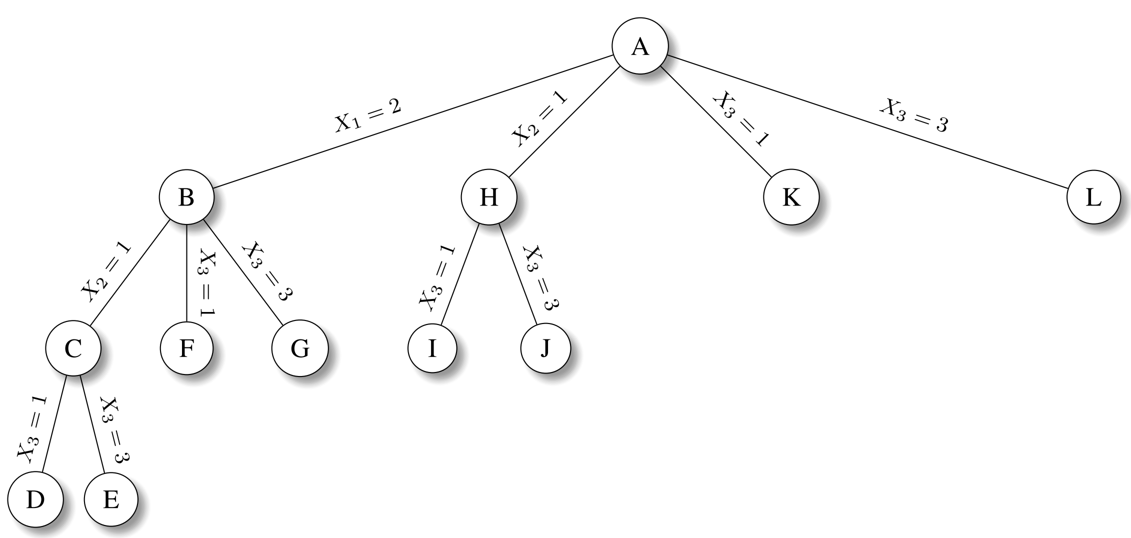
Solutions des exercices du chapitre 2

Question # 1
Considérez le problème avec les trois variables X_1, X_2 et X_3 et les domaines $\mathrm{dom}(X_1) = \{1, 2\}$, $\mathrm{dom}(X_2) = \{1, 2\}$, $\mathrm{dom}(X_3) = \{1, 2, 3\}$. *L'algorithme de fouille en profondeur (voir l'algorithme 1* FOUILLEENPROFONDEURCOMPLÈTE *dans les diapositives du Chapitre 2) demande de choisir une variable et choisir une valeur pour effectuer un branchement dans l'arbre de recherche. Plutôt que de choisir une variable et une valeur de façon arbitraire, utilisez l'algorithme 1* HEURISTIQUEMYSTÈRE *ci-dessous pour effectuer ce choix. Vous devez explorer au complet l'arbre de recherche. Dessinez l'arbre de recherche qui énumère toutes les affectations possibles. Votre arbre doit être tracé de sorte que l'enfant de gauche est visité avant l'enfant de droite. Chaque noeud doit correspondre à un appel à la fonction* FOUILLEENPROFONDEUR. *Indiquez pour chaque noeud la solution partielle, c'est-à-dire l'ensemble des variable ne possédant qu'une seule valeur dans leur domaine.*

Algorithm 1: HEURISTIQUEMYSTÈRE($\mathrm{dom}(X_1), \mathrm{dom}(X_2), \mathrm{dom}(X_3)$)

```
// Cet algorithme prend en entrée les domaines des variables et retourne une paire (variable, valeur)
qui sera instanciée;
T ← [(X1, 2), (X2, 1), (X3, 1), (X2, 2), (X3, 3), (X1, 1), (X3, 2)];
pour i = 1..|T| faire
    (Xk, v) ← T[i];
    si |dom(Xk)| > 1 ∧ v ∈ dom(Xk) alors
        retourner (Xk, v);
```

Solution : Le tableau 1 présente une trace de l'algorithme. Puisque chaque noeud de l'arbre correspond à un appel de fonction, il n'y aura donc pas une solution candidate par feuille mais bien une solution candidate par noeud. En effet, chaque appel de fonction finit par explorer une solution candidate. Dans le tableau 1, les noeuds sont identifiés par un astérisque lorsqu'une solution candidate est visitée.



Noeud	**Branchement**	$\mathrm{dom}(X_1)$	$\mathrm{dom}(X_2)$	$\mathrm{dom}(X_3)$
A		$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$
B	$X_1 = 2$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$
C	$X_2 = 1$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$
D*	$X_3 = 1$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
C	retour arrière	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$
E*	$X_3 = 3$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$
C*	retour arrière	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
B	retour arrière	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2,3\}$
F*	$X_3 = 1$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
B	retour arrière	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
G*	$X_3 = 3$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
B*	retour arrière	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
A	retour arrière	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$
H	$X_2 = 1$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$
I*	$X_3 = 1$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
H	retour arrière	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$
J*	$X_3 = 3$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{3\}$
H*	retour arrière	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
A	retour arrière	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2,3\}$
K*	$X_3 = 1$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
A	retour arrière	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
L*	$X_3 = 3$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
A*	retour arrière	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$

TABLE 1 – Trace de l'algorithme de fouille avec retours arrières.

Question # 2

Appliquez la vérification anticipée sur le problème suivant. Indiquez dans quel ordre les valeurs sont retirées des domaines.

$$\begin{aligned} BC - 8B - C + 8 &= 0 \\ B + D &\leq 1 \\ A + B &\leq 1 \\ A + C + D &\geq 10 \\ \mathrm{dom}(A) &= \{1\} \\ \mathrm{dom}(B) &= \{0, 1\} \\ \mathrm{dom}(C) &= \{0, 2, 8, 9\} \\ \mathrm{dom}(D) &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Solution :

Contrainte traitée	**Nouveau domaine**
$A + B \leq 1$	$\mathrm{dom}(B) = \{0\}$
$B + D \leq 1$	$\mathrm{dom}(D) = \{0, 1\}$
$BC - 8B - C + 8 = 0$	$\mathrm{dom}(C) = \{8\}$
$A + C + D \geq 10$	$\mathrm{dom}(D) = \{1\}$

Question # 3

Appliquez la cohérence de bornes sur le domaine des variables suivants.

A)

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 4$$

$$\mathrm{dom}(X_1) = [1, 3] \qquad \mathrm{dom}(X_2) = [2, 3] \qquad \mathrm{dom}(X_3) = [1, 5]$$

Solution : *Dans cet exemple, il n'y a qu'une seule solution.*

$$\mathrm{dom}(X_1) = [1, 1] \qquad \mathrm{dom}(X_2) = [2, 2] \qquad \mathrm{dom}(X_3) = [1, 1]$$

B)

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$\mathrm{dom}(X_1) = [1, 3] \qquad \mathrm{dom}(X_2) = [2, 3] \qquad \mathrm{dom}(X_3) = [1, 5]$$

Solution :

$$\mathrm{dom}(X_1) = [1, 2] \qquad \mathrm{dom}(X_2) = [2, 3] \qquad \mathrm{dom}(X_3) = [1, 2]$$

Question # 4
Appliquez la cohérence de bornes et la cohérence de domaine sur la contrainte suivante.

$$\begin{aligned}(A, B, C) &\in \{(1,2,3), (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)\}\\ \mathrm{dom}(A) &= \{1,3\}\\ \mathrm{dom}(B) &= \{1,3\}\\ \mathrm{dom}(C) &= \{1,2,3\}\end{aligned}$$

Cohérence de domaine :

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(A) &= \{1\}\\ \mathrm{dom}(B) &= \{3\}\\ \mathrm{dom}(C) &= \{2\}\end{aligned}$$

Cohérence de bornes : Le problème est déjà cohérent de bornes.

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(A) &= \{1,3\}\\ \mathrm{dom}(B) &= \{1,3\}\\ \mathrm{dom}(C) &= \{1,2,3\}\end{aligned}$$

En effet, nous avons les supports suivants :

1. $A = 1$ a le support d'intervalle (1, 2, 3) ;
2. $A = 3$ a le support d'intervalle (3, 2, 1) ;
3. $B = 1$ a le support d'intervalle (2, 1, 3) ;
4. $B = 3$ a le support d'intervalle (1, 3, 2) ;
5. $C = 1$ a le support d'intervalle (3, 2, 1) ;
6. $C = 3$ a le support d'intervalle (1, 2, 3).

Question # 5

Appliquez la cohérence de bornes, la cohérence d'intervalle et la cohérence de domaine sur la contrainte suivante.

AllDifferent(A, B, C, D, E)

$$\begin{array}{ll} \text{dom}(A) = \{3, 5\} & \text{dom}(B) = \{3, 5\} \\ \text{dom}(C) = \{3, 5\} & \text{dom}(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \text{dom}(E) = \{2, 3, 4\} & \end{array}$$

Cohérence de bornes

$$\begin{array}{ll} \text{dom}(A) = \{3, 5\} & \text{dom}(B) = \{3, 5\} \\ \text{dom}(C) = \{3, 5\} & \text{dom}(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \text{dom}(E) = \{2\} & \end{array}$$

Cohérence d'intervalle

$$\begin{array}{ll} \text{dom}(A) = \{3, 5\} & \text{dom}(B) = \{3, 5\} \\ \text{dom}(C) = \{3, 5\} & \text{dom}(D) = \{1, 6\} \\ \text{dom}(E) = \{2\} & \end{array}$$

Cohérence de domaine Il n'y aucun support de domaine à cette contrainte.

$$\begin{array}{ll} \text{dom}(A) = \{\} & \text{dom}(B) = \{\} \\ \text{dom}(C) = \{\} & \text{dom}(D) = \{\} \\ \text{dom}(E) = \{\} & \end{array}$$

Question # 6

Appliquez la propagation de contraintes au problème suivant. Supposez que la variable E vient d'être instanciée. Donnez votre réponse sous la forme d'un tableau avec une colonne indiquant la contrainte qui est filtrée, une colonne par domaine et une colonne indiquant quelles contraintes restent à filtrer.

$$A < B \qquad B < C$$
$$C = DE \qquad D \leq A$$
$$\mathrm{dom}(A) = [0, 7] \qquad \mathrm{dom}(B) = [1, 8]$$
$$\mathrm{dom}(C) = [2, 9] \qquad \mathrm{dom}(D) = [0, 7]$$
$$\mathrm{dom}(E) = [2, 2]$$

Contrainte filtrée	$\mathrm{dom}(A)$	$\mathrm{dom}(B)$	$\mathrm{dom}(C)$	$\mathrm{dom}(D)$	S
	[0, 7]	[1, 8]	[2, 9]	[0, 7]	$\{C = DE\}$
$C = DE$	[0, 7]	[1, 8]	[2, 8]	[1, 4]	$\{B < C, D \leq A\}$
$B < C$	[0, 7]	[1, 7]	[2, 8]	[1, 4]	$\{D \leq A, A < B\}$
$D \leq A$	[1, 7]	[1, 7]	[2, 8]	[1, 4]	$\{A < B\}$
$A < B$	[1, 6]	[2, 7]	[2, 8]	[1, 4]	$\{D \leq A, B < C\}$
$D \leq A$	[1, 6]	[2, 7]	[2, 8]	[1, 4]	$\{B < C\}$
$B < C$	[1, 6]	[2, 7]	[3, 8]	[1, 4]	$\{C = DE\}$
$C = DE$	[1, 6]	[2, 7]	[4, 8]	[2, 4]	$\{B < C, D \leq A\}$
$B < C$	[1, 6]	[2, 7]	[4, 8]	[2, 4]	$\{D \leq A\}$
$D \leq A$	[2, 6]	[2, 7]	[4, 8]	[2, 4]	$\{A < B\}$
$A < B$	[2, 6]	[3, 7]	[4, 8]	[2, 4]	$\{B < C\}$
$B < C$	[2, 6]	[3, 7]	[4, 8]	[2, 4]	$\{\}$

Question # 7
Donnez l'état des domaines des variables après avoir appliqué la cohérence de singleton sur le problème suivant.

$$A \neq B \qquad A \neq C \qquad A \neq D$$
$$B \neq C \qquad B \neq D \qquad C \neq D$$
$$\mathrm{dom}(A) = \{1, 3\} \qquad \mathrm{dom}(B) = \{2, 3\} \qquad \mathrm{dom}(C) = \{2, 3\}$$
$$\mathrm{dom}(D) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Solution :

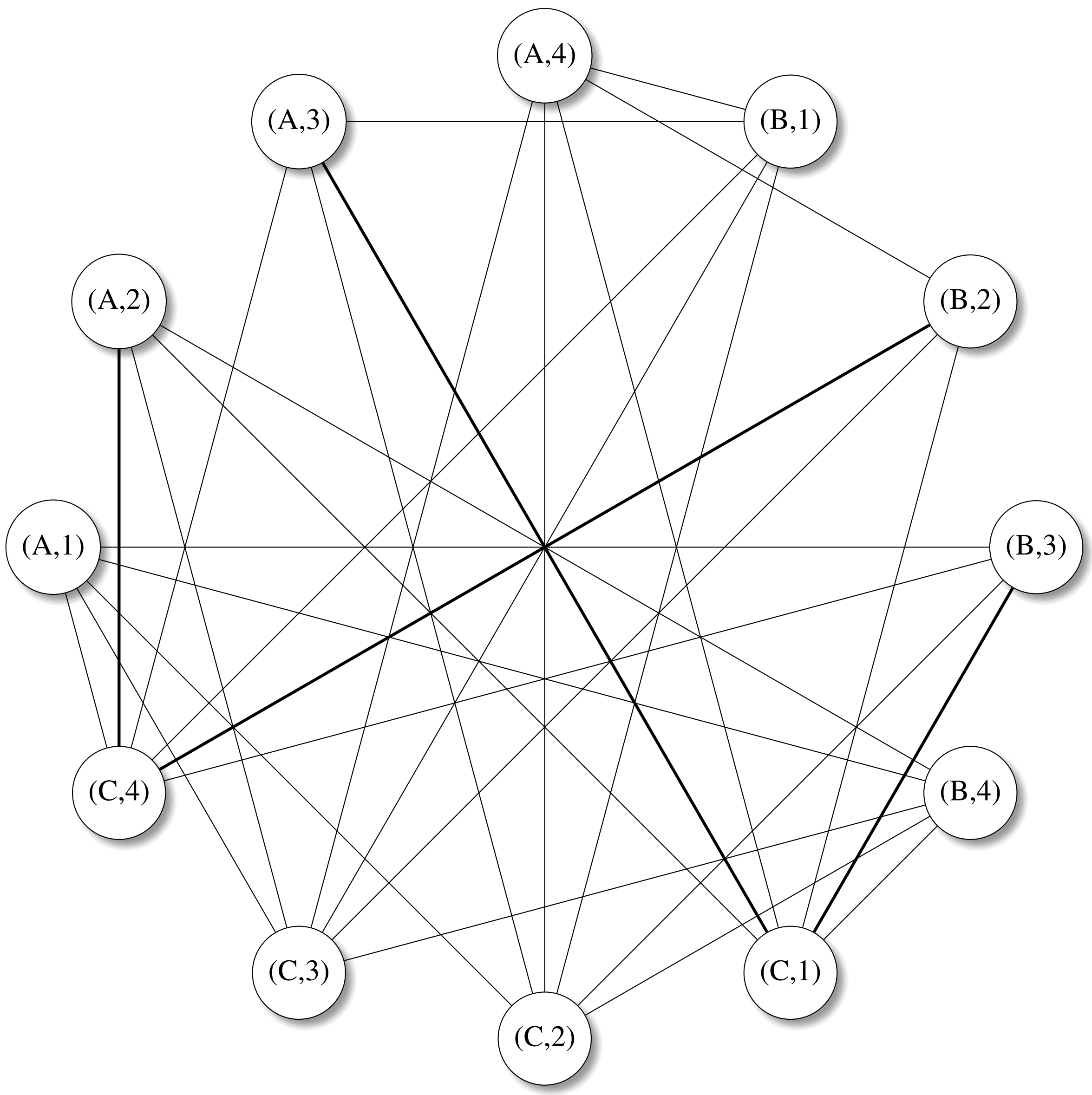
$$\mathrm{dom}(A) = \{1\} \qquad \mathrm{dom}(B) = \{2, 3\} \qquad \mathrm{dom}(C) = \{2, 3\}$$
$$\mathrm{dom}(D) = \{4\}$$

Question # 8

Dessinez le graphe pour appliquer la cohérence de chemin sur le problème suivant[1]*. Trouvez deux arêtes qui seront retirées lors de l'application de la cohérence de chemin.*

$$|A - B| \geq 2 \qquad B \neq C \qquad A \neq C$$
$$\mathrm{dom}(A) = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \mathrm{dom}(B) = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \mathrm{dom}(C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Solution : Les arêtes en gras n'ont pas de support de chemin.



1. Prenez une feuille assez grande car il y aura plusieurs arêtes.

Question # 9

Soit le problème suivant[2] *:*

$$\begin{aligned}
&\textsc{All-Different}([x_1, x_2, x_3, x_4]) \\
&x_2 \leq x_5 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\
&\mathrm{dom}(x_1) = \mathrm{dom}(x_2) = \mathrm{dom}(x_3) = \mathrm{dom}(x_4) = \mathrm{dom}(x_5) = \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}$$

1. *Donnez le graphe d'implications menant à un échec après avoir fait les branchements* $x_1 = 1$ *et* $x_5 = 2$.
   (a) *Dans votre graphe d'implication, indiquez sur les arêtes quelle contrainte a mené à cette implication.*
   (b) *Vous n'avez pas à indiquer sur les arêtes les contraintes implicites.*
   (c) *Identifiez les deux noeuds des branchements.*
2. *Tracez la coupe 1UIP (first unique implication point).*
3. *Donnez la clause associée à votre coupe.*

Solution : La Figure 1 présente le graphe d'implications. La clause apprise est $\neg(x_2 \geq 2) \vee \neg(x_2 = 2) \vee \neg(x_3 \geq 2) \vee \neg(x_4 \geq 2) \vee \neg(x_1 \geq 1)$.

2. Ce problème est tiré de la présentation *Lazy Clause Generation : A powerful hybrid solving approach combining SAT and finite domain propagation* donnée par Peter Stuckey à l'école d'été de l'ACP en 2011.

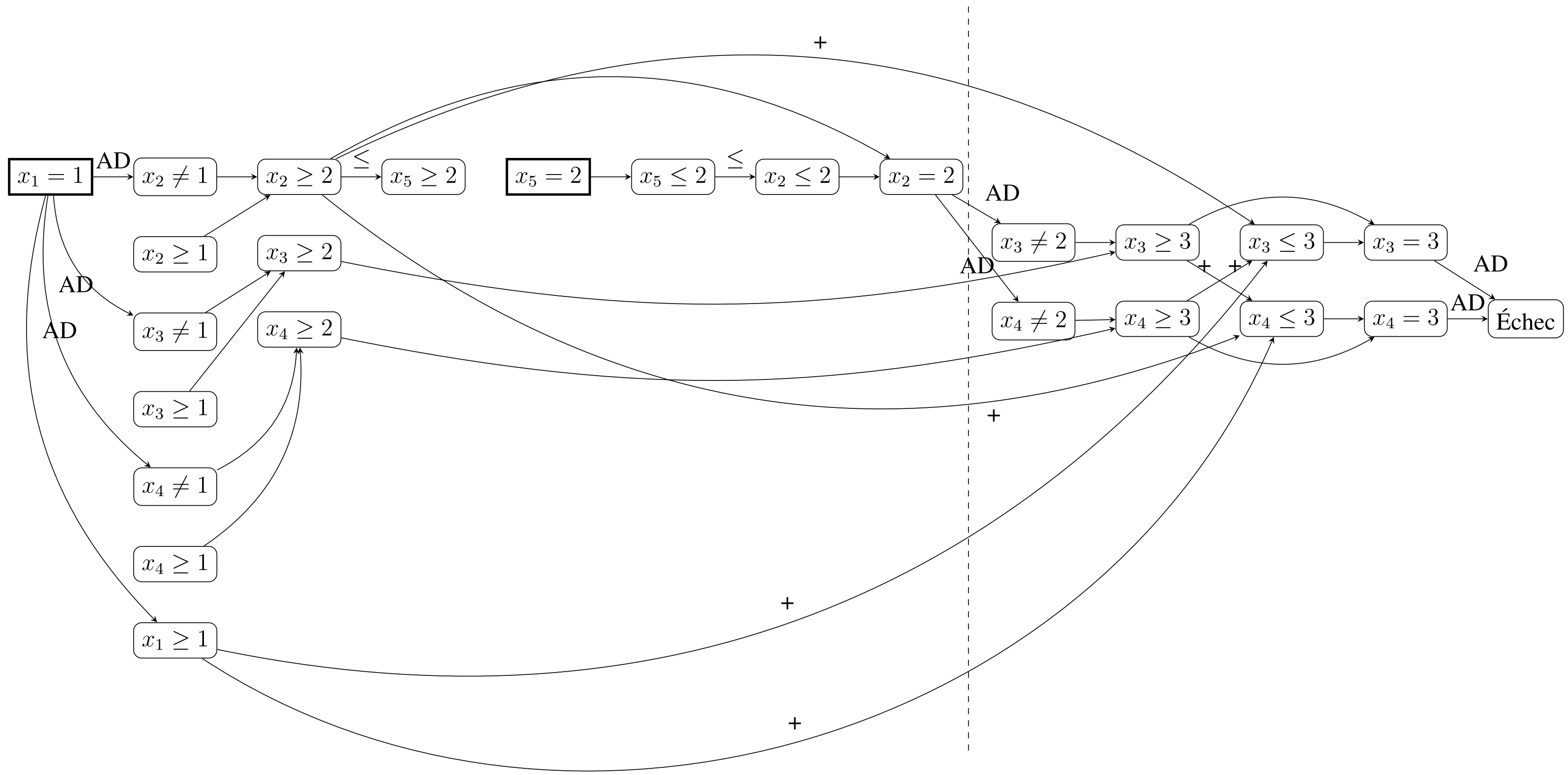


FIGURE 1 – Solution de la question 1. Les noeuds en gras sont les branchements. L'abréviation AD désigne la contrainte All-Different et le + désigne la contrainte de somme. La clause apprise est $\neg(x_2 \geq 2) \vee \neg(x_2 = 2) \vee \neg(x_3 \geq 2) \vee \neg(x_4 \geq 2) \vee \neg(x_1 \geq 1)$.