Solutions des exercices du chapitre 8

Question # 1
Réécrivez ce programme linéaire dans sa forme normale.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\textit{minimiser} & -4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & & \\
\textit{sujet à} & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 42 \\
& 4x_1 & - & x_2 & - & 8x_3 & \geq & 12 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & \geq & 36 \\
& x_1 & & & & & \geq & 2 \\
& & & x_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

Solution :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\textit{maximiser} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3^+ & - & 7x_3^- & & \\
\textit{sujet à} & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3^+ & - & 4x_3^- & \leq & 42 \\
& -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3^+ & + & 4x_3^- & \leq & -42 \\
& -4x_1 & + & x_2 & + & 8x_3^+ & - & 8x_3^- & \leq & -12 \\
& -x_1 & - & 2x_2 & - & 9x_3^+ & + & 9x_3^- & \leq & -36 \\
& -x_1 & & & & & & & \leq & -2 \\
& & & & x_1, x_2, x_3^+, x_3^- & & & & \geq & 0
\end{array}$$

Question # 2
Utilisez la méthode du simplexe pour résoudre le problème suivant.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\textit{maximiser} & -2x & + & 3y & + & 4z & & \\
\textit{sujet à} & 2x & - & y & + & 4z & \leq & 44 \\
& x & + & y & + & z & \leq & 26 \\
& x & - & y & & & \leq & 10 \\
& & & x, y, z & & & \geq & 0
\end{array}$$

On réécrit le problème en utilisant des variables d'écart.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\textit{maximiser} & -2x & + & 3y & + & 4z & & & & & & & & \\
\textit{sujet à} & 2x & - & y & + & 4z & + & s_1 & & & & & = & 44 \\
& x & + & y & + & z & & & + & s_2 & & & = & 26 \\
& x & - & y & & & & & & & + & s_3 & = & 10 \\
& & & & & x, y, z, s_1, s_2, s_3 & & & & & & & \geq & 0
\end{array}$$

On construit ensuite les tableaux suivants, avec les pivots indiqués en gras.

2	-3	-4	0	0	0	0
2	-1	**4**	1	0	0	44
1	1	1	0	1	0	26
1	-1	0	0	0	1	10

4	-4	0	1	0	0	44
1/2	-1/4	1	1/4	0	0	11
1/2	**5/4**	0	-1/4	1	0	15
1	-1	0	0	0	1	10

28/5	0	0	1/5	16/5	0	92
3/5	0	1	1/5	1/5	0	14
2/5	1	0	-1/5	4/5	0	12
7/5	0	0	-1/5	4/5	1	22

Solution optimale :

$$x = 0 \qquad y = 12 \qquad z = 14$$
$$s_1 = 0 \qquad s_2 = 0 \qquad s_3 = 22$$

Question # 3

Trouvez un coupe de Gomory pour ce programme en nombres entiers. Vous devrez d'abord trouvez une solution optimale réelle en utilisant la méthode du simplexe.

$$\begin{array}{llllll} \textit{maximiser} & x & + & 2y & & \\ \textit{sujet à} & 3x & + & 5y & \leq & 17 \\ & & x, y & & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Solution : *Tout d'abord, utilisons la méthode du symplexe en introduisant la variable d'écart* s_1.

-1	-2	0	0
3	**5**	1	17

0.2	0	0.4	6.8
0.6	1	0.2	3.4

La solution $x = 0, y = 3.4$ *est optimale, mais elle n'est pas entière. On utilise donc l'équation*

$$0.6x + y + 0.2s_1 = 3.4 \tag{1}$$

pour trouver la coupe

$$0.6x + 0.2s_1 - s_2 = 0.4 \tag{2}$$

Question # 4
Considérez n produits alimentaires tous contenant m nutriments. Le produit i contient exactement a_{ji} grammes du nutriment j. Il est recommandé de consommer au moins r_j grammes du nutriment j par semaine. Le produit i coûte c_i dollars.

A) *Écrivez un programme linéaire qui détermine la quantité de chaque produit qu'il faut manger pour avoir la ration recommandée de chaque nutriment tout en minimisant la facture d'épicerie.*

Solution : *Soit A la matrice ayant la valeur a_{ji} sur sur la rangée j et la colonne i. Soit x_i la quantité du produit i qu'il faut acheter pour minimiser les coûts tout en mangeant la ration recommandée de chaque nutriment.*

$$\begin{array}{lrl} \textit{minimiser} & c^T x & \\ \textit{sujet à} & Ax & \geq r \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

B) *Vous vendez des suppléments alimentaires sous forme de pilules. Vous vendez une pilule pour chaque nutriment. Vous désirez fixer un prix par gramme pour chaque nutriment de sorte à être compétitif avec les produits alimentaires. Ainsi, le coût des pilules pour l'ensemble des nutriments contenus dans un produit ne devrait pas dépasser le coût du produit. Vous désirez maximiser le prix que déboursera un client achetant la ration hebdomadaire recommandée pour chaque nutriment.*

Modélisez ce problème sous forme de programme linéaire.

Solution : *Soit y_j le prix d'un gramme pour le nutriment j.*

$$\begin{array}{lrl} \textit{maximiser} & r^T y & \\ \textit{sujet à} & A^T y & \leq c \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

C) Monsieur Poudrier a résolu le programme linéaire en A) et a calculé que son épicerie lui coûtera 50\$. Combien se vendront les pilules équivalentes à la ration recommandée ? Justifiez pleinement votre réponse.

Solution : Le programme linéaire en B) étant le dual du programme linéaire en A), les valeurs objectives des solutions optimales des deux programmes linéaires sont égales. Le coût d'un panier de pilules correspondant à la ration recommandée sera donc de 50\$.

Question # 5
Un physicien prend n lectures sur un instrument et désire représenter ces lectures sous forme de graphique. Il obtient donc n points (x_i, y_i) pour $i = 1..n$. Il désire ensuite trouver les paramètres m et b tels que la fonction $y = mx + b$ minimise le plus grand écart vertical entre la droite et les points de ses lectures.

Modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Solution : *L'écart vertical entre la droite $y = mx + b$ et le point (x_i, y_i) est donné par $|mx_i + b - y_i|$. Soit E le plus grand écart. Nous avons ces inégalités.*

$$
\begin{aligned}
E &\geq mx_i + b - y_i \\
E &\geq y_i - mx_i - b
\end{aligned}
$$

Le programme linéaire s'exprime donc de la façon suivante.

$$
\begin{array}{lrcr}
\textit{minimiser} & E & & \\
\textit{sujet à} & -E + x_i m + b & \leq & y_i \\
 & -E - x_i m - b & \leq & -y_i
\end{array}
$$

Remarquez que x_i et y_i sont des constantes. Les variables de ce problème sont donc E, m et b. Ces trois variables sont libres, c'est-à-dire qu'elles n'ont pas à être positives ou nulles. Cependant, la variable E sera non négative pour toutes solutions réalisables.

Question # 6
Dans un problème, vous avez trois variables binaires $x, y, z \in \{0, 1\}$ et vous voulez imposer la constrainte $z = xy$. Cette contrainte n'est pas linéaire, mais comment peut-elle être modélisée dans un programme à nombres entiers ?

Première solution : *On ajoute ces contraintes linéaires.*

$$
\begin{array}{rr}
x \geq z & \textit{Si } x \textit{ est nul, } z \textit{ doit être nul.} \quad (3) \\
y \geq z & \textit{Si } y \textit{ est nul, } z \textit{ doit être nul.} \quad (4) \\
x + y - z \leq 1 & \textit{Si } x = y = 1 \textit{ alors } z = 1. \quad (5) \\
x, y, z \leq 1 & \textit{Les variables sont binaires} \quad (6) \\
x, y, z \in \mathbb{N} & \textit{Les variables sont entières.} \quad (7)
\end{array}
$$

Deuxième solution : *On ajoute ces contraintes linéaires.*

$$
\begin{array}{rr}
x + y - z \leq 1 & \textit{Si } x = y = 1 \textit{ alors } z = 1. \quad (8) \\
2z - x - y \leq 0 & \textit{Si } x = 0 \textit{ ou } y = 0 \textit{ alors } z = 0. \quad (9) \\
x, y, z \leq 1 & \textit{Les variables sont binaires.} \quad (10) \\
x, y, z \in \mathbb{N} & \textit{Les variables sont entières.} \quad (11)
\end{array}
$$

Troisième solution : *On déclare une quatrième variable entière w pouvant prendre ses valeurs dans* $\{0, 1, 2\}$.

$$x + 2y = 3z + w \quad (12)$$
$$w \leq 2 \qquad \text{La variable } w \text{ appartient à } \{0, 1, 2\}. \quad (13)$$
$$x, y, z \leq 1 \qquad \text{Les variables } x, y \text{ et } z \text{ sont binaires.} \quad (14)$$
$$w, x, y, z \in \mathbb{N} \qquad \text{Toutes les variables sont entières.} \quad (15)$$

x	y	z	w	xy	$z = xy$
0	0	0	0	0	vrai
1	0	0	1	0	vrai
0	1	0	2	0	vrai
1	1	1	0	1	vrai

TABLE 1 – Solutions à l'équation $x + 2y = 3z + w$

Question # 7
Un problème d'ordonnancement est constitué de n tâches étiquetées de 1 à n. La tâche i a un temps de sortie r_i, une échéance d_i et un temps de traitement p_i. Lorsqu'une tâche s'exécute, elle commence au temps S_i et s'exécute sans interruption pendant p_i unités de temps. La tâche ne doit pas commencer avant sa sortie ($r_i \leq S_i$) et ne doit pas se terminer après son échéance $S_i + p_i \leq d_i$. Les constantes r_i, d_i et p_i sont des entiers et le temps S_i, qui est inconnu, doit aussi être un entier. Finalement, deux tâches ne peuvent pas s'exécuter en même temps. Nous voulons trouver un ordonnancement qui minimise le makespan, *c'est-à-dire le moment où la dernière tâche est accomplie. Modélisez ce problème sous la forme d'un programme en nombres entiers.*

Solution : *Puisque deux tâches ne peuvent pas s'exécuter en même temps, nous déclarons une variable $P_{i,j} \in \{0, 1\}$ où $P_{i,j} = 1$ si et seulement si la tâche i s'exécute avant la tâche j. Nous déclarons aussi la variable M qui représente le makespan. Nous avons ensuite ce programme en nombres entiers exprimé dans sa forme normale.*

	$\max -M$	*Minimise le makespan.*
$\forall\, i$	$S_i \leq d_i - p_i$	*Une tâche se termine avant son échéance.*
$\forall\, i$	$-S_i \leq -r_i$	*Une tâche ne débute pas avant sa sortie.*
$\forall\, i < j$	$P_{i,j} + P_{j,i} \leq 1$	*Si i commence avant j alors j ne commence pas avant i.*
$\forall\, i \neq j$	$S_i - S_j - \infty P_{j,i} \leq -p_i$	*Si i commence avant j (donc $P_{j,i} = 0$), alors $S_i + p_i \leq S_j$.*
$\forall\, i$	$S_i - M \leq -p_i$	*Le makespan est après la terminaison de la tâche i.*
$\forall\, i \neq j$	$P_{i,j} \leq 1$	*$P_{i,j}$ est une variable binaire.*
	$P_{i,j}, S_i, M \in \mathbb{N}$	*Les variables sont entières et non négatives.*