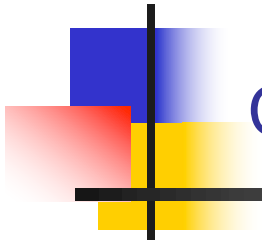
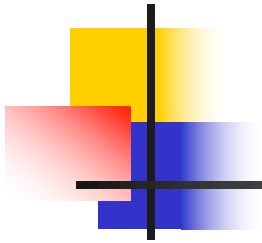


Chapitre 12

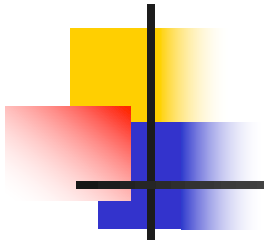
Faire face aux limitations algorithmiques



Aperçu du chapitre

- Que fait-on lorsque notre problème à résoudre est NP-difficile?
- Deux principales options s'offrent à nous pour les **problèmes d'optimisation**:
  - Tenter de trouver la solution optimale par une méthode d'exploration de type **« branch and bound »**
    - Le temps d'exécution sera nécessairement exponentiel (ou plus) en pire cas mais il peut être « raisonnable » pour plusieurs instances qui ne font pas partie des pires cas.
  - Tenter de trouver une bonne solution sans qu'elle soit optimale à l'aide d'un **algorithme d'approximation** dont le temps d'exécution est polynomial en pire cas.
- Nous examinerons ces deux approches dans ce chapitre.

- Il n'existe pas de solution approximative pour les **problèmes de décision**.
- Cependant, la méthode d'exploration du **retour arrière (« backtracking »)** permet parfois d'obtenir une solution en un temps « raisonnable » pour des instances « faciles » des problèmes NP-complets.
  - Examinons d'abord cette approche.



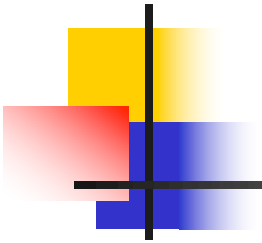
Le retour arrière (« backtracking »)

- C'est une version « intelligente » d'une recherche exhaustive.

- L'idée principale est de construire des **solutions partielles** en ajoutant une **composante** à la fois de la manière suivante:
  - Si la prochaine composante de disponible peut-être ajoutée à notre solution partielle sans violer les contraintes du problème, nous l'ajoutons à notre solution partielle et continuons.
  - S'il n'existe pas une telle composante de disponible, alors aucune solution ne peut être obtenue à partir de cette solution partielle.
    - L'algorithme fait alors un **retour arrière (« backtrack »)** et remplace la dernière composante (de notre solution partielle) avec la prochaine composante légitime de disponible.
      - Légitime signifie ici que cette nouvelle solution partielle ne viole pas les contraintes du problème.

Le retour arrière (suite)

- Nous avons alors un **arbre de solutions partielles** à explorer.
- La racine de cet arbre contient habituellement 0 composante.
- Les nœuds du premier niveau sont les choix possibles pour la première composante.
- Les nœuds du k-ième niveau sont les choix possibles pour la k-ième composante.
- Chaque nœud de l'arbre représente donc une solution partielle: celle obtenue en concaténant les composantes obtenues en parcourant l'arbre de la racine au nœud en question.
  - Un nœud est qualifié de **prometteur** si sa solution partielle peut supporter l'ajout d'une autre composante.
  - Autrement, le noeud est qualifié de **non prometteur**.
- Un nœud non prometteur est donc soit un **'cul-de-sac' (« dead end »)** ou une **solution complète** du problème.



Retour arrière et fouille en profondeur

- Dans la majorité des cas, l'arbre des solutions partielles est parcouru en profondeur (« depth-first »).
  - Si le nœud courant est prometteur, un enfant est généré en ajoutant la prochaine composante légitime et nous explorons ensuite cette nouvelle solution partielle (à une composante de plus).
  - Si le nœud courant est non prometteur, l'algorithme retourne en arrière au nœud parent et l'on remplace l'enfant par la prochaine composante légitime.
    - Si cette prochaine composante légitime n'existe pas, alors l'algorithme retourne en arrière un niveau de plus dans l'arbre…
- Lorsqu'une solution complète est trouvée, l'algorithme peut continuer (si on le désire) pour trouver d'autres solutions complètes.
  - Dans ce cas, l'algorithme termine uniquement lorsqu'il retourne jusqu'à la racine (et qu'il a 'épuisé' le niveau 1).

Exemple: le problème des n reines

- Nous devons positionner n reines sur un jeu d'échecs n × n de manière à ce qu'aucune reine n'en attaque une autre.
- Résolvons le cas n = 4 par la technique du retour arrière.
- Puisque chaque reine doit être sur une rangée distincte, il ne reste qu'à assigner une colonne à chaque reine.

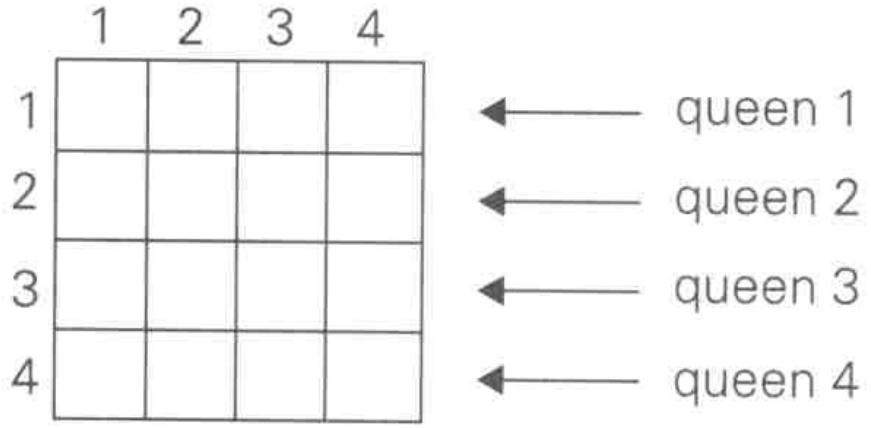


FIGURE 11.1 Board for the four-queens problem

Le problème des n reines (suite)

- La racine représente le jeu vide avec 0 reine de positionnée.
- Au niveau 1 on retrouve les colonnes possibles pour la reine 1
- Au niveau k on retrouve les colonnes possibles pour la reine k
- Après avoir positionné la reine 1 en colonne 1, on positionne la reine 2 en colonne 3 (après avoir refusé les colonnes 1 et 2)
  - Cette solution conduit à un cul-de-sac. **(voir figure page suivante)**
    - Alors on retourne en arrière d'un niveau et nous positionnons la reine 2 en colonne 4.
      - La reine 3 est ensuite positionnée en colonne 2 (c'est sa seule position légitime).
        - Cela conduit également à un cul-de-sac
- Alors : retour arrière pour positionner la reine 1 en colonne 2
  - Ensuite la reine 2 en colonne 4
    - Puis la reine 3 en colonne 1
      - Finalement la reine 4 en colonne 3. **Solution!**

Le problème des n reines (suite)

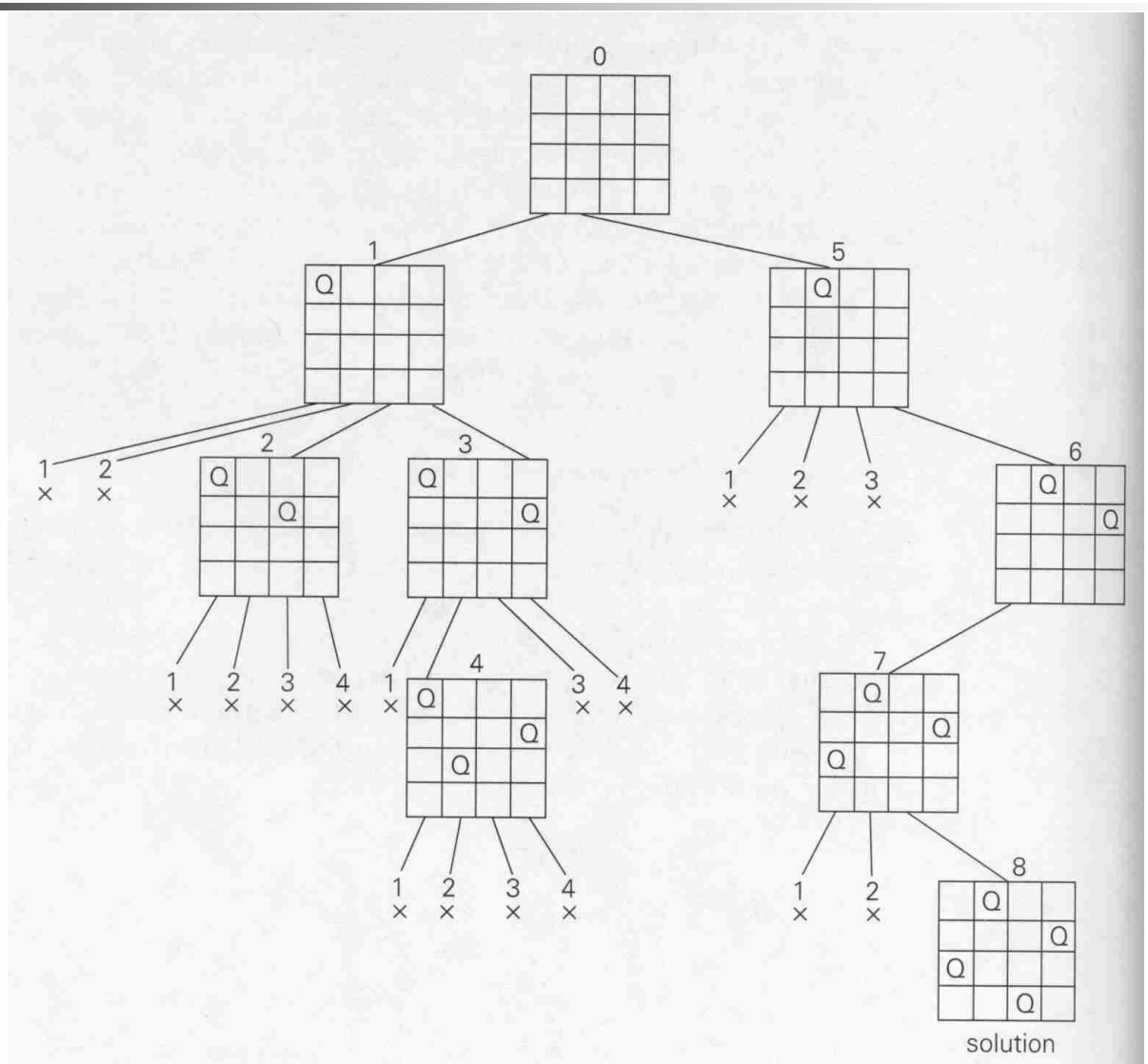
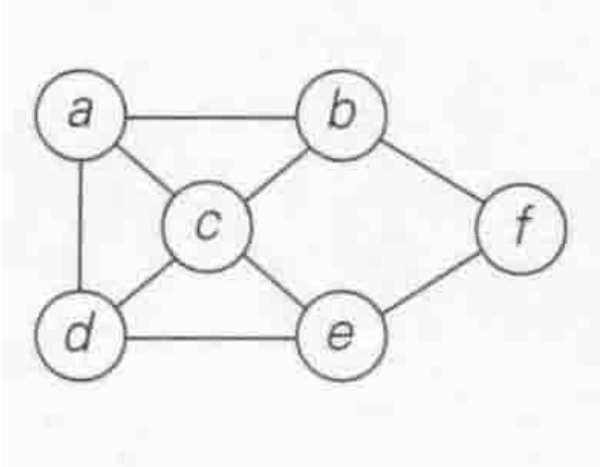


FIGURE 11.2 State-space tree of solving the four-queens problem by backtracking. × denotes an unsuccessful attempt to place a queen in the indicated column. The numbers above the nodes indicate the order in which the nodes are generated.

Exemple: trouver un cycle hamiltonien



- Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que si un cycle hamiltonien existe, alors il doit commencer au nœud A.
  - Le nœud A occupera donc la racine de l'arbre.
- La première composante, si elle existe, sera un nœud adjacent à A.
  - S'il y en a plusieurs, alors on utilise le premier selon l'ordre alphabétique. Nous choisirons alors B.
  - Ensuite nous irons à C, puis D, E et F. Cul-de sac!
  - Il faut alors retourner jusqu'à C.
- L'arbre d'exploration est illustré à la page suivante.

Trouver un cycle hamiltonien (suite)

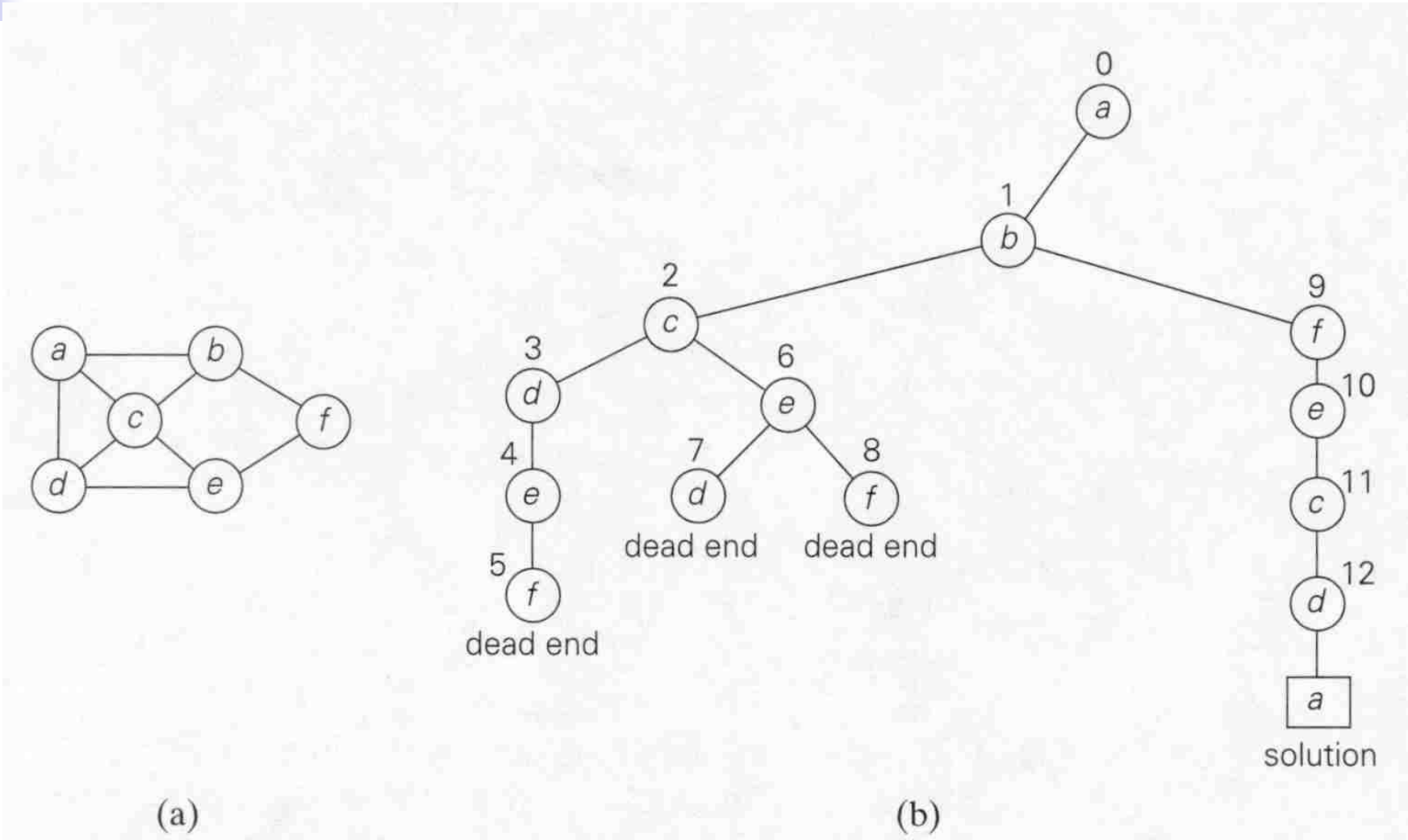


FIGURE 11.3 (a) Graph. (b) State-space tree for finding a Hamiltonian circuit. The numbers above the nodes of the tree indicate the order in which the nodes are generated.

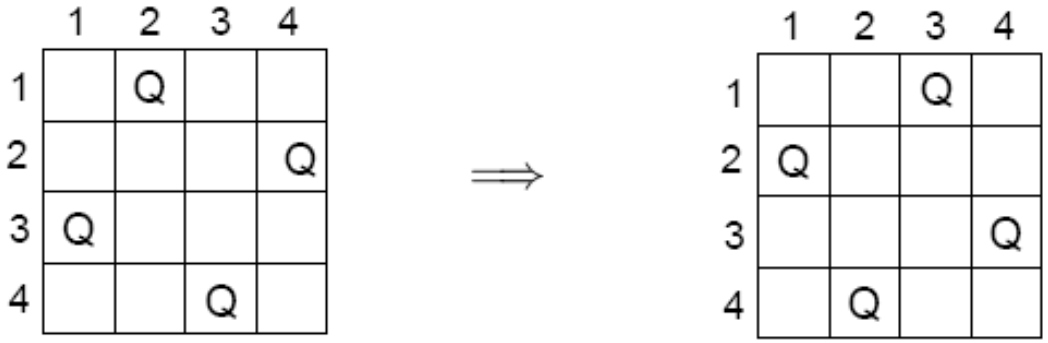
Retour arrière : remarques générales

- De manière générale, la sortie d'un algorithme de retour arrière est un n-tuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chaque composante x_i appartient à un ensemble fini et ordonné S_i. Indice = reine, la valeur = numéro de colonne
  - Pour les n reines: chaque $S_i = \{1,\ldots,n\}$ = ensemble des numéros de colonne satisfaisant les contraintes définies par la position des reines précédentes $x_1,\ldots x_{i-1}$.
  - Pour cycle hamiltonien: S_i = ensemble des nœuds adjacents à x_{i-1}.
- Un algorithme de retour arrière génère explicitement ou implicitement un arbre de solutions partielles $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ selon le pseudo-code suivant :

```
Algorithme Backtrack(X[1..i])  //premier appel avec i=0
   //Entrée: X[1..i] = solution partielle constituée des i premières composantes.
   //X[1..0] est le n-tuple vide.
   // Backtrack(X[1..0]) affiche toutes les solutions.
   if X[1..i] est une solution write X[1..i] // ok si le n-tuple est une solution
   else // on suppose qu'une solution n'est jamais préfixe d'une autre solution.
        for each x ∈ S_{i+1} satisfaisant les contraintes définies par X[1..i] do
             X[i+1] ← x
             Backtrack(X[1..i+1])
```

Retour arrière : remarques générales (suite)

- Cette méthode est typiquement utilisée pour résoudre des problèmes combinatoires difficiles.
  - Le temps d'exécution sera exponentiel en pire cas, mais cette technique d'exploration est suffisamment intelligente pour espérer obtenir des temps d'exécution raisonnables sur plusieurs instances pas trop « difficiles ».
  - De plus, il est souvent possible d'exploiter une certaine symétrie pour diminuer la taille de l'arbre de recherche
    - Ex: pour les n reines, nous pouvons restreindre la position de la reine 1 aux $\lceil n/2 \rceil$ premières colonnes car les solutions où la reine 1 occupe les autres colonnes sont obtenues par réflexion autour de la colonne (ou l'axe) centrale.



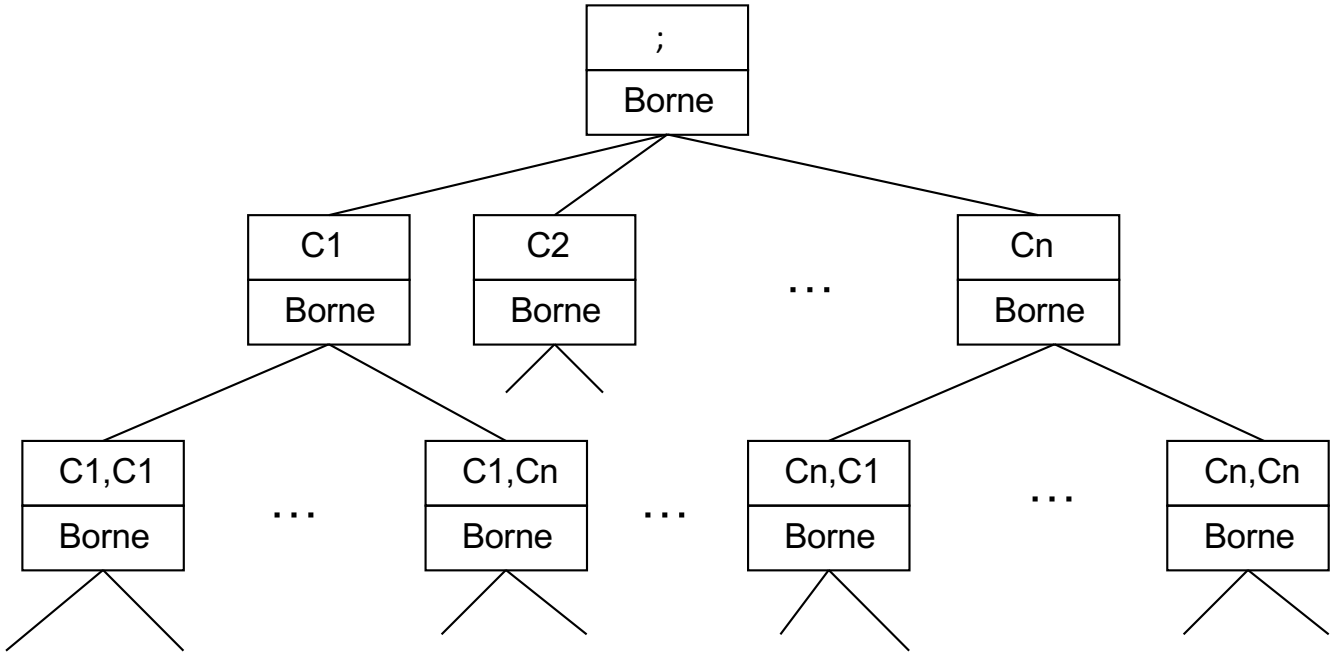
Problèmes d'optimisation

- Un **problème d'optimisation** consiste à trouver un **objet (ou point)** qui **optimise** (minimise ou maximise) **une fonction** (souvent appelée **fonction objectif**)
  - L'objet (ou point) doit satisfaire certaines **contraintes** spécifiées par le problème
- Exemple: le commis voyageur. Ayant un graphe où chaque paire de nœuds est reliée par une arête possédant une distance, trouver le circuit de longueur minimale.
  - Chaque objet (ou point) est ici un cycle qui doit satisfaire la contrainte d'être un cycle hamiltonien : c.-à-d., passer par chaque nœud une seule fois.
- Un objet (ou point) satisfaisant les contraintes du problème est appelé une **solution réalisable** (« feasible solution »).
- L'objectif d'un problème d'optimisation est de trouver une **solution optimale:** une solution réalisable qui optimise la fonction objectif.

La méthode « branch and bound »

- C'est une méthode d'exploration (de solutions) pour problèmes d'optimisation
- L'idée de base est de construire des solutions en ajoutant une **composante** à la fois et en évaluant chaque **solution partielle** ainsi obtenue.
  - Une solution partielle n'est habituellement pas une solution réalisable: elle ne satisfait pas nécessairement les contraintes
- Nous débutons avec une solution partielle contenant 0 composante
  - Ce sera la racine d'un **arbre de solutions partielles**
- Ensuite nous générons toutes les solutions partielles à une composante
  - C'est le niveau 1 de l'arbre des solutions partielles
- Pour chaque nœud (solution partielle) du niveau 1 nous pourrons générer des solutions partielles à deux composantes où la première composante est celle du nœud du niveau 1

Arbre des solutions partielles



- Pour chaque solution partielle nous calculons une **borne** sur la meilleure valeur possible de la fonction objectif atteignable à partir de ce noeud.
  - C'est une borne inférieure pour un problème de minimisation
  - C'est une borne supérieure pour un problème de maximisation
- **La borne est une valeur de la fonction objectif qui est impossible d'améliorer avec les solutions construites à partir de cette solution partielle.** (la valeur de la borne n'est pas nécessairement atteignable)

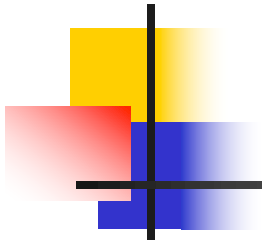
Terminaison d'une branche de l'arbre

- Cette méthode maintient, en tout temps, la valeur f_m (de la fonction objectif) de la meilleure solution obtenue jusqu'à maintenant.
- Une **branche est terminée** lorsque la valeur B de la borne d'une solution partielle n'est pas meilleure que f_m
  - Car, dans ce cas, il est impossible d'obtenir une solution qui est meilleure que celle que nous avons déjà en générant des solutions à partir de cette solution partielle
    - Pour un problème de minimisation: la branche est terminée lorsque $B \geq f_m$
    - Pour un problème de maximisation: la branche est terminée lorsque $B \leq f_m$
- Une branche de l'arbre est également terminée lorsque la solution partielle ne peut plus générer d'autres solutions réalisables.
  - Cas 1: une solution réalisable est obtenue et nous ne pouvons plus en obtenir d'autres (à partir de ce nœud)
  - Cas 2: une des contraintes du problème est violée par cette solution partielle (et donc par toutes les autres issues de ce nœud)

Exemple: le problème de l'assignation de tâches

- Il faut assigner n tâches à n personnes (1 personne par tâche)
- Chaque instance de ce problème est représentée par une matrice C de coûts.
- C[p,t] indique le coût d'assigner la personne p à la tâche t.
- Chaque rangée de C représente une personne
- Chaque colonne de C représente une tâche
- Pour chaque rangée p il faut choisir une seule colonne t telle que la somme des coûts est minimal.
- Exemple:

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Job 1} & \text{Job 2} & \text{Job 3} & \text{Job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Person } a \\ \text{Person } b \\ \text{Person } c \\ \text{Person } d \end{matrix}$$



Assignation de tâches (suite)

- Chaque composante d'une solution partielle sera l'assignation d'une tâche à une personne. Exemple b → 3.
- Chaque solution partielle sera constituée d'une séquence de composantes avec la contrainte que chaque personne et chaque tâche n'apparaisse qu'une seule fois dans une solution partielle.
- Cette contrainte est satisfaite en ayant un arbre de solutions partielles où chaque niveau assigne des tâches à une seule personne
  - Le niveau 1 pour la personne a, le niveau 2 pour la personne b …
  - Pour une instance de n personnes (et n tâches), l'arbre des solutions partielles aura donc n + 1 niveaux
    - Le niveau 0 contient uniquement la racine avec aucune assignation de tâches

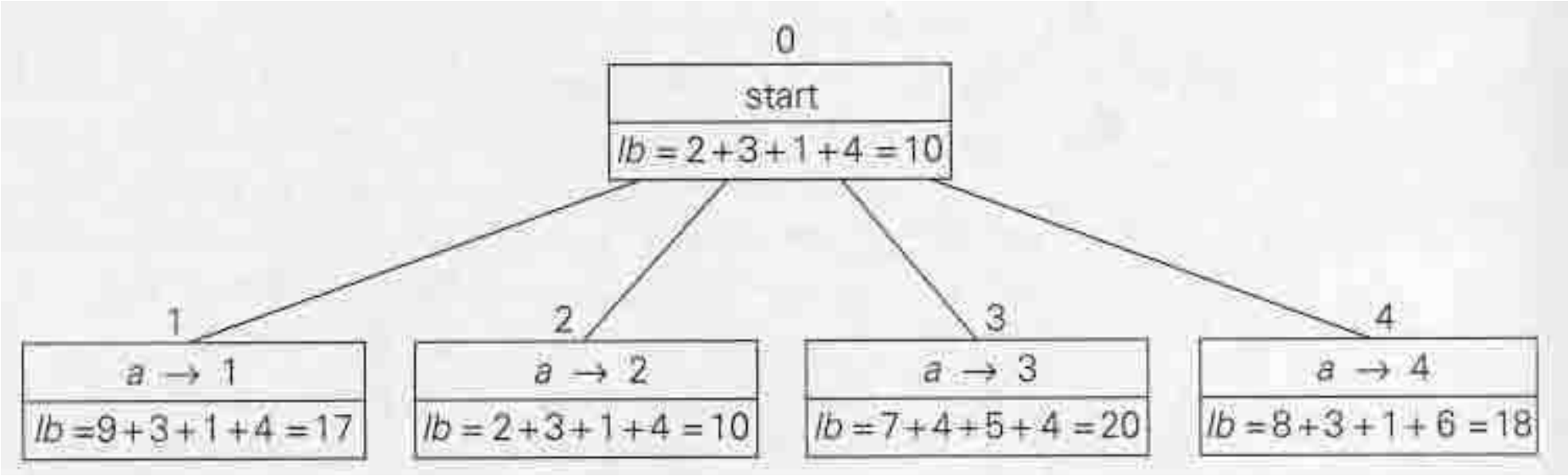
Assignation de tâches (suite)

- C'est un problème de minimisation: la fonction objectif à minimiser est le coût d'une solution (assignation d'une tâche à chaque personne)
  - la valeur de la borne pour chaque solution partielle sera donc une borne inférieure au coût des solutions que nous pouvons obtenir à partir de cette solution partielle
    - En d'autres mots: il est impossible d'obtenir, à partir de ce point, une solution dont le coût est inférieure à la borne

- Comment choisir une borne pour une solution partielle?
- Le coût de chaque solution réalisable doit être supérieur ou égal à la somme des plus petits éléments de chaque rangée
  - Pour notre exemple, cette valeur est = 2 + 3 + 1 + 4 = 10
- Ce sera notre borne initiale: celle de la racine de l'arbre (qui contient aucune assignation de tâches)

Assignation de tâches (suite)

- Lorsque notre solution partielle assigne 1 tâche à une personne (ex: a → 3) la borne sera égale au coût de cette assignation + somme des plus petits éléments de chaque rangée excluant la rangée et la colonne correspondant à cette assignation.
  - Pour a → 3, cela donne 7 + 4 + 5 + 4 = 20
- Les 2 premiers niveaux de l'arbre sont donc comme suit:



Assignation de tâches (suite)

- Pour chaque nœud (solution partielle) du niveau 1, il faudrait, en principe construire une solution partielle avec une assignation de tâche à la personne b
- Au lieu de faire cela systématiquement pour tous les nœuds du niveau 1, nous considérons d'abord **la solution partielle la plus prometteuse** :
  - Pour un problème de minimisation: c'est la solution partielle qui possède la borne la plus petite
  - Pour un problème de maximisation: c'est la solution partielle qui possède la borne la plus grande
- Et nous explorons les autres solutions partielles générées à partir de ce nœud.
- La solution partielle la plus prometteuse de la figure précédente se trouve au nœud 2, car c'est le nœud actif ayant la plus petite borne.
- En générant les solutions partielles à partir de ce nœud, nous obtenons alors l'arbre de solutions partielles illustré à la page suivante.

Assignation de tâches (suite)

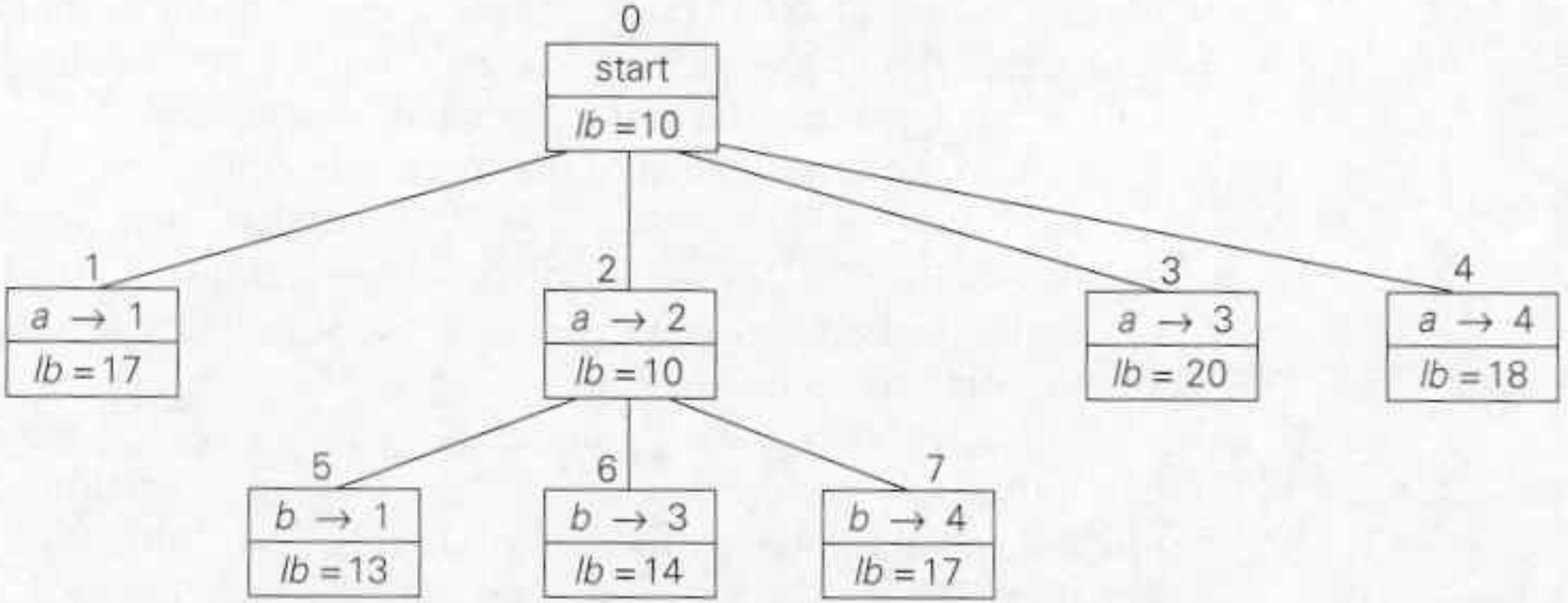


FIGURE 11.6 Levels 0, 1, and 2 of the state-space tree for the instance of the assignment problem being solved with the best-first branch-and-bound algorithm

Assignation de tâches (suite)

- À tout moment nous avons un certain nombre de **solutions partielles actives** (c.-à-d., non-terminées)
- La stratégie d'exploration normalement utilisée est celle qui consiste à générer d'autres nœuds à partir de la solution partielle la plus prometteuse (« best-first branch-and-bound »)
  - Il n'est pas assuré que ce soit la meilleure stratégie, car il est possible que la solution optimale soit obtenue à partir d'une solution partielle ayant une moins bonne borne.
- La solution partielle la plus prometteuse de la figure précédente se trouve au nœud 5 (car c'est le nœud actif ayant la plus petite borne)
- Les solutions partielles générées à partir de ce nœud seront des solutions réalisables, car les 4 personnes seront affectées à des tâches. Nous obtenons alors l'arbre de la figure suivante.

Assignation de tâches (suite)

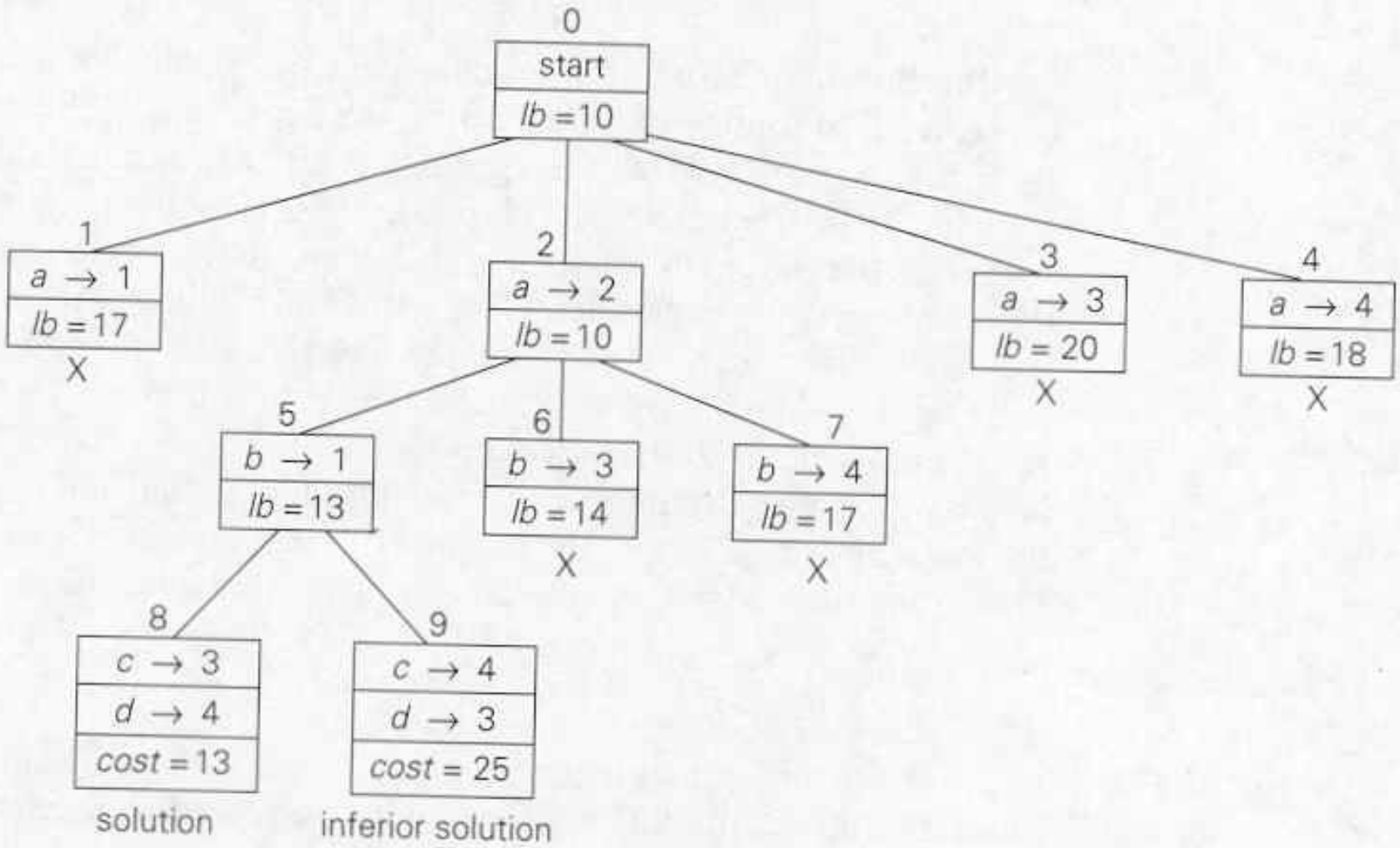


FIGURE 11.7 Complete state-space tree for the instance of the assignment problem solved with the best-first branch-and-bound algorithm

Assignation de tâches (suite)

- Après avoir obtenu une solution réalisable (ici, c'est en fait deux solutions), nous terminons toutes les solutions partielles dont la borne excède le coût de notre meilleure solution (obtenue jusqu'ici).
  - Ceci est indiqué par un « X » à la figure précédente.
- Nous terminons l'algorithme lorsqu'il ne reste aucune solution partielle active.
  - La meilleure solution réalisable obtenue est alors la solution optimale à notre problème.

- Ce problème d'assignation de tâche illustre bien la méthode du « branch-and-bound », mais ce problème est, en fait, résoluble en temps polynomial …
- Cela n'est pas le cas pour le problème suivant: le sac à dos. Celui-là est vraiment NP-difficile.

Le problème du sac à dos

- Il s'agit de trouver le sous-ensemble de n objets de valeur maximale dont le poids total n'excède pas la capacité W du sac à dos.
- Chaque objet i possède un poids w_i et une valeur v_i.
- Il est naturel d'ordonner les objets par ordre décroissant de leur valeur par unité de poids. Nous avons alors:

$$v_1/w_1 \geq v_2/w_2 \geq \ldots \geq v_n/w_n$$

- Après ce ré-ordonnement, l'objet 1 est celui nous donnant le plus de valeur par unité de poids et l'objet n est celui nous donnant le moins de valeur par unité de poids.
- L'arbre des solutions partielles sera l'arbre binaire suivant:
  - Le niveau 0, constituée de la racine, est une solution où aucun objet est choisi (l'ensemble vide)
  - Le niveau 1 possède 2 nœuds: le nœud gauche identifie une solution partielle qui inclut l'objet 1 et le nœud droit identifie une solution partielle qui n'inclut pas l'objet 1

Le problème du sac à dos (suite)

- Chaque nœud gauche du niveau i indique que l'objet i est inclus dans la solution partielle et chaque nœud droit indique que l'objet i est exclus de la solution partielle.

- Ainsi, chaque chemin allant de la racine à un nœud du niveau i représente un sous-ensemble des i premiers objets
- Chaque nœud représente alors un chemin et donc un sous-ensemble d'objets
- Pour chaque nœud nous maintiendrons:
  - Le poids total du sous-ensemble (représenté par ce nœud)
  - La valeur totale du sous-ensemble (représenté par ce nœud)
  - La borne sur la valeur totale qu'il est possible d'avoir à partir de ce sous-ensemble des i premiers objets et, possiblement, en incluant d'autres objets parmi {i+1, … n}
    - Puisque c'est un problème de maximisation, chaque borne sera une borne supérieure sur la valeur qu'il est possible d'obtenir à partir de ce nœud
    - Il sera impossible, à partir de ce nœud, d'obtenir une valeur supérieure à celle indiquée par la borne.

Le problème du sac à dos (suite)

- Pour le calcul des bornes, nous procédons comme suit:
  - Soit w le poids total des objets présentement sélectionnés (i.e appartenant à l'ensemble des objets représenté par le nœud)
  - Soit v la valeur totale des objets présentement sélectionnés
  - Soit un nœud situé au niveau i.
  - Puisque les objets sont énumérés par ordre décroissant de leur valeur par unité de poids, v_{i+1}/w_{i+1} est alors la valeur maximale par unité de poids que nous pouvons ajouter à la solution représentée par un nœud au niveau i.
  - Puisque la capacité résiduelle du sac à dos est = W – w, la valeur maximale que nous pouvons ajouter à la solution représentée par un nœud au niveau i ne peut pas dépasser (W – w) v_{i+1}/w_{i+1}
  - Ainsi, la valeur d'une solution émergeant d'un nœud au niveau i ne peut pas excéder la **borne = $v + (W - w)\, v_{i+1}/w_{i+1}$**.
  - C'est ce que nous choisissons pour chaque borne.

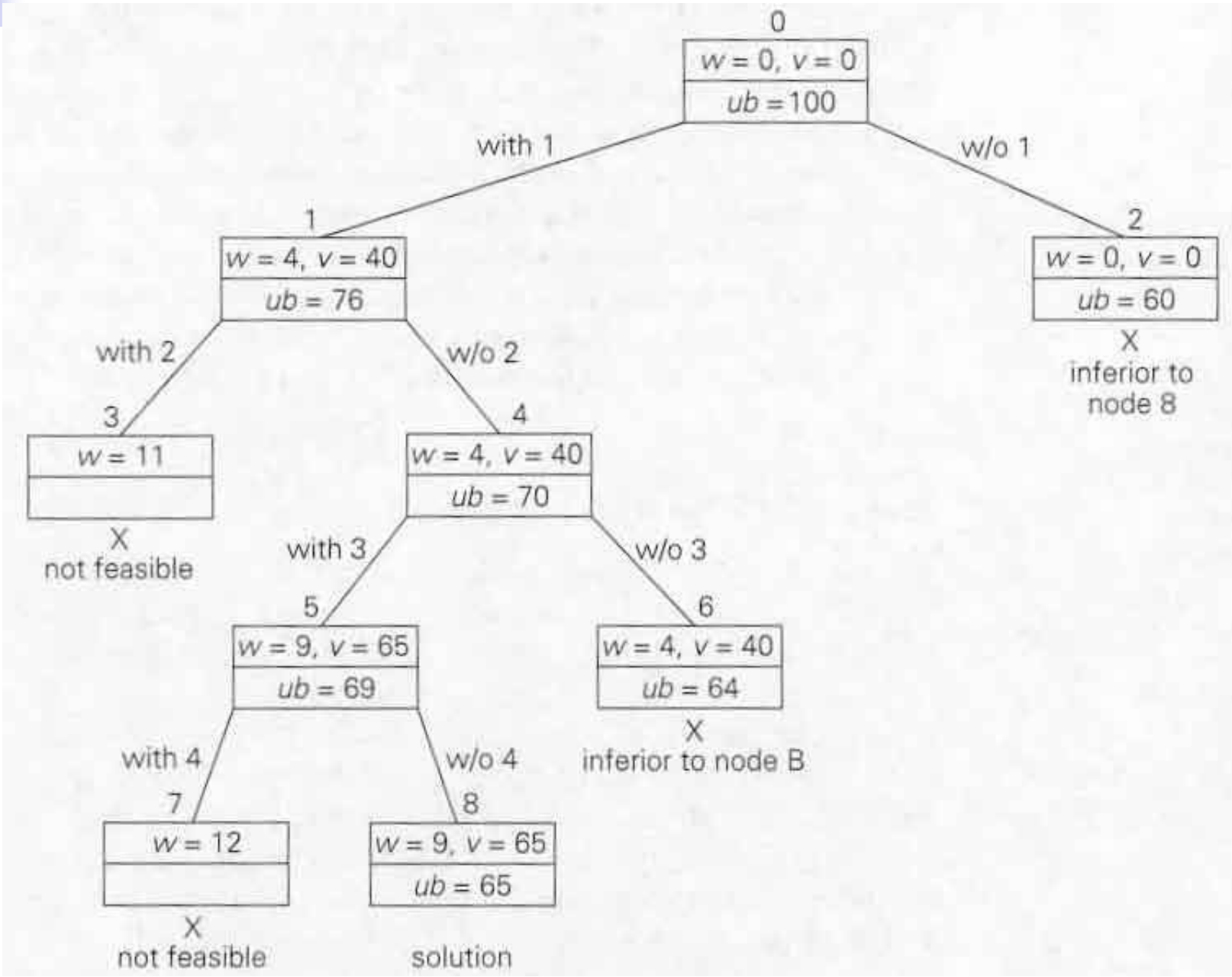
Exemple

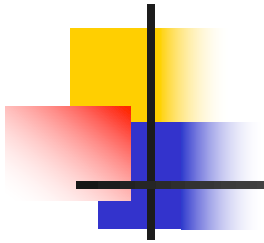
- Dans l'exemple suivant, nous avons ordonné les objets par ordre décroissant de valeur par unité de poids.
- La borne de la racine est donnée par W v_1/w_1 = 100.
- L'arbre des solutions partielles générées par la méthode « branch-and-bound » est illustré à la figure de la page suivante.

item	weight	value	$\frac{\text{value}}{\text{weight}}$
1	4	\$40	10
2	7	\$42	6
3	5	\$25	5
4	3	\$12	4

The knapsack's capacity W is 10.

Exemple : arbre des solutions

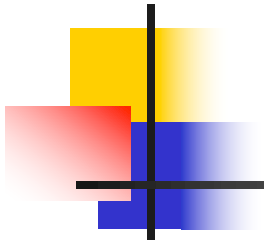




Remarques

- Notez que pour le problème du sac à dos, chaque nœud (solution partielle) représente une solution réalisable (admissible)
- Pour chaque nœud, nous pouvons alors mettre à jour notre meilleure solution obtenue jusqu'à maintenant et, ainsi, terminer les nœuds actifs ayant une borne ≤ à la valeur de la meilleure solution obtenue jusqu'à maintenant.

- L'efficacité de la méthode « branch-and-bound » dépend grandement des bornes que nous utilisons.
  - Plus les bornes sont serrées, plus grand sera le nombre de branches que nous pourrons terminer et plus l'espace de recherche sera diminué.
  - Cependant, cela ne sera pas rentable si le calcul des bornes prend un temps prohibitif.
- En pratique, il faut choisir le bon compromis entre la qualité des bornes et le temps requis pour les obtenir.



Algorithmes d'approximations

- Un problème d'optimisation consiste à trouver la solution s* qui optimise une fonction objectif f(s)
  - (Pour chaque solution réalisable s, nous avons une valeur f(s) de la fonction objectif)

- Lorsque le problème d'optimisation est NP-difficile, il n'existe pas d'algorithme qui puisse trouver, en pire cas, la solution optimale s* en un temps polynomial (si P $\neq$ NP).
- Tentons alors de trouver une solution approximative s_a en temps polynomial (en pire cas) à l'aide d'un algorithme d'approximation.
- De plus, nous désirons obtenir une garantie de la qualité de la solution approximative s_a.
  - Plus précisément, nous désirons que $f(s_a)$ ne soit pas trop différent de f(s*).

Le ratio d'approximation d'un algorithme

- La solution approximative s_a est obtenue en exécutant un algorithme d'approximation A sur une instance x se taille |x|. Alors $s_a = A(x)$.
- La solution approximative est donc fonction de x. Alors $s_a = s_a(x)$.
- La solution optimale s* dépend également de x. Alors $s^* = s^*(x)$.

- Le **ratio d'approximation R(x) de l'algorithme A sur l'instance x** est défini par:

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(s^*(x))}{f(s_a(x))} & \text{pour problèmes de maximisation} \\ \dfrac{f(s_a(x))}{f(s^*(x))} & \text{pour problèmes de minimisation} \end{cases}$$

- Ainsi, avec cette définition, nous avons toujours que $R(x) \geq 1$.
- Nous avons $R(x) = 1$ si et seulement si $f(s_a(x)) = f(s^*(x))$.

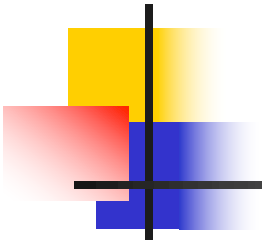
Ratio d'approximation en pire cas

- Définissons alors le **ratio d'approximation en pire cas $R_w(n)$ de l'algorithme A** par:

$$R_w(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x:|x|=n} R(x)$$

- **Un algorithme A possède un ratio d'approximation en pire cas borné par une constance c si et seulement si $R_w(n) \leq c \ \ \forall$ n (où c est une constante indépendante de n).**

- Examinons maintenant un algorithme d'approximation pour un problème NP-difficile très connu: le commis voyageur.
  - Rappel: soit un graphe complètement connecté de n nœuds, trouvez le plus court cycle hamiltonien.



L'algorithme « twice-around-the-tree »

- L'algorithme « twice-around-the-tree » exploite la relation qui existe entre un cycle hamiltonien et un arbre de recouvrement minimal.
- Voici cet algorithme:
  - Étape 1: construire l'arbre de recouvrement minimal (à l'aide de l'algorithme de Prim ou celui de Kruskal).
  - Étape 2: choisir un nœud de départ (peu importe lequel) et parcourir le pourtour de l'arbre en mémorisant la séquence de nœuds visités durant ce trajet.
  - Étape 3: parcourir la séquence de nœuds obtenu à l'étape 2 et éliminez, de cette séquence, chaque répétition de nœud (à l'exception du dernier nœud de la séquence).
    - Cette étape produira forcément un cycle hamiltonien
    - Cette étape produit (possiblement) des raccourcis dans la séquence comme le montre l'exemple de la page suivante
- Cet algorithme s'exécute en un temps polynomial.

Exemple

- Pour le graphe suivant, l'étape 2 donne la séquence a,b,c,b,d,e,d,b,a.
- L'étape 3 nous donne le cycle hamiltonien: a,b,c,d,e,a.
  - Remarque: la séquence a,b,c,d,e est obtenue par un parcours en pré-ordre de l'arbre de recouvrement minimal.

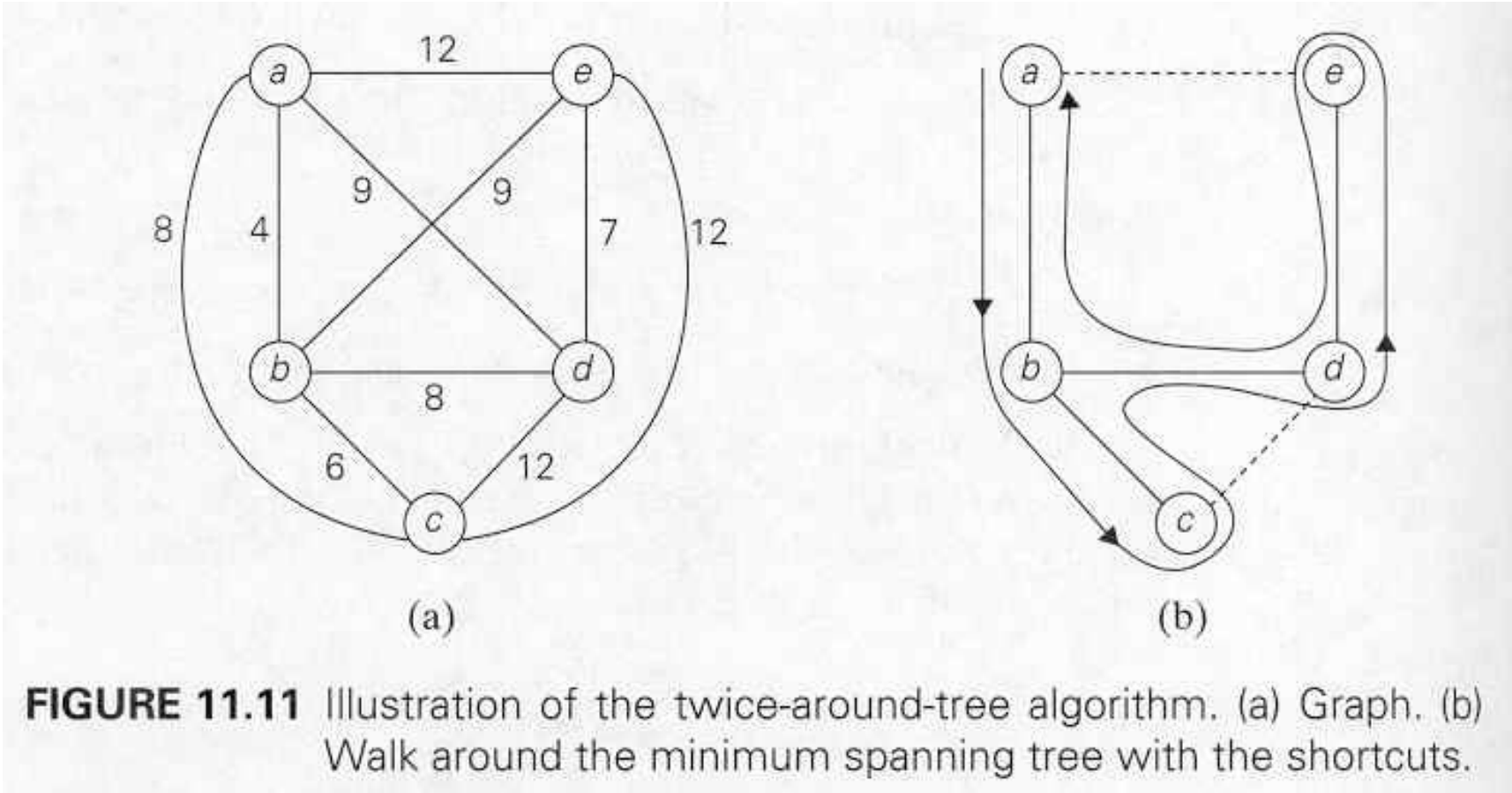


FIGURE 11.11 Illustration of the twice-around-tree algorithm. (a) Graph. (b) Walk around the minimum spanning tree with the shortcuts.

Analyse de la performance de cet algorithme

- La longueur du trajet obtenu à l'étape 2 est égale à deux fois la longueur de l'arbre de recouvrement minimal.
  - (La longueur d'un arbre est la somme des distances de ses arêtes)
- Soit T un arbre de recouvrement minimal et f(T) la longueur d'un arbre de recouvrement minimal
- La longueur du trajet à l'étape 2 est égale 2f(T).
- Considérons la solution optimale s* de ce problème .i.e., le cycle hamiltonien de longueur minimale = f(s*)
- Puisque s* est un cycle hamiltonien, nous obtiendrons un arbre T' de recouvrement si nous enlevons une arête de s*.
  - La longueur f(T') doit être supérieure ou égale à celle d'un arbre de recouvrement minimale. Alors $f(s^*) \geq f(T') \geq f(T)$.
- La longueur du trajet à l'étape 2 est alors $\leq 2 f(s^*)$.
- La longueur du trajet à l'étape 3 est ≤ à celui de l'étape 2 si et seulement si les nœuds que l'on enlève produisent des raccourcis.

Analyse de la performance de cet algorithme (suite)

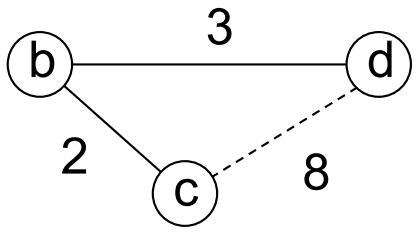
- L'enlèvement d'un nœud dans une séquence produit un raccourci lorsque les distances des arêtes du graphe G satisfont l'inégalité du triangle:

$$d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j) \quad \forall\ i,j,k \in G$$

- Un graphe G complètement connecté est dit **Euclidien** lorsque toutes les distances des arêtes satisfont l'inégalité du triangle.

- Ainsi, pour toute instance x qui est un graphe Euclidien, la longueur $f(s_a(x))$ du cycle hamiltonien $s_a(x)$ produit par l'algorithme « twice-around-the-tree » satisfait **$f(s_a(x)) \leq 2\ f(s^*(x))$.**
- Alors $R(x) = f(s_a(x))/f(s^*(x)) \leq 2\ \forall\ x$. **Alors $R_w(n) \leq 2$.**
- **Alors, l'algorithme « twice-around-the-tree » possède un ratio d'approximation en pire cas borné par 2 pour les graphes Euclidiens.**

Analyse de la performance de cet algorithme (suite)



$8 \geq 2 + 3$

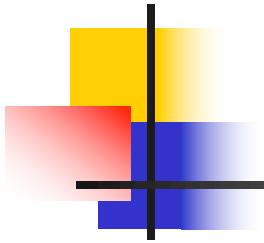
- Cependant, si les distances ne satisfont pas à l'inégalité du triangle il est possible que l'enlèvement d'un nœud du parcourt de l'étape 2 ne produise pas un raccourci mais, au contraire, rallonge le parcourt!
- Dans ce cas, nous ne pouvons pas garantir que la longueur du cycle hamiltonien $f(s_a(x))$, obtenue à l'étape 3, sera inférieur ou égal à $2f(T)$.
- Pour les graphes non Euclidien, nous ne pouvons donc pas conclure que $f(s_a(x)) \leq 2\, f(s^*(x))$. En fait, il est impossible de borner la longueur du parcourt obtenu à l'étape 3 pour les graphes non Euclidiens.
- **Pour les graphes non Euclidien, l'algorithme « twice-around-the-tree » ne possède pas un ratio d'approximation en pire cas qui soit borné par une constante.**

Non existence d'un algorithme d'approximation

- En fait, pour les graphes en général (possiblement non Euclidiens), nous avons le théorème suivant.
- **Théorème:** si P ≠ NP, alors il n'existe pas d'algorithme, à temps polynomial, avec un ratio d'approximation en pire cas borné par une constante pour le problème du commis voyageur.
- **Preuve (par contradiction):**
  - Supposons qu'il existe un algorithme A, à temps polynomial, tel que $f(s_a(x)) \leq c\, f(s^*(x))\ \forall\ x$. Nous allons démontrer que A pourrait être utilisé pour résoudre le problème NP-complet du cycle hamiltonien en temps polynomial.
  - Soit G une instance du problème cycle hamiltonien.
  - Transformons G en un graphe complet G', instance du problème commis voyageur, de la manière suivante:
    - Assignons une distance 1 à chaque arête de G.
    - Ajoutons une arête, de distance cn +1, à chaque paire de nœuds non connectés dans G. (n = nombre de nœuds).

Non existence d'un algorithme d'approximation (suite)

- … preuve (suite) …
  - Si G est un graphe hamiltonien, alors G' possède un cycle hamiltonien de longueur n et, dans ce cas, l'algorithme A trouvera un circuit de longueur ≤ cn
  - Si G n'est pas un graphe hamiltonien, le plus petit circuit de G' aura une longueur ≥ cn + 1 > cn. Car ce circuit doit contenir au moins une arête de longueur cn + 1.
    - Dans ce cas, l'algorithme A trouvera forcément un circuit de longueur ≥ cn + 1.
  - Donc G est un graphe hamiltonien si et seulement si A trouve un circuit dans G' de longueur ≤ cn.
  - L'algorithme A nous informe donc, en temps polynomial, si oui ou non G possède un cycle hamiltonien.
  - Ceci contredit notre hypothèse de départ que P ≠ NP. **CQFD**.

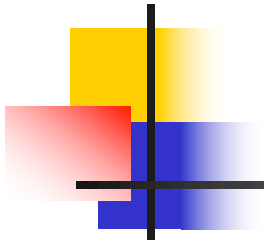


Conclusion

- Il arrive souvent qu'un problème d'optimisation NP-difficile est tel qu'il n'existe pas (sous l'hypothèse P $\neq$ NP) d'algorithme à temps polynomial qui possède un ratio d'approximation borné par une constante comme c'est le cas pour commis voyageur.

- Nous pouvons, par contre, souvent rendre le problème un peu moins général pour qu'il puisse exister un algorithme à temps polynomial qui possède un ratio d'approximation borné par une constante.
  - C'est ce qui s'est passé en imposant au graphe d'être Euclidien

- Cette restriction peut nous satisfaire en pratique.



Conclusion (suite)

- Si nous ne sommes pas satisfaits de la borne sur l'approximation, nous pouvons utiliser la valeur $f(s_a)$ de la solution approximative $s_a = A(x)$ comme entrée à un algorithme « branch-and-bound » pour tenter de trouver la solution optimal s^*.
  - En effet, si $f(s_a)$ est près de $f(s^*)$, beaucoup de solutions partielles seront terminées (celles dont la borne implique que nous ne pouvons pas faire mieux que $f(s_a)$ à partir de ce nœud).

- Une telle combinaison d'utilisation d'un algorithme d'approximation suivi d'un algorithme « branch-and-bound » est une stratégie qui, en pratique, semble justifiée lorsque nous désirons trouver une solution optimale.