

Questions : Chapitres 11

Question # 1

Démontrez que le nombre de déplacements de disques nécessaires pour résoudre le problème des tours de Hanoi (avec n disques) doit être supérieur ou égal à $2^n - 1$.

Question # 2

Un algorithme qui utilise un nombre polynomial de fois un autre algorithme à temps polynomial est-il assurément un algorithme à temps polynomial ?

Question # 3

Un problème p peut être résolu par un algorithme ayant un temps d'exécution $O(n^{\lg(n)})$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A) Le problème est nécessairement traitable.
- B) Le problème est nécessairement intraitable.
- C) Aucune de ces réponses n'est vraie.

Question # 4

Trouvez un minorant pour un algorithme devant lister tous les nombres premiers contenus dans un vecteur $V[1..n]$.

Question # 5

Trouvez un minorant pour un algorithme devant énumérer tous les mots de passe possibles formés de n caractères choisis parmi $\{a..z, A..Z, 0..9\}$.

Question # 6

Trouvez un minorant pour un algorithme qui doit multiplier une matrice de dimensions $a \times b$ par une matrice de dimensions $b \times c$.

Question # 7

Considérez l'algorithme de force brute pour résoudre le problème de décider si un nombre n est premier ou composé (Algorithme 1). Cet algorithme est-il suffisant pour conclure que le problème mentionné appartient à la classe P ?

Algorithme 1 : ForceBruteEstCompose(n)

```
1 pour  $i = 2.. \lfloor n/2 \rfloor$  faire
2   si  $n \bmod i = 0$  alors
3     retourner «oui»
4 retourner «non»
```

Question # 8

Le problème de partition se définit de la façon suivante : Soit A un ensemble d'entiers. Existe-t-il un sous-ensemble $B \subset A$ tel que la somme des éléments dans B est égale à la somme des éléments dans A qui ne sont pas dans B ?

$$\sum_{b \in B} b = \sum_{c \in A \setminus B} c$$

Le problème du sac à dos décision se définit de la façon suivante : Soit n objets avec des poids w_1, \dots, w_n et des valeurs v_1, \dots, v_n . Soit un sac à dos de capacité maximale W et un nombre V . Existe-t-il un sous ensemble de ces objets tel que le poids total est au plus W et tel que la valeur totale est au moins V ?

- A) Prouvez que le problème du sac à dos version décision appartient à la classe NP .
- B) Prouvez que le problème de partition est réductible polynomialement au problème de décision pour le problème du sac à dos.
- C) Sachant que le problème de partition est NP -complet, que pouvez-vous conclure pour le problème du sac à dos version décision ?

Question # 9

Le problème de satisfiabilité (SAT) se définit de la façon suivante : Soit $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, un ensemble de littéraux qui peuvent prendre des valeurs booléennes : *vrai* ou *faux*. Soit $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, un ensemble de clauses où chaque clause est une disjonction de littéraux. Existe-t-il une assignation de valeurs aux littéraux de L qui satisfasse la conjonction des clauses de C ?

Par exemple, soit l'instance suivante :

$$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}, \quad (1)$$

$$C = \{\{l_1, \neg l_2\}, \{\neg l_1, l_2, \neg l_3, l_4\}, \{\neg l_1, \neg l_3\}, \{l_4\}\}. \quad (2)$$

Cette instance représente le problème de satisfiabilité suivant :

$$(l_1 \vee \neg l_2) \wedge (\neg l_1 \vee l_2 \vee \neg l_3 \vee l_4) \wedge (\neg l_1 \vee \neg l_3) \wedge (l_4). \quad (3)$$

Une solution à cette instance est $l_1 = \text{vrai}$, $l_2 = \text{vrai}$, $l_3 = \text{faux}$, $l_4 = \text{vrai}$.

Le problème de satisfiabilité à 3 littéraux (3SAT) est identique au problème SAT, mais avec la contrainte supplémentaire que toute clause $c \in C$ doit porter sur exactement 3 littéraux.

Sachant que SAT est un problème NP -complet, prouvez que 3SAT est NP -complet.