Révision pour l'examen 1

Claude-Guy Quimper

Chapitre 1

- Qu’est-ce qu’un algorithme?
- Les grandes étapes pour passer du problème à l’algorithme:
  - Définir précisément le problème
  - Identifier l’entité qui exécutera
  - Choisir les structures de données
  - Concevoir l’algorithme
  - Décrire l’algorithme
  - Prouver que l’algorithme est correct
  - Analyse l’algorithme
  - Coder l’algorithme

Chapitre 1

- Plus grand commun diviseur
  - Algorithme de force brut
  - Algorithme d’Euclid (diminuer pour régner)

Chapitre 2

- Définition d'une opération élémentaire
- Définition d'une opération baromètre.
- Définition de la taille d'une instance
- Temps d'exécution

$$C_{worst}(n) = \max_{x:|x|=n} C(x)$$

$$C_{best}(n) = \min_{x:|x|=n} C(x)$$

$$C_{avg}(n) = \sum_{x:|x|=n} P(x)C(x)$$

Chapitre 2

- Notation asymptotique

$$O(g(n)) = \{t(n) : \exists c, n_0 : t(n) \leq cg(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

$$\Omega(g(n)) = \{t(n) : \exists c, n_0 : t(n) \geq cg(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

$$\Theta(g(n)) = \{t(n) : \exists c_1, c_2, n_0 : c_2 g(n) \leq t(n) \leq c_1 g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

- Deux façons de prouver si f(n) appartient à O(g(n)).
  - Trouver les constantes c et n_0.
  - Utiliser les limites

$$\text{si} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} = & c \text{ (fini)} > 0 & \text{alors} & f(n) \in \Theta(g(n)) \\ = & 0 & \text{alors} & f(n) \in O(g(n)) \text{ et } f(n) \notin \Theta(g(n)) \\ = & +\infty & \text{alors} & f(n) \in \Omega(g(n)) \text{ et } f(n) \notin \Theta(g(n)) \end{cases}$$

Analyse d'algorithmes non récursifs

ALGORITHME ElemDiff(A[0..n-1])

//Entrée: tableau A de n éléments
//Sortie: **true** si tous les éléments
//sont distincts et **false** autrement

```
for i ⟵ 0 to n - 2 do
    for j ⟵ i+1 to n - 1 do
        if A[i]=A[j] return false
return true
```

$$C_{BEST}(n) = 1$$

$$C_{WORST}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \ldots \in \Theta(n^2)$$

Résoudre des sommations

- Utilisez l'aide-mémoire
- Utilisez les intégrales

$$\int_{l-1}^{u} f(x)dx \;\le\; \sum_{i=l}^{u} f(i) \;\le\; \int_{l}^{u+1} f(x)dx \text{ pour } f(x) \text{ non décroissant}$$

$$\int_{l}^{u+1} f(x)dx \;\le\; \sum_{i=l}^{u} f(i) \;\le\; \int_{l-1}^{u} f(x)dx \text{ pour } f(x) \text{ non croissant}$$

Analyse des algorithmes non récursifs

ALGORITHME Binary(n)

//Entrée: entier positif de valeur n
//Sortie: le nombre de bits utilisés pour
//sa représentation binaire

count ⟵ 1

while n > 1 **do**

count ⟵ count + 1

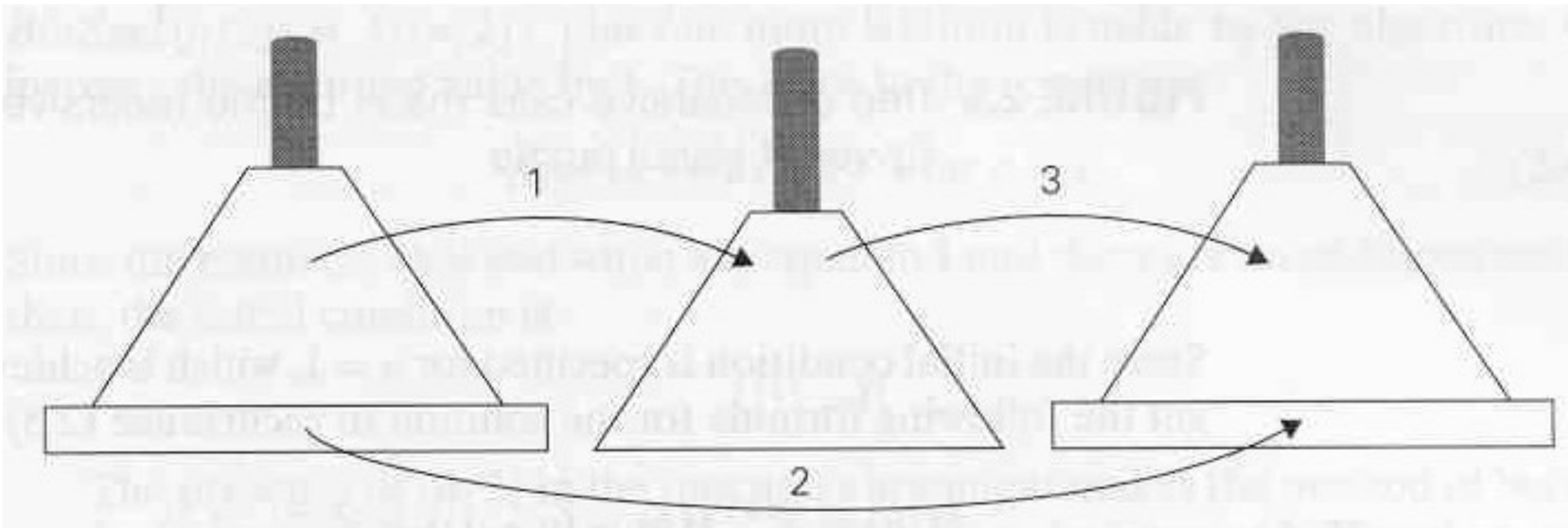
n ⟵ $\lceil n/2 \rceil$

return count

- On peut définir l'efficacité de l'algorithme à l'aide d'une fonction récursive.

- $C(n) = C(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Analyse des algorithmes récursifs



– $C(n) = C(n-1) + 1 + C(n-1) = 2C(n-1) + 1 \quad \forall\, n > 1$ **(la récurrence)**
– Avec: $C(1) = 1$ **(condition initiale)**

Analyse des algorithmes récursifs

- Si l'efficacité de votre algorithme est donnée par une récurrence de la forme

$$T(n) = rT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

- et que l'on vous demande de donner l'efficacité asymptotique de l'algorithme, utilisez le théorème général.

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ \Theta(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases}$$

- Si vous ne pouvez pas utiliser le théorème général, alors vous devez résoudre la récurrence avec la substitution à rebours.

Fonctions harmonieuses

- Une fonction non négative $f(n)$ est **éventuellement non décroissante** ssi il existe n_0 tel que $f(n)$ est non décroissante dans $[n_0,1)$
- Une fonction éventuellement non décroissante est **harmonieuse** ssi $f(2n)$ 2 $\Theta(f(n))$

- **Théorème (règle de l'harmonie):** Si $C(n)$ est éventuellement non décroissant, si $f(n)$ est harmonieuse et si $C(n) \in \Theta(f(n))$ pour $n = b^k$ avec $k \in N$ alors $C(n) \in \Theta(f(n))$ $\forall$ $n \in N$

Chapitre 3

- Algorithmes de force brute
  - pgcdFB
  - Tri par sélection

$$
\begin{aligned}
C(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} [(n-1)-(i+1)+1] \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i \in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Chapitre 4: Diviser pour régner

ALGORITHME DiviserPourRégner(x)
if |x| < seuil **return** *adhoc*(x)
diviser x en plus petites instances $x_1, x_2, \ldots, x_r$
for $i \longleftarrow 1$ **to** r **do** $y_i \longleftarrow$ DiviserPourRégner(x_i)
recombiner les y_i pour obtenir la solution y de x
return y

- Respectez ce gabarit. Le solutionnaire le respecte 99% du temps. C'est votre meilleur indice pour résoudre le problème.

Tri fusion

ALGORITHME MergeSort(A[0..n-1])
//Entrée: le tableau A
//Sortie: le tableau A trié
if n > 1
    copy A[0.. $\lceil n/2 \rceil$ - 1] **to** B[0.. $\lceil n/2 \rceil$ - 1]
    copy A[$\lceil n/2 \rceil$.. n - 1] **to** C[0.. $\lceil n/2 \rceil$ - 1]
    MergeSort(B[0.. $\lceil n/2 \rceil$ - 1])
    MergeSort(C[0.. $\lceil n/2 \rceil$ - 1])
    Merge(B, C, A)
    (**Delete** B; **Delete** C)

- Comprenez-le au point de pouvoir le recoder, mais n’apprenez pas ce pseudo-code par cœur.
- Remarquez comment les tableaux sont divisés lorsque n est pair et lorsque n est impair.

$$C(n) \in \Theta(n \log n)$$

Tri rapide

ALGORITHME QuickSort(A[l..r])
//Entrée: le sous tableau A[l..r] de A[0..n-1]
//Sortie: le sous tableau A[l..r] trié
if l < r **then**
  s ⟵ Partition(A[l..r])
  QuickSort(A[l..s-1])
  QuickSort(A[s+1..r])

$$C_{BEST}(n) \in \Theta(n \log n)$$
$$C_{avg}(n) \in \Theta(n \log n)$$
$$C_{WORST}(n) \in \Theta(n^2)$$

Strassen

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_4 - m_5 + m_7 & m_3 + m_5 \\ m_2 + m_4 & m_1 + m_3 - m_2 + m_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= (a_{00} + a_{11}) \times (b_{00} + b_{11}) \\
m_2 &= (a_{10} + a_{11}) \times b_{00} \\
m_3 &= a_{00} \times (b_{01} - b_{11}) \\
m_4 &= a_{11} \times (b_{10} - b_{00}) \\
m_5 &= (a_{00} + a_{01}) \times b_{11} \\
m_6 &= (a_{10} - a_{00}) \times (b_{00} + b_{01}) \\
m_7 &= (a_{01} - a_{11}) \times (b_{10} + b_{11})
\end{aligned}$$

- Comprenez-le au point de pouvoir le recoder, mais n’apprenez pas ce pseudo-code par cœur.

Recherche binaire

```
ALGORITHM BinarySearch(A[0..n-1], K)
    l ← 0; r ← n-1
    while l ≤ r do
        m ← ⌊(l + r) / 2⌋
        if K = A[m] then return m
        else if K < A[m] then r ← m – 1
        else l ← m + 1
    return -1
```

- Comprenez-le au point de pouvoir le recoder, mais n'apprenez pas ce pseudo-code par cœur.
- Remarquez comment le tableau est divisé lorsque n est pair et lorsque n est impair.
- La difficulté de cet algorithme, c'est d'éviter une boucle infinie causée par une mauvaise division du tableau.

$$C_{BEST}(n) \in \Theta(1)$$

$$C_{WORST}(n) \in \Theta(\log n)$$

Diviser pour régner

- Trouver le min et le max d'un tableau (Série 4)
- Chess-Boxing (Série 4)
- Le problème des boulons (Série 4)

Chapitre 5: Diminuer pour régner

- Problème d'exponentiation
  - Trois façons différentes de calculer a^n.

Chapitre 5: Diminuer pour régner

- Algorithme d’Euclide
- Binary / BinRec (Chapitre 2)
- Trouver la fausse pièce de monnaie (Série 5)
- Le problème du colis (Série 5)

Tri par insertion

```
ALGORITHM InsertionSort(A[0..n-1])
   for i ← 1 to n-1 do
        v ← A[i]    // élément à insérer
        j ← i – 1   // positions possibles d'insertion
        while j ≥ 0 and A[j] > v do
              A[j+1] ← A[j]
              j ← j – 1
         A[j+1] ← v   // insertion
```

- Comprenez-le au point de pouvoir le recoder, mais n'apprenez pas ce pseudo-code par cœur.
- Révisez l'analyse de l'algorithme.

$$C_{BEST}(n) \in \Theta(n)$$

$$C_{avg}(n) \in \Theta(n^2)$$

$$C_{WORST}(n) \in \Theta(n^2)$$

Le problème de sélection

ALGORITHME SelectionRec(A[l..r], k)
//Entrée: un sous tableau A[l..r] et un entier k : 1 ≤ k ≤ r – l + 1
//Sortie: le kième plus petit élément dans A[l..r]
s ⟵ Partition(A[l..r])
if s-l+1 = k **return** A[s]
if s-l+1 > k **return** SelectionRec(A[l..s-1], k)
if s-l+1 < k **return** SelectionRec(A[s+1..r], k-s+l-1)

- Comprenez-le au point de pouvoir le recoder, mais n’apprenez pas ce pseudo-code par cœur.

Algorithmes probabilistes

$$
\begin{aligned}
C_{best}(n) &= \min_{x:|x|=n} C(x) \\
C_{worst}(n) &= \max_{x:|x|=n} C(x) \\
C_{avg}(n) &= \mathbb{E}_{x:|x|=n} C(x) = \sum_{x:|x|=n} P_n(x) C(x)
\end{aligned}
$$

Pas à l'examen intra.

$$
\begin{aligned}
C_{best}(n) &= \min_{x:|x|=n} \mathbb{E}_\rho C(x,\rho) = \min_{x:|x|=n} \sum_\rho p(\rho) C(x,\rho) \\
C_{worst}(n) &= \max_{x:|x|=n} \mathbb{E}_\rho C(x,\rho) = \max_{x:|x|=n} \sum_\rho p(\rho) C(x,\rho) \\
C_{avg}(n) &= \mathbb{E}_{x:|x|=n} \mathbb{E}_\rho C(x,\rho) = \sum_{x:|x|=n} P_n(x) \sum_\rho p(\rho) C(x,\rho)
\end{aligned}
$$

- Algorithme de partition randomisé
  - Sélection randomisé: $C(n) \in \Theta(n)$
  - Tri rapide randomisé: $C(n) \in \Theta(n \log n)$