Solutions : Chapitre 10

Question # 1
Considérez une structure de données de pile avec les opérations `Ajoute` *et* `Vide` *implantées de la façon suivante.*

Algorithme 1 : Ajoute(x)

S.push(x) ; `// s'exécute en` $\Theta(1)$

Algorithme 2 : Vide()

tant que $S \neq \emptyset$ **faire**
  S.pop() ; `// s'exécute en` $\Theta(1)$

Démontrez que ces deux fonctions s'exécutent en temps amorti $\Theta(1)$.

Première solution : *En utilisant la méthode du comptable, on charge* $C_{ajoute}(n) = 2 \in \Theta(1)$ *chaque fois que la fonction* `Ajoute` *est appelée : une unité pour ajouter l'élément* x *et une unité de temps qui sera dépensée par la fonction* `Vide` *au moment d'appeler* `pop`. *On charge* $C_{vide}(n) = 0 \in \Theta(1)$. *La banque de temps n'est jamais en déficit car la fonction* `pop` *a déjà été chargée pour tous les éléments qui ont été précédemment ajoutés.*

Deuxième solution : *Soit la fonction de potentiel* $\phi(S) = |S|$. *Initialement, cette fonction est nulle puisque* $|S| = 0$. *De plus, cette fonction n'est jamais négative. L'efficacité amortie de la fonction* `ajoute` *est donc* $C_{ajoute}(n) = 1 + \phi(S') - \phi(S) = 2 \in \Theta(1)$ *puisque* $|S'| - |S| = 1$. *L'efficacité de la fonction* `Vide` *est* $C_{vide}(n) = |S| + \phi(S') - \phi(S) = |S| + 0 - |S| = 0 \in \Theta(1)$.

Question # 2
Montrez comment vous pouvez implanter une file (premier arrivé premier servi) à l'aide de deux piles (premier arrivé, dernier servi). En supposant que les opérations `push` *et* `pop` *d'une pile s'exécutent en temps constant, démontrez que votre implémentation des fonctions* `push` *et* `pop` *de votre file s'exécutent en temps amorti constant.*

Solution :

Algorithme 3 : File : :Initialise()

$A \leftarrow \emptyset$; `// Crée une pile vide`
$B \leftarrow \emptyset$; `// Crée une pile vide`

Algorithme 4 : File : :Push(x)

$A.push(x)$;

Algorithme 5 : File : :Pop()

1 **si** $B = \emptyset$ **alors**
2   **tant que** $A \neq \emptyset$ **faire**
3         $y \leftarrow A.pop()$;
4         $B.push(y)$;
5 **retourner** $B.pop()$;

Analyse amortie par la méthode du comptable : *Pour chaque appel à* `File::Push`*, on charge* $C^{push}_{amorti}(n) = 3$. *Pour chaque appel à cette fonction, une unité de temps servira à ajouter l'élément* x *à la pile* A *(ligne 1 de* `File::Push`*), une unité de temps servira au retrait de cet élément de la pile* A *(ligne 3 de* `File::Pop`*) et une unité de temps servira à l'ajout de l'élément à la pile* B *(ligne 4 de* `File::Pop`*). Chaque appel à* `File::Push` *engrange donc 2 unités de temps. On charge ensuite* $C^{pop}_{amorti}(n) = 1$ *pour chaque appel à* `File::Pop`*. En effet, le temps passé dans la boucle « tant que » a déjà été payé. Il ne reste plus qu'à charger une unité de temps pour retirer l'élément de la file* B *(ligne 5 de* `File::Pop`*). Nous avons donc* $C^{push}_{amorti}(n) = 3 \in \Theta(1)$ *et* $C^{pop}_{amorti}(n) = 1 \in \Theta(1)$.

Analyse amortie par la méthode de la fonction potentiel : *Soit* $\phi(A, B) = 3|A| + |B|$ *la fonction potentiel. Notons que* $\phi(\emptyset, \emptyset) = 0$ *et que* $\phi(A, B) \geq 0$ *pour toutes piles* A *et* B. *Soit* A *et* B *les piles avant un appel à* `File::Push` *et* A' *et* B' *les files après cet appel. Remarquons que* $B = B'$ *puisque la fonction ne modifie pas la pile* B. *Nous avons*

$$\begin{aligned}
C^{push}_{amorti}(A, B) &= 1 + \phi(A', B') - \phi(A, B) && (1)\\
&= 1 + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| && (2)\\
&= 1 + 3|A'| + |B| - 3|A| - |B| && \text{car } B' = B \quad (3)\\
&= 1 + 3(|A'| - |A|) && (4)\\
&= 1 + 3 \cdot 1 && \text{car } |A'| = |A| + 1 \quad (5)\\
&= 4 && (6)\\
&\in \Theta(1) && (7)
\end{aligned}$$

Pour la fonction `File::Push`*, encore une fois, supposons que* A *et* B *sont les piles avant l'appel à la fonction et* A' *et* B' *sont les piles après l'appel à la fonction. Nous avons*

$$\begin{aligned}
C^{pop}_{réel}(A, B) &= \begin{cases} 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 1 + 2|A| & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (8)\\
C^{pop}_{amorti}(A, B) &= C^{pop}_{réel}(A, B) + \phi(A', B') - \phi(A, B) && (9)\\
&= C^{pop}_{réel}(A, B) + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| && (10)\\
&= C^{pop}_{réel}(A, B) + 3(|A'| - |A|) + (|B'| - |B|) && (11)\\
&= C^{pop}_{réel}(A, B) + \begin{cases} 3 \cdot 0 - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 3(0 - |A|) + ((|A| - 1) - 0) & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (12)\\
&= \begin{cases} C^{pop}_{réel}(A, B) - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ C^{pop}_{réel}(A, B) - 2|A| - 1 & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (13)\\
&= 0 && (14)\\
&\in \Theta(1) && (15)
\end{aligned}$$