

皂膜过滤器理论模型建立与实验分析

潘子杰¹, 蒋钊全², 杨海博³

(1. 北京交通大学 理学院, 北京 102603; 2. 北京交通大学 理学院, 北京 102603; 3. 北京交通大学 理学院, 北京 102603)

摘要: 对于今日应用范围不断广泛的皂膜过滤器, 学界上没有与之相对应的定量分析研究, 导致在部分理论研究中所使用的模型比较粗糙, 得到的结论与实际结果相差较大。本论文以前人的工作为基础, 通过定量分析, 建立了两个固体通过皂膜的近似模型, 并通过实验进行验证与对比分析。最终的实验结果与理论拟合良好, 对于实际问题分析有一定的意义, 为本后续更复杂的问题与更精确的分析的研究提供了一定的理论基础。

关键词: 皂膜结构; 物理模型; 颈缩效应

1904 年, 人类第一次通过高速摄影技术记录下固体球穿过皂膜完整过程, 如图 1 所示。

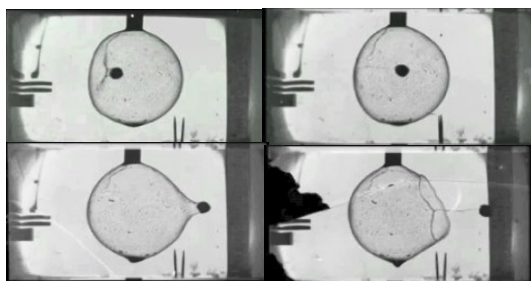


图 1 Lucien Bull 高速摄影实验

此后一百年, 人类对皂膜的动态变化进行了较为深入的研究与理论分析并取得了一定的理论结果。而在某些领域, 人们也利用了皂膜的通过重颗粒停留较轻颗粒的性质, 将其作为一种反常过滤器并在一定程度上有了较为广泛的利用。对于新的技术上的应用, 理论上的支持开始略显不足, 之前关于皂膜的动态理论研究中, 仅考虑了单纯改变皂膜所处条件后的动态变化, 而对于皂膜与固体相互作用的相关研究则相对较少。由于固体与皂膜的相互作用与其在皂膜中的运动具有一定的复杂性, 导致相关定量研究较少, 在一些关于液膜过滤器论文中, 人们依旧使用较为粗略的近似来进行理论上的计算^[1]。因此, 本文将以皂膜静态理论与动态变化理论为基础, 对当今应用逐渐广泛的皂膜过滤器进行理论上的定量分析, 以此来获得一个误差相对较小的固体通过皂膜的模型。

1 前人工作

1.1 皂膜结构静态问题分析

关于皂膜边界在处于静态时的结构问题最早在 1760 年由法国科学家拉格朗日提出, 在 19 世纪, 比利时科学家普拉托对皂膜的边界进行了大量测量与

观测实验, 总结出了四条经验定律, 即普拉托定理, 并于 1873 发表了其关于皂膜研究的经典著作 *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*。当皂膜的结构满足普拉托定律皂膜就会处于稳定状态, 反之皂膜就会运动向稳定状态抑或是破裂^[2]。普拉托定律是人类研究皂膜结构的一个重要的里程碑, 这四条定律在 1976 年由 Jean E. Taylor 发表的两篇论文通过微分几何与几何测度论全部得到了证明^[3, 4]。

普拉托在实验的基础上总结出了关于皂膜的一些规律, 在定量方面人们提出了普拉托问题, 亦即在边界已知且固定的情况下, 其曲面面积最小即极小曲面的形状问题。接下来的一百年中, 数学界关于极小曲面有了非常深入的研究, 最主要的研究是 Tibor Radó 和 Jesse Douglas 分别在 1930 年与 1931 年得到普拉托问题的广义解^[5,6], 以及 Osserman 和 Gulliver 在 1970 年到 1973 年

证明了 Tibor Radó 和 Jesse Douglas 的解处处内部正则, 亦即不会出现分支点^[7,8]。

1.2 皂膜结构动态问题分析

人们对于皂膜的静态结构问题的认识随着数学界研究而不断深入, 在皂膜静态结构的一个个问题得到了解决后, 人们又将眼光投向了皂膜结构的动态问题, 亦即当皂膜的边界改变时, 皂膜的结构会如何变化的问题。

早在 1959 年就有科学家对皂膜结构的动态变化有了一定的实验的记录与相关理论的分析^[9], 但关于皂膜结构动态的定量分析问题直到 20 世纪 90 年代才有了比较大的进展, 与皂膜结构静态问题相比, 仅用微分几何的数学工具进行分析是完全不够的, 于是人们在皂膜静态问题关于极小曲面的分析基础上, 引入了流体力学对皂膜结构动态问题进行了分析, 并在特定的皂膜结构(主要是悬链曲面结构)的动态问题上得到了一定的成果。其中最具有代表性的工作有 Cryer 于 1992 年发表的论文 *Collapse of the Soap-Film Bridge: Quasistatic Description* 与 Chen 于 1997 年发表的论文 *Dynamics of inviscid capillary breakup: collapse and pinchoff of a film bridge*, 这两篇论文均对皂膜结构在两个稳态之间的准静态中间过程有了一定的定量分析, 前者对于皂膜动态中间准静态过程给出了一个整体的分析^[10], 而是后者则是将中间过程分成了几个不同的阶段, 并在这些不同的阶段中进行了十分详细的定量计算, 在理论上得到了十分精细的关于悬链曲面皂膜边界变化后结构变化过程^[11]。

1.3 关于固体与皂膜相互作用的前人工作

近些年来, 人们逐渐意识到皂膜结构理论相较于实际应用具有一定的局限性, 便开始了皂膜与固体的相互作用的研究并取得了一定的陈国, 不过这些研究仅局限于实验与定性分析, 关于定

量的理论分析则较少。因此本文将以上诉皂膜结构的静态理论与动态理论为基础, 对固体在特定皂膜中的下落运动进行分析, 进而将前人工作的理论研究运用在具体实际运用的定量分析上。

2 理论分析

2.1 原理解析

研究物体穿过皂膜, 首先需要明确透过皂膜的的过程, 采用超高速摄像机捕捉到的下落过程如图 2 所示:

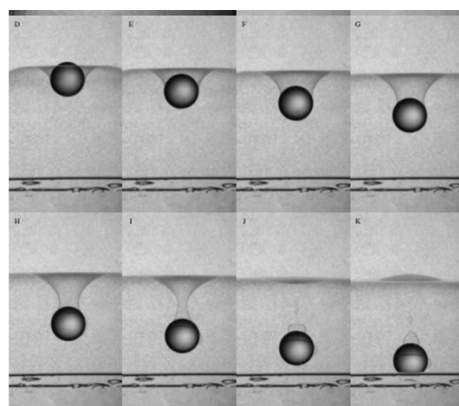


图 2 物体穿过皂膜逐帧过程

由上述流程图可以发现, 物体穿过皂膜后, 皂膜的表面完整性并不会受到破坏, 而产生这种现象的原理就是基于皂泡的特殊组成结构

一般情况下, 产生皂泡的材料为表面活性剂溶液, 在水中加入表面活性剂后, 表面活性剂的亲水的头部会靠近水分子, 而疏水烃基尾部会远离水分子, 在皂泡中, 水分子会被锁在皂泡的中间, 两侧则分布着单层的表面活性剂分子。这种结构就保证了固体分子通过皂泡后, 如果之前彼此不接触的皂泡的两部分能够相遇就能够达到皂泡自愈的效果。在此基础上进一步分析皂膜桥结构(即皂膜悬链状拉伸结构)及其颈缩效应, 颈缩效应的具体过程如图 3 所示^[11]:

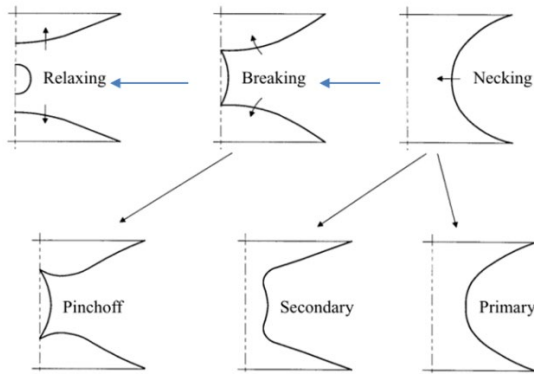


图3 膜桥结构解析

当皂泡存在扰动时（比如突然拉开膜桥的距离时），会依次出现主级颈缩与次级颈缩，进而引起膜桥颈部两侧某点在中轴的相遇，形成两个新的膜，以及一个卫星气泡（satellite bubble），这就导致膜桥结构的破坏，以及新的液膜结构，同时又由于表面张力的存在，两个新的膜结构会收缩，并在空间中做阻尼振动，最终形成两个平面膜。

关于膜桥颈缩不同阶段与时间的关系有如图5所示规律^[11]：

Onset	Roll-off	Cusp-approach	Self-similar
$\Delta r \propto t^2$	$r \propto \tau^{2/3}$	$(r, z) \propto (\tau^{2/5}, \tau^{3/5})$	$(r, z) \propto (\tau^{2/3}, \tau^{2/3})$
$t \ll 1$	$0.04 < \tau < 0.4$	$0.004 < \tau < 0.04$	$\tau < 0.004$

图5 膜桥颈缩与时间的关系

其中 $\tau = (t - t_p)$ ， t_p 为夹断时刻， τ 表示与夹断时间相距的时间，可以看到在膜桥收缩效应中只有“Roll-off”这一主级收缩的其中一个过程与时间是确定的，由于这一过程所占的时间更多，其他的过程要比“Roll-off”的时间来得短得多（至少相差一个数量级），因此可以考虑将其他的过程忽略掉，仅考虑膜桥颈缩效应的主级收缩。

而主级颈缩颈部半径 d 与时间 τ 的具体关系满足：

$$d = \left(\frac{\sigma \tau^2}{\rho} \right)^{1/3} \quad (1)$$

实际上，固体经过平面膜时也会产生类似于

皂膜桥的结构，当固体通过平面膜时，皂膜为了形成极小曲面，就会发生颈缩效应，同时与之前所提到的膜桥模型不同的是，此时的固体是在运动的，也就是说，此时膜桥的距离是不断变化的，即此时的液膜的结构的变化为距离变化的膜桥颈缩模型

由此可以得到一个关于固体穿过皂膜的皂膜结构变化的模型，如图6所示如下：

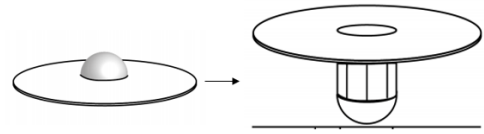


图6 固体穿过皂膜模型

当固体球穿过皂膜时，如果没有颈缩效应，固体球会在皂膜中形成一个圆柱体，此时构成了形成膜桥以及颈缩效应的条件，此时由于小球不断向下运动，同时颈缩效应又同时进行，因而可以将膜的变化分成两个独立的运动，即竖直方向上的固体带动的皂膜的向下运动，和水平方向上的颈缩运动

2.2 模型建立

由上述过程分析建立物体通过皂膜的模型设定研究参数如下：皂膜半径 R 、厚度 t 、密度 ρ 、表面张力系数 σ ；小球半径 r 、质量 m 、重力常数 g 、正好通过造模的临界高度 h_0

由于水平方向上的运动由于扰动一直存在，皂膜会发生颈缩运动，根据公式（1）可以得到从

小球接触皂膜到皂膜夹断的时间为

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{r^3 \rho}{\sigma}} \quad (2)$$

在重力与皂膜对固体的力的共同作用下，固体球在竖直方向上会向下运动一段距离，这个过程的运动可以进行一定的近似，这里我们主要采用两种近似即：

（1）近似为加速度恒定的减速运动，则对于

恰好能通过皂膜的固体球，夹断时固体球经过肥皂膜的长度为

$$l = \sqrt{\frac{ghr^3\rho}{2\sigma}} \quad (3)$$

(2) 近似为力随着位移变化的运动，不妨令皂膜对固体球的力为 kx ，由边界条件可得

$$\sqrt{\frac{2h_0k}{mg}} = \tan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_1\right) \quad (4)$$

对于恰好能通过皂膜的固体球，夹断时固体球经过肥皂膜的长度为

$$l = \sqrt{\frac{2mgh_0}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_1\right) - \frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_1\right) + \frac{mg}{k} \quad (5)$$

在夹断之前的颈缩中，次级颈缩比主级颈缩少一个数量级，由此得到从开始次级颈缩到皂膜夹断的时间为

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} = \sqrt{\frac{r^3\rho}{n^2\sigma}} \quad (6)$$

其中常数 n 表示从小球接触皂膜到皂膜夹断的时间与从开始次级颈缩到皂膜夹断的时间的比值与小球的半径 r 、速度 v 有关， n 可能的值在 5~20 之间

(注：虽然这个值的可能的范围比较大，但后面的计算可以看到 n 对所数值值的改变比较小)，即在

$$a = \frac{r}{\sqrt[3]{n^2}} \quad (7)$$

处发生次级颈缩，由于次级颈缩主要为中部两侧的小幅度的收缩，因而这个阶段表面积的改变可忽略不计

由此可得，夹断时刻的表面积近似等于次级颈缩发生时刻的表面积，膜在空间上为悬链曲面，不妨截取一个面，根据悬链线方程的特点建立以中轴为 x 轴， y 轴垂直于曲面上一点的正交

坐标系，由之前的运算得到的结果可知，第一象限的曲线方程为

$$y = a \cosh(bx) \quad (8)$$

$$\text{式中 } a = \frac{r}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad b = \frac{\cosh^{-1}(\sqrt[3]{n^2})}{l-r}$$

由此可得，对应第一象限旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi \int_0^{l-r} f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^{l-r} a \cosh(bx) \sqrt{1+a^2b^2[\sinh(bx)]^2} dx \\ &= \frac{2a\pi}{b} \left(\frac{k_1}{2} \times \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2ab} \ln |k_1 ab + \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1}| \right) \end{aligned} \quad (9)$$

(式中 $k_1 = \sinh(\cosh^{-1}(\sqrt[3]{n^2}))$) ;

可得小球通过时的表面能的增量为：

$$\begin{aligned} \Delta E_s &= 2\sigma(S - \pi r^2) \\ &= 2\sigma \left[\frac{2a\pi}{b} \left(\frac{k_1}{2} \times \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2ab} \ln |k_1 ab + \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1}| \right) + 3\pi r^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

联立方程

$$mgh_0 = \Delta E_s \quad (11)$$

即可得到临界高度 h_0

此外，当下落物体不满足模型假设的小球模型，可以以小球通过皂膜的模型为基础，分析其通过皂膜时皂膜夹断的表面积的情况，在皂膜不发生破裂的前提下，存在两种情况

(1) 当固体为轴对称形状且堆成轴垂直于皂膜时，则皂膜的形状就与球形一样，此时的 r 为各截面半径最大的值

(2) 对于无法近似为(1)中情形的固体的分析就比较复杂，此时的皂膜的形状并不是简单的轴对称的形状，于是皂膜的形状取决于固体各截面中最突出的点，其中 r 为皂膜离颈缩中心最近的点的距离

因此夹断表面积与表面能变化量就可以修正

为以下两式：

$$\Delta E_s = 2\sigma(S - S') = 2\sigma \left[\frac{2a\pi}{b} \left(\frac{k_1}{2} \times \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1} + \frac{1}{2ab} \ln |k_1 ab + \sqrt{k_1^2 a^2 b^2 + 1}| \right) + S_{\text{固体}} - S' \right] \quad (12)$$

（其中 S' 为固体投影到皂膜上的面积）

3 实验方法

由模型的理论分析可知，对于本模型的验证所需要测量的量包括固体球的质量、皂液的密度、皂液的表面张力、固体球通过皂膜的临界高度，其中皂液密度可由密度计直接求得，由于实验所用的固体球质量较小，所以对于固体球的测量，本实验采用多次量取多粒固体球取斜率的方法以降低误差。而对于液体表面张力系数与固体球通过皂膜的临界高度的测量，则没有现成的仪器，因此以下的内容将介绍对这两个数值的测量，以及还有对于皂液的一定溶度的配置过程。

3.1 液体表面系数的测量

本实验使用改进后的挂脱法来进行实验，常规的挂脱法会受到不同程度的摩擦力的影响，因此本次实验使用改造后的托盘天平进行表面张系数的测量实验。

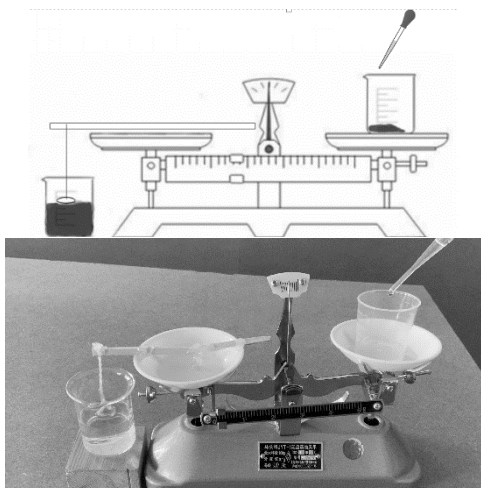


图7 测量表面张力仪器

如图7所示，在天平的左端用溶胶固定一根长杆，杆的一端通过细绳连接一个金属铝环，在天平的另一端放置一个烧杯，使用前调平天平待

用，使用时在铝环下放置一个烧杯并在烧杯中加入适量液体使其高度正好与水的表面相切，在烧杯中不断滴加液体直至铝环离开水面为止，而后测量出加入水的质量，带入相应的公式就能计算出被测液体的液体表面张力系数。

3.2 固体球通过皂膜的临界高度的测量

由计算结果的分析可得，固体球的高度的微小差值会带来实验上结果的较大的变化，因此本次实验采取了带有刻度的光学升降台来对这个数值进行精度较高的测量，具体实验装置与示意图如图8所示

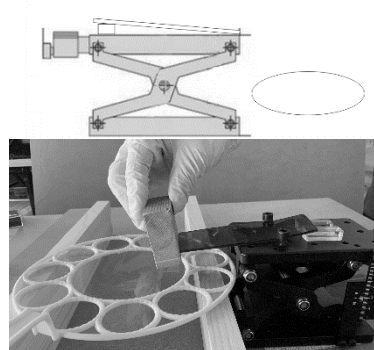


图8 固体球通过皂膜的临界高度的测量装置

用螺丝与硬块在在光学升降台上固定一个具一定斜度的薄硬板，使用前将光学升降台的 z 轴读数为零刻度点的硬板最低点与皂膜所在位置对齐，使用时先用格挡物挡在硬板的末端，硬板上放置不同小球使其滚落到最低点，在合适的时候放在格挡物，使固体球自由下落，不断调整升降台高度寻找临界高度值，多次使用二分法可以逐渐逼近临界值。可以发现在临界值处会出现有的固体球通过有的固体球停留的情况，这可能是由于固体球制作工艺带来的半径与质量的涨落，此时可以通过在同一高度通过多个小球来消除这个涨落的影响。

3.3 一定浓度皂液的配置

本实验对于皂液的配置也有一定的要求，在配置皂液的过程中产生过多的细小皂泡，则对于后续的实验则有一定的影响，因此本次实验使用

了超声波清洗机与容量瓶对皂液进行配置。

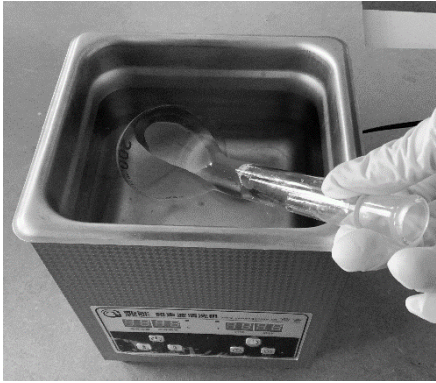


图 9 一定浓度皂液配置过程

如图 9 所示，将所需的液体(表面活性剂、蒸馏水、甘油)导入到容量瓶后，将其放置于超声波清洗机中，打开超声波清洗机并快速旋转容量瓶直至容量瓶的液体澄清为止，此时就能最大程度的保证皂液的充分混合与细小皂泡的产生。

4 实验结果与分析

4.1 实验结果

分别使用同一直径铝球多组不同浓度皂液形成的皂膜与同一皂液浓度形成的皂膜与多组不同直径铝球进行多组实验取平均值，使用 matlab 进行数值计算可得理论上的临界高度，再与测量平均值进行比较，可得到测量结果及其相对误差分别如表一到表四所示

表 1 不同浓度匀加速近似临界高度

理论值-实验值及相对误差

浓度	实验值/cm	理论值/cm	相对误差	平均误差
4%	1.58	1.68	5.95%	9.42%
6%	1.5	1.56	3.85%	
8%	1.57	1.27	23.62%	
10%	1.57	1.64	4.27%	
12%	1.61	1.57	2.55%	
14%	1.64	1.41	16.31%	

表 2 不同直径均加速近似临界高度

理论值-实验值及相对误差

直径	实验值/cm	理论值/cm	相对误差	平均误差
0.5mm	3.43	2.46	39.43%	16.13%
0.6mm	2.88	2.09	37.80%	
0.7mm	1.91	1.96	2.55%	
0.8mm	1.57	1.54	19.48%	
0.9mm	1.32	1.37	3.65%	
1.0mm	1.09	1.23	11.38%	

表 3 不同浓度变加速近似临界高度

理论值-实验值及相对误差

浓度	实验值/cm	理论值/cm	相对误差	平均误差
4%	1.58	1.72	8.14%	9.02%
6%	1.5	1.58	5.06%	
8%	1.57	1.30	20.76%	
10%	1.57	1.66	5.64%	
12%	1.61	1.60	0.62%	
14%	1.64	1.44	13.89%	

表 4 不同直径变加速近似临界高度

理论值-实验值及相对误差

直径	实验值/cm	理论值/cm	相对误差	平均误差
0.5mm	3.43	3.81	9.97%	13.50%
0.6mm	2.88	3.52	18.18%	
0.7mm	1.91	2.2	13.18%	
0.8mm	1.57	1.66	5.42%	
0.9mm	1.32	1.52	13.16%	
1.0mm	1.09	0.905	21.11%	

4.2 实验分析

可以看到模型与实验的拟合结果较好，实验与理论的平均相对误差较小，但对于一些特定直径与特定的浓度有较大的误差，经过分析，这些误差可能是由以下几方面带来的

(1) 实验仪器所带来的误差，本次实验所使用的仪器设备精度相对较低，对于最终数据的获取与计算有一定的影响。

(2) 皂膜的各处厚度不同所带来的影响，由于固体球的直径半径小，对于不同的掉落位置，其厚度的差值可能会比较大，而这里的厚度可能会导致每处的 k 值均不同。同时在实验过程中，水的蒸发也会带来对皂液浓度与皂膜厚度的影响。

(3) 皂膜振动所带来的影响，由于周围环境的影响，皂膜可能会发生上下振动，这种振动可能会影响临界高度的测量

除了以上实验过程中可能带来的误差，本次模型对于固体球在皂膜中的运动的近似也可能带来一定的误差，如表一至表四所示，变加速近似模型所带来的平均相对误差小于匀加速近似模

型，特别是对于直径较小的固体球，其理论预测相对于匀加速模型更贴近于实验结果。同时我们也注意到，对于较低浓度与较大的直径，匀加速近似模型相较于变加速模型与实验拟合结果更好。同时，虽然变加速近似模型的平均相对误差较低，但变加速模型的求解二元方程组时，其中的 K 会有多解的存在，需要人工进行分析剔除不合理的值，而如果有多个 K 值均在合理的范围内，则会导致临界高度难以判断。

因此我们可以在此研究的基础上，对固体球在皂膜中的受到的实际受力情况进行分析，进而得到一个更精细的模型，而这可以通过一定是计算与仿真得到相应的结果。

5 理论模型的相关应用

5.1 选择性昆虫或微生物屏障

在土壤昆虫或微生物的生物研究中，区分不同的昆虫微生物分类进行研究调查是很有必要的，但传统的分离方法都是采用镊子和显微镜等组合，这样虽然精确但耗时较长，效率不高。

而肥皂膜具有的反常过滤特性可以将细小的昆虫和微生物停留在表面而将体型较大的昆虫和沙土过滤出去，并且对昆虫和微生物伤害很小；将昆虫或微生物近似等效为上文模型中的小球颗粒，再通过已建立的研究模型来确定一个合适的高度，和肥皂膜的表面张力系数，从而筛选出一定大小范围内的昆虫和微生物，能提升进一步精细化观察研究的效率和准确度，具有很高的潜在研究价值

5.2 防污膜

在对清洁度要求较高的实验和操作中，例如医学外科手术或者是其他高洁度实验中，此时要求必须与外界存在一定的器件交互，又无法使用传统的真空室或者超净间等实验场所，这时成本低廉且过滤性能良好的肥皂膜就可以轻松胜任隔绝细小细菌和灰尘的保护作用。

在此处应用中，可通过特定浓度配比而具有特定表面张力系数的肥皂膜，实现将器材等大物件直接穿透肥皂膜而不会破坏肥皂膜本身，使得细小的灰尘和细菌停留在肥皂膜外表面。而此时的灰尘与细菌由于与器件的带动而具有一定的动能，可以通过本模型来确定器件穿过皂膜的速度以保证绝对清洁。

6 总结与展望

本论文以前人关于皂膜结构静态及动态的工作为基础，构建出一种关于固体球通过皂膜的两个近似模型，并在实验中进行了一定的验证与分析，两个模型的理论预测与实验的结果拟合程度较好，对于当今应用范围不断变大的反常皂膜过滤器的理论分析提供了一定的基础。

对于相关问题的定量研究分析，仅本论文所能提供的理论高度是完全不够的，对于后续的研究可以着重通过分析固体球在皂膜中发生相互作用进行分析得到固体在皂膜中的具体运动过程从而得到一个更为精细的结构模型，同时也可以对多个固体球与复杂形状固体通过皂膜进行更深入的研究。

参考文献：

- [1] Le Goff A, Courbin L, Stone H A, et al. Energy absorption in a bamboo foam[J]. *Epl*, 2008, 84(3):36001.
- [2] Plateau, J. (1873). *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* [Experimental and theoretical statics of liquids subject to only molecular forces] (in French). Paris, France: Gauthier-Villars.
- [3] Jean E. Taylor. "The Structure of Singularities in Soap-Bubble-Like and Soap-Film-Like Minimal Surfaces". *Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 103, No. 3. May, 1976, pp. 489–539.
- [4] Frederick J. Almgren Jr and Jean E. Taylor, "The geometry of soap films and soap bubbles", *Scientific American*, vol. 235, pp. 82–93, July 1976.

- [5] Radó, Tibor. On Plateau's problem[J]. Annals of Mathematics, 1930, 31 (3): 457–469.
- [6] Douglas, Jesse. Solution of the problem of Plateau[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1931, 33(1):263-263.
- [7] Osserman R . A Proof of the Regularity Everywhere of the Classical Solution to Plateau's Problem[J]. Annals of Mathematics, 1970, 91(3):550-569.
- [8] Gulliver R , Lesley F D . On boundary branch points of minimizing surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics & Analysis, 1973, 52(1):20-25.
- [9] Ranz, W. E . Some Experiments on the Dynamics of Liquid Films[J]. Journal of Applied Physics, 1959, 30(12):1950-1955.
- [10] Cryer S A , Steen P H . Collapse of the soap-film bridge - Quasistatic description[J]. Journal of Colloid & Interface Science, 1992, 154(1):276-288.
- [11] Chen Y J . Dynamics of inviscid capillary breakup: collapse and pinchoff of a film bridge[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 341:245-267.