \\ 2, a \ge 4 \end{cases}$。





22. 已知函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足以下三个条件：

① x_1、x_2、x_1-x_2 是定义域中的数时，有 $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；

② $f(a)=-1(a>0,\ a$ 是定义域中的一个数)；

③当 $0<x<2a$ 时，$f(x)<0$.

(1)判断 $f(x_1-x_2)$ 与 $f(x_2-x_1)$ 之间的关系，并推断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)判断函数 $f(x)$ 在 $(0,2a)$ 上的单调性，并证明；

(3)当函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-4a,0)\cup(0,4a)$ 时，

①求 $f(2a)$ 的值；

②求不等式 $f(x-4)<0$ 的解集.

【解】：(1)不妨令 $x=x_1-x_2$，则 $f(-x)=f(x_2-x_1)=\dfrac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=-\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$

$=-f(x_1-x_2)=-f(x)$，∴ $f(x)$ 是奇函数；

(2)在 $\left(0,2a\right)$ 上任取两个实数 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，由 $f(x_2-x_1)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$

得 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_2-x_1)}$，

∵ $0<x<2a$ 时，$f(x)<0$，∴ $f(x_2)<0$ 且 $f(x_1)<0$，故 $f(x_2)f(x_1)+1>0$；

∵ $0<x_1<2a$，$0<x_2<2a$ 且 $x_1<x_2$，∴ $0<x_2-x_1<2a$，即有 $f(x_2-x_1)<0$；

∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，∴ $f(x)$ 在 $(0,2a)$ 上是增函数；

(3)：①由题意可得：$f(2a)=f(a-(-a))=\dfrac{f(a)f(-a)+1}{f(-a)-f(a)}=\dfrac{1-f^2(a)}{-2f(a)}=0$，

②由题意知：$0<x<2a$ 时，$f(x)<0$；并且，由①知 $f(2a)=0$

当 $x\in(2a,4a)$ 时， $x-2a\in(0,2a)$ ，故 $f(x-2a)=\dfrac{f(2a)f(x)+1}{f(2a)-f(x)}=\dfrac{1}{-f(x)}<0$,

故 $f(x)>0$ ，因此， $f(x-4)<0\Leftrightarrow 0<x-4<2a$ 或 $-4a<x-4<-2a$,

解得 $4<x<2a+4$ 或 $4-4a<x<4-2a$,

所以，不等式的解集为 $\left(4-4a,4-2a\right)\cup\left(4,2a+4\right)$.