习题课

1. 若样本空间 Ω 中的事件 A_1,A_2,A_3 满足 $P\left(A_1\right)=P\left(A_1|A_3\right)=\frac{1}{4}$，$P\left(A_2\right)=\frac{2}{3}$，$P\left(\overline{A_2}|A_3\right)=\frac{2}{5}$，$P\left(\overline{A_2}|\overline{A_3}\right)=\frac{1}{6}$，则 $P\left(A_1\overline{A_3}\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{14}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．$\frac{2}{7}$　　D．$\frac{5}{28}$

【解】 由 $P\left(A_1\right)=P\left(A_1|A_3\right)=\frac{P\left(A_1A_3\right)}{P\left(A_3\right)}\Rightarrow P\left(A_1A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_3\right)$，故 A_1,A_3 相互独立，从而 $A_1,\overline{A_3}$ 也相互独立，

又，$P\left(\overline{A_2}\right)=P\left(\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(A_3\right)P\left(\overline{A_2}|A_3\right)+P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_2}|\overline{A_3}\right)$

$=P\left(A_3\right)P\left(\overline{A_2}|A_3\right)+\left(1-P\left(A_3\right)\right)P\left(\overline{A_2}|\overline{A_3}\right)$，

即 $\frac{1}{3}=P\left(A_3\right)\times\frac{2}{5}+\left(1-P\left(A_3\right)\right)\times\frac{1}{6}$，解得 $P\left(A_3\right)=\frac{5}{7}$，

故 $P\left(\overline{A_3}\right)=\frac{2}{7}$，从而 $P\left(A_1\overline{A_3}\right)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$，选 D。

2. A,B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P\left(A\right)=\frac{3}{5},P\left(A|B\right)=\frac{2}{5},P\left(A+\overline{B}\right)=\frac{7}{10}$，则下列错误的是（　　）

A．$P\left(B\right)=\frac{1}{2}$　　B．$P\left(A\overline{B}\right)=\frac{2}{5}$　　C．$P\left(\overline{A}B\right)=\frac{3}{5}$　　D．$P\left(B|A\right)=\frac{1}{3}$

【解】 因 $\overline{\left(A+\overline{B}\right)}=\overline{A}B$，故 $P\left(\overline{A}B\right)=1-P\left(A+\overline{B}\right)=\frac{3}{10}$，故 C 错；选 C。

进一步，$P\left(A|B\right)=\frac{2}{5}\Rightarrow P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{3}{5}$，从而由 $P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{P\left(\overline{A}B\right)}{P\left(B\right)}\Rightarrow P\left(B\right)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$，故 A 对；

进而 $P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{2}$，由

$P\left(A+\overline{B}\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\overline{B}\right)=\frac{7}{10}\Rightarrow P\left(A\overline{B}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$，B 对。

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$，D 对。

3. 下列说法正确的是（　　）

A．若事件 M,N 互斥，$P\left(M\right)=\frac{1}{2},P\left(N\right)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(M\cup N\right)=\frac{5}{6}$

B．若事件 M,N 相互独立，$P\left(M\right)=\frac{1}{2},P\left(N\right)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(M\cup N\right)=\frac{2}{3}$

C．若 $P\left(M\right)=\frac{1}{2},P\left(\overline{M}|N\right)=\frac{3}{4},P\left(\overline{M}|\overline{N}\right)=\frac{3}{8}$，则 $P\left(N\right)=\frac{1}{3}$

D．若 $P\left(M\right)=\frac{1}{2},P\left(\overline{M}|N\right)=\frac{3}{4},P\left(\overline{M}|\overline{N}\right)=\frac{3}{8}$，则 $P\left(N|M\right)=\frac{1}{4}$

【解】 A，B 显然都对；

由 $P\left(\overline{M}|N\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{P\left(\overline{M}N\right)}{P\left(N\right)}=\frac{3}{4}\Rightarrow P\left(\overline{M}N\right)=\frac{3}{4}P\left(N\right)$　　①

$P\left(\overline{M}|\overline{N}\right)=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{P\left(\overline{M}\,\overline{N}\right)}{P\left(\overline{N}\right)}=\frac{P\left(\overline{M}\right)-P\left(\overline{M}N\right)}{1-P\left(N\right)}=\frac{3}{8}$，将①代入，得

$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}P\left(N\right)}{1-P\left(N\right)}=\frac{3}{8}\Rightarrow P\left(N\right)=\frac{1}{3}$，C 对；

D．若 $P\left(M\right)=\frac{1}{2},P\left(\overline{M}|N\right)=\frac{3}{4},P\left(\overline{M}|\overline{N}\right)=\frac{3}{8}$，则 $P\left(N|M\right)=\frac{1}{4}$

由 $P\left(\overline{M}|N\right)=\frac{P\left(\overline{M}N\right)}{P\left(N\right)}=\frac{P\left(N\right)-P\left(MN\right)}{P\left(N\right)}=\frac{3}{4}$　　②

由于 $\overline{M}\,\overline{N}=\overline{\left(M+N\right)}\Rightarrow P\left(\overline{M}\,\overline{N}\right)=1-P\left(M\right)-P\left(N\right)+P\left(MN\right)$

故，由 $P\left(\overline{M}|\overline{N}\right)=\frac{P\left(\overline{M}\,\overline{N}\right)}{P\left(\overline{N}\right)}\Rightarrow\frac{1-P\left(M\right)-P\left(N\right)+P\left(MN\right)}{1-P\left(N\right)}=\frac{3}{8}$　　③

由②③，并结合 $P\left(M\right)=\frac{1}{2}$，解得 $P\left(MN\right)=\frac{1}{12}$，故 $P\left(N|M\right)=\frac{P\left(MN\right)}{P\left(M\right)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$

综上，选 ABC。

4. **（多选题）**某项科学素养测试规则为：系统随机抽取 5 道测试题目，规定：要求答题者达到等级评定要求或答完 5 道题方能结束测试。若答题者连续做对 4 道，则系统立即结束测试，并评定能力等级为 A；若连续答错 3 道题目，则系统自动终止测试，并评定能力等级为 C；其他形式评定能力等级为 B。已知小华同学做对每道题的概率为 $\frac{2}{3}$，且他每道题是否答对相互独立，则以下说法正确的是

A． 小华能力等级评定为 A 的概率为 $\frac{64}{243}$　　B. 小华能力等级评定为 B 的概率为 $\frac{158}{243}$

C. 小华只做对了 4 道题目的概率为 $\frac{2}{9}$　　D. 小华做完 5 道题目的概率为 $\frac{16}{27}$

【解】 $P_A=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{64}{243}$，$P_C=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{81}$

$P_B=1-P_A-P_C=1-\frac{85}{243}=\frac{158}{243}$，

$P_4=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{2}{3}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$，$P_5=1-P_3-P_4=1-\frac{1}{27}-\frac{2}{9}=\frac{20}{27}$

综上，选 ABC。

5. 有 90 位学生参加面试，学生来自 A、B、C 三校，其中 A 校 20 人，B 校 30 人，C 校 40 人，面试时每次都从尚未面试的学生中抽取一位，面试完毕以后再选择下一位面试，则 A 校学生先于其他两校学生完成面试的概率是（　　）

A． $\frac{7}{9}$　　B． $\frac{11}{15}$　　C． $\frac{22}{45}$　　D． $\frac{23}{45}$

【解】分以下两种情况讨论

（1）让第 90 位面试的同学为 B 校同学，此时，B 不可能优先了，再考虑 A、C 两校，一共有 60 位同学，让第 60 位面试的同学位 C 校同学，这样就可保证 A 校优于 B、C 两校完成面试；

（2）按（1）的思路交换 B、C 两校

综上，所求概率为 $\frac{30}{90}\times\frac{40}{60}+\frac{40}{90}\times\frac{30}{50}=\frac{22}{45}$，选 C.

6. 为调查某地区中学生每天的睡眠时间，采用样本量比例分配的分层随机抽样，现抽取初中生 800 人，其每天睡眠时间均值为 9 小时，方差为 1，抽取高中生 1200 人，其每天睡眠时间均值为 8 小时，方差为 0.5，则估计该地区中学生每天睡眠时间的方差为（　　）

A.0.96　　　　B.　0.94　　　　C. 0.79　　　　D. 0.75

【解】公式法。令 $m=800,\overline{x_1}=9,{s_1}^2=1,n=1200,\overline{x_2}=8,{s_2}^2=0.5$，总体平均数、方差分别为 $\overline{x},s^2$，则 $\overline{x}=\dfrac{m\overline{x_1}+n\overline{x_2}}{m+n}=\dfrac{800\times9+1200\times8}{2000}=8.4$，故

$$s^2=\frac{m\left[{s_1}^2+\left(\overline{x}-\overline{x}_1\right)^2\right]+n\left[{s_2}^2+\left(\overline{x}-\overline{x}_2\right)^2\right]}{m+n}$$

$$=\frac{800\left[1+(8.4-9)^2\right]+1200\left[0.5+(8.4-8)^2\right]}{2000}=\frac{2\times1.36}{5}+\frac{3\times0.66}{5}=0.94$$，选 B。

7.　**（全国卷）**某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立。已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$，记该棋手连胜两盘的概率为 p，则

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关　　B.该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C.该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大　　D.该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

【解】如按甲、乙、丙顺序，则

$p=(1-p_1)p_2p_3+(1-p_3)p_1p_2=p_2(p_1+p_3)-2p_1p_2p_3$，显然与顺序有关，A 错；

对于 B，$p=p(\text{乙甲丙})+p(\text{丙甲乙})$

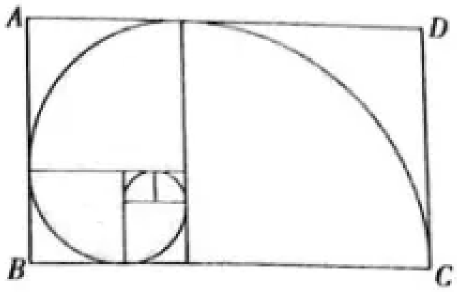
$=\left[p_1(p_2+p_3)-2p_1p_2p_3\right]+\left[p_1(p_3+p_2)-2p_1p_2p_3\right]=2(p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3)$

同理，对于 C：$p=2(p_2p_1+p_2p_3-2p_1p_2p_3)$，

对于 D：$p=2(p_3p_1+p_3p_2-2p_1p_2p_3)$，

显然最后一个最大，故选 D。

8.　斐波拉契螺旋线，也称“黄金螺旋线”，如图，矩形 $ABCD$ 是以斐波拉契数为边长的正方形拼接而成的，在每个正方形中作一个圆心角为 90° 的圆弧，这些圆弧所连成的弧线就是斐波拉契螺旋线的一部分，如图，它与相应正方形的边所围成的区域称为 A 区，在矩形 $ABCD$ 内任取一点，该点取自 A 区的概率为（　　）



A．$\dfrac{\pi}{8}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【解】 由于斐波拉契数分别为$0,1,1,2,3,5,8,\cdots$, 故图中长方形的长和宽分别为13和8，A 区由若干个$\dfrac{1}{4}$圆组成，这些圆的半径分别为对应的斐波拉契数，故，A 区的面积为

$\dfrac{\pi}{4}(1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2)=26\pi$，因此，对应的概率为$p=\dfrac{26\pi}{8\times 13}=\dfrac{\pi}{4}$，选 B。

9. 甲、乙、丙三人传球，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者将球等可能地传给另外 2 人中的任何 1 人。则传球 10 次后，球回到甲手中的概率为_____。

【解】 记p_n为传球n次后，球在甲手中的概率，显然$p_1=0$，且$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

由$p_n=\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1})\Rightarrow p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}(p_{n-1}-\dfrac{1}{3})$

故，数列$\{p_n-\dfrac{1}{3}\}$是以$p_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$为首项，$-\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，因此

$p_n-\dfrac{1}{3}=(-\dfrac{1}{3})(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$，即$p_n=\dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3\bullet 2^{n-1}}$

故$p_{10}=\dfrac{2^9+1}{3\times 2^9}$，即传 10 次球后，求回到甲手中的概率为$\dfrac{2^9+1}{3\times 2^9}$。

10. 若星期一的气温为 20℃，从星期二开始，每天的气温与前一天相比，仅等可能存在三种情形：“升 1℃”、“持平”、“降 1℃”，则星期五时气温也为 20℃的概率为__________.

【解】 把升 1° 看成“加”, 降 1° 看成“减”, 则每相邻两天之间有一个运算（加、减和持平），考虑到周一和周五都是 20°，故，周 1、2 之间，..，周 4、5 之间“加”运算与“减”运算个数一定相等，于是分三种情形

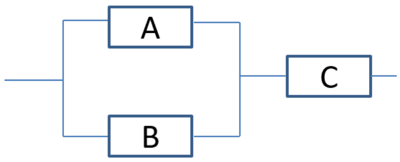
1．四个持平（不加不减），含有的基本事件数为 1;

2．两个持平（1 加 1 减），从 4 个位置中选 2 个位置出来放“加”和“减”，剩下 2 个位置不运算，含有的基本事件数为$A_4^2=12$种;

3．零个持平（2 加 2 减），从 4 个位置中任取 2 个位置出来放“加”，剩下 2 个位置只能放“减”，含有的基本事件数为$C_4^2=6$种；显然基本事件的总数为$3^4=81$

故，所求概率为$\dfrac{1+A_4^2+C_4^2}{81}=\dfrac{19}{81}$.

11. 某部件由如图所示的A,B,C三个元件（相互独立）组成，已知每个元件正常工作的概率均为0.8，当A,B至少有一个正常工作且C也正常工作时，整个部件方能正常工作，则整个部件能正常工作的概率为______



【解】 由题意知，$P(A)=P(B)=P(C)=0.8$

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.2\times0.2=0.96$，故，整个部件能正常工作的概率为

$P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)=0.96\times0.8=0.768$

12. 某仓库中有 10 箱同种规格的产品，其中由甲、乙、丙三厂生产的分别有 5 箱，3 箱，2 箱。三厂产品的废品率分别为$0.1,\ 0.2,\ 0.3$，从 10 箱产品中任取 1 箱，再从这箱产品中任取 1 件，则此件产品为正品的概率为______。

【解】 记A为事件“所取产品为正品”，$B_i(i=1,2,3)$分别为事件“所取产品为甲、乙、丙厂家生产的”。由题意知：

$P(B_1)=0.5,\ P(B_2)=0.3,\ P(B_3)=0.2$，$P(A|B_1)=0.9,\ P(A|B_2)=0.8,\ P(A|B_3)=0.7$.

由于$B_i(i=1,2,3)$互斥，且$B_1+B_2+B_3=\Omega$，由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.5\times0.9+0.3\times0.8+0.2\times0.7=0.82$$

13. **（2024 年新高考 I 卷）**甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）。则四轮比赛后，甲的总分不小于 2 的概率为_______。

【解】 令四轮比赛后，甲的总得分为X，则所求概率为$p=1-P\left(X=0\right)-P\left(X=1\right)$，

易知$P\left(X=0\right)=\frac{A_4^4}{A_4^4A_4^4}=\frac{1}{24}$（对于甲的任意一个出牌顺序，乙只能用唯一的一种出牌顺序与其对应），下面计算$P\left(X=1\right)$，分三种情况

（1）甲用 3 号牌赢，有 1 种方法（$3\leftrightarrow2$）

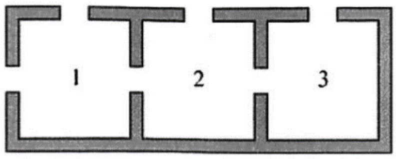
（2）甲用 5 号牌赢，有 3 种方法（$5\leftrightarrow2$，对方有 2 种；$5\leftrightarrow4$，对方有 1 种;）

（3）甲用 7 号牌赢，有 7 种方法（$7\leftrightarrow2$，对方有 4 种；$7\leftrightarrow4$，对方有 2 种；$7\leftrightarrow6$，对方有 1 种;）

故$P\left(X=1\right)=\frac{C_4^1A_3^3+3C_4^1A_3^3+7C_4^1A_3^3}{A_4^4A_4^4}=\frac{11}{24}$，

综上，$p=1-P\left(X=0\right)-P\left(X=1\right)=1-\frac{1}{24}-\frac{11}{24}=\frac{1}{2}$。

14. “布朗运动”是指微小颗粒永不停息的无规则随机运动，在如图所示的试验容器中，容器由三个仓组成，某粒子作布朗运动时每次会从所在仓的通道口中随机选择一个到达相邻仓或者容器外，一旦粒子到达容器外就会被外部捕获装置所捕获，此时试验结束。已知该粒子初始位置为 1 号仓，则试验结束时粒子是从 1 号仓到达容器外的概率为_____。



【解】设粒子随机运动n次后位于 1，2，3 号仓的概率分别为a_n,b_n,c_n，则，

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{3}b_{n-1}\\ b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}\\ c_n=\frac{1}{3}b_{n-1}\end{cases}$$，化简得$a_{n+2}=\frac{5}{18}a_n$，且$a_1=0,a_2=\frac{1}{9}$

故试验结束时，粒子从 1 号仓到达容器外的概率为：$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{5}{18}}=\frac{10}{13}$

15. 某电子设备制造厂所用的元件是三家元件制造厂提供的，根据以往的记录，有如下数据

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15

2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别标志。

（1）在仓库中随机抽取 1 件元件，求它是次品的概率；

（2）在仓库中随机抽取 1 件元件，若已知取到的是次品，求此次品来自各厂的概率。

【解】（1）记 A 为事件“所取产品为次品”，$B_i(i=1,2,3)$ 分别为事件“所取产品为 1、2、3 厂家生产的”。由题意知：

$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.8, P(B_3)=0.05$，

$P(A|B_1)=0.02, P(A|B_2)=0.01, P(A|B_3)=0.03$.

故，$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.15\times0.02+0.8\times0.01+0.05\times0.03=0.0125$

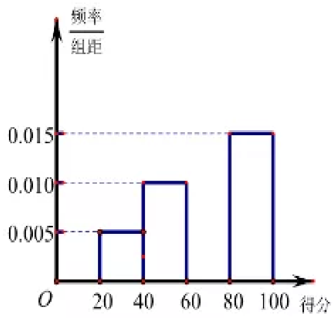
（2）由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24,$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.8\times0.01}{0.0125}=0.64$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{0.05\times0.03}{0.0125}=0.12$$

16. 为了解班级卫生教育系列活动的成效，对全校 40 个班级进行了一次突击班级卫生量化打分检查(满分 100 分，最低分 20 分)。根据检查结果:得分在[80，100]评定为“优”，奖励 3 面小红旗；得分在[60，80)评定为“良”，奖励 2 面小红旗;得分在[40，60)评定为“中”，奖励 1 面小红旗；得分在[20，40)评定为“差”，不奖励小红旗。已知统计结果的部分频率分布直方图如下图：



(1)依据统计结果的部分频率分布直方图，求班级卫生量化打分检查得分的中位数；

(2)学校用分层抽样的方法，从评定等级为“优”、“良”、“中”、“差”的班级中抽取 10

个班级，再从这 10 个班级中随机抽取 2 个班级进行抽样复核，记抽样复核的 2 个班级获得的奖励小红旗面数和为 X，求 X 的分布列与数学期望 $E\left(X\right)$。

【解】（1）得分 $\left[20,40\right)$ 的频率为 $0.005\times 20=0.1$；

得分 $\left[40,60\right)$ 的频率为 $0.010\times 20=0.2$；

得分 $\left[80,100\right)$ 的频率为 $0.015\times 20=0.3$；

所以得分 $\left[60,80\right)$ 的频率为 $1-\left(0.1+0.2+0.3\right)=0.4$；

设班级得分的中位数为 x 分，于是 $0.1+0.2+\dfrac{x-60}{20}\times 0.4=0.5$，解得 $x=70$

所以班级卫生量化打分检查得分的中位数为 70 分。

（2）由（1）知“优”、“良”、“中”、“差”的频率分别为 0.3，0.4，0.2，0.1.

又班级总数为 40.于是“优”、“良”、“中”、“差”的班级个数分别为 12，16，8，4.

分层抽样的方法抽取的“优”、“良”、“中”、“差”的班级个数分别为 3，4，2，1.

由题意可得 X 的所有可能取值为 1，2，3，4，5，6.

$P\left(X=1\right)=\dfrac{C_1^1C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{45}$，　　$P\left(X=2\right)=\dfrac{C_2^2+C_1^1C_4^1}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{9}$

$P\left(X=3\right)=\dfrac{C_1^1C_3^1+C_2^1C_4^1}{C_{10}^4}=\dfrac{11}{45}$　　$P\left(X=4\right)=\dfrac{C_4^2+C_2^1C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{4}{15}$，

$P\left(X=5\right)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{4}{15}$，　　$P\left(X=6\right)=\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5	6
P	$\dfrac{2}{45}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{11}{45}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

$E\left(X\right)=1\times\dfrac{2}{45}+2\times\dfrac{1}{9}+3\times\dfrac{11}{45}+4\times\dfrac{4}{15}+5\times\dfrac{4}{15}+6\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{19}{5}$

所以 X 的数学期望 $E\left(X\right)=\dfrac{19}{5}$

17. 某公司为获得一款产品的质量认证，需要去检测机构检验产品是否含有有害物质 T，在检验中如果样品含有物质 T，称结果为阳性，否则为阴性.现有 $n\left(n\in N^*,n\geq 2\right)$ 份样本需要检验。有以下两种检验方案，方案甲：逐份检验，则需要检验 n 次；方案乙：混合检验，将 n 份样本分别

取样混合在一起检验一次，若检验结果为阴性，检验的次数共为 1 次；若检验结果为阳性，为了确定样本中的阳性样本，则对 n 份样本再逐一检验，即检验的次数共为 $n+1$ 次.每份样本是否为阳性是相互独立的，且据统计每份样本是阳性的概率为 $p\left(0<p<1\right)$。

⑴ 若 $n\left(n\in N^{*},n\geq 2\right)$ 份样本采用方案乙，设需要检验的总次数为 X，求 X 的分布列及数学期望;

⑵若两种检验方案中，每一次检验费用都是 $a\left(a>0\right)$ 元，且 n 份样本混合检验一次需要额外收 $2.5a$ 元的材料费，单独一个样本检验不需要材料费。假设在接受检验的样本中，$p=1-e^{-\frac{1}{10}}$，要使得采用方案乙总费用的数学期望低于方案甲，求 n 的最大值.

参考数据:$e^{-1}\approx 0.368,e^{-1.1}\approx 0.333,e^{-1.2}\approx 0.301,e^{-1.3}\approx 0.273,e^{-1.4}\approx 0.247$

【解】:（1）由题意，每份样品含 T 的概率为 p，因此不含 T 的概率为 $1-p$。由于采用方案乙，因此 X 取 1 和 $n+1$ 两个值；易知

$P(X=1)=(1-p)^n$（n 份样品均不含 T），$P(X=n+1)=1-(1-p)^n$

故，X 的分布列如下

X	1	$n+1$
P	$(1-p)^n$	$1-(1-p)^n$

故，$EX=1\times(1-p)^n+(n+1)[1-(1-p)^n]=n+1-n(1-p)^n$

（2）由题意知：方案甲的费用为 na，

由（1）知：方案乙的费用为

$aEX+2.5a=[n+1-n(1-p)^n]a+2.5a=[n+3.5-n(1-p)^n]a$

令 $[n+3.5-n(1-p)^n]a<na$，得 $n(1-p)^n>3.5$，因 $p=1-e^{-\frac{1}{10}}$，

故 $n\times e^{-\frac{n}{10}}>3.5$

令 $f(x)=xe^{-\frac{x}{10}}$，则 $f'(x)=e^{-\frac{x}{10}}(1-\dfrac{x}{10})$，

显然，$x>10$ 时，$f(x)$ 单调递减，易知

$f(13)=13\times e^{-1.3}\approx 3.549,f(14)=14\times e^{-1.4}\approx 3.458$，

故，最大的 $n=13$

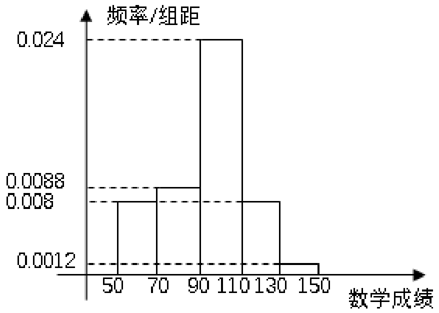
18. 某次考试中，我校共有 500 名学生参加考试，其中语文考试成绩近似服从正态分布

$N(95,17.5^2)$，数学成绩的频率分布直方图如图：

（1）如果成绩大于130的为特别优秀，这500名学生中本次考试语文、数学成绩特别优秀的大约各多少人？

（2）如果语文和数学两科都特别优秀的共有6人，从（1）中的这些同学中随机抽取3人，设三人中两科都特别优秀的有X人，求X的分布列和数学期望.

（3）根据以上数据，是否有99%以上的把握认为语文特别优秀的同学，数学也特别优秀？



附：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.68, P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.96$

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\ge K_0)$	0.50	0.40	$\cdots$	0.010	0.005	0.001
K_0	0.455	0.708	$\cdots$	6.635	7.879	10.828

【解】：（1）$\because$语文成绩服从正态分布$N(95,17.5^2)$，

$\therefore$语文成绩特别优秀的概率为$p_1=P(X\ge130)=(1-0.96)\times\frac{1}{2}=0.02$，

数学成绩特别优秀的概率为$p_2=0.0012\times20=0.024$，

$\therefore$语文特别优秀的同学有$500\times0.02=10$人，

数学特别优秀的同学有$500\times0.024=12$人.

（2）语文数学两科都优秀的有6人，单科优秀的有10人，

X的所有可能取值为$0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\frac{C_{10}^3}{C_{16}^3}=\frac{3}{14}, P(X=1)=\frac{C_{10}^2C_6^1}{C_{16}^3}=\frac{27}{56},$$

$$P(X=2)=\frac{C_{10}^1C_6^2}{C_{16}^3}=\frac{15}{56}, P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{16}^3}=\frac{1}{28},$$

$\therefore X$的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$

$E(X)=0\times\frac{3}{14}+1\times\frac{27}{56}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{28}=\frac{9}{8}$.

（3）2×2 列联表：

	语文特优	语文不特优	合计
数学特优	6	6	12
数学不特优	4	484	488
合计	10	490	500

$\therefore K^2=\frac{500\times(6\times 484-4\times 6)^2}{10\times 490\times 12\times 488}\approx 144.5>6.635$

$\therefore$有99%以上的把握认为语文特别优秀的同学，数学也特别优秀.

19. 新型冠状病毒肺炎(简称新冠肺炎)是由严重急性呼吸系统综合症冠状病毒 2 感染后引起的一种急性呼吸道传染病，临床表现为发热、乏力、咳嗽和呼吸困难等，严重的可导致肺炎甚至危及生命。在党中央的正确指导下，通过全国人民的齐心协力，特别是全体一线医护人员的奋力救治，新冠肺炎疫情得到了控制。我国科研人员也在积极研究新冠肺炎的疫苗，在研究中利用小白鼠进行科学试验，为了研究小白鼠连续接种疫苗后出现呼吸困难症状(记为H症状)的情况，决定对小白鼠进行接种试验，该试验的要求为：①对参加试验的每只小白鼠每天接种一次；②连续接种三天为一个接种周期；③试验共进行 3 个周期。已知每只小白鼠接种后当天出现H症状的概率均为$\frac{1}{3}$，假设每次接种后当天是否出现H症状与上次接种无关。

⑴若某只小白鼠出现H症状即对其终止试验，求一只小白鼠至多能参加一个接种周期试验的概率;

⑵若某只小白鼠在一个接种周期内出现 2 次或 3 次H症状，则在这个接种周期结束后，对其终止试验。设一只小白鼠参加的接种周期为X，求X的分布列及数学期望。

【解】（1）已知每只小白鼠接种后当天出现H症状的概率均为$\frac{1}{3}$，且每次试验间相互独立，

所以一只小白鼠第一天接种后当天出现H症状的概率为$p_1=\frac{1}{3}$。

同理，$p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}, p_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$\therefore$一只小白鼠至多参加一个接种周期试验的概率为：$p=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{27}=\dfrac{19}{27}$。

（2）设事件 A 为“一个周期内出现 2 次或 3 次 H 症状”，

$$P(A)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$$

随机变量 X 可能的取值为 1，2，3.

则 $P(X=1)=\dfrac{7}{27}$，$P(X=2)=\left(1-\dfrac{7}{27}\right)\cdot\dfrac{7}{27}=\dfrac{140}{729}$,

$$P(X=3)=\left(1-\frac{7}{27}\right)\cdot\left(1-\frac{7}{27}\right)=\frac{400}{729},$$

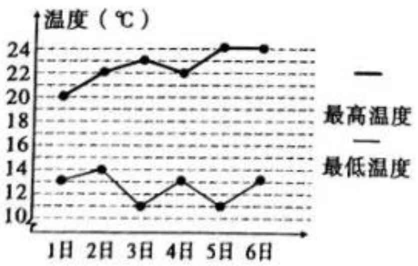
所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{7}{27}$	$\dfrac{140}{729}$	$\dfrac{400}{729}$

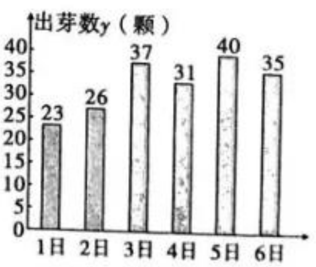
随机变量 X 的数学期望为

$$E(X)=1\times\frac{7}{27}+2\times\frac{140}{729}+3\times\frac{400}{729}=\frac{1669}{729}$$

20. 某学习小组在研究性学习中，对昼夜温差大小与绿豆种子一天内出芽数之间的关系进行研究，该小组在 4 月份记录了 1 日到 6 日每天昼夜最高、最低温度（如图甲），以及浸泡的 100 颗绿豆种子当天内的出芽数（如图乙）



甲



乙

根据上述数据作出散点图，可知绿豆种子出芽数 y（颗）与温差 $x(^0C)$ 具有线性相关关系；

（1）求绿豆种子出芽数 y（颗）关于温差 $x(^0C)$ 的线性回归方程 $y=\hat{b}x+a$

（2）假如 4 月 1 日至 7 日的日温差的平均值为 11^0C，估计 4 月 7 日浸泡的 10000 颗绿豆种子一天内的出芽数

附：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$

【解】（1）依照最高（低）温度折线图和出芽数条形图可得如下数据表

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日
温差 x	7	8	12	9	13	11
出芽数 y	23	26	37	31	40	35

故，$\overline{x}=10,\ \overline{y}=32$

$x_i-\overline{x}$	-3	-2	2	-1	3	1
$y_i-\overline{y}$	-9	-6	5	-1	8	3

故，$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-3)(-9)+(-2)(-6)+2\times5+(-1)(-1)+3\times8+1\times3=77$

$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+2^2+(-1)^2+3^2+1^2=28$

所以，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{77}{28}=\dfrac{11}{4}$，所以$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=32-\dfrac{11}{4}\times10=\dfrac{9}{2}$

所以，绿豆种子出芽数y（颗）关于温差$x(^0C)$的线性回归方程为$y=\dfrac{11}{4}x+\dfrac{9}{2}$

（2）因为 4 月 1 日至 7 日的的日温差的平均值为11^0C，

设 4 月 7 日的温差为x_7，则$\dfrac{6\times10+x_7}{7}=11$，解得$x_7=17^0C$，

所以，$y_7=\dfrac{11}{4}\times17+\dfrac{9}{2}=51.25$

所以，4 月 7 日浸泡的 10000 颗绿豆种子一天内的出芽数约为5125颗。

21. **（全国 I）** 甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，预定赛制如下：累计负两场者被淘汰。比赛前抽签决定首次比赛的两个人，另一人轮空。每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直到有一人被淘汰。当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束。

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空，设每场比赛双方获胜的概率均为$\dfrac{1}{2}$。

（1）求甲连胜 4 场的概率；

（2）求需进行第 5 场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率。

【解】(1) 显然，甲连赢 4 场，只能是前 4 场，故其概率为 $p=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$。

(2) 易知：在该赛制下，比赛结束，需打 4 场或 5 场比赛。如果打四场结束，则有如下 3 种情况：甲连胜 4 场；乙连胜 4 场；丙上场后连胜 3 场；

故，所求概率为 $1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

(3) 丙最终获胜，分打 4 场和打 5 场两种情况：

打 4 场：必定为丙上场后连赢 3 场，概率为 $\frac{1}{8}$；

打 5 场；从第 2 场开始的 4 场比赛，按照丙的胜、负和轮空分为 3 种情形：胜胜负胜、胜负空胜、负空胜胜；

综上，丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$

22. 如图，某人设计了一个类似于高尔顿板的游戏：将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的中间入口处，小球将自由下落，小球在下落的过程中，将 3 次遇到黑色障碍物，已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是 $\frac{1}{2}$，最后落入 A 袋或 B 袋中。一次游戏中小球落入 A 袋记 1 分，落入 B 袋记 2 分，游戏可以重复进行。游戏过程中累计得 n 分的概率为 P_n。

（1）求 P_1,P_2,P_3；

（2）写出 P_n 与 P_{n-1} 之间的递推关系，并求出 P_n 的通项公式。

【解】（1）小球三次碰撞全部向左偏或全部向右偏落入 B 袋，故概率

$P(B)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$,

小球落入 A 袋中的概率 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

故 $P_1=P(A)=\frac{3}{4},P_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{16},P_3=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_2^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{51}{64}$,

（2）法 1：游戏过程中累计得不到 n 分，只可能在得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 B 袋（+2 分），故 $1-P_n=\frac{1}{4}P_{n-1}$ 即 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\geq 2)$。

法 2：游戏过程中累计得 n 分可以分为两种情况：得到 $n-2$ 分后的一次游戏小球落入 B 袋（+2 分）或得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 A 袋中（+1 分），

故 $P_n=\frac{3}{4}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}\Rightarrow P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}(n\geq 2)$。

故 $\left\{P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}\right\}$ 为常数数列且 $P_2+\frac{1}{4}P_1=1$，故 $P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=1$，即 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\geq 2)$

由 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}\Rightarrow P_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{4}{5}\right)$,

故 $\left\{P_n-\frac{4}{5}\right\}$ 为等比数列且首项 $P_1-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{20}$，公比为 $-\frac{1}{4}$,

故 $P_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$，故 $P_n=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{5}$

23. 购买盲盒，是当下年轻人的潮流之一。每个系列的盲盒分成若干个盒子，每个盒子里面随机装有一个动漫、影视作品的周边，或者设计师单独设计出来的玩偶，消费者不能提前得知具体产品款式，具有随机属性。消费者的目标是通过购买若干个盒子，集齐该套盒的所有产品。现有甲、乙两个系列的盲盒，每个甲系列盲盒可以开出玩偶 A_1,A_2,A_3 中的一个，每个乙系列盲盒可以开出玩偶 B_1,B_2 中的一个。

（1）记事件 E_n：一次性购买 n 个甲系列盲盒后集齐 A_1,A_2,A_3 玩偶；记事件 F_n：一次性购买 n 个乙系列盲盒后集齐 B_1,B_2 玩偶；求概率 $P(E_5)$ 及 $P(F_4)$；

（2）某礼品店限量出售甲、乙两个系列的盲盒，每个消费者每天只有一次购买机会，且购买时，只能选择其中一个系列的一个盲盒。通过统计发现：第一次购买盲盒的消费者购买甲系列的概率为 $\frac{2}{3}$，购买乙系列的概率为 $\frac{1}{3}$；而前一次购买甲系列的消费者下一次购买甲系列的概率为 $\frac{1}{4}$，

购买乙系列的概率为$\frac{3}{4}$；前一次购买乙系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{2}$，购买乙系列的概率为$\frac{1}{2}$；如此往复，记某人第n次购买甲系列的概率Q_n。

①求Q_n；

②若每天购买盲盒的人数约100，且这100人都已购买过很多次这两个系列的盲盒，试估计该礼品店每天应准备甲、乙两个系列的盲盒各多少个?

【解】（1）对于事件E_5，分“1，1，3”和“2，2，1”两种情况讨论，$P\left(E_5\right)=\frac{C_3^1C_5^3A_2^2+C_3^1C_5^1C_4^2}{3^5}=\frac{50}{81}$；

对于事件F_4，分“1，3”和“2，2”两种情况讨论，$P\left(F_4\right)=\frac{C_2^1C_4^1+C_4^2}{2^4}=\frac{7}{8}$.

(2)：①由题意知：$\begin{cases}Q_n=\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}\left(1-Q_{n-1}\right)=-\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}\\Q_1=\frac{2}{3}\end{cases}$，解得$Q_n=\frac{4}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$；

②由题意知：设每人每天购买甲系列产品的数量为X，考虑到n充分大时$Q_n\approx\frac{2}{5}$，故$X\sim B\left(1,\frac{2}{5}\right)$，从而100人购买甲系列产品的数量为$100\times EX\approx100\times\frac{2}{5}=40$，当然，乙系列产品每天应准备$100-40=60$件。

24. 11分制乒乓球比赛规则如下：在一局比赛中，每两个球交换发球权，每赢一球得1分，先得11分且至少领先2分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成10：10后，每球交换发球权，领先2分者胜，该局比赛结束。现有甲、乙两人进行一场五局三胜、每局11分制的乒乓球比赛，比赛开始前通过抛掷一枚质地均匀的硬币来确定谁先发球。假设甲发球时甲得分的概率为$\frac{2}{3}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，各球的比赛结果相互独立，且各局的比赛结果也相互独立。已知第一局目前比分为10：10。

（1）求再打两个球甲新增的得分X的分布列和均值；

（2）求第一局比赛甲获胜的概率p_0；

（3）现用p_0估计每局比赛甲获胜的概率，求该场比赛甲获胜的概率。

【**解析**】（1）依题意，X 的所有可能取值为 0，1，2。

设打成$10:10$后甲先发球为事件A，则乙先发球为事件$\overline{A}$，且$P\left(A\right)=P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}$

所以$P\left(X=0\right)=P\left(A\right)P\left(X=0\middle|A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(X=0\middle|\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$,

$P\left(X=1\right)=P\left(A\right)P\left(X=1\middle|A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(X=1\middle|\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$P\left(X=2\right)=P\left(A\right)P\left(X=2\middle|A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(X=2\middle|\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

所以X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$

故X 的均值为$E\left(X\right)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$

（2）设第一局比赛甲获胜为事件B，

则$P\left(B\middle|X=0\right)=0,P\left(B\middle|X=1\right)=P\left(B\right),P\left(B\middle|X=2\right)=1$。

由（1）知，$P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{6},P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{2},P\left(X=2\right)=\dfrac{1}{3}$,

由全概率公式，得

$P\left(B\right)=P\left(X=0\right)P\left(B\middle|X=0\right)+P\left(X=1\right)P\left(B\middle|X=1\right)+P\left(X=2\right)P\left(B\middle|X=2\right)$

$=\dfrac{1}{6}\times0+\dfrac{1}{2}P\left(B\right)+\dfrac{1}{3}$，

解得$P\left(B\right)=\dfrac{2}{3}$，即第一局比赛甲获胜的概率$p_0=\dfrac{2}{3}$

（3）由（2）知$p_0=\dfrac{2}{3}$，故估计甲每局获胜的概率均为$\dfrac{2}{3}$，

设甲获胜时的比赛总局数为Y，因为每局的比赛结果相互独立，所以

$P\left(Y=3\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27},P\left(Y=4\right)=C_3^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{27},P\left(Y=5\right)=C_4^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$,

故该场比赛甲获胜的概率$p=P\left(Y=3\right)+P\left(Y=4\right)+P\left(Y=5\right)=\dfrac{64}{81}$