SÉRIE 2 (Chapitre 2a)

Question # 1
Utilisez la notation la plus appropriée parmi O, Ω et Θ pour indiquer la classe d'efficacité (par rapport au temps) de la recherche séquentielle ci-dessous dans les différents cas.

Algorithme 1 : RechercheSequentielle($A[0..n-1], d$)

pour $i = 0..n-1$ **faire**
  si $A[i] = d$ **alors**
    retourner i
retourner -1

A) *Pire cas*

B) *Meilleur cas*

C) *Cas moyen*

Question # 2
En vous appuyant uniquement sur notre analyse de l'algorithme d'Euclide effectuée au chap 1, exprimez l'efficacité de l'algorithme d'Euclide en pire cas à l'aide de la notation asymptotique.

Question # 3
Démontrez la règle du maximum pour Ω.

Question # 4
Démontrez la règle du maximum pour Θ.

Question # 5
Démontrez que $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \Theta(f(n)) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow O(f(n)) = O(g(n))$

Question # 6
Démontrez que :

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Theta(g(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n)) \\ &\Leftrightarrow \quad f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n)) \\ &\Leftrightarrow \quad O(f(n)) \subset O(g(n)) \end{aligned}$$

Question # 7
Soit deux fonctions positives asymtotiquement $f(n)$ et $g(n)$. Les relations $=$, $\neq$, $\subset$ et $\not\subset$ sont quatre relations intéressantes pour comparer les ensembles $O(f(n))$ et $O(g(n))$.

A) *Pourquoi n'est-il pas intéressant d'utiliser seulement $=$ ou bien $\subset$ pour comparer les ensembles $\Theta(f(n))$ et $\Theta(g(n))$?*

B) *Que devrait-on utiliser pour comparer $\Theta(f(n))$ et $\Theta(g(n))$?*

***Question # 8**
Pour chacune des fonctions suivantes, indiquez la classe $\Theta(g(n))$ à laquelle la fonction appartient (Utilisez la forme la plus simple possible pour $g(n)$). Démontrez vos affirmations.

A) $(n^2 + 1)^{10}$

B) $\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$

C) $2n \lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg(\frac{n}{2})$

D) $2^{n+1} + 3^{n-1}$

E) $\lfloor \lg n \rfloor$

***Question # 9**
Placez les fonctions suivantes en ordre croissant de leur ordre de croissance.

$$(n-2)!, 5\lg(n+100)^{10}, 2^{2n}, 0.001n^4 + 3n3 + 1, (\ln n)^2, \sqrt[3]{n}, 3^n$$

Question # 10
Les valeurs contenus dans le tableau 2.1 (voir A. Levitin) suggère que les fonctions suivantes sont placées en ordre croissant de leur ordre de croissance :

$$\lg n, n, n\lg n, n^2, n^3, 2^n, n!$$

A) *Est-ce que les valeurs du tableau forme une preuve que les fonctions sont placées en ordre croissant de leur ordre de croissance ?*

B) *Démontrez que les fonctions ci-haut sont listées en ordre croissant de leur ordre de croissance.*

Question # 11
Démontrez que tout polynôme $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0$ tel que $a_k > 0$ appartient à $\Theta(n^k)$.

Question # 12
Démontrez que deux fonctions exponentielle a^n et b^n ayant des bases différentes ($a \neq b$) ont des ordre de croissance différente.

Question # 13
Démontrez que, pour tout $a \geq 2$ et $b \geq 2$, on a : $\log_b(n) \in \Theta(\log_a(n))$ (et alors $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$).

Question # 14

1. *Elvis, Jimmy et Janis analysent un même algorithme $\mathbf{A}$ et obtiennent les résultats $T_E(n), T_i(n)$ et $T_a(n)$ respectivement. Elvis obtient $T_E(n) \in O(n^2)$ en pire cas. Jimmy obtient $T_i(n) \in \Omega(n^2)$ en meilleur cas. Janis affirme que $T_a(n) \in \theta(n^2)$ pour tous les cas. Si Elvis et Jimmy ont raison, le résultat de Janis est-il correct ? Justifiez.*

2. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *des algorithmes prenant des temps, en meilleur cas, dans* $\Omega(n^2)$ *et* $\Omega(n \log n)$ *respectivement. Est-il possible qu'une implantation de l'algorithme* $\mathbf{A}$ *soit plus efficace qu'une implantation de l'algorithme* $\mathbf{B}$ *sur tous les exemplaires ? Justifiez.*
3. *Alice et Bob analysent un même algorithme* $\mathbf{A}$ *et obtiennent les résultats* $T_A(n)$ *et* $T_B(n)$ *respectivement. Alice obtient que* $T_A(n) \in \theta(n^3)$ *en pire cas. Bob obtient que* $T_B(n) \in \Omega(n^2 \log n^2)$ *pour tous les cas. Le résultat d'Alice implique-t-il celui de Bob ? Justifiez.*
4. *Énoncez* le principe d'invariance *en algorithmique.*

***Question # 15**

Soient A, B, C, D *et* E *cinq algorithmes qui résolvent le même problème* P *et pour lesquels nous avons obtenu les résultats d'analyse suivants respectivement :*

1. $T_A(n) \in O(n^2)$ *en pire cas ;*
2. $T_B(n) \in \Omega(n^2)$ *dans tous les cas ;*
3. $T_C(n) \in \Theta(n)$ *en meilleur cas ;*
4. $T_D(n) \in \Theta(n^2 \lg n)$ *dans tous les cas ;*
5. $T_E(n) \in \Theta(n^2)$ *en pire cas.*

a) *Vous êtes à concevoir un algorithme* Z *qui résout un problème* P' *ayant des instances de taille* n. *Votre algorithme* Z *ne doit jamais prendre plus de* $n^4 \lg n$ *unités de temps (à une constante près et pour des entrées de taille assez grande). Dans* Z, *il y a* $n^2 \lg n$ *appels à Résoudre le problème P (tous sur des instances de taille* n*). Donnez, parmi les cinq algorithmes ci-haut, tous ceux qui peuvent être utilisés dans votre algorithme* Z, *sans dépasser la limite de temps.*

b) *Vous êtes à élaborer un système qui doit fonctionner en temps réel (le facteur temps est primordial). Pour ce faire, vous devez choisir un (et un seul) algorithme parmi les 5 ci-haut. Quel est, selon vous, le choix le plus prometteur ? Justifiez.*

c) *Pour chacun des 5 algorithmes ci-haut, dites, avec justifications, si on est assuré que son temps d'exécution* ***en pire cas*** *appartient à l'ensemble suivant :*

$$S = (O(n^3) \cap \Omega(n^2)) \cup \Theta(n).$$

d) *En supposant que les analyses 2 et 3 soient exactes, est-il possible que les algorithmes* B *et* C *soient en fait un seul et même algorithme ? Justifiez.*

***Question # 16**

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifiez en mots (ou en montrant les étapes de votre démarche si nécessaire).

A) $376n + 98 \in O(n)$

B) $2n^2 + n \in \Omega(n)$

C) $\ln(n^n) + \log_2 n \in \Theta(\ln n)$