§ 9.5 抛物线的定义及标准方程

9.5.1 相关概念

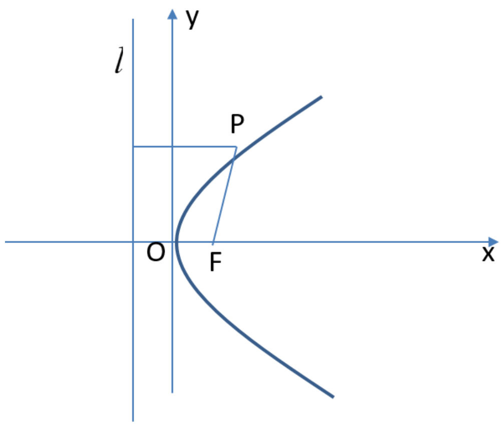
1．**抛物线的定义：**平面内到一个定点 F 和它到一条定直线 l (l 不过 F)的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**．点 F 叫做抛物线的**焦点**，定直线 l 叫做抛物线的**准线**．

我们过 F 作 l 的垂线，零垂足为 K ，以 KF 所在直线为 x 轴，以 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，并令 $|KF|=p(p>0)$ ，则 $F(\frac{p}{2},0)$ ，直线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$

令动点 $P(x,y)$ ，则 $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=|x+\frac{p}{2}|$，化简即得

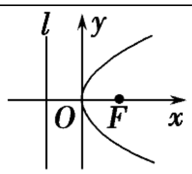
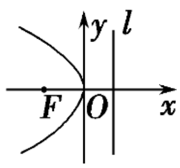
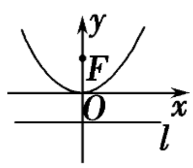
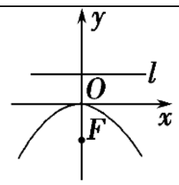
$$y^2=2px(p>0)$$

此即抛物线的标准方程，其图形如右。



注意：本案**点-点距**与**点-线距**之比，也称抛物线的离心率，因此，抛物线的离心率为 1

2．**抛物线的标准方程与几何性质**

标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
	p 的几何意义：焦点 F 到准线 l 的距离			
图形				
焦点	$(\frac{p}{2},0)$	$(-\frac{p}{2},0)$	$(0,\frac{p}{2})$	$(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2px(p>0)$
焦半径	$\|FP\|=x_0+\frac{p}{2}$	$\|FP\|=-x_0+\frac{p}{2}$	$\|FP\|=y_0+\frac{p}{2}$	$\|FP\|=-y_0+\frac{p}{2}$

3、 抛物线$y^2=2px$的性质（补充）

（1） 焦点弦长$\left|AB\right|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}$（$\theta$为$AB$的倾斜角）

（2）抛物线$y^2=2px$上的动点可设为$P(\dfrac{{y_0}^2}{2p},y_0)$或$P(2pt^2,2pt)$或 $P(x_0,y_0)$，其中$y_0^2=2px_0$

（3）设AB为抛物线$y^2=2px$的焦点弦，其中，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$

(4) 直线$Ax+By+C=0(A\neq 0)$与抛物线$y^2=2px$的位置关系

相切$\Leftrightarrow pB^2=2AC$；　相交$\Leftrightarrow pB^2>2AC$；　相离$\Leftrightarrow pB^2<2AC$

9.5.2 典型例题

例 1（1）.抛物线$y^2=8x$的焦点到准线的距离是(　　).

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

（2）已知抛物线的焦点坐标是(0，－3)，则抛物线的标准方程是(　　).

A．$x^2=-12y$　　B．$x^2=12y$　　C．$y^2=-12x$　　D．$y^2=12x$

【解】（1）由$2p=8$得$p=4$，即焦点到准线的距离为4.

（2）由题意知：可设抛物线的标准方程为$x^2=-2py$

由$-\dfrac{p}{2}=-3$得$p=6$，$\therefore$抛物线的方程为：$x^2=-12y$

例 2(1)设抛物线$y^2=8x$上一点P到y轴的距离是4，则点P到该抛物线焦点的距离是(　　).

A．4　　B．6　　C．8　　D．12

（2）直线$y=2x-m$与抛物线$y^2=8x$相切，则$m=$_____

【解】（1）由题意知：$p=4$，点P的横坐标$x_P=4$，

故，P 到焦点的距离为 $x_P+\frac{p}{2}=6$，选 B。

（2）直线标准方程为：$2x-y-m=0$

故，$A=2, B=-1, C=-m, p=4$，

由 $pB^2=2AC$ 得 $4\times(-1)^2=2\times2\times(-m)$，解得 $m=-1$

例 3.过 $M(2,0)$ 作斜率为 1 的直线 l，交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 两点，求 $|AB|$。

【解】令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，易知直线 l 的方程为：$y=x-2$

将其代入 $y^2=4x$，化简得 $x^2-8x+4=0$

故，$x_1+x_2=8$，$x_1x_2=4$

故 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}$

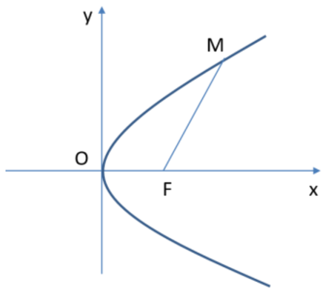
$=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2(8^2-4\times4)}=4\sqrt{6}$

【法二】前面与【解法一】相同

由 $x_1+x_2=8$，$x_1x_2=4$，利用公式

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{8^2-4\times4}=4\sqrt{6}$

例 4.如图，M 是抛物线 $y^2=4x$ 上一点，F 是抛物线的焦点，以 Fx 为始边，FM 为终边的角 $\angle xFM=60^\circ$，求 $|FM|$。



【解】易知 $F(1,0)$，直线 FM 的斜率 $k=\tan60^\circ=\sqrt{3}$，

因此直线 FM 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

将其代入抛物线方程直线 $y^2=4x$，化简得 $3x^2-10x+3=0$

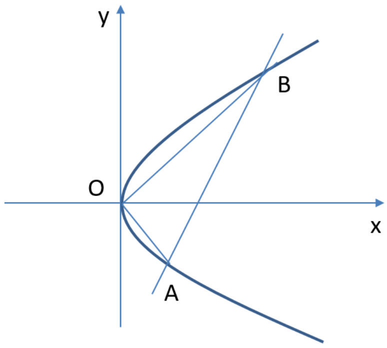
解得 $x=3$ 或 $x=\frac{1}{3}$（舍去），

故 $|FM|=x+\frac{p}{2}=4$

【法二】$|FM|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{1-\cos 60^{\circ}}=4$

此法利用了抛物线的极坐标方程：$\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$（其中的$\rho$就是焦半径，$\theta$是极角）

例 5.如图，直线$y=x-2$与抛物线$y^2=2x$交于A,B两点，求证：$OA\perp OB$.



【证明】令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

将$y=x-2$代入$y^2=2x$并化简得$x^2-6x+4=0$

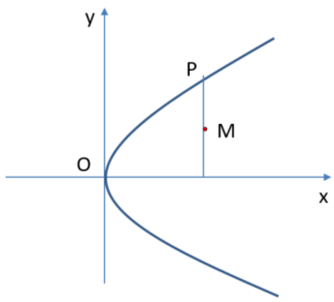
故，$x_1+x_2=6,\ x_1x_2=4$

因此，$y_1y_2=(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=-4$

故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=4-4=0$，

即$OA\perp OB$，证毕。

例 6.从抛物线$y^2=2px(p>0)$上各点向x轴作垂线段，求垂线段中点的轨迹方程，并说明它是什么曲线。



【解】令题中的中点$M(x,y)$，令过M垂直于x的直线与抛物线交于P，则$P(x,\pm 2y)$，由于P在抛物线$y^2=2px(p>0)$上，故$(\pm 2y)^2=2px$，即$y^2=\dfrac{p}{2}x(p>0)$，

此说明这些中点的轨迹仍抛物线。

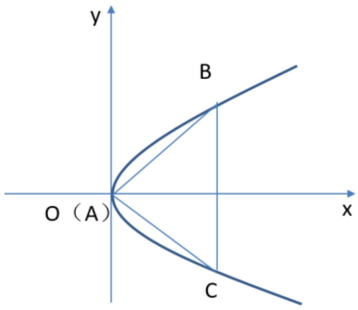
例 7.已知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线$y^2=2px(p>0)$上，求这

个等边三角形的边长。

【解】不妨设等边$\triangle ABC$的顶点A在原点，则另外两个顶点B,C一定关于x轴对称，如图，

令等边$\triangle ABC$的边长为a，则$B(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2})$，因$B$在抛物线上，故

$(\frac{a}{2})^2=2p\times\frac{\sqrt{3}a}{2}$，解得$a=4\sqrt{3}p$



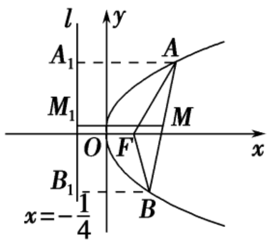
例 8.已知F是抛物线$y^2=x$的焦点，A,B是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=3$，则线段AB的中点到y轴的距离为(　　).

A.$\frac{3}{4}$　　B．1　　C.$\frac{5}{4}$　　D.$\frac{7}{4}$

【解】：设抛物线的准线为l，作$AA_1\perp l$于A_1，$BB_1\perp l$于B_1，由抛物线的定义知

$|AA_1|+|BB_1|=|AF|+|BF|=3$，

故，AB中点到y轴的距离为$\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$



例 9.已知点P是抛物线$y^2=2x$上的一个动点，则点P到点$(0,2)$的距离与点P到该抛物线准线的距离之和的最小值为(　　).

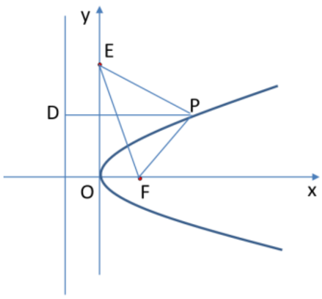
A.$\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B．3　　C.$\sqrt{5}$　　D.$\frac{9}{2}$

【解】过P作抛物线准线的垂线，设垂足为D，另外，设$E(0,2)$，则问题为：求$PD+PE$的最小值。

令 F 为抛物线的焦点，则 $F(\frac{1}{2},0)$，连接 EF，显然，

$$PD+PE=PF+PE\geq EF=\sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(0-2)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2},$$

易知 E,P,F 三点共线时取等号，选 A。

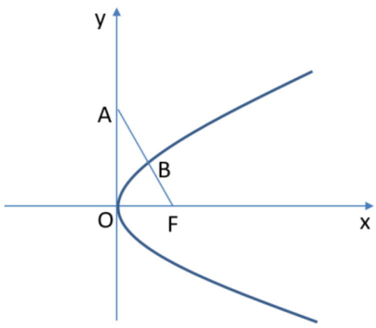


例 10.设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $A(0,2)$．若线段 FA 的中点 B 在抛物线上，则 B 到该抛物线准线的距离为________

【解】 易知 $F(\frac{p}{2},0)$，故 $B(\frac{p}{4},1)$，因 B 在抛物线上，

故 $2p\times\frac{p}{4}=1$，解得 $p=\sqrt{2}$，故 $B(\frac{\sqrt{2}}{4},1)$，

故，B 到该抛物线准线的距离为：$|BF|=x_B+\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$。



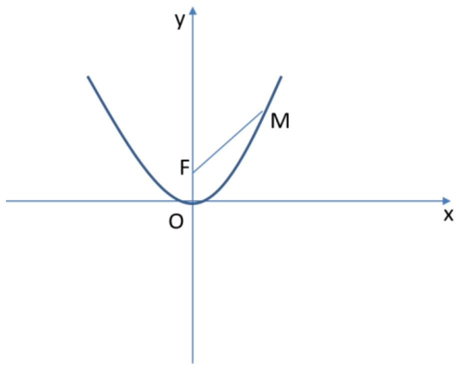
例 11.已知 F 为抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点，M 为其上一点，且 $|MF|=2p$，则直线 MF 的斜率为(　　)．

A．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\pm\sqrt{3}$

【解】 依题意得 $F(0,\frac{p}{2})$，令 $M(x_0,y_0)$，则由 $|FM|=y_0+\frac{p}{2}=2p$ 得 $y_0=\frac{3p}{2}$，

由 $x_0{}^2=2py_0=2p\times\frac{3p}{2}=3p^2$，得 $x_0=\pm\sqrt{3}p$

故，FM 的斜率为 $\dfrac{\frac{3p}{2}-\frac{p}{2}}{\pm\sqrt{3}p-0}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



例 12．以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 D,E 两点。已知 $|AB|=4\sqrt{2},|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为(　　)

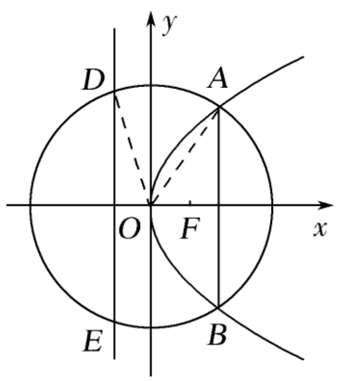
A.2　　　　B.4　　　　C.6　　　　D.8

【解】：不妨设 $C:y^2=2px(p>0)$，圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，如图，由题意，可设 $A(x_0,2\sqrt{2})$，$D(-\dfrac{p}{2},\sqrt{5})$。

因 A 在抛物线上，故 $(2\sqrt{2})^2=2px_0$，解得 $x_0=\dfrac{4}{p}$，即 $A(\dfrac{4}{p},2\sqrt{2})$，

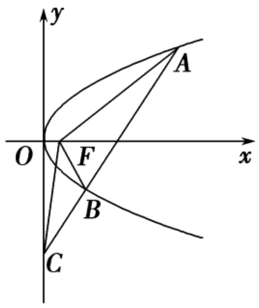
又，由题意有 $|OA|=|OD|=r$，

故 $(\dfrac{4}{p})^2+(2\sqrt{2})^2=(-\dfrac{p}{2})^2+(\sqrt{5})^2$，解得 $p=4$，选 B。



例 13．如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A,B,C，其中点 A,B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是(　　)

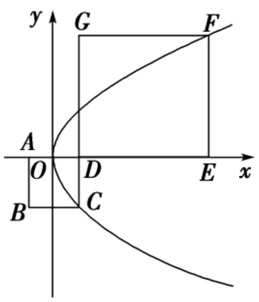
A. $\dfrac{|FB|-1}{|FA|-1}$　　B. $\dfrac{|FB|^2-1}{|FA|^2-1}$　　C. $\dfrac{|FB|+1}{|FA|+1}$　　D. $\dfrac{|FB|^2+1}{|FA|^2+1}$



【解】：易知 $F(1,0)$，　$|FB|=x_B+1,|FA|=x_A+1$，

由图象知 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{x_B}{x_A}=\frac{|FB|-1}{|FA|-1}$，选 A.

例 14．如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 $a,b(a<b)$，原点 O 为 AD 的中点，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 经过 C,F 两点，则 $\frac{b}{a}=$________.



【解】：由题意知：$C(\frac{1}{2}a,-a),F(\frac{1}{2}a+b,b)$，

因 C 在抛物线上，故 $(-a)^2=2p\times\frac{a}{2}$，故 $p=a$，

因此，抛物线方程为：$y^2=2ax$，

又，F 在抛物下上，故 $b^2=2p(\frac{a}{2}+b)$，解得 $b=(\sqrt{2}+1)a$

所以，$\frac{b}{a}=1+\sqrt{2}$

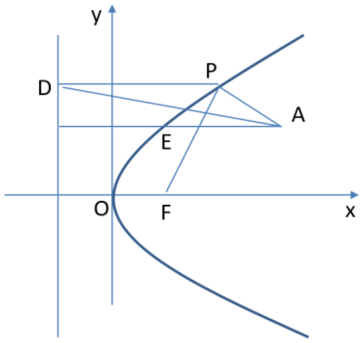
例 15.若点 A 的坐标是 $(3,2)$，F 是抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在抛物线上移动，为使得 $|PA|+|PF|$ 取得最小值，则 P 点的坐标是(　　)

A.(1，2)　　B.(2，1)　　C.(2，2)　　D.(0，1)

【解】：易知点 $A(3,2)$ 在抛物线 $y^2=2x$ 的内部，过 P 作准线的垂线，垂足为 D，如图，$|PF|+|PA|=|PD|+|PA|\geq|AD|$

因此，$|PF|+|PA|$ 最小 $\Leftrightarrow |AD|$ 最小，此最小值就是 A 到准线的距离。

故，过 A 作准线的垂线，设其与抛物线交于 E，此即为 P 的位置，即 $P(x,2)$，由 $2^2=2x$ 得 $x=2$，故 $P(2,2)$，选 C.

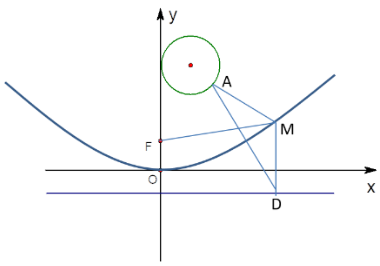


例 16. 已知 M 是 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上一点，F 为抛物线的焦点，A 在圆 C: $(x-1)^2+(y-4)^2=1$ 上，则 $|MA|+|MF|$ 的最小值为(　　)

A.2　　　　B.4　　　　C.8　　　　D.10

【解】: 易知圆心 $C(1,4)$，半径 $r=1$，抛物线准线方程为：$y=-1$

如图，过 M 作准线的垂线，令垂足为 D，则 $|MA|+|MF|=|MA|+|MD|\geq|AD|$，问题转化为圆上一点到准线上一点距离的最小值，它显然为 $5-1=4$



例 17. 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　）

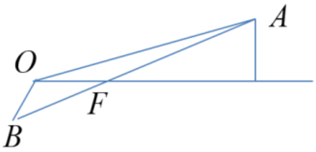
A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\frac{63}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

【解】 易知焦点 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，令 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

易知 $x_1=\frac{3}{4}+\sqrt{3}y_1$，代入抛物线方程求得 $y_1=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$，

由 $y_1y_2=-p^2=-\frac{9}{4}$ 解得 $y_2=\frac{3\sqrt{3}-6}{2}$，

故，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\times(|y_1|+|y_2|)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times6=\frac{9}{4}$



【法二】直接用公式，我们知道：如果焦点弦 AB 的倾斜角为 θ，则 $S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\theta}$

针对本题：由于 $\theta=30^{\circ}, p=\frac{3}{2}$，故 $S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\theta}=\frac{1}{2\sin30^{\circ}}\times(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$。

例 18．已知曲线 $C: y=\frac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A,B.

（1）证明：直线 AB 过定点：

（2）若以 $E(0,\frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积.

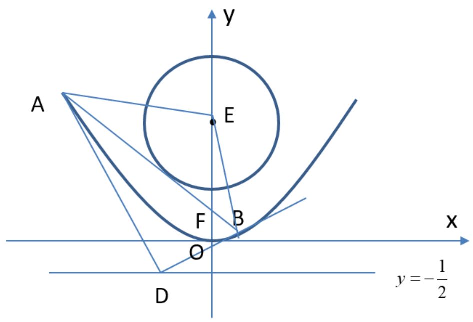
【解】（1）设 $D(t,-\frac{1}{2}), A(x_1,y_1)$，则 $x_1^2=2y_1$.

由于 $y'=x$，所以切线 DA 的斜率为 x_1，故 $\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$，整理得 $2tx_1-2y_1+1=0$.

设 $B(x_2,y_2)$，同理可得 $2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线 AB 的方程为 $2tx-2y+1=0$.

所以直线 AB 过定点 $(0,\frac{1}{2})$。



（2）由（1）得直线 AB 的方程为 $y=tx+\frac{1}{2}$.

由$\begin{cases} y = tx + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$，可得$x^2 - 2tx - 1 = 0$。

故，$x_1 + x_2 = 2t$，$x_1 x_2 = -1$，$y_1 + y_2 = t\left(x_1 + x_2\right) + 1 = 2t^2 + 1$

$|AB| = \sqrt{1+t^2}\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{1+t^2} \times \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1 x_2} = 2\left(t^2 + 1\right)$.

设d_1, d_2分别为点D, E到直线AB的距离，则

$d_1 = \sqrt{t^2 + 1}, \quad d_2 = \dfrac{2}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

因此，四边形$ADBE$的面积为$S = \dfrac{1}{2}|AB|\left(d_1 + d_2\right) = \left(t^2 + 3\right)\sqrt{t^2 + 1}$.

设M为线段AB的中点，则$M\left(t, t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

由于$\overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM} = \left(t, t^2 - 2\right)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1, t)$平行，所以$t + \left(t^2 - 2\right)t = 0$.解得$t = 0$或$t = \pm 1$.

当$t = 0$时，$S = 3$；当$t = \pm 1$时，$S = 4\sqrt{2}$.

因此，四边形$ADBE$的面积为3或$4\sqrt{2}$.