Solutions des exercices du chapitre 1

Question # 1
Un carré magique est une matrice de dimension $n \times n$ contenant exactement une instance de chaque nombre entre 1 et n^2. De plus, la somme des nombres est la même sur chaque ligne et chaque colonne. Vous devez modéliser ce problème avec les contraintes $\neq$ et $X_1 + X_2, + \ldots + X_n = k$. Dites, en utilisant la notation Θ, combien il y a de variables, de valeurs dans les domaines et de contraintes dans votre modèle.

Solution : On déclare une variable pour chaque élément de la matrice. Ainsi, la variable X_{ij} représente la valeur inscrite à la ligne i et la colonne j pour $1 \leq i, j \leq n$. Le domaine de chaque variable est l'ensemble des entiers entre 1 et n^2. Nous devons ensuite déterminer la *somme magique*, c'est-à-dire la somme des éléments sur une même ligne / colonne. Puisque la somme de tous les éléments de la matrice est donnée par $\sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, nous devons diviser cette somme par n pour obtenir la somme sur chacune des n lignes / colonnes. La somme magique est donc $\frac{1}{n}\frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Pour chaque ligne i, nous avons la contrainte suivante.

$$X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{in} = \frac{n(n^2+1)}{2} \tag{1}$$

Pour chaque colonne j, nous avons cette contrainte.

$$X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{nj} = \frac{n(n^2+1)}{2} \tag{2}$$

Finalement, nous avons une contrainte $X_{ij} \neq X_{kl}$ pour chacune des $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ paires de variables.

$$X_{ij} \neq X_{kl} \qquad \forall\, 1 \leq i, j, k, l \leq n \text{ tels que } in + j < kn + l \tag{3}$$

Nous avons donc $n^2 \in \Theta(n^2)$ variables. Chaque variable a n^2 valeurs dans son domaine pour un total de $\Theta(n^4)$ valeurs. Nous avons n contraintes de type (1), n contraintes de type (2) et $\binom{n^2}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$ contraintes de type (3). Nous avons donc au total $n + n + \frac{n^2(n^2-1)}{2} \in \Theta(n^4)$ contraintes.

Question # 2

Vous devez modéliser le problème de placer n reines sur un échiquier de dimension $n \times n$ de sorte qu'aucune reine n'en attaque une autre. Deux reines ne doivent donc pas se trouver sur une même colonne, une même rangée ou une même diagonale. Vous devez modéliser ce problème en une instance SAT en n'utilisant que des contraintes de la forme $a \vee \neg b \vee \neg c \vee \ldots$ où chaque littéral est une variable booléenne ou sa négation. Dites, en utilisant la notation Θ, combien il y a de variables, de valeurs dans les domaines et de contraintes dans votre modèle.

Solution : On déclare une variable booléenne pour chaque case de l'échiquier. Ainsi, la variable x_{ij} est vraie si et seulement s'il y a une reine sur la rangée i et la colonne j de l'échiquier. Le domaine de chacune de ces variables est l'ensemble $\{vrai, faux\}$. On a ensuite les contraintes suivantes.

Pour chaque rangée $i \in 1..n$, nous avons ces contraintes empêchant deux reines de s'y retrouver.

$$\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik} \qquad \forall\, 1 \leq j < k \leq n \tag{4}$$

Pour chaque colonne $j \in 1..n$, nous avons ces contraintes empêchant deux reines de s'y retrouver.

$$\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj} \qquad \forall\, 1 \leq i < k \leq n \tag{5}$$

On a ensuite ces contraintes qui empêchent deux reines de s'attaquer sur une diagonale.

$$\neg x_{ij} \vee \neg x_{kl} \qquad \forall\, 1 \leq i, j, k, l \leq n \text{ tels que } 0 < k - i = |l - j| \tag{6}$$

Finalement, il faut forcer la solution à positionner n reines sur l'échiquier. On le fait on obligeant d'avoir au moins une reine par rangée.

$$x_{i1} \vee x_{i2} \vee \ldots x_{in} \forall\, i \in 1..n \tag{7}$$

Le modèle possède exactement $n^2 \in \Theta(n^2)$ variables et un total de $2n^2 \in \Theta(n^2)$ valeurs dans les domaines. Il y a $\frac{n^2(n-1)}{2} \in \Theta(n^3)$ contraintes de type (4), $\frac{n^2(n-1)}{2} \in \Theta(n^3)$ contraintes de type (5), $\Theta(n^3)$ contraintes de type (6) et $n \in \Theta(n)$ contraintes de type (7). Au total, nous avons donc $\Theta(n^3)$ contraintes.

Question # 3
Pour chaque expression logique, écrivez un modèle SAT qui a une solution si et seulement si l'expression logique est satisfaite. Par exemple, le modèle SAT pour l'expression $A \to B$ est tout simplement la clause $\neg A \lor B$. Vos solutions peuvent avoir plus d'une clause et plus de variables que l'expression présentée.

A) $A \iff B \lor C$

Solution :

$$\begin{aligned} \neg A \lor B \lor C \\ \neg B \lor A \\ \neg C \lor A \end{aligned}$$

B) $A \iff B \land C$

Solution :

$$\begin{aligned} \neg A \lor B \\ \neg A \lor C \\ A \lor \neg B \lor \neg C \end{aligned}$$

C) $A \lor B \iff C \land D$

Solution :

$$\begin{aligned} \neg A \lor C \\ \neg A \lor D \\ \neg B \lor C \\ \neg B \lor D \\ A \lor B \lor \neg C \lor \neg D \end{aligned}$$

Question # 4

Dans certains problèmes combinatoires, une séquence de variables doit respecter un patron, comme par exemple, une expression régulière. Nous avons donc une séquence de variables $X_1, \ldots, X_n$ dont le domaine est $\mathrm{dom}(X_i) = \{vrai, faux\}$. Nous désirons que cette séquence adopte le patron $faux^* \ vrai^* \ faux^*$, c'est-à-dire une séquence (possiblement vide) de variables fausses, suivie d'une séquence (possiblement vide) de variables vraies, suivie d'une séquence (possiblement vide) de variables fausses. Vous devez modéliser ce patron en n'utilisant que des clauses SAT, c'est-à-dire des disjonctions de littéraux (un littéral est une variable ou sa négation). Il existe plusieurs façons de modéliser ce problème. Généralement, l'ajout de nouvelles variables au modèle permet de diminuer le nombre de contraintes. Essayez de trouver une solution avec $\Theta(n)$ contraintes et $\Theta(n)$ variables.

Solution : On déclare deux variables A_i et B_i pour chaque $1 \leq i \leq n$. Les $n-1$ contraintes suivantes forcent la séquence $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à prendre la forme $faux^* \ vrai^*$.

$$\neg A_i \vee A_{i+1} \qquad \forall\, 1 \leq i < n \tag{8}$$

Les $n-1$ contraintes suivantes forcent la séquence $B_1, B_2, \ldots, B_n$ à prendre la forme $vrai^* \ faux^*$.

$$B_i \vee \neg B_{i+1} \qquad \forall\, 1 \leq i < n \tag{9}$$

Finalement, on impose la relation $X_i \iff A_i \wedge B_i$ avec les $3n$ contraintes suivantes (voir la question 3B).

$$A_i \vee \neg X_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n \tag{10}$$

$$B_i \vee \neg X_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n \tag{11}$$

$$\neg A_i \vee \neg B_i \vee X_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n \tag{12}$$

Une solution au problème est représentée dans le tableau 1. La valeur *vrai* est représentée par un 1 et la valeur *faux* est représenté par un 0.

$A_1 \ldots A_{10}$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$B_1 \ldots B_{10}$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$X_1 \ldots X_{10}$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

TABLEAU 1 – Une solution aux clauses SAT de la question 4

Nous avons donc un modèle avec $(n-1)+(n-1)+3n \in \Theta(n)$ contraintes et $3n \in \Theta(n)$ variables booléennes.