

# SOLUTIONS<sup>1</sup> SÉRIE 2 (chapitre 2a)

## Question # 1

Utilisez la notation la plus appropriée parmi  $O$ ,  $\Omega$  et  $\Theta$  pour indiquer la classe d'efficacité (par rapport au temps) de la recherche séquentielle ci-dessous dans les différents cas.

---

**Algorithme 1 :** RechercheSequentielle( $A[0..n-1], d$ )

---

```
1 pour  $i = 0..n-1$  faire
2   si  $A[i] = d$  alors
3     retourner  $i$ 
4 retourner  $-1$ 
```

---

A) Pire cas

**Solution :**

Puisque  $C_{worst}(n) = n$ , on a que  $C_{worst}(n) \in \Theta(n)$ .

B) Meilleur cas

**Solution :**

Puisque  $C_{best}(n) = 1$ , on a que  $C_{best}(n) \in \Theta(1)$ .

C) Cas moyen

**Solution :**

Aucune distribution de probabilité n'est donné sur les instances possibles. Nous allons donc en définir une. Soit  $p$  la probabilité que l'élément recherché  $d$  est dans le vecteur  $A$ . Dans le cas où l'élément recherché est dans le vecteur  $A$ , la probabilité que l'élément se retrouve à la position  $i$  est uniforme, soit  $\frac{1}{n}$ .

$$C_{avg}(n) = \sum_{x:|x|=n} P(x)C(x) \quad (1)$$

Il y a  $n+1$  instances de taille  $n$ . Une instance pour chaque position dans le vecteur où l'élément recherché peut se trouver, plus une instance où l'élément recherché n'est pas dans le vecteur.

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(A[i] = d)C(A[i] = d) + P(d \notin A)C(d \notin A) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p}{n}(i+1) + (1-p)n \quad (3)$$

$$= \frac{p}{n} \sum_{i=1}^n i + (1-p)n \quad (4)$$

$$= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} + (1-p)n \quad (5)$$

$$= p \frac{n+1}{2} + (1-p)n \quad (6)$$

---

1. Dans le but d'alléger les démonstrations, nous utilisons  $f(n) \leq cg(n)$  comme définition de  $f(n) \in O(g(n))$ . Nous traitons implicitement le fait qu'il existe une certaine constante  $c$  et que l'inégalité est vraie pour tout  $n \geq n_0$  pour un certain  $n_0$ . Nous nous permettons de faire cette simplification car l'idée des preuves se situe rarement à l'intérieur des constantes  $c$  et  $n_0$ .

**Question # 2**

*En vous appuyant uniquement sur notre analyse de l'algorithme d'Euclide effectuée au chap 1, exprimez l'efficacité de l'algorithme d'Euclide en pire cas à l'aide de la notation asymptotique.*

**Solution :**

*Rappel : la taille  $s$  de l'instance est le nombre de bits utilisé par les deux entiers  $(m,n)$  à l'entrée de l'algorithme d'Euclide. Notre analyse du chap 1 nous a donné  $C_{worst}(s) \in O(s)$ . Alors  $C(s) \in O(s)$ . Le(s) pire cas n'a pas été identifié et nous n'avons pu conclure que  $C_{worst}(s) \in \Theta(s)$ . Ainsi notre analyse ne nous a pas permis de conclure que la borne asymptotique supérieure est optimale.*

**Question # 3**

Démontrez la règle du maximum pour  $\Omega$ .

**Solution :**

$$\begin{aligned}
& t_1(n) \in \Omega(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Omega(g_2(n)) \\
\Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } \Omega \rangle \\
& t_1(n) \geq c_1 g_1(n) \wedge t_2(n) \geq c_2 g_2(n) \\
\Rightarrow & t_1(n) + t_2(n) \geq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Posons } c_3 = \min(c_1, c_2) \rangle \\
& t_1(n) + t_2(n) \geq c_3(g_1(n) + g_2(n)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{pour tout } a, b \geq 0, \text{ on a } a + b \geq \max(a, b). \rangle \\
& t_1(n) + t_2(n) \geq c_3 \max(g_1(n), g_2(n)) \\
\Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } \Omega \rangle \\
& t_1(n) + t_2(n) \in \Omega(\max(g_1(n), g_2(n)))
\end{aligned}$$

**Question # 4**

Démontrez la règle du maximum pour  $\Theta$ .

**Solution :**

Résultat 1 :

$$\begin{aligned}
& t_1(n) \in \Theta(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Theta(g_2(n)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{car } \Theta(g(n)) = \Omega(g(n)) \cap O(g(n)) \rangle \\
& t_1(n) \in \Omega(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Omega(g_2(n)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{en vertu de la règle du maximum pour } \Omega \rangle \\
& t_1(n) + t_2(n) \in \Omega(\max(g_1(n), g_2(n)))
\end{aligned}$$

Résultat 2 :

$$\begin{aligned}
& t_1(n) \in \Theta(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Theta(g_2(n)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{car } \Theta(g(n)) = \Omega(g(n)) \cap O(g(n)) \rangle \\
& t_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in O(g_2(n)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{en vertu de la règle du maximum pour } O \rangle \\
& t_1(n) + t_2(n) \in O(\max(g_1(n), g_2(n)))
\end{aligned}$$

Ces deux résultats impliquent que :

$$t_1(n) + t_2(n) \in \Omega(\max(g_1(n), g_2(n))) \cap O(\max(g_1(n), g_2(n))) = \Theta(\max(g_1(n), g_2(n)))$$

### Question # 5

Démontrez que  $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \Theta(f(n)) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow O(f(n)) = O(g(n))$

**Solution :**

- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow \Theta(f(n)) = \Theta(g(n)) :$

$$\begin{aligned} & \text{Soit } x(n) \in \Theta(f(n)) \\ \Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } \Theta \rangle \\ & c_1 f(n) \leq x(n) \leq c_2 f(n) \\ \Rightarrow & \quad \langle f(n) \in \Theta(g(n)) \rangle \\ & d_1 g(n) \leq c_1 f(n) \leq x(n) \leq c_2 f(n) \leq d_2 g(n) \\ \Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } \Theta \rangle \\ & x(n) \in \Theta(g(n)) \end{aligned}$$

De la même façon (et en utilisant la symétrie de  $\Theta$ ), on peut montrer que  $x(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow x(n) \in \Theta(f(n))$  sous l'hypothèse que  $f(n) \in \Theta(g(n))$ . On obtient alors l'égalité entre  $\Theta(f(n))$  et  $\Theta(g(n))$

- $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n)) :$

$$\begin{aligned} & \text{Soit } x(n) \in O(f(n)) \\ \Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } O \rangle \\ & x(n) \leq c f(n) \\ \Rightarrow & \quad \langle f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ car } \Theta(f(n)) = \Theta(g(n)) \rangle \\ & x(n) \leq c f(n) \text{ et } d_1 g(n) \leq f(n) \leq d_2 g(n) \\ \Rightarrow & \\ & x(n) \leq c \times d_2 g(n) \\ \Leftrightarrow & \quad \langle \text{Définition de } O \rangle \\ & x(n) \in O(g(n)) \end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que  $x(n) \in O(g(n)) \Rightarrow x(n) \in O(f(n))$  sous l'hypothèse que  $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ . On obtient alors l'égalité entre  $O(f(n))$  et  $O(g(n))$

- $O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n)) :$   
En assumant  $O(f(n)) = O(g(n))$  et par la réflexivité de  $O$ , on a que  $f(n) \in O(g(n))$  et  $g(n) \in O(f(n))$ . On déduit donc que  $f(n) \leq d_1 g(n)$  et  $\frac{1}{d_2} g(n) \leq f(n)$  ce qui donne bien  $f(n) \in \Theta(g(n))$ .

### Question # 6

Démontrez que :

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Theta(g(n)) &\Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n)) \\ &\Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n)) \\ &\Leftrightarrow O(f(n)) \subset O(g(n)) \end{aligned}$$

**Solution :**

- $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n)) :$   
Assumons  $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Theta(g(n))$  et supposons que  $f(n) \in \Omega(g(n))$ . On a donc que  $f(n) \leq cg(n)$  et  $f(n) \geq dg(n)$ , ce qui donne que  $dg(n) \leq f(n) \leq cg(n)$  et donc  $f(n) \in \Theta(g(n))$ . Ceci est une contradiction, on a donc  $f(n) \notin \Omega(g(n))$ .
- $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n)) :$   
Assumons  $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n))$  et supposons  $g(n) \in O(f(n))$ . Par la dualité entre  $O$  et  $\Omega$ , on obtient que  $f(n) \in \Omega(g(n))$ . Ceci est une contradiction, on a donc  $g(n) \notin O(f(n))$ .
- $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n)) :$   
Comme  $f(n) \in O(g(n))$ , on a que  $O(f(n)) \subseteq O(g(n))$  (pour tout  $x(n) \in O(f(n))$ , on a  $x(n) \leq c(f(n)) \leq d(g(n))$  et donc  $x(n) \in O(g(n))$ ). Si  $O(f(n)) = O(g(n))$ , alors forcément  $g(n) \in O(f(n))$  (car  $g(n) \in O(g(n))$ ). Ceci est une contradiction. Puisque  $O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ , mais que  $O(f(n)) \neq O(g(n))$ , on obtient que  $O(f(n)) \subset O(g(n))$ .
- $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \notin \Theta(g(n)) :$   
Comme  $O(f(n)) \subset O(g(n))$ , il est clair que  $f(n) \in O(g(n))$ . Par la question 5, on sait que si  $f(n) \in \Theta(g(n))$ , on obtient que  $O(f(n)) = O(g(n))$ , ce qui est une contradiction. On doit donc avoir  $f(n) \notin \Theta(g(n))$ .

### Question # 7

Soit deux fonctions positives asymptotiquement  $f(n)$  et  $g(n)$ . Les relations  $=$ ,  $\neq$ ,  $\subset$  et  $\not\subset$  sont quatre relations intéressantes pour comparer les ensembles  $O(f(n))$  et  $O(g(n))$ .

- A) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'utiliser seulement  $=$  ou bien  $\subset$  pour comparer les ensembles  $\Theta(f(n))$  et  $\Theta(g(n))$  ?

**Solution :**

Il n'est pas possible d'avoir  $\Theta(f(n)) \subset \Theta(g(n))$ . On peut facilement montrer que si il existe une fonction  $x$  telle que  $x \in \Theta(f(n))$  et  $x \in \Theta(g(n))$ , alors on a  $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ .

- B) Que devrait-on utiliser pour comparer  $\Theta(f(n))$  et  $\Theta(g(n))$  ?

**Solution :**

On devrait utiliser  $=$  ou bien  $\neq$ .

**\*Question # 8**

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquez la classe  $\Theta(g(n))$  à laquelle la fonction appartient (Utilisez la forme la plus simple possible pour  $g(n)$ ). Démontrez vos affirmations.

A)  $(n^2 + 1)^{10}$

**Solution :**

$$(n^2 + 1)^{10} \in \Theta(n^{20})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^{10}}{n^{20}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^{10}}{(n^2)^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{10} = 1$$

B)  $\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$

**Solution :**

$$\sqrt{10n^2 + 7n + 3} \in \Theta(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10n^2 + 7n + 3}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{10n^2 + 7n + 3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{10 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} = \sqrt{10}$$

C)  $2n \lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg(\frac{n}{2})$

**Solution :**

$$2n \lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg(\frac{n}{2}) \in \Theta(n^2 \lg n)$$

$$\begin{aligned} & 2n \lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg(\frac{n}{2}) \\ = & \\ & 2n 2 \lg(n+2) + (n+2)^2 (\lg n - 1) \\ \in & \quad \langle \text{par la règle du maximum} \rangle \\ & \Theta((n+2)^2 (\lg n - 1)) \\ = & \\ & \Theta((n^2 + 4n + 4)(\lg n - 1)) \\ = & \\ & \Theta(n^2 \lg n + 4n \lg n + 4 \lg n - n^2 - 4n - 4) \\ = & \\ & \quad \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \lg n + 4n \lg n + 4 \lg n - n^2 - 4n - 4}{n^2 \lg n} = 1, \text{ voir plus bas.} \rangle \\ & \Theta(n^2 \lg n) \\ \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \lg n + 4n \lg n + 4 \lg n - n^2 - 4n - 4}{n^2 \lg n} \\ = & \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \lg n}{n^2 \lg n} + \frac{4n \lg n}{n^2 \lg n} + \frac{4 \lg n}{n^2 \lg n} - \frac{n^2}{n^2 \lg n} - \frac{4n}{n^2 \lg n} - \frac{4}{n^2 \lg n} \\ = & \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{\lg n} - \frac{4}{n \lg n} - \frac{4}{n^2 \lg n} \\ = & \\ & 1 + \frac{4}{\infty} + \frac{4}{\infty} - \frac{1}{\infty} - \frac{4}{\infty} - \frac{4}{\infty} \\ = & \\ & 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$D) 2^{n+1} + 3^{n-1}$$

**Solution :**

$$2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)$$

$$2^{n+1} + 3^{n-1}$$

=

$$2^n 2 + 3^n \frac{1}{3}$$

$$\in \quad \langle \text{par la règle du maximum} \rangle$$

$$\Theta(3^n)$$

E)  $\lfloor \lg n \rfloor$

**Solution :**

Puisque  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ , on obtient que :

$$\begin{aligned}\lfloor \lg n \rfloor &\leq \lg n = \lg(a) \log_a(n) \Rightarrow \lfloor \lg n \rfloor \in O(\log n) \\ \lfloor \lg n \rfloor &> \lg n - 1 \\ &= \lg(a) \log_a(n) - 1 \\ &\geq \lg(a) \log_a(n) - \frac{1}{2} \lg(a) \log_a(n) && \forall n \geq 2 \\ &= \frac{1}{2} \lg(a) \log_a(n) \\ &\Rightarrow \lfloor \lg n \rfloor \in \Omega(\log n)\end{aligned}$$

Alors  $\lfloor \lg n \rfloor \in \Theta(\log n)$ .

### \*Question # 9

Placez les fonctions suivantes en ordre croissant de leur ordre de croissance.

$$(n-2)!, 5 \lg(n+100)^{10}, 2^{2n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, (\ln n)^2, \sqrt[3]{n}, 3^n$$

**Solution :**

$$5 \lg(n+100)^{10}, (\ln n)^2, \sqrt[3]{n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, 3^n, 2^{2n}, (n-2)!$$

### Question # 10

Les valeurs contenus dans le tableau 2.1 (voir A. Levitin) suggère que les fonctions suivantes sont placées en ordre croissant de leur ordre de croissance :

$$\lg n, n, n \lg n, n^2, n^3, 2^n, n!$$

A) Est-ce que les valeurs du tableau forme une preuve que les fonctions sont placées en ordre croissant de leur ordre de croissance ?

**Solution :**

L'ordre de croissance d'une fonction est étroitement lié au comportement asymptotique de cette fonction (lorsque  $n$  tends vers l'infini). Donc, en aucun cas, un ensemble fini de valeurs d'une fonction peut constituer une preuve de l'ordre de croissance de cette fonction.



B) Démontrez que les fonctions ci-haut sont listées en ordre croissant de leur ordre de croissance.

**Solution :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lg e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \lg n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$$

Déjà démontré ci-dessus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2^n \ln 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2^n (\ln 2)^2}$$

Règle de L'Hôpital

Règle de L'Hôpital

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2^n (\ln 2)^3} = 0$$

Règle de L'Hôpital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

Voir la solution de #3B série 0

### Question # 11

Démontrez que tout polynôme  $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$  tel que  $a_k > 0$  appartient à  $\Theta(n^k)$ .

**Solution :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k} = a_k > 0$$

### Question # 12

Démontrez que deux fonctions exponentielle  $a^n$  et  $b^n$  ayant des bases différentes ( $a \neq b$ ) ont des ordre de croissance différente.

**Solution :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ \infty & \text{si } a > b \end{cases}$$

### Question # 13

Démontrez que, pour tout  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$ , on a :  $\log_b(n) \in \Theta(\log_a(n))$  (et alors  $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ ).

**Solution :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{\log_b(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(b) \log_b(n)}{\log_b(n)} = \log_a(b)$$

### Question # 14

1. Elvis, Jimmy et Janis analysent un même algorithme A et obtiennent les résultats  $T_E(n)$ ,  $T_i(n)$  et  $T_a(n)$  respectivement. Elvis obtient  $T_E(n) \in O(n^2)$  en pire cas. Jimmy obtient  $T_i(n) \in \Omega(n^2)$  en meilleur cas. Janis affirme que  $T_a(n) \in \theta(n^2)$  pour tous les cas. Si Elvis et Jimmy ont raison, le résultat de Janis est-il correct ? Justifiez.

2. Soient **A** et **B** des algorithmes prenant des temps, en meilleur cas, dans  $\Omega(n^2)$  et  $\Omega(n \log n)$  respectivement. Est-il possible qu'une implantation de l'algorithme **A** soit plus efficace qu'une implantation de l'algorithme **B** sur tous les exemplaires ? Justifiez.
3. Alice et Bob analysent un même algorithme **A** et obtiennent les résultats  $T_A(n)$  et  $T_B(n)$  respectivement. Alice obtient que  $T_A(n) \in \theta(n^3)$  en pire cas. Bob obtient que  $T_B(n) \in \Omega(n^2 \log n^2)$  pour tous les cas. Le résultat d'Alice implique-t-il celui de Bob ? Justifiez.
4. Énoncez le principe d'invariance en algorithmique.

**Solutions :**

1. **Oui.** Elvis  $\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$  dans tous les cas et Jimmy  $\Rightarrow T(n) \in \Omega(n^2)$  dans tous les cas, d'où le résultat.
2. **Oui.** Exemple :  $T_A(n) = n^2$  et  $T_B(n) = 5n^3 + 5$
3. **Non.** On pourrait avoir, par exemple,  $T(n) = n^2$  (en meilleur cas).
4. Les **temps d'exécution de deux implantations d'un même algorithme** ne diffèrent qu'à une **constante multiplicative** près (voir notes de cours chapitre 2).

**\*Question # 15**

Soient **A**, **B**, **C**, **D** et **E** cinq algorithmes qui résolvent le même problème **P** et pour lesquels nous avons obtenu les résultats d'analyse suivants respectivement :

1.  $T_A(n) \in O(n^2)$  en pire cas ;
  2.  $T_B(n) \in \Omega(n^2)$  dans tous les cas ;
  3.  $T_C(n) \in \Theta(n)$  en meilleur cas ;
  4.  $T_D(n) \in \Theta(n^2 \lg n)$  dans tous les cas ;
  5.  $T_E(n) \in \Theta(n^2)$  en pire cas.
- a) Vous êtes à concevoir un algorithme **Z** qui résout un problème **P'** ayant des instances de taille  $n$ . Votre algorithme **Z** ne doit jamais prendre plus de  $n^4 \lg n$  unités de temps (à une constante près et pour des entrées de taille assez grande). Dans **Z**, il y a  $n^2 \lg n$  appels à Résoudre le problème **P** (tous sur des instances de taille  $n$ ). Donnez, parmi les cinq algorithmes ci-haut, tous ceux qui peuvent être utilisés dans votre algorithme **Z**, sans dépasser la limite de temps.
  - b) Vous êtes à élaborer un système qui doit fonctionner en temps réel (le facteur temps est primordial). Pour ce faire, vous devez choisir un (et un seul) algorithme parmi les 5 ci-haut. Quel est, selon vous, le choix le plus prometteur ? Justifiez.
  - c) Pour chacun des 5 algorithmes ci-haut, dites, avec justifications, si on est assuré que son temps d'exécution **en pire cas** appartient à l'ensemble suivant :

$$S = (O(n^3) \cap \Omega(n^2)) \cup \Theta(n).$$

- d) En supposant que les analyses 2 et 3 soient exactes, est-il possible que les algorithmes **B** et **C** soient en fait un seul et même algorithme ? Justifiez.

**Solutions :**

- a) Les algorithmes **A** et **E** peuvent être utilisés.

- b) L'analyse des algorithmes  $B$  et  $C$  ne donne aucune informations sur le maximum de temps requis pour ces algorithmes. Ils peuvent donc possiblement être extrêmement lent. Clairement, le choix de l'algorithme  $D$  est moins bon que  $A$  et  $E$ . Puisque  $E$  nous assure un temps de  $n^2$  en pire cas, alors que  $A$  nous assure un temps inférieur ou égal à  $n^2$  en pire cas, l'algorithme  $E$  ne peut être meilleur que  $A$ .  $A$  est donc le choix le plus prometteur.
- c)  $A$  : non, le temps en PC est au plus  $n^2$  mais pourrait être inférieur,  $n \lg n$  par exemple et dans ce cas il n'est pas dans l'ensemble car  $n \lg n \notin \Omega(n^2)$  et  $n \lg n \notin \Theta(n)$ .  
 $B$  : non, aucune borne supérieure sur le temps en PC, ce dernier peut donc être  $n^{10}$  qui n'appartient clairement pas à  $S$ .  
 $C$  : non, même explication que  $B$ .  
 $D$  : oui, comme  $T_D(n) \in \Theta(n^2 \lg n)$ , on sait que  $T_D(n) \in \Omega(n^2 \lg n) \subset \Omega(n^2)$  et  $T_D(n) \in O(n^2 \lg n) \subset O(n^3)$ .  
 $E$  : oui, comme  $T_E(n) \in \Theta(n^2)$ , on sait que  $T_E(n) \in \Omega(n^2)$  et  $T_E(n) \in O(n^2) \subset O(n^3)$ .
- d) Non car il y a une contradiction. L'analyse 2 nous dit que  $T(n)$  est borné inférieurement par  $n^2$  dans tous les cas (en particulier pour le meilleur cas). Par contre, l'analyse 3 nous dit que  $T(n)$  est exactement  $n$  en meilleur cas. Mais comme  $n$  ne peut être plus petit que  $n^2$ , il ne peut donc pas s'agir du même algorithme.

### \*Question # 16

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifiez en mots (ou en montrant les étapes de votre démarche si nécessaire).

A)  $376n + 98 \in O(n)$

**Solution :**

Vrai.  $O(n)$  est l'ensemble des fonctions dont l'ordre de croissance est plus petit ou égal à  $n$ .

Par la règle du maximum on laisse tomber la constante 98.

De plus, la constante 376 n'affecte pas l'ordre de grandeur de la fonction.

Donc,  $376n + 98 \in O(n)$ .

B)  $2n^2 + n \in \Omega(n)$

**Solution :**

Vrai.  $\Omega(n)$  est l'ensemble des fonctions dont l'ordre de croissance est plus grand ou égal à  $n$ .

En utilisant la limite du ratio  $\frac{2n^2+n}{n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini pour comparer  $2n^2 + n$  et  $n$ , nous obtenons  $\infty$ .

De ce fait,  $2n^2 + n \in \Omega(n)$ .

C)  $\ln(n^n) + \log_2 n \in \Theta(\ln n)$

**Solution :**

Faux.  $\Theta(\ln n)$  est l'ensemble des fonctions dont l'ordre de croissance est  $\ln n$ .

Par la règle du maximum on laisse tomber la fonction  $\log_2 n$ .

Or, par l'arithmétique des logs nous avons que  $\ln(n^n) = n \ln(n)$ .

Donc,  $\ln(n^n) + n \notin \Theta(\ln n)$ .