第 9 章 圆锥曲线

§9.1 椭圆的定义及标准方程

9.1.1 相关概念

学习目标

1、了解曲线方程的概念，能解决常规的轨迹问题

2、了解椭圆的定义、标准方程及相关概念

3、掌握椭圆的基本性质（一级结论）

1．曲线方程

在直角坐标系中，如果某条曲线C上的点与一个二元二次方程$f(x,y)=0$的实数解建立了如下的关系

（1）曲线上点的坐标都是这个方程的解；

（2）以这个方程的解为坐标的点都在这条曲线上，那么，这个方程就称为这条**曲线的方程**，这条曲线称为这个**方程的曲线**。

若曲线方程是$f(x,y)=0$，我们也经常说成曲线$f(x,y)=0$。

2．椭圆的概念

第一定义：在平面内，到两定点F_1,F_2的距离之和等于定长(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹(或集合)叫**椭圆**．这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点间的距离叫做**焦距**．

对于集合$P=\{M\,||MF_1|+|MF_2|=2a\}$，$|F_1F_2|=2c$，其中$a>0,c>0$，且$a,c$为常数：则

(1)若$a>c$，集合P为椭圆；

(2)若$a=c$，集合P为线段；

(3)若$a<c$，集合P为空集．

第二定义：平面上，到一定点的距离与其到一条定直线的距离之比为常数$e\in(0,1)$的点的轨迹。定点称为椭圆的**焦点**，定直线称为椭圆的**准线**，常数e为椭圆的**离心率**。

椭圆的标准方程：以椭圆的第一定义为例，以F_1F_2所在直线为x轴，以F_1F_2的垂直平分线为y轴建立如图所示的平面直角坐标系，设$|F_1F_2|=2c$，则$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，设定长为$2a$，且令$a^2-c^2=b^2$，$P(x,y)$为椭圆上任意一点，由椭圆的定义知：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$，化简即得

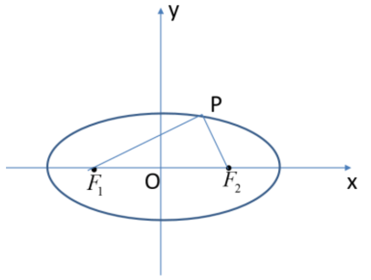
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)}$$

此即为椭圆的标准方程。

易知：如果焦点在 y 轴上，则椭圆的标准方程为：

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)}$$

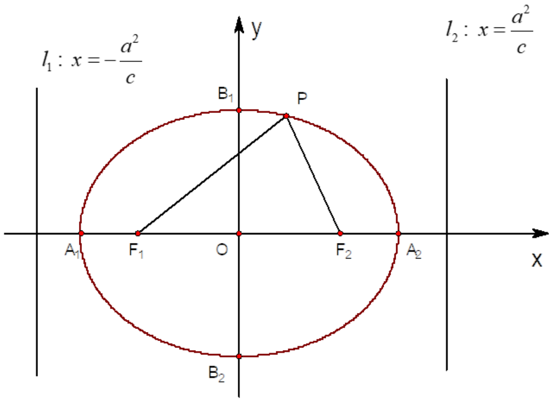
对于 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，如图所示。我们称 A_1A_2, B_1B_2 分别为椭圆的长轴和短轴，其中



$A_1(-a,0), A_2(a,0)$ 分别称为椭圆的左、右顶点（长轴端点）， $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ 分别称为椭圆的上、下顶点（短轴端点）， $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ 分别为椭圆的左、右焦点；$2a$ 称为长轴长，$2b$ 称为短轴长；直线 $x=-\frac{a^2}{c}$，$x=\frac{a^2}{c}$ 分别称为椭圆的左、右准线。

【注意】跟椭圆相关的三个参数 a,b,c ，不管椭圆的焦点在 x 轴上，还是在 y 轴上，始终满足：

$$a^2=b^2+c^2$$



如 P 为椭圆上任意一点，则称 F_1P, F_2P 分别为椭圆的左、右焦半径，并定义 $e=\frac{c}{a}$ 为椭圆的

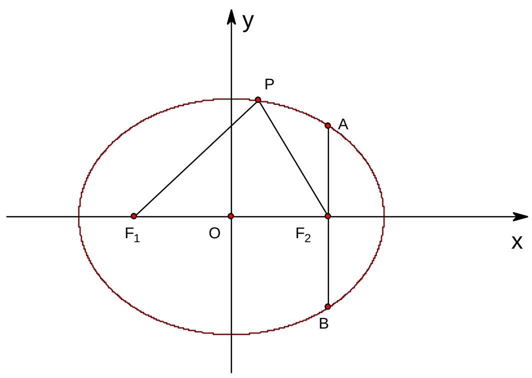
离心率。图中的$\triangle F_1PF_2$称为椭圆的焦点三角形。

3、椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的基本性质

（1）椭圆的通径长为：$\dfrac{2b^2}{a}$ （注：过焦点且垂直于F_1F_2的弦，如下图中的AB称为椭圆的通径）。

（2）焦半径：设$P(x,y)$为椭圆上任意一点，则

$PF_1=a+ex$， $PF_2=a-ex$.



（3）焦点弦长：$\left|P_1P_2\right|=2a\pm\left(x_1+x_2\right)$（过左焦点取加，过右焦点取减）

（4）设$P(x,y)$为椭圆上任意一点，则焦点三角形面积：$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$

（5）点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的内部$\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$

（6）点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的外部$\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$

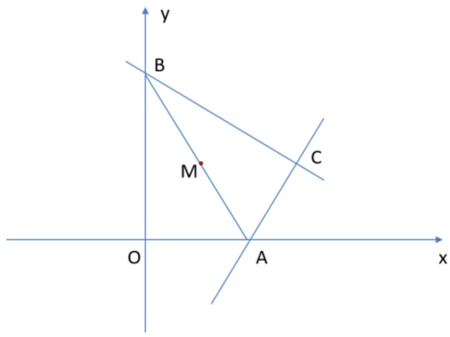
（7）椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$P(x_0,y_0)$处的切线方程：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

（8）过$P(x_0,y_0)$引椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的两条切线，则切点弦方程：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

（9）椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$Ax+By+C=0$相切$\Leftrightarrow(Aa)^2+(Bb)^2=C^2$

9.1.2 典型例题

例 1.如图，已知点C的坐标是$(2,2)$，过点C的直线CA与x轴交于点A，过点C且与直线CA垂直的直线CB与y轴交于点B，设点M是线段AB的中点，求点M的轨迹方程。



【解】：设 $M(x,y)$，因 A,B 分别在 x 轴和 y 上，且 M 是线段 AB 的中点，故 $A(2x,0),B(0,2y)$，故 $\overrightarrow{CA}=(2x-2,-2),\overrightarrow{CB}=(-2,2y-2)$，由题意知：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，从而得 $-2(2x-2)-2(2y-2)=0$，即 $x+y-2=0$，此即为 M 的轨迹方程，它表示一条直线。

例 2.过原点的直线与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 交于 A,B 两点，求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程。

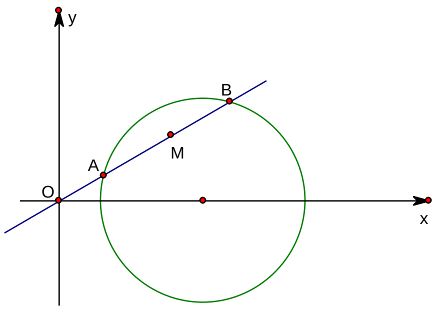
【解】：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x,y)$，易知题中的直线斜率存在，设其方程为：$y=kx$，与圆的方程联立 $\begin{cases} y=kx \\ x^2+y^2-6x+5=0 \end{cases}$，消去 y，化简得 $(1+k^2)x^2-6x+5=0$，

当 $\Delta=36-20(1+k^2)\geq 0$，也即 $k^2\leq\dfrac{4}{5}$ 时，上述方程有解，且由韦达定理得

$x_1+x_2=\dfrac{6}{1+k^2}$，故 $x=\dfrac{3}{1+k^2}$，将 $k=\dfrac{y}{x}$ 带入并化简，得 $x^2+y^2-3x=0$

由于 $k^2\leq\dfrac{4}{5}$，由 $x=\dfrac{3}{1+k^2}$ 知 $\dfrac{5}{3}\leq x\leq 3$，

故，M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-3x=0$ $(\dfrac{5}{3}\leq x\leq 3)$。



例 3.过点 $P(3,4)$ 的动直线与两坐标轴的交点分别为 A,B，过 A,B 分别作两轴的垂线交于点 M，求点 M 的轨迹方程。

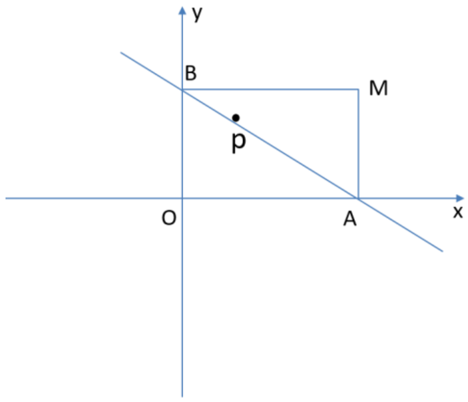
【解】 当过点 $P(3,4)$ 的动直线不经过原点时，设其方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$=1，则 $M(a,b)$，

又 $P(3,4)$ 在直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 上，则 $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$，化简得 $ab-4a-3b=0$

也即此时 M 的轨迹方程为 $xy-4x-3y=0$；

如动直线过原点，此时 M 为原点，仍在 $xy-4x-3y=0$ 上；

综上，M 的轨迹方程为 $xy-4x-3y=0$。

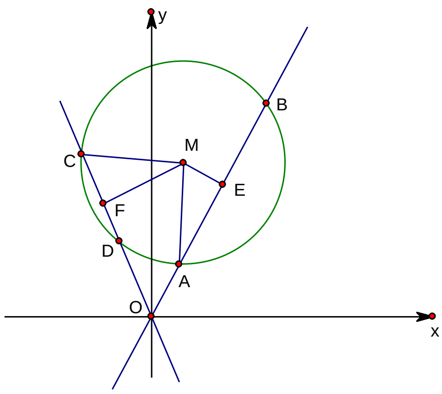


例 4. 一动圆截直线 $3x-y=0$ 和 $3x+y=0$ 所得弦长分别为 $8,4$，求动圆圆心 M 的轨迹方程。

【解】：如图，过 M 分别作 AB,CD 的垂线，垂足分别为 E,F，设 $M(x,y)$，由

$|ME|^2+|AE|^2=R^2=|MF|^2+|CF|^2$ 得 $4^2+\left(\frac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2=2^2+\left(\frac{|3x+y|}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2$，

化简得：$xy=10$，此即为 M 的轨迹方程。



例 5. 一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，与 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程，并说明它是什么曲线。

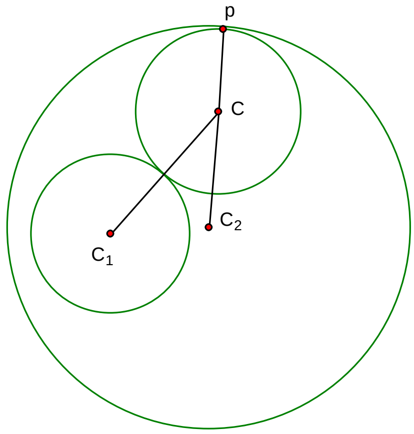
【解】 令题中二圆分别为 $\odot C_1$ 和 $\odot C_2$，动圆为 $\odot C$

易知 $\odot C_1$：圆心 $C_1(-3,0)$，半径为 2；$\odot C_2$：圆心 $C_2(3,0)$，半径为 10；$|C_1C_2|=6$

令 $\odot C$ 半径为 r，易知 $|CC_1|=2+r,\ |CC_2|=10-r$，

故$|CC_1|+|CC_2|=12>|C_1C_2|$，

故，C的轨迹是：以C_1,C_2为左右焦点，$2a=12$为定长的椭圆，其方程为：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$。



例 6.点M与定点$F(2,0)$的距离和它到定直线$x=8$的距离之比为$1:2$，求M的轨迹方程，并说明它是什么图形。

【解】：令$M(x,y)$，由题意得$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-8|}=\dfrac{1}{2}$，两边平方并化简得

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，此即为$M$的轨迹方程，其图形为椭圆。

例 7.如点$M(x,y)$在运动过程中，始终满足关系式：$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$，点$M$的轨迹是什么曲线？为什么？写出它的方程。

【解】.令$F_1(0,3),F_2(0,-3)$，则$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=|MF_1|+|MF_2|$，

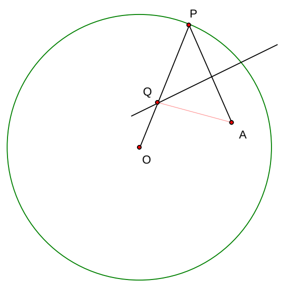
从而得$|MF_1|+|MF_2|=10$，

又因$|F_1F_2|=6$，故$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$，

由椭圆的定义知：点M的轨迹是以F_1,F_2为上、下焦点，$2a=10$为定长的椭圆；

考虑到$c=3,a=5$，且焦点在y轴上，故其方程为$\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{16}=1$。

例 8.如图，圆O的半径为定长r，A是圆O内一个定点，P是圆上任意一点，线段AP的垂直平分线l与半径OP相交于Q，当点P在圆上运动时，点Q的轨迹是什么？为什么？



【解】 如图，由题意有$|QO|+|QA|=|QO|+|QP|=r$，

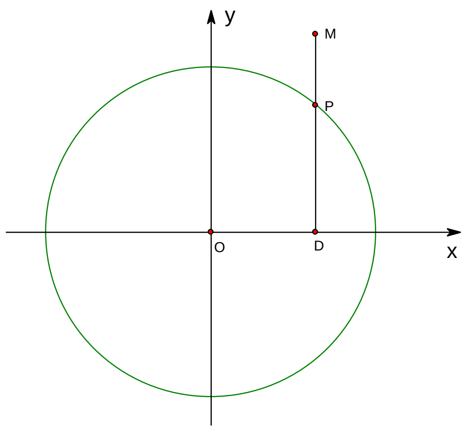
因A是圆O内，故$|OA|<r$，

故Q的轨迹是：以O，A为焦点，$2a=r$为定长的椭圆。

例 9. 如图，$DP\perp x$轴，点M在DP的延长线上，且$\dfrac{DM}{DP}=\dfrac{3}{2}$，当点$P$在圆$x^2+y^2=4$上运动时，求点$M$的轨迹方程，并说明轨迹的形状。

【解】 令$M(x,y)$，则$P(x,\dfrac{2}{3}y)$，因P在圆$x^2+y^2=4$上，故P的坐标满足圆的方程，即$x^2+(\dfrac{2}{3}y)^2=4$，化简得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1(x\neq\pm2)$，

其图形为椭圆，焦点在y上（不含短轴顶点）。



例 10（1）“$-3<m<5$”是“方程$\dfrac{x^2}{5-m}+\dfrac{y^2}{m+3}=1$表示椭圆”的（　　）.

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

(2) 椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4+k}=1$的离心率为$\dfrac{4}{5}$，则$k$的值为(　　).

A．-21　　B．21　　C．$-\dfrac{19}{25}$或21　　D. $\dfrac{19}{25}$或21

【解】(1) 要使方程 $\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{m+3}=1$ 表示椭圆，应满足 $\begin{cases}5-m>0\\ m+3>0\\ 5-m\neq m+3\end{cases}$ 解得 $-3<m<5$ 且 $m\neq1$，

因此"$-3<m<5$"是"方程 $\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{m+3}=1$ 表示椭圆"的必要不充分条件．选 B。

(2) 若 $a^2=9,b^2=4+k$，则 $c=\sqrt{5-k}$，

由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5-k}}{3}=\frac{4}{5}$，解得 $k=-\frac{19}{25}$；

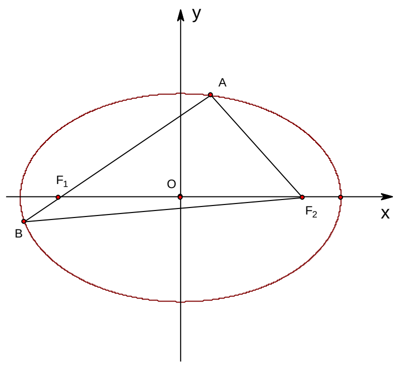
若 $a^2=4+k,b^2=9$，则 $c=\sqrt{k-5}$，由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{k-5}}{\sqrt{4+k}}=\frac{4}{5}$，解得 $k=21$。

综上，选 C。

例 11.在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1,F_2 在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。过 F_1 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，那么 C 的方程为________.

【解】根据椭圆焦点在 x 轴上，可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题意知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 4a=16\end{cases}$，解得 $a=4,b=2\sqrt{2}$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$



例 12.已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上的一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b=$_______.

【解】因 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$

$\therefore (|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=|F_1F_2|^2$

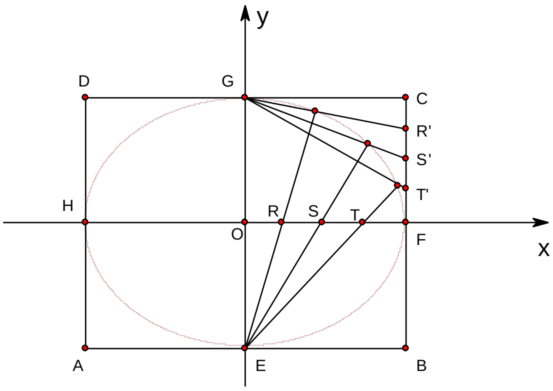
故，$2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2-4c^2=4b^2$，$\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$

由题意：$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times 2b^2=9$，故$b=3$

【法二】：直接利用焦点三角形的面积公式，由题意知

$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan 45^\circ=9$，故$b^2=9$，解得$b=3$

例 13.如图，在矩形$ABCD$中，$|AB|=8,|BC|=6,E,F,G,H$ 分别是矩形四条边的中点，R,S,T是线段OF的四等分点，R',S',T'是线段CF的四等分点，请证明：直线ER与GR'，ES与GS'，ET与GT'的交点L,M,N在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上。



【解】易知$E(0,-3),R(1,0),G(0,3),R'(4,\frac{9}{4})$，

因此得直线ER的方程为：$x-\frac{y}{3}=1$，

直线GR'的方程为：$y=-\frac{3}{16}x+3$

联立上述两个方程，解得$L(\frac{32}{17},\frac{45}{17})$

易验证L的坐标满足方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，即$L$在该椭圆上；

同理可求出M,N的坐标，并验证其在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上，证毕。

例 14(1)求与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$有相同的离心率且经过点$(2,-\sqrt{3})$的椭圆方程.

(2)已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上，且 P 到两焦点的距离分别为 5、3，过 P 且与长轴垂直的直线恰过椭圆的一个焦点，求椭圆的方程．

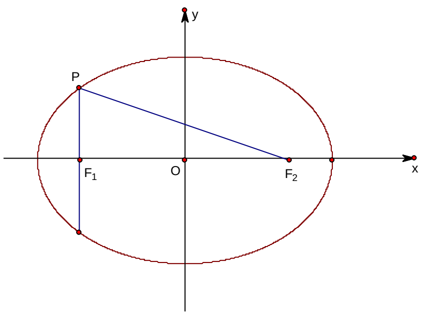
【解】(1)由题意，设所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=t(t>0)$，

$\because$ 椭圆过点 $(2,-\sqrt{3})$，$\therefore t=\frac{2^2}{4}+\frac{(-\sqrt{3})^2}{3}=2$

故所求椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

(2)由题意得 $\begin{cases}2a=5+3\\ \frac{b^2}{a}=3\end{cases}$，解得 $a=4,b^2=12$

故所求方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 或 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$



例 15.已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的一点，且以点 P 及焦点 F_1,F_2 为顶点的三角形的面积为 1，求 P 的坐标。

【解】由题意知：$a=\sqrt{5},b=2$，故 $c=1$

令 $P(x_0,y_0)$，因 $|F_1F_2|=2c=2$，由题意得 $\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_0|=1$

即 $|y_0|=1$，解得 $y_0=\pm1$

将 ${y_0}^2=1$ 带入 $\frac{{x_0}^2}{5}+\frac{{y_0}^2}{4}=1$，得 $x_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

故，P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{15}}{2},1),(-\frac{\sqrt{15}}{2},1),(\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$

例 16.已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，一组平行线的斜率为 $\frac{3}{2}$，

（1）这组直线何时与椭圆相交?

（2）当它们与椭圆相交时，证明这些直线被椭圆截得的线段的中点在一条直线上。

【解】（1）设这组直线的方程为：$y=\frac{3}{2}x+m$

将其带入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，化简得$9x^2+6mx+2m^2-18=0$，

由$\Delta=36m^2-36(2m^2-18)\geq 0$，解得$-3\sqrt{2}\leq m\leq 3\sqrt{2}$，

也即：这组平行直线在y轴上的截距位于$[-3\sqrt{2},3\sqrt{2}]$区间内时与椭圆相交。

（2）设$y=\frac{3}{2}x+m$与椭圆交于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由（1）及韦达定理得：

$x_1+x_2=-\frac{2m}{3}$，故$y_1+y_2=\frac{3}{2}(-\frac{2m}{3})+2m=m$

故，AB的中点为$P(-\frac{m}{3},\frac{m}{2})$，

显然，不管m取何值，点P均在直线$y=-\frac{3}{2}x$上，证毕。

【法二】（2）设弦中点$M(x,y)(x\neq 0)$，则$k_{OM}=\frac{y}{x}$，由斜率积定理知：$\frac{3}{2}\times k_{OM}=-\frac{a^2}{b^2}$

得：$\frac{3}{2}\times\frac{y}{x}=-\frac{9}{4}$，化简得$y=-\frac{3}{2}x$，

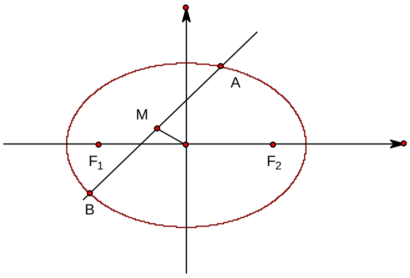
易知：$x=0$时，上述结论仍成立。

综上，这组平行线截椭圆所得弦的中点在直线$y=-\frac{3}{2}x$上，证毕。

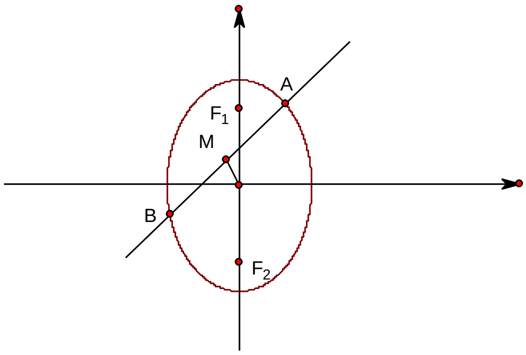
附椭圆的斜率积定理如下：

对于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$k_{AB}\times k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$。如下图一

对于$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$k_{AB}\times k_{OM}=-\frac{a^2}{b^2}$。如下图二



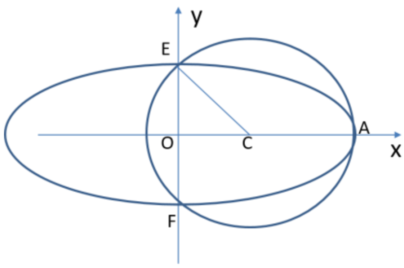
图一



图二

例 17．一个圆经过椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$的三个顶点，且圆心在$x$轴正半轴上，则该圆的标准方程为____

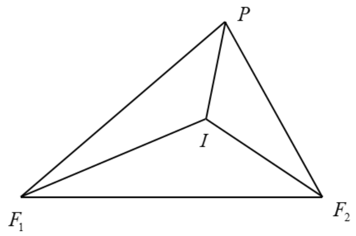
【解】由于圆心在x轴上，所以该圆只能是经过椭圆在y轴上的两个顶点和x轴上的一个顶点，设圆心$C(x,0)$，该圆应该经过$A(4,0)$、$E(0,2)$、$F(0,-2)$三点，半径为$(4-x)$，由$x^2+4=(4-x)^2$，解得$x=\dfrac{3}{2}$，故圆的标准方程为:$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$



例 18．设点P是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$上一点，F_1,F_2分别是椭圆的左右焦点，I为ΔPF_1F_2的内心，若$S_{\Delta IPF_1}+S_{\Delta IPF_2}=2S_{\Delta IF_1F_2}$，则该椭圆的离心率为____

【解析】设$\triangle PF_1F_2$内切圆半径为r，则$\dfrac{S_{\triangle IF_1F_2}}{S_{\triangle IPF_1}+S_{\triangle IPF_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}r|F_1F_2|}{\frac{1}{2}r|PF_1|+\frac{1}{2}r|PF_2|}=\dfrac{2c}{2a}=e$，

另一方面，由题意知：$\dfrac{S_{\triangle IF_1F_2}}{S_{\triangle IPF_1}+S_{\triangle IPF_2}}=\dfrac{1}{2}$，故$e=\dfrac{1}{2}$。



例 19（天津高联赛） F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点，A 是该椭圆上位于第一象限的一点，过 A 作圆 $x^2+y^2=b^2$ 的切线，切点为 P，则 $|AF|-|AP|=$（　　）

【巧解】 采用极限法，取 A 为短轴顶点 $(0,b)$，此时，P,A 重合，$|AF|-|AP|=FA=a$。

【法二】 令 $A(x_0,y_0)$，椭圆的离心率为 e，则 $|FA|=a+ex_0$，

又，$|PA|=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-b^2}=\sqrt{x_0^2+b^2(1-\dfrac{x_0^2}{a^2})-b^2}=\sqrt{x_0^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2}=ex_0$

故，$|AF|-|AP|=a+ex_0-ex_0=a$