Petit guide d'auto-correction de la résolution d'une récurrence

Claude-Guy Quimper

Voici comment vous pouvez vous assurer que vous avez correctement résolu une relation de récurrence. Nous ferons l'exercise avec la récurrence obtenue lors de l'étude du problème des tours de Hanoï.

$$C(n) = \begin{cases} 2C(n-1)+1 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

D'abord, calculez quelques valeurs de votre fonction. Il suffit de calculer quelques points en réutilisant les valeurs précédemment calculées.

$$C(2) = 2 \times C(1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \tag{2}$$
$$C(3) = 2 \times C(2) + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \tag{3}$$
$$C(4) = 2 \times C(3) + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \tag{4}$$

Nous avions trouvé $C(n) = 2^n - 1$. Pour vérifier si c'est exact, il suffit de vérifier si cette formule condorde avec les points calculés.

$$C(1) = 2^1 - 1 = 1 \tag{5}$$
$$C(2) = 2^2 - 1 = 3 \tag{6}$$
$$C(3) = 2^3 - 1 = 7 \tag{7}$$
$$C(4) = 2^4 - 1 = 15 \tag{8}$$

Oui, nous obtenons bien les mêmes valeurs ! Ceci ne constitue pas une preuve irréfutable que $C(n) = 2^n - 1$, mais si nous n'avions pas obtenu les bonnes valeurs, nous saurions qu'il y a une erreur.

Vous n'avez pas besoin d'attendre votre réponse finale $2^n - 1$ pour vous vérifier. Vous pouvez aussi vous vérifier en cours de route. Avant de trouver $C(n) = 2^n - 1$, nous avions la sommation

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \tag{9}$$

Nous pouvons vérifier un point de la façon suivante.

$$C(3) = \sum_{i=0}^{3-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7 \tag{10}$$

Encore une fois, nous obtenons la bonne valeur. En vérifiant votre solution à différentes étapes de votre démarche, vous pourrez voir où une erreur a pu se glisser.

Finalement, si votre récurrence a la bonne forme, vous pouvez utiliser le théorème général pour calculer l'ordre de croissance de la fonction. Elle doit correspondre à celle que vous obtenez après avoir appliqué la substitution à rebours.