AIDE-MÉMOIRE

$$\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x) \qquad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)} \qquad a^x = b^{x\log_b(a)}$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a x^y = y\log_a x \qquad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad x \le \lceil x \rceil < x+1 \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \qquad x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$$

$$m \bmod n = m - n\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\tfrac{n}{e}\right)^n \text{ lorsque } n \to \infty, \quad \lceil \log_a(n+1) \rceil = \lfloor \log_a n \rfloor + 1 \text{ pour } n \text{ entier}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(f(x)) = \log_a(e) \times \frac{1}{f(x)} \times \frac{d}{dx}f(x) \; ; \qquad \frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)} \times \ln a \times \frac{d}{dx}f(x) \; ;$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))^c = c \times (f(x))^{c-1} \times \frac{d}{dx}f(x) \; ; \qquad \int x^c \, dx = \frac{x^{c+1}}{c+1} \; .$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \; ; \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \; ; \qquad \int \ln x \, dx = x\ln x - x + C \; ;$$

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\int_{l-1}^{u} f(x)dx & \le & \displaystyle\sum_{i=l}^{u} f(i) & \le & \displaystyle\int_{l}^{u+1} f(x)dx \quad \text{pour } f(x) \text{ nulle part décroissante} \\ \displaystyle\int_{l}^{u+1} f(x)dx & \le & \displaystyle\sum_{i=l}^{u} f(i) & \le & \displaystyle\int_{l-1}^{u} f(x)dx \quad \text{pour } f(x) \text{ nulle part croissante} \end{array}$$

La règle de L'Hospital

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \infty$ et $\lim_{n\to+\infty} g(n) = \infty$ (ou $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$). Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f'(n)}{g'(n)}$$

pourvu que cette dernière limite existe.

La notation asymptotique

$$\begin{array}{lcl} \Omega(g(n)) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{t(n) \mid \exists c_1 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \; : \; c_1 \cdot g(n) \le t(n)\} \\ O(g(n)) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{t(n) \mid \exists c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \; : \; t(n) \le c_2 \cdot g(n)\} \\ \Theta(g(n)) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{t(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \; : \; c_1 \cdot g(n) \le t(n) \le c_2 \cdot g(n)\} \end{array}$$

Utilisation des limites pour comparaison d'ordre

$$\text{si} \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \quad = \quad \begin{cases} c\,(\text{fini}) > 0 & \text{alors} \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \\ 0 & \text{alors} \quad f(n) \in O(g(n)) \quad \text{et} \quad f(n) \notin \Theta(g(n)) \\ +\infty & \text{alors} \quad f(n) \in \Omega(g(n)) \quad \text{et} \quad f(n) \notin \Theta(g(n)) \end{cases}$$

Les règles du maximum

$$\begin{array}{lcl}
t_1(n) \in \Omega\left(g_1(n)\right) \wedge t_2(n) \in \Omega\left(g_2(n)\right) & \Rightarrow & t_1(n) + t_2(n) \in \Omega\left(\max\{g_1(n), g_2(n)\}\right) \\
t_1(n) \in O\left(g_1(n)\right) \wedge t_2(n) \in O\left(g_2(n)\right) & \Rightarrow & t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{g_1(n), g_2(n)\}) \\
t_1(n) \in \Theta\left(g_1(n)\right) \wedge t_2(n) \in \Theta\left(g_2(n)\right) & \Rightarrow & t_1(n) + t_2(n) \in \Theta(\max\{g_1(n), g_2(n)\})
\end{array}$$

Sommations

$$\sum_{i=a}^{b} c = (b-a+1) \times c\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,; \qquad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,;$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2\,; \qquad \sum_{i=0}^{n} f(n-i) = \sum_{i=0}^{n} f(i)\,;$$

Règle de l'harmonie

— Une fonction $f(n)$ est **éventuellement non décroissante** s'il existe un n_0 où $f(n)$ est non décroissante sur l'intervalle $[n_0, \infty)$;

— Une fonction éventuellement non décroissante $f(n)$ est **harmonieuse** si $f(2n) \in \Theta(f(n))$;

— Si $C(n)$ est éventuellement non décroissante, si $f(n)$ est harmonieuse et si $C(n) \in \Theta(f(n))$ pour $n = b^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors $C(n) \in \Theta(f(n))\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème général

Si $T(n)$ est une récurrence donnée par $T(n) = rT(n/b) + f(n)$ pour les n de la forme b^k avec $f(n) \in \Theta(n^d)$, alors

$$\begin{array}{lccc}
r < b^d & \Rightarrow & T(n) \in \Theta(n^d) & \forall n \in \mathbb{N} \\
r = b^d & \Rightarrow & T(n) \in \Theta(n^d \log n) & \forall n \in \mathbb{N} \\
r > b^d & \Rightarrow & T(n) \in \Theta(n^{\log_b r}) & \forall n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Le théorème général s'applique aussi pour les récurrences de la forme $T(n) = \sum_{i=1}^{r} T\left(\frac{n}{b} + c_i\right) + f(n)$ pour les n de la forme b^k avec $f(n) \in \Theta(n^d)$.

Théorème sur les récurrences linéaires homogènes d'ordre 2

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie récursivement par :

$$\begin{cases}
a_0 & = & a \\
a_1 & = & b \\
a_n & = & r \cdot a_{n-1} + s \cdot a_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}
\end{cases}$$

où a, b, r et s sont des constantes réelles.

Soit p, le polynôme caractéristique de $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, (c.-à-d. : $p(x) = x^2 - rx - s$).
Et soit ρ_1 et ρ_2 les zéros de ce polynôme.

Alors,

$$a_n \begin{array}{l}
\nearrow = \ A \cdot (\rho_1)^n \ + \ B \cdot (\rho_2)^n \qquad \forall n : \mathbb{N} \qquad\qquad \text{si } \rho_1 \neq \rho_2. \\
\searrow = \ A \cdot (\rho_1)^n \ + \ B \cdot n \cdot (\rho_1)^n \quad \forall n : \mathbb{N} \qquad\qquad \text{si } \rho_1 = \rho_2
\end{array}$$

Où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence (c.-à-d. : par $a_0 = a$ et $a_1 = b$).