§11.2 导数的性质与应用（基础）

11.2.1 相关概念

学习目标

1、导数与函数典型性质之间的关系

2、利用导数解决函数的单调性、零点、极值和最值问题

3、对数平均值不等式及其应用

1、导数与函数单调性的关系

函数 $f(x)$ 定义在区间 (a,b) 上且可导，则有如下结论

$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增； $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减。

比如， $f'(x_0)>0$，则 $f(x)$ 的图像在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 $k>0$，故 $f(x)$ 在 x_0 附近递增；

特别注意： 反过来未必成立，因为，一个单调函数未必在其定义域中每个点处的导数都存在。

2、函数的极值点

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 附近（**可以是任意小的一个区域**），总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；如总有 $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点。$f(x)$ 的极大值点和极小值点，统称为 $f(x)$ 的极值点。

3、函数极值点与导数的关系

如果函数 $f(x)$ 满足 $f'(x_0)=0$，则

(1) 若在 x_0 的左边（无限靠近 x_0 的地方）， $f'(x_0)>0$，在 x_0 的右边（无限靠近 x_0 的地方）， $f'(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；

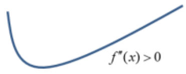
(2) 若在 x_0 的左边（无限靠近 x_0 的地方）， $f'(x_0)<0$，在 x_0 的右边（无限靠近 x_0 的地方）， $f'(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点；

【注意】： 函数的极值点与函数的导数也没有必然的联系。一个函数在其极值点处的导数甚至可以不存在。比如函数 $f(x)=|x|$（$x\in(-1,1)$），显然，0 为 $f(x)$ 的极小点，但 $f(x)$ 在 0 处的导数不存在。

4、凸函数和凹函数

令 $f''(x)$ 为 $f(x)$ 的二阶导数（$f(x)$ 连求两次导数），如 $f''(x)>0$，则称 $f(x)$ 为凹函数**或**下凸函数（类似于开口向上），如 $f''(x)<0$，则称 $f(x)$ 为凸函数**或**上凸函数（类似于开口向下）。

显然，二阶导数可以帮助我们更精确的绘制函数图像。



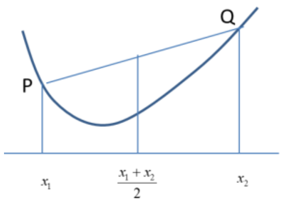
图一

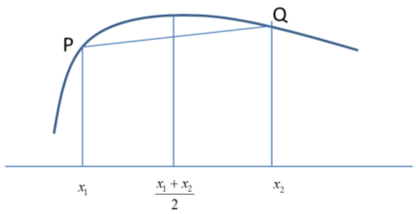
图二

凸函数性质

（1）如 $f(x)$ 为凹函数或下凸函数，则 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

（2）如 $f(x)$ 为凸函数（上凸函数），则 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$





$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

5、对数平均值不等式

令 $x_1,x_2\in R^+$，且 $x_1<x_2$，则：$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

【证明】：我们仅证明 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，剩下的留给读者。

事实上，$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}$，

令 $t=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$，则上面不等式等价于 $2t\ln t-t^2+1>0$，$t\in(0,1)$

令 $f(t)=2t\ln t-t^2+1$，显然 $f(1)=0$，

又 $f'(t)=2[\ln t+1]-2t$，$f'(1)=0$

因 $f''(t)=\frac{2}{t}-2>0(t\in(0,1))$，故 $f'(t)$ 单调递增，

因此 $t\in(0,1)$ 时，$f'(t)<f'(1)=0$，进而得 $t\in(0,1)$ 时，$f(t)$ 递减，

从而 $f(t)>f(1)=0$，也即 $2t\ln t-t^2+1>0(t\in(0,1))$，证毕。

特别注意：

1、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最值的条件

如果在区间 $[a,b]$ 上，函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值.

2、求 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值的步骤

①求函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的极值;

②将函数 $y=f(x)$ 的各极值与 $f(a), f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

3、“ $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上成立”是“ $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增”的充分不必要条件.

4、对于可导函数 $f(x)$，“ $f'(x_0)=0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极值”的必要不充分条件.

5、函数最值是“整体”概念，而函数极值是“局部”概念，极大值与极小值之间没有必然的大小关系

11.2.2 典型例题

例 1.判断下列结论正误(在括号内打“√”或“×”)

(1)若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，那么一定有 $f'(x)>0$ (　　)

(2)如果函数 $f(x)$ 在某个区间内恒有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在此区间内没有单调性.(　　)

(3)函数的极大值一定大于其极小值.(　　)

(4)对可导函数 $f(x)$， $f'(x_0)=0$ 是 x_0 为极值点的充要条件.(　　)

(5)函数的最大值不一定是极大值，函数的最小值也不一定是极小值.(　　)

【解】(1) $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，可以有 $f'(x)\geq 0$，以及导数不存在的情况

(2) $f(x)$ 必为常数函数，它没有单调性，是对的。

(3)函数的极大值也可能小于极小值.

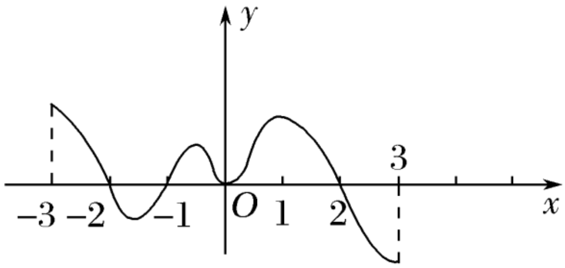
(4) x_0 为 $f(x)$ 的极值点的充要条件是 $f'(x_0)=0$，且 x_0 两侧导函数异号.

综上，(1)×　(2)√　(3)×　(4)×　(5)√

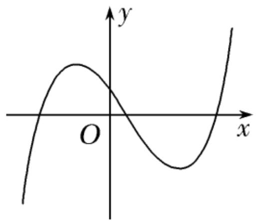
例 2.如图是 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 的极小值点的个数为(　　　)

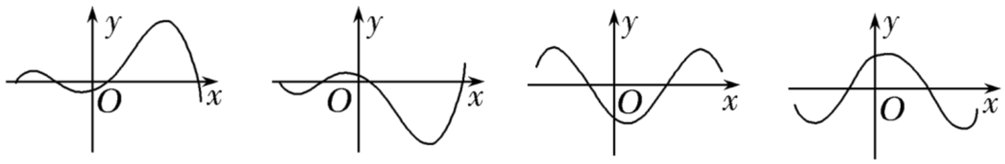
A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【解】由题意知在 $x=-1$ 处 $f'(-1)=0$，且其两侧导数符号为左负右正。选 A



例 3．函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是（　　）





A　　B　　C　　D

【解】设导函数 $y=f'(x)$ 与 x 轴交点的横坐标从左往右依次为 x_1,x_2,x_3，由导函数 $y=f'(x)$ 的图象易得当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,x_3)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_1,x_2)\cup(x_3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$(其中 $x_1<0<x_2<x_3$)，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，(x_2,x_3) 上单调递减，在 (x_1,x_2)，$(x_3,+\infty)$ 上单调递增，观察各选项，只有 D 选项符合.

例 4.设 $g(x)=\ln x+x-x^2$。

（1）求 $g(x)$ 的单调区间；　　　　（2）求 $g(x)$ 的极值。

【解】(1) $g'(x)=1+\frac{1}{x}-2x=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，

故 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2) 由（1）知 $g'(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，

因此，1 为 $g(x)$ 的极大值点，$g(x)$ 的极大值为 $g(1)=\ln 1+1-1=0$

例 5. 下列命题为真命题的个数是

①$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$；　②$\ln\pi<\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$；　③$2^{\sqrt{15}}<15$；　④$3e\ln 2<4\sqrt{2}$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解】：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，

显然，$f(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上递增，在 $(e^2,+\infty)$ 上递减，故

$f(3)<f(4)\Rightarrow\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 4}{\sqrt{4}}=\dfrac{2\ln 2}{2}=\ln 2\Rightarrow\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$，（1）对；

$f(\pi)>f(e)\Rightarrow\dfrac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}>\dfrac{\ln e}{\sqrt{e}}\Rightarrow\ln\pi>\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$，（2）错；

$f(15)>f(16)\Rightarrow\dfrac{\ln 15}{\sqrt{15}}>\dfrac{\ln 16}{\sqrt{16}}=\ln 2\Rightarrow\ln 15>\ln 2^{\sqrt{15}}\Rightarrow 2^{\sqrt{15}}<15$，（3）对；

$f(8)<f(e^2)\Rightarrow\dfrac{\ln 8}{\sqrt{8}}<\dfrac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}\Rightarrow\dfrac{3\ln 2}{2\sqrt{2}}<\dfrac{2}{e}\Rightarrow 3e\ln 2<4\sqrt{2}$，（4）对。综上，选 C。

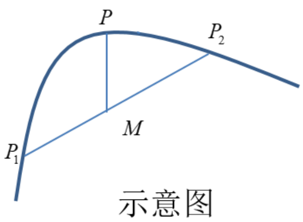
例 6.设 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，证明：$\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【证明】：令 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$

显然，$x\in(0,\pi)$ 时，$f''(x)<0$，此时 $f(x)$ 为上凸函数，

从而 $f(\dfrac{A+B+C}{3})\ge\dfrac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}$，即 $\sin 60^\circ\ge\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}$，

也即 $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，证毕。



示意图

例 7．已知函数 $f(x)=\ln x+a$，$g(x)=ax+b+1$，若 $\forall x>0$，$f(x)\le g(x)$，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值是（　）

A．$1+e$　　B．$1-e$　　C．e^{-1}　　D．$2e^{-1}$

【解】 $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow h(x)=\ln x-ax+a-b-1\le 0\Leftrightarrow h(x)_{\max}\le 0$ 恒成立

因 $h'(x)=\dfrac{1-ax}{x}$，显然 $a\le 0$ 时 $h(x)$ 无最大值，故必有 $a>0$，且易知 $h(x)_{\max}=h(\dfrac{1}{a})$，

从而 $h(\dfrac{1}{a})\le 0\Rightarrow b\ge a-2-\ln a\Rightarrow \dfrac{b}{a}\ge 1-\dfrac{2}{a}-\dfrac{\ln a}{a}$

构造函数 $m(a)=1-\dfrac{2}{a}-\dfrac{\ln a}{a}$，令 $t=\dfrac{1}{a}$，则 $m(a)=k(t)=1-2t+t\ln t$

显然 $k'(t)=\ln t-1$，

易知 $t=e$ 时 $k(t)$ 取得最小值 $1-e$，选 B。

例 8. 设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{\ln x}{\lambda}\ge 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为（　）

（A）$\dfrac{1}{e}$　　（B）$\dfrac{1}{2e}$　　（C）$\dfrac{2}{e}$　　（D）$\dfrac{e}{3}$

【解】 显然，$x\in(0,1]$ 时，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{\ln x}{\lambda}\ge 0$ 恒成立

$x>1$ 时，$e^{\lambda x}-\dfrac{\ln x}{\lambda}\ge 0\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}\ge \ln x\Leftrightarrow (\lambda x)e^{\lambda x}\ge x\ln x\Leftrightarrow (\lambda x)e^{\lambda x}\ge e^{\ln x}\ln x$

令 $g(t)=te^{t}(t>0)$，则上面不等式 $\Leftrightarrow g(\lambda x)\ge g(\ln x)$　　　（*）

因 $g'(t)=(t+1)e^{t}>0$，故 $g(t)$ 单调递增，由（*）得 $\lambda x\ge \ln x$，即 $\lambda\ge\dfrac{\ln x}{x}$

令 $m(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，由 $m'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^{2}}=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}$ 知，e 为 $m(x)$ 的极大值点，故 $\lambda\ge m(e)=\dfrac{1}{e}$，

选 A。

例 9. 定义域为 R 的奇函数 $f(x)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ 恒成立，若 $a=3f(3)$，$b=(\log_{\pi}3)\cdot f(\log_{\pi}3)$，$c=-2f(-2)$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$　　C. $c>a>b$　　D. $a>b>c$

【巧】（特殊函数） 取 $f(x)=x$，易知当 $x\in(-\infty,0)$，$f(x)+xf'(x)=2x<0$ 恒成立，符合要求，但此时 $a=3f(3)=9,\ b=(\log_{\pi}3)\bullet f(\log_{\pi}3)<1,\ c=-2f(-2)=4$，选 A。

【法二】 令 $g(x)=xf(x)$，问题转化为比较 $g(3),g(-2),g(\log_{\pi}3)$ 的大小；

易知 $g(x)$ 为偶函数，且 $g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增，

考虑到 $g(-2)=g(2)$，且 $3>2>\log_{\pi}3$，故，$g(3)>g(2)>g(\log_{\pi}3)$，选 A。

例 10．设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $(x+2017)^2 f(x+2017)-9f(-3)<0$ 的解集为（　）

A．$(-2020,+\infty)$　B．$(-2020,2017)$　C $(-\infty,-2020)$　D．$(-2020,-2017)$

【巧解】 取 $f(x)=-x$，则 $x<0$ 时，$2f(x)+xf'(x)=-2x-x=-3x>0$，故满足要求

此时，$(x+2017)^2 f(x+2017)-9f(-3)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2017)^3>-27\\ x+2017<0\end{cases}$

$\Rightarrow x\in(-2020,-2017)$，选 D。

【法二】 令 $g(x)=x^2 f(x)$，则 $g(-3)=9f(-3)$，

因 $x<0$ 时，$g'(x)=2xf(x)+x^2 f'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]<0$，

故 $g(x)$ 单调递减，从而

$(x+2017)^2 f(x+2017)-9f(-3)<0 \Leftrightarrow g(x+2017)<g(-3) \Leftrightarrow \begin{cases}x+2017>-3\\ x+2017<0\end{cases}$

解得 $-2020<x<-2017$，选 D。

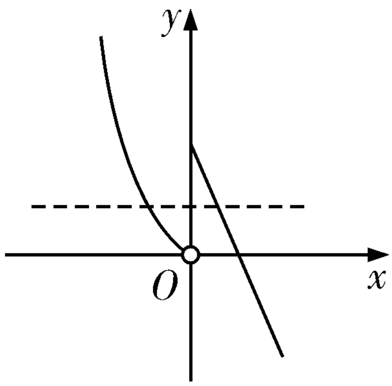
例 11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+1, & x\ge 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}$，若 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_2-x_1 的取值范围是(　)

A) $(\frac{2}{3},\ln 2]$　(B) $(\frac{2}{3},\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}]$　(C) $[\ln 2,\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}]$　(D) $(\ln 2,\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3})$

【解】 作出函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+1, & x\ge 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}$ 的图像如下，

由 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，可得 $0\le x_2<\frac{2}{3}$，$-\frac{3}{2}x_2+1=e^{-x_1}-1$，

即为 $-x_1=\ln(-\frac{3}{2}x_2+2)$



可得 $x_2-x_1=x_2+\ln(-\frac{3}{2}x_2+2)$，令 $g(x_2)=x_2+\ln(-\frac{3}{2}x_2+2),0\le x_2<\frac{2}{3}$

$$g'(x_2)=1+\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}x_2+2}=\frac{3x_2-1}{3x_2-4}$$

当 $0\le x_2<\frac{1}{3}$ 时，$g'(x_2)>0$，$g(x_2)$ 递增；当 $\frac{1}{3}<x_2<\frac{2}{3}$ 时，$g'(x_2)<0$，$g(x_2)$ 递减；

故，$g(x_2)$ 在 $x_2=\frac{1}{3}$ 处取得极大值，也即最大值 $\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3},g(0)=\ln 2,g(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$，

由 $\frac{2}{3}<\ln 2$ 可得：x_2-x_1 的取值范围是 $(\frac{2}{3},\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}]$，故选 B。

例 12. 已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$，若 $f(x)\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A) $[0,e]$　　(B) $[0,1]$　　(C) $(-\infty,e]$　　(D) $[e,+\infty)$

【巧解】 易知 $x>0$，因此时 $xe^x\ge 0$ 显然恒成立，故 $a=0$ 满足要求，因此排除 D；

如 $a<0$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，不可能有 $f(x)\ge 0$ 恒成立，故排除 C；

取 $a=\frac{3}{2}$，易知 $f(x)\ge x(1+x)-\frac{3}{2}(x+x-1)=x^2-2x+\frac{3}{2}=(x-1)^2+\frac{1}{2}>0$ 恒成立，

故 $a=\frac{3}{2}$ 满足要求，排除 B。最终，选 A.

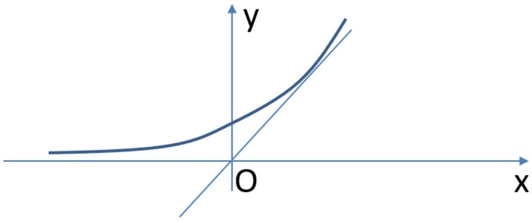
【法二】 易知 $f(x)=e^{\ln x}\cdot e^x-a(x+\ln x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)=e^t-at$，

其中 $t=x+\ln x$，易知 $t\in(-\infty,+\infty)$

故，问题等价于 $e^t-at\ge 0$，也即 $e^t\ge at$ 恒成立；

数形结合，易知 $y=e^t$ 与 $y=at$ 相切于点 $P(1,e)$，

从图像上看，$a\in[0,e]$



例 13．已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 有两个零点 $x_1<x_2$，则下列说法错误的是（　　）

A．$a>e$　　B．$x_1+x_2>2$　　C．$x_1x_2>1$　　D．有极小值点 x_0，且 $x_1+x_2<2x_0$

【巧解】显然 $f'(x)=e^x-a$，如 $a\le 0$，则 $f(x)$ 单调递增，不可能有两个零点，

故 $a>0$，从而 x_1,x_2 均为正数。

由题意 $\begin{cases}e^{x_1}=ax_1\\e^{x_2}=ax_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}\Rightarrow x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$，故 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，

由**“对数平均值不等式”**知：$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>2\\x_1x_2<1\end{cases}$，

显然 C 错 B 对，选 C。

由 $f'(x)=e^x-a=0$ 得 $x_0=\ln a$，易知 x_0 为 $f(x)$ 的极小点，所以，$f(x)$ 要有两个零点，必有 $f(x_0)<0$，即 $e^{\ln a}-a\ln a<0$，也即 $a-a\ln a<0$，即 $1-\ln a<0$，故 $a>e$，选项 A 对。

由前面的分析知：$x_1<x_0<x_2$，

令 $g(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$，显然 $g(0)=0$，

又，$g'(x)=e^{x_0+x}+e^{x_0-x}-2a\ge 2\sqrt{e^{2x_0}}-2a=0$，故 $g(x)$ 单调递增；

故 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $f(x_0+x)-f(x_0-x)>0$

故 $f(x_0+x)>f(x_0-x)$，考虑到 $x_0-x_1>0$

从而 $f(x_2)=f(x_1)=f(x_0-(x_0-x_1))<f(x_0+(x_0-x_1))=f(2x_0-x_1)$

考虑到 $x_2>x_0$，$2x_0-x_1>x_0$，$f(x)$ 在 $x>x_0$ 时递增，

故 $x_2<2x_0-x_1$，即 $x_1+x_2<2x_0$，选项 D 对。

例 14．已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x-ax}{x}(a\in R)$ 有两个零点 x_1,x_2，$x_1\ne x_2$，则

（A）$x_1+x_2>2e$　　（B）$x_1\cdot x_2<e^2$　　（C）$x_1+x_2>e^2$　　（D）$x_1\cdot x_2<1$

【巧解】显然$a>0$，由题意知$a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$；

不妨设$x_1>x_2$，由对数平均值不等式知：

$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，即$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$

从而知$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

故$\ln x_1+\ln x_2>2$，即$x_1x_2>e^2$；B、D 均错；

因此，$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2e$，选 A

例 15．已知函数$f(x)=(x^2-3)e^x$，设关于x的方程$f^2(x)-mf(x)-\frac{12}{e^2}=0(m\in R)$有$n$个不同的实数解，则$n$的所有可能的值为（　　）

A． 3　　B． 1 或 3　　C． 4 或 6　　D．3 或 4 或 6

【解】$f'(x)=(x-1)(x+3)\mathrm{e}^x$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,-3)$和$(1,+\infty)$上单增，$(-3,1)$上单减

又当$x\to-\infty$时$f(x)\to 0$，$x\to+\infty$时$f(x)\to+\infty$，

故$f(x)$的图像如图所示。

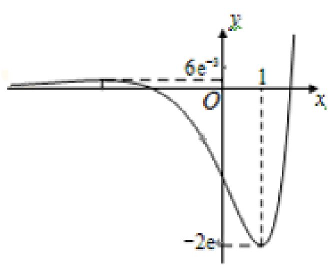
令$f(x)=t$，则方程$t^2-mt-\frac{12}{e^2}=0$必有两根$t_1,t_2\ (t_1<t_2)$且$t_1t_2=-\frac{12}{e^2}$，

当$t_1=-2\mathrm{e}$时恰有$t_2=6\mathrm{e}^{-3}$，此时$f(x)=t_1$有 1 个根，$f(x)=t_2$有 2 个根；

当$t_1<-2\mathrm{e}$时必有$0<t_2<6\mathrm{e}^{-3}$，此时$f(x)=t_1$无根，$f(x)=t_2$有 3 个根；

当$-2\mathrm{e}<t_1<0$时必有$t_2>6\mathrm{e}^{-3}$，此时$f(x)=t_1$有 2 个根，$f(x)=t_2$有 1 个根；

综上，对任意$m\in R$，方程均有3个根.



例 16.已知函数$H(x)=\frac{e^{ax}}{4}+(m+1)x+(m+1)^2$，则下列说法正确的是（　　）

A． 若$m=0,a=-1$，则函数$H(x)$有最大值；

B． 若 $m=-1,a\neq 0$，则过原点恰好可以作一条直线与曲线 $y=H(x)$ 相切;

C． 若 $a=0$，且对任意的 $m\in R,H(x)\geq 0$ 恒成立，则 $0\leq x\leq 1$；

D． 若对任意的 $m\in R$，任意 $x>0,H(x)\geq 0$ 恒成立，则 a 的最小值为 $\frac{2}{e}$ 。

【解】 对于 A。$H(x)=\frac{1}{4}e^{-x}+x+1,H'(x)=-\frac{1}{4}e^{-x}+1$，

由 $H'(x)=0\Rightarrow -\frac{1}{4}e^{-x}+1=0\Rightarrow x=-2\ln 2$．易知 $-2\ln 2$ 为 $H(x)$ 的极小点，

考虑到 $H(x)$ 的定义域为 R，故，$H(x)$ 无最大值，A 错。

对于 B。$H(x)=\frac{1}{4}e^{ax},H'(x)=\frac{a}{4}e^{ax}$，设切点为 $(x_0,\frac{1}{4}e^{ax_0})$，

则 $k=H'(x_0)=\frac{a}{4}e^{ax_0}=\frac{\frac{1}{4}e^{ax_0}}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{1}{a}$ 是唯一解，B 对。

对于 C：此时，$H(x)=\frac{1}{4}+(m+1)x+(m+1)^2$，故 $H(x)\geq 0\Rightarrow m^2+(x+2)m+x+\frac{5}{4}\geq 0$ 恒成立。

故，$\Delta=(x+2)^2-4(x+\frac{5}{4})=x^2-1\leq 0$，解得 $-1\leq x\leq 1$，故 C 错。

对于 D。$H(x)=m^2+(x+2)m+x+\frac{1}{4}e^{ax}+1$，将其看成是关于 m 的一元二次函数，故 $H(x)\geq 0$ 恒成立，则有 $\Delta=(x+2)^2-4(x+1+\frac{1}{4}e^{ax})=x^2-e^{ax}\leq 0$ 恒成立，即 $a\geq\frac{2\ln x}{x}(x>0)$

令 $h(x)=\frac{2\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=2\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$

易知，e 为 $h(x)$ 的极大点，故 $a\geq h(x)_{\max}=\frac{2}{e}$，即 a 的最小值为 $\frac{2}{e}$，D 对。

综上，BD 正确。

例 17. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x-mx^2-2x$，若 $m<\frac{e}{2}-1$ 时，证明：当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)>\frac{e}{2}-1$.

证明： $f'(x)=\mathrm{e}^x-2mx-2$，$f''(x)=\mathrm{e}^x-2m>\mathrm{e}^x-2\bullet\frac{\mathrm{e}-2}{2}=\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}-2)$.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x\geq 1>e-2$，故 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调递增.

又 $f'(0)=1-2=-1<0$，$f'(1)=e-2m-2>e-2(\frac{e}{2}-1)-2=0$，

故存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}-2mx_0-2=0$，

因 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故，x_0 为 $f(x)$ 的极小点，

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-mx_0^2-2x_0$.

因 $\mathrm{e}^{x_0}-2mx_0-2=0$ ，故 $m=\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}-2}{2x_0}$ ，故 $f(x)_{\min}=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}-2}{2x_0}x_0^2-2x_0=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0\mathrm{e}^{x_0}-x_0$.

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x-x$，$x\in(0，1)$ ，则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x-1$ ，$g''(x)=-\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x<0$.

故 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，故 $g'(x)<g'(0)=-\dfrac{1}{2}<0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$\therefore g(x)>g(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1$ ，故 $f(x)>\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1$.

例 18.已知函数 $f(x)=a\ln x+x^b\,(a\neq 0)$.

（1）当 $b=2$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a+b=0$ ，$b>0$ 时，对任意 x_1 ，$x_2\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ ，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leq e-2$ 成立，求实数 b 的取值范围.

【解】（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $b=2$ 时，$f(x)=a\ln x+x^2$ ，$\therefore f'(x)=\dfrac{2x^2+a}{x}$.

① 当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

② 当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ ，

当 $0<x<\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ 时，$f'(x)<0$ ，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)$ 上单调递减；

当 $x>\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ 时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 在 $\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述，当 $b=2$ 时

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）问题 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leq \mathrm{e}-2$ ，

$\because a+b=0$ ，$b>0$ 时，$f(x)=-b\ln x+x^b$ ，$f'(x)=\dfrac{b\left(x^b-1\right)}{x}$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$ ，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$ ，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 单调递减，在 $\left[1,e\right]$ 单调递增，

$f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=1$ ， $f\left(\frac{1}{e}\right)=b+e^{-b}$ ， $f\left(e\right)=-b+e^{b}$ ，

设 $g\left(b\right)=f\left(e\right)-f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{b}-e^{-b}-2b$ ， $\left(b>0\right)$ ， $g'\left(b\right)=e^{b}+e^{-b}-2>2\sqrt{e^{b}\cdot e^{-b}}-2=0$.

$\therefore g\left(b\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 递增，$\therefore g\left(b\right)>g\left(0\right)=0$ ，

$\therefore f\left(e\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)$ ，可得 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(e\right)=-b+e^{b}$ ，

$\therefore -b+e^{b}-1\le e-2$ ，即 $e^{b}-b-e+1\le 0$ ，

设 $\varphi\left(b\right)=e^{b}-b-e+1$ ，$\left(b>0\right)$ ， $\varphi'\left(b\right)=e^{b}-1>0$ 在 $b\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立.

$\therefore \varphi\left(b\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，且 $\varphi\left(1\right)=0$ ，

$\therefore$不等式 $e^{b}-b-e+1\le 0$ 的解集为 $\left(0,1\right]$.

$\therefore$实数 b 的取值范围为 $\left(0,1\right]$.