

文章编号: 1001-0920(2010)03-0321-06

## 高维多目标进化算法研究综述

孔维健<sup>a</sup>, 丁进良<sup>a</sup>, 柴天佑<sup>a,b</sup>

(东北大学 a. 流程工业综合自动化教育部重点实验室, b. 自动化研究中心, 沈阳 110004)

**摘 要:** 传统的多目标进化算法能够有效地解决 2 个或 3 个目标的优化问题, 但当优化目标超过 4 维即具有高维目标时, 其优化效果将大大下降, 因此高维多目标进化算法的研究得到了较多的关注. 鉴于此, 对高维多目标进化算法的研究进展进行系统地分类综述, 分析了高维目标对优化算法造成的困难以及改进的可视化技术; 总结了各类算法的特点与缺陷, 并给出进一步可能的研究方向.

**关键词:** Pareto 支配; 高维目标; 多目标进化算法; 可视化技术

**中图分类号:** TP301

**文献标识码:** A

## Survey on large-dimensional multi-objective evolutionary algorithms

KONG Wei-jian<sup>a</sup>, DING Jin-liang<sup>a</sup>, CHAI Tian-you<sup>a,b</sup>

(a. Key Laboratory of Integrated Automation for Process Industry, Ministry of Education, b. Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: KONG Wei-jian, E-mail: weijian.kong9@gmail.com)

**Abstract:** The conventional multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs) can solve two-objective optimization problems successfully, but their search ability and performance will deteriorate badly when the number of objectives exceeds four. So, large-dimensional multi-objective evolutionary algorithms are attracting more attention. The large-dimensional multi-objective evolutionary algorithms are surveyed systematically by categories. The influences of large-dimensional objectives bringing on optimization problems are analyzed, and the visualization techniques are introduced. Finally, the proposed algorithms are evaluated and topics for future research are suggested.

**Key words:** Pareto dominance; Large-dimensional objectives; MOEA; Visualization techniques

### 1 引 言

目前的多目标进化算法(MOEA), 如 MOGA<sup>[1]</sup> (Multi-objective genetic algorithm), NSGA2<sup>[2]</sup> (Nondominated sorting genetic algorithm2), SPEA<sup>[3]</sup> (Strength Pareto evolutionary algorithm) 以及 PAES<sup>[4]</sup> (Pareto archived evolution strategy) 等都是基于 Pareto 支配关系进行个体解之间的比较与选择, 与早期提出的非 Pareto 方法<sup>[5,6]</sup> 相比, 能够使种群逐渐收敛到一个不被任何其他解支配的 Pareto 非劣最优解集, 成功地应用于许多工业领域<sup>[7,8]</sup>. 然而, 这些 MOEA 都只针对两目标优化问题, 而实际应用中可能涉及更多的目标个数<sup>[9]</sup>. Purshouse 等<sup>[10]</sup> 指出, 当目标个数增加到 4 个或以上时(即高维目标), 这些基于 Pareto 排序的 MOEA

效果将大大下降. 这是因为随着目标个数的增加, 种群中的非支配个体的数量将呈指数上升, 大大削弱了基于 Pareto 排序进行选择与搜索的能力. Hughes<sup>[11]</sup> 通过实验表明了基于 Pareto 排序的 MOEA 在具有较少目标(2 个或 3 个)时非常有效, 然而在高维目标的优化问题中其效果将弱于另外两种非 Pareto 方法.

对于具有高维目标的优化问题, 需要改进传统的基于 Pareto 排序的 MOEA. 这一问题已成为 MOEA 研究的前沿与热点<sup>[12]</sup>, 但问题提出的时间较短, 文献中提到的研究成果还较少. 当前所提出的高维多目标进化算法主要分为以下几类:

1) 仍然采用基于 Pareto 支配的排序方法, 但算法结合了其他技术以缩小搜索空间或降低目标维

收稿日期: 2009-05-25; 修回日期: 2009-08-27.

基金项目: 国家 973 计划项目(2009CB320601); 国家自然科学基金项目(60534010, 60821063, 60904079); 国家 111 引智计划项目(B08015).

作者简介: 孔维健(1983—), 男, 河北沧州人, 博士生, 从事多目标进化算法的研究; 柴天佑(1947—), 男, 兰州人, 中国工程院院士, 教授, 博士生导师, 从事综合自动化系统、智能解耦等研究.

数.如在搜索过程中结合偏好信息以缩小 Pareto 前沿区域<sup>[13,14]</sup>、采用目标缩减技术<sup>[15-18]</sup>简化问题等.

2) 采用松散 Pareto 支配的排序方法.这类方法通过放宽 Pareto 支配关系,能够对许多非支配个体进行比较与选择,如优胜关系<sup>[19]</sup>, $k$ -最优<sup>[20,21]</sup>, $\epsilon$ -支配<sup>[22]</sup>等概念.

3) 采用非 Pareto 的排序方法.这类方法采用新的评价准则对种群个体进行比较与排序,如基于评价指标的方法<sup>[23-25]</sup>等.

本文首先分析了高维目标优化问题存在的困难,并通过仿真表明了目标个数对传统 MOEA 的影响;然后按照上述分类对当前所提出的高维目标进化算法进行概括综述;最后总结了高维目标优化问题研究中仍然存在的难点,并给出了未来可能的研究思路.

## 2 高维目标对优化算法的影响

对于一个具有  $m$  维目标的最小化函数,可以写为

$$\begin{aligned} \min F(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)], \\ \text{s. t. } x &\in X^n. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $F(x)$  为  $m$  维目标函数向量,  $f_i(x)$  为第  $i$  维目标函数,  $x$  为  $n$  维决策变量,  $X^n$  为决策空间.当优化函数的目标维数  $m \geq 4$  时,称其为高维目标函数.

基于 Pareto 支配的排序方法的效果与种群中非支配个体所占比例密切相关.为了研究优化目标维数对非支配个体所占比例的影响,假设一个  $m$  维目标优化问题,随机产生规模为  $N$  的种群,对于其中任意两个个体  $x_i$  和  $x_j$ ,它们在每一个目标上具有相同机会的优劣关系,即在第  $i$  个目标上个体  $x_i$  或  $x_j$  都具有 50% 的概率优于对方.在此假设下,根据 Pareto 支配关系的定义,种群中任意一个个体  $x_i$  为非支配个体的概率为  $((2^m - 1)/2^m)^N$ ,因此在一个随机产生的种群中,非支配个体所占比例达到  $((2^m - 1)/2^m)^N$ .由此可见随着目标个数的增加,非支配个体所占的比例将迅速上升.

以 Deb 等<sup>[26]</sup>构造的标准函数 DTLZ2 为例,该问题目标个数可以扩展,能够用于高维目标优化算法的测试.设置该函数的目标个数分别为 2, 4, 6, 8, 10, 在决策空间中随机产生 200 个体,计算其中非支配个体所占比例,并且每次运行 10 轮算法求其平均值以消除随机因素的影响,结果如图 1 所示.

选用 NSGA2 算法<sup>[2]</sup>以检验传统 MOEA 在高维目标优化问题中的性能表现,该算法看作是 Pareto 排序的多目标进化算法的代表<sup>[10]</sup>.选取真实的 Pareto 最优前沿与算法解之间最近的两点距离作为该算法的收敛距离,得到 NSGA2 的收敛性能

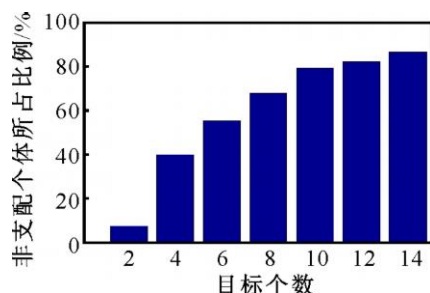


图 1 非支配个体在种群中所占的比例

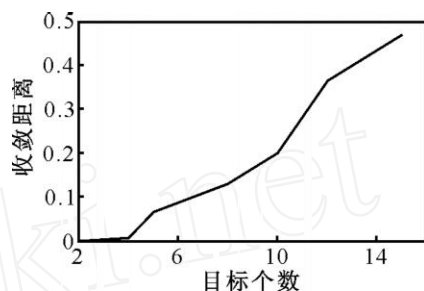


图 2 NSGA2 收敛性能随着目标个数增加的变化曲线  
随目标个数增加的变化曲线,如图 2 所示.

实验结果可以表明,随着目标个数的增加,非支配个体在种群中所占比例将迅速上升,甚至大部分个体都变为非支配解,从而大大削弱了基于 Pareto 支配进行排序与选择的效果,导致进化算法搜索能力下降.除此之外,在高维目标优化问题中还存在如下难点:

- 1) 在高维目标空间中,需要计算更多的维度与搜索更多的 Pareto 最优解才能近似 Pareto 前沿,因此增加了算法的计算复杂性.
- 2) 对优化算法的分布性提出了更高的要求,从而增加了算法的难度.
- 3) 具有高维目标的最优解难以在传统直角坐标系中显示出来,因此增加了可视化的难度,为决策者的最终选择制造了障碍.

## 3 高维 MOEA 研究进展

传统 MOEA 优化效果受到目标个数的影响,不能有效地求解高维目标优化问题.为了解决这一问题,当前的研究主要提出了 3 类高维目标进化算法.

### 3.1 基于 Pareto 支配的方法

这类方法仍然使用基于 Pareto 支配的排序方法,不过在搜索过程中结合偏好信息或目标缩减技术以简化问题. Masahiro<sup>[27]</sup>开发了第一个结合决策者偏好的多目标进化算法.在实际应用中决策者不需要整个 Pareto 最优解集,而只需要一小部分甚至一个解,因此结合特定的偏好能够有效地缩小搜索空间,如图 3 所示.

Horn<sup>[28]</sup>指出,偏好信息的应用方式具有事先、事后、交互式 3 种,其中交互式方法在搜索过程中不

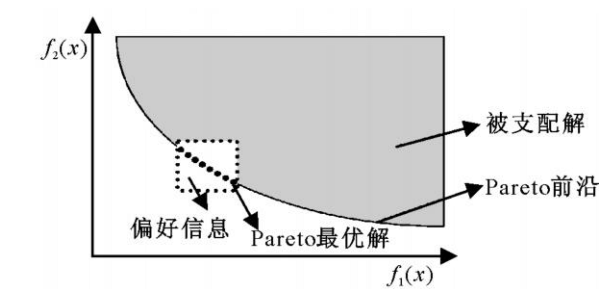


图3 结合偏好信息选择 Pareto 最优解

断地引入偏好信息,指导个体的选择.该方法不要求全局性的偏好信息,且在搜索的过程中能够根据结果不断完善偏好信息,因此适合于高维目标的优化. Fleming 等<sup>[13]</sup>将偏好信息清晰化方法应用到高维目标的优化问题中,从而能够从不断演化的均衡结果进一步确定偏好信息,并逐渐缩小决策者的关注区域直到分离出最优点. Branke 等<sup>[29]</sup>基于一种均衡方法,量度从一个非支配解移到另一个解时某对目标函数的相对变化,从而权衡为了提高某个目标一定水平,另一个目标需要退化的最大幅度. Wierzbicki<sup>[30]</sup>在求解多目标决策问题中提出了基于参考点的方法,优化的结果是得到一个最靠近决策者给定参考点的 Pareto 最优解. Deb 等<sup>[14]</sup>将基于参考点的偏好信息结合到进化 MOEA 中,并通过选择一组参考点得到一个 Pareto 最优解集.

Deb 等<sup>[15,16]</sup>提出了基于主成分分析的目标缩减方法,并将其结合到 NSGA2 算法<sup>[2]</sup>中.该方法假设 Pareto 前沿低于待优化函数的目标维数,因此部分目标是多余的,基于 PCA 的 NSGA2 算法能够迭代地排除这些多余目标,从而确定构造 Pareto 最优前沿所需要的最低目标维数,但该方法的应用效果将受到 Pareto 前沿维数增加的影响. Brockhoff 等<sup>[17,18]</sup>研究了另一种基于 Pareto 支配关系的目标缩减方法,该方法认为如果某个目标的存在与否对解集之间的 Pareto 支配关系不影响或影响很小,则可以将其去掉. Jaimes 等<sup>[31]</sup>基于无监督特征选择技术<sup>[32]</sup>排除掉那些具有较大相关性的目标,这些目标之间具有相似或相同的优化方向,因此它们存在与否对优化结果影响不大.

3.2 采用松散 Pareto 支配的排序方法

这类方法主要通过放宽 Pareto 支配关系,能够对许多非支配个体进行比较与选择. Drechsler 等<sup>[19]</sup>提出了优胜关系方法用于确定非支配解集中个体的优先顺序.如果非支配解  $s$  在更多的目标上优于  $t$ ,则说明  $s$  优胜于  $t$ .这种方法应用起来非常简单,但不具有传递性,即对于 3 个非支配解  $s, t, u$ ,根据优胜关系有可能导致  $s$  优于  $t, t$  优于  $u$ ,而  $u$  又优于  $s$ ,因此不能对所有个体进行完全的排序. Ikeda 等<sup>[22]</sup>

提出了  $\epsilon$ -支配的概念,它将  $x$  和  $y$  两个解在各个目标上的比较通过一组  $\epsilon$  值综合起来,从而当解  $x$  在某个目标上稍差于  $y$ ,但在其他目标上远胜于  $y$  时仍然看作解  $x$  优于解  $y$ . Laumanns 等<sup>[33]</sup>提出了一个相似的概念  $\epsilon$  支配,它是在最大化问题中,通过对解  $x$  放大  $(1 + \epsilon)$  倍再与解  $y$  比较,从而确定两者的优劣关系,如图 4 所示.

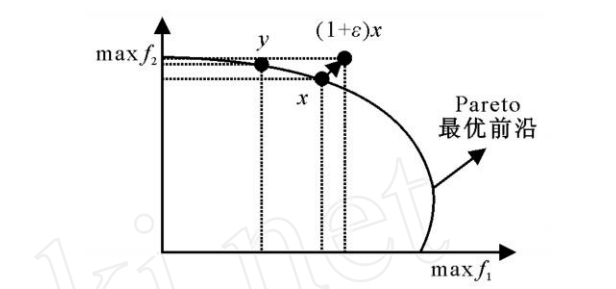


图4 基于  $\epsilon$  支配的优劣比较

在基于  $\epsilon$  支配的多目标进化算法中,可以通过  $\epsilon$  的取值控制算法的收敛性能与多样分布. Sato 等<sup>[34]</sup>提出了扩展支配域的方法,并将其应用到 NSGA2 方法中,大大提高了其在高维目标优化问题中的性能.如图 5 所示,个体解  $x, y, z$  在扩展后的支配域中,若按照 Pareto 支配关系,则  $x, y, z$  为非支配个体,而在扩展后的支配关系中个体  $z$  被  $y$  支配.

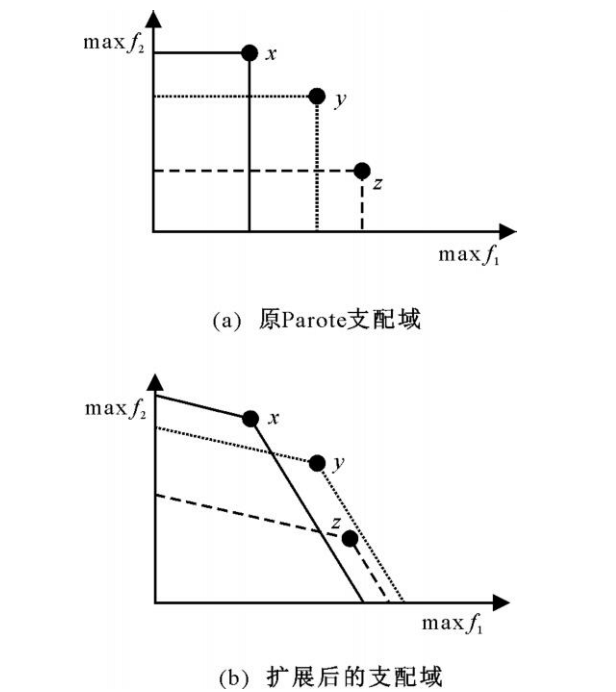


图5 Pareto 支配域与扩展域的比较

Di 等<sup>[20,21]</sup>提出了  $k$  最优性概念,在忽略一个或几个目标的情况下,检验非支配解之间的支配关系,以确定其优劣顺序.比如在 3 目标优化问题中,个体  $x = (2, 3, 7), y = (3, 2, 9), z = (4, 5, 4)$  互为非支配个体,但如果忽略其中 1 个目标,即只考虑目标 1 与 2,目标 2 与 3 以及目标 1 与 3,则会发现在这 3 组

2 目标优化问题中个体  $x$  始终为非支配个体,而个体  $y$  与  $z$  则在其中的某组中被另一个体支配,因此可以判断个体  $x$  较优.

### 3.3 非 Pareto 的排序方法

在 MOEA 的研究中,需要通过一些性能评价指标来检验算法的优化效果,这些指标通过评价所求解集的质量来判断算法的优劣<sup>[35,36]</sup>.因此许多学者直接应用这些评价指标代替 Pareto 支配关系以指导进化算法的搜索过程,并发现具有较好的优化效果.Zitzler 等<sup>[37]</sup>建立基于评价指标的进化算法 (IBEAs) 框架,将二元性能评价准则作为指标函数,用于实现个体的选择,并要求这些指标具有“支配关系保持性”,即在两个个体中具有支配关系的个体应该具有更高的指标评价.超体积指标<sup>[38]</sup>是一种有效的评价准则,但其计算复杂度随着目标个数的增加将指数上升,因此具有较高的计算成本<sup>[39]</sup>.此后相继提出几种改进的 IBEAs 方法<sup>[40-42]</sup>.Wagner 等<sup>[43]</sup>通过比较基于聚合、指标以及 Pareto 3 类方法在高维目标问题中的表现,证明了 IBEAs 方法具有优异表现.另一类非 Pareto 方法通过权值将多目标优化函数聚合成一个单目标优化问题,将每个高维目标向量都转换成 1 个标量值进行比较与选择.Hughes<sup>[44]</sup>提出了一种多重单目标 Pareto 采样 (MSOPS) 方法,它虽然没有基于 Pareto 支配排序,但能够平行搜索所有目标.这种一轮多重单目标平行搜索方法比传统的多轮运行单目标更有效,并且优于基于 Pareto 支配的进化算法<sup>[12]</sup>,但得到的分布特性依赖于所选择的加权向量.

### 4 可视化技术研究进展

对于一个多目标优化问题,一般的思路是先通过各种进化算法找到非支配解集,并使其扩散到整个 Pareto 前沿;然后通过可视化技术将其显示出来,供决策者根据实际需要做出最后选择.常用的直角坐标系最多只能表示 3 维,不适用于高维目标优化问题.Fleming 等<sup>[13]</sup>采用平行坐标系<sup>[45]</sup>在二维平面上有效地表示出高维目标结果.在其平行坐标系中,所有的坐标轴相互平行在一个平面上,不会受到维数增加的限制.如图 6 所示,5 维平行坐标系上的坐标点为 (1, 8, 2, 6, 3), (2, 4, 3, 7, 5), (7, 1, 5, 2, 2).与之类似的方法还有多边形坐标系及雷达图等<sup>[46]</sup>,这类可视化技术能够完整无损地表示高维目标向量的数据信息,但随着数据量的增加,可视化效果将随之下降.另一类可视化技术是将高维数据映射到低维空间,从而实现对高维目标向量的表示.Obayashi 等应用自组织映射技术<sup>[47]</sup>表示出高维的 Pareto 最优解集<sup>[48]</sup>.自组织映射是一种神经网络模型,在实

现数据降维映射的同时能够保持数据间的拓扑结构,是一种非常适用的高维数据可视化工具.除此之外,主成分分析、多维标度法<sup>[49,50]</sup>等多元统计分析技术也能够用来表现高维数据.

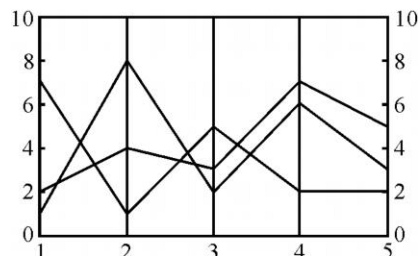


图 6 平行坐标系中的数据显示

## 5 结 论

对于高维多目标进化算法的研究还较少,许多问题有待解决.本文对当前所提出的方法进行了分类综述,通过对这些方法进行总结可以发现:

- 1) 基于 Pareto 支配方法通过结合偏好信息与目标缩减技术能够有效地简化问题,但这类方法只适用于能够预知偏好信息或目标主次的问题.
- 2) 采用松散 Pareto 支配的排序方法能够放宽 Pareto 支配关系,在一定程度上增强了算法的选择能力,但同时降低其排序结果的合理性与可信性,并且随着目标个数的持续增加,该方法仍然面临着选择能力退化的压力,不能从根本上解决问题.
- 3) 非 Pareto 的排序方法使用了新的排序指标,从而彻底消除了基于 Pareto 支配排序所带来的问题,然而其合理性有待进一步验证,且在实际应用中还存在计算复杂度高等问题.

进一步可能的研究方向包括:

- 1) 非 Pareto 的排序方法能够得到唯一的最优解,不仅能够解决高维目标带来的搜索能力退化问题,而且可以为决策者提供最后决策.研究具有一般性的非 Pareto 评价指标,并给出理论依据将具有重要意义.
- 2) 多策略结合的优势.基于 Pareto 支配关系能够得到非支配解,如果再结合非 Pareto 的排序方法对这些非支配个体进行比较与排序,则既能保证搜索能力不受目标个数增加的影响,又能得到 Pareto 最优解.
- 3) 研究各种策略之间的内在联系,如基于评价指标的排序方法实际上结合了一定的偏好信息,因此研究两种方法之间的联系,将有助于对这些方法进行改进与结合.

### 参考文献 (References)

- [1] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithm for multi-objective optimization: Formulation, discussion and

- generalization [C]. Proc of 5th ICGA. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 416-423.
- [2] Deb K, Amrit P, Sameer A, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA- [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [3] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [4] Knowles J D, Corne D W. Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 149-172.
- [5] Hajela P, Lin C Y. Genetic search strategies in multicriterion optimal design [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1992, 4(2): 99-107.
- [6] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms[C]. Proc of 1st Int Conf on Genetic Algorithms and Their Application. Hillsdale: L. Erlbaum Associates Inc, 1985: 93-100.
- [7] Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms[M]. Chichester: John Wiley and Sons Inc, 2001.
- [8] Coello C A C, Lamont G B. Applications of multi-objective evolutionary algorithms [M]. Singapore: World Scientific Publisher, 2004.
- [9] Coello C A C, Lamont G B, Veldhuizen D A V. Evolutionary algorithm for solving multi-objective problems[M]. New York: Kluwer Academic Publisher, 2007.
- [10] Purshouse R C, Fleming P J. Evolutionary many-objective optimization: An exploratory analysis [C]. Proc of 2003 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Canberra: IEEE Service Center, 2003: 2066-2073.
- [11] Ishibuchi H, Tsukamoto N, Nojima Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review[C]. Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Hong Kong: IEEE Service Center, 2008: 2424-2431.
- [12] Hughes E J. Evolutionary many-objective optimization: Many once or one many [C]. Proc of 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Edinburgh: IEEE Service Center, 2005: 222-227.
- [13] Fleming P J, Purshouse R C, Lygoe R J. Many-objective optimization: An engineering design perspective [C]. Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 14-32.
- [14] Deb K, Sundar J. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms [C]. Proc of 2006 Genetic and Evolutionary Computation Conf. New York: ACM, 2006: 635-642.
- [15] Deb K, Saxena D K. On finding Pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems [R]. Kanpur: Indian Institute of Technology, 2005.
- [16] Deb K, Saxena K. Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems [C]. Proc of 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vancouver: IEEE Service Center, 2006: 3353-3360.
- [17] Brockhoff D, Zitzler E. Are all objectives necessary? On dimensionality reduction in evolutionary multiobjective optimization [C]. Parallel Problem Solving from Nature. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 533-542.
- [18] Brockhoff D, Zitzler E. Improving hypervolume-based multiobjective evolutionary algorithms by using objective reduction methods [C]. Proc of 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Singapore: IEEE Service Center, 2007: 2086-2093.
- [19] Drechsler D, Drechsler R, Becher B. Multi-objective optimization based on relation favour [C]. Proc 1st Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 2001: 154-166.
- [20] Di Pierro F. Many-objective evolutionary algorithms and applications to water resources engineering [D]. University of Exeter, 2006.
- [21] Di Pierro F, Djordjevic S, Khu S-T, et al. Automatic calibration of urban drainage model using a novel multi-objective GA [J]. Water Science and Technology, 2004, 52(5): 41-52.
- [22] Ikeda K, Kita H, Kobayashi S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal [C]. Proc of 2001 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Seoul: IEEE Service Center, 2001: 957-962.
- [23] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms — A comparative case study [C]. Lecture Notes in Computer Science 1498: Parallel Problem Solving from Nature. Berlin: Springer-Verlag, 1998: 292-301.
- [24] Knowles J D, Corne D W, Fleischer M. Bounded archiving using the Lebesgue measure [C]. Proc of 2003 Congress on Evolutionary Computation. Canberra: IEEE Service Center, 2003: 2490-2497.
- [25] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multi-objective search [C]. Lecture Notes in Computer Science 3242: Parallel Problem Solving from Nature-PPSN VIII. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 832-842.
- [26] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test

- problem for evolutionary multi-objective optimization [C]. Evolutionary Multi-objective Optimization: Theoretical Advances and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 105-145.
- [27] Tanaka M, Tanino T. Global optimization by the genetic algorithm in a multi-objective decision support system[C]. Proc of the 10th Int Conf on Multiple Criteria Decision Making. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 261-270.
- [28] Horn J. Multicriterion decision making[C]. Handbook of Evolutionary Computation. IOP Publishing Ltd. and Oxford University Press, 1997: 1-15.
- [29] Branke J, Kauler T, Schmeck H. Guidance in evolutionary multi-objective optimization[J]. Advances in Engineering Software, 2001, 32(6): 499-507.
- [30] Wierzbicki A P. The use of reference objectives in multi-objective optimization [C]. Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1980: 468-486.
- [31] Jaimes A L, Coello C A C, Chakraborty D. Objective reduction using a feature selection technique[C]. Proc of the 10th Annual Conf on Genetic and Evolutionary Computation. New York: ACM, 2008: 673-680.
- [32] Mitra P, Murthy C A, Sankar K. Unsupervised feature selection using feature similarity [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(3): 301-312.
- [33] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2002, 10(3): 263-282.
- [34] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs [C]. Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization-EMO. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 5-20.
- [35] Knowles J D, Corne D W. On metrics for comparing nondominated sets[C]. Proc of 2002 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Honolulu: IEEE Service Center, 2002: 711-716.
- [36] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multi-objective optimizers: An analysis and review [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.
- [37] Zitzler Z, Künzli S. Indicator-based selection in multi-objective search [C]. Lecture Notes in Computer Science 3242: Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 832-842.
- [38] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [39] While L. A new analysis of the LeBMeasure algorithm for calculating the hypervolume[C]. Proc of 3rd Int Conf on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 62-76.
- [40] Emmerich M, Beume N, Naujoks B. An EMO algorithm using the hypervolume measure as selection criterion[C]. Lecture Notes in Computer Science 3410: Evolutionary Multi-Criterion Optimization-EMO 2005. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 62-76.
- [41] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multi-objective selection based on dominated hypervolume[J]. European J of Operational Research, 2007, 180(3): 1653-1669.
- [42] Zitzler E, Brockhoff D, Thiele L. The hypervolume indicator revisited: On the design of Pareto-compliant indicators via weighted integration[C]. Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization-EMO 2007. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 862-876.
- [43] Wagner T, Beume N, Naujoks B. Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization[C]. Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization-EMO 2007. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 742-756.
- [44] Hughes E J. Multiple single objective pareto sampling [C]. Congress on Evolutionary Computation (CEC 03). Piscataway NJ: IEEE Press, 2003: 2678-2684.
- [45] Inselberg A. The plane with parallel coordinates[J]. The Visual Computer, 1985, 1(2): 69-91.
- [46] Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization [M]. Boston: Kluwer, 1998.
- [47] Kohonen T. Self-organizing maps [M]. Berlin: Springer, 1995.
- [48] Obayashi S, Sasaki D. Visualization and data mining of Pareto solutions using self-organizing map[C]. Lecture Notes in Computer Science 2632: Evolutionary Multi-Criterion Optimization-EMO 2003. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 796-809.
- [49] Naud A, Duch W. Interactive data exploration using MDS mapping[C]. The 5th Conf Neural Networks and Soft Computing. New York: Physica-Verlag, 2000: 255-260.
- [50] Li X J. Visualization of high-dimensional data with relational perspective map [J]. Information Visualization, 2004, 3(1): 49-59.