Solutions des exercices du chapitre 5

Question # 1
*Considérer l'expression régulière 0*1*0*2*, c'est-à-dire une séquence de 0, suivie d'une séquence de 1, suivie d'une séquence de 0, suivie d'une séquence de 2. Chaque séquence est potentiellement vide. Modélisez un problème où les 8 variables* $X_1, \ldots, X_8$ *doivent former une séquence acceptée par l'expression régulière 0*1*0*2*. Proposez une structure d'arbre (et non pas d'hyperarbre).*

Solution : *On crée une variable* Y_i *pour* $1 \leq i \leq 8$. *Le domaine de* Y_i *est* $\{0, 1, 2, 3\}$. *On ajoute ensuite les contraintes suivantes.*

$$\begin{aligned} T &= [(0,0),(1,1),(0,2),(2,3)] \\ &Tableau(X_i, Y_i, T) \\ Y_i &\leq Y_{i+1} \end{aligned}$$

$Y_i = 0$ *indique que* $X_i = 0$ *puisque* X_i *fait partie de la première sous-séquence 0*.* $Y_i = 1$ *indique que* $X_i = 1$ *puisque* X_i *fait partie de la sous-séquence 1*.* $Y_i = 2$ *indique que* $X_i = 0$ *puisque* X_i *fait partie de la deuxième sous-séquence 0*. Finalement,* $Y_i = 3$ *indique que* $X_i = 2$, *car* X_i *fait partie de la sous-séquence 2*. La contrainte* $Y_i \leq Y_{i+1}$ *assure qu'on peut passer d'une sous-séquence à la suivante en permettant d'avoir des sous-séquences vides. Par exemple, si on a la séquence* $X = [1,1,1,1,2,2,2,2]$, *on a alors* $Y = [1,1,1,1,3,3,3,3]$.

Question # 2
Démontrez comment une expression mathématique formée des opérateurs $+$, $-$, $\times$, $/$, $\log$, $\sqrt{}$, *et* $=$ *et dont toutes les variables n'apparaissent qu'une seule fois peut être décomposée en structure d'hyperarbre.*

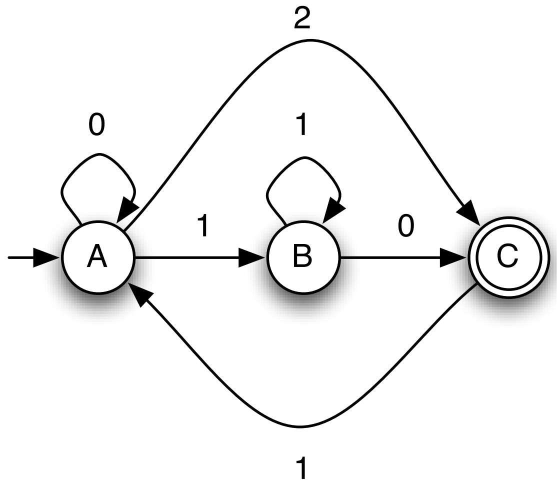
Solution : *On remplace l'expression* $A + B$ *par une variable* C *et ajoute la contrainte* $C = A + B$ *dans le modèle. On fait de même avec tous les opérateurs binaires* $+$, $-$, $\times$, *et* $/$. *On remplace l'expression* $\log(X)$ *par une variable* Y *et ajoute la contrainte* $Y = \log(X)$ *dans le modèle. On fait de même avec la racine carrée. Cette méthode s'applique aux deux côtés de l'égalité.*

Ainsi, l'expression $(A + B) * \sqrt{C} = \frac{\log(D)}{E}$ *sera transformée par le modèle suivant.*

$$Z = A + B \tag{1}$$
$$Y = \sqrt{C} \tag{2}$$
$$X = Z * Y \tag{3}$$
$$W = \log(D) \tag{4}$$
$$V = \frac{W}{E} \tag{5}$$
$$X = V \tag{6}$$

On obtient nécessairement une structure d'arbre puisque la portée de chaque contrainte se croise sur au plus une variable. Puisque les variables ne se répètent pas dans l'expression originale, on obtient une structure d'arbre où les variables apparaissant du côté droit des équations (1) *à* (6) *sont les enfants de la variable apparaissant du côté gauche des équations.*

Question # 3
Voici un automate.



A) *Listez chaque transition sous la forme d'un triplet (ancien état, caractère, nouvel état).*

Solution : *Les transitions sont listées dans le Tableau 1.*

Ancien état	**Caractère**	**Nouvel état**
A	0	A
A	1	B
A	2	C
B	1	B
B	0	C
C	1	A

TABLE 1 – Transitions de l'automate.

B) *Considérez une séquence de 6 caractères $X_1, \ldots, X_6$. Construisez un modèle en structure d'hyper-arbre qui contraint cette séquence à être reconnue par l'automate.*

Solution : *On déclare 7 variables $Q_0, \ldots, Q_6$ avec les domaines suivants.*

$$\begin{array}{lll} \mathrm{dom}(Q_0) = \{A\} & \mathrm{dom}(Q_1) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_2) = \{A, B, C\} \\ \mathrm{dom}(Q_3) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_4) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_5) = \{A, B, C\} \\ \mathrm{dom}(Q_6) = \{C\} & & \end{array}$$

Les variables X_i ont pour domaine $\mathrm{dom}(X_i) = \{0, 1, 2\}$ pour tout $i \in 1..6$. On a une contrainte $\textsc{Tableau}(Q_{i-1}, X_i, Q_i, T)$ *pour tout $i \in 1..6$ où T est le tableau de la question A).*

C) *Énumérez les valeurs des domaines après avoir appliqué la cohérence de domaine sur les contraintes de votre modèle.*

Solution : *Après le filtrage, le problème atteint la cohérence locale avec les domaines suivants.*

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{dom}(Q_0) = \{A\} & \mathrm{dom}(Q_1) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_2) = \{A, B, C\} \\
\mathrm{dom}(Q_3) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_4) = \{A, B, C\} & \mathrm{dom}(Q_5) = \{A, B\} \\
\mathrm{dom}(Q_6) = \{C\} & & \\
\mathrm{dom}(X_1) = \{0, 1, 2\} & \mathrm{dom}(X_2) = \{0, 1, 2\} & \mathrm{dom}(X_3) = \{0, 1, 2\} \\
\mathrm{dom}(X_4) = \{0, 1, 2\} & \mathrm{dom}(X_5) = \{0, 1\} & \mathrm{dom}(X_6) = \{0, 2\}
\end{array}
$$

D) *Énumérez les valeurs des domaines après avoir instancié $X_3 = 2$ et après avoir appliqué la cohérence de domaine sur les contraintes de votre modèle.*

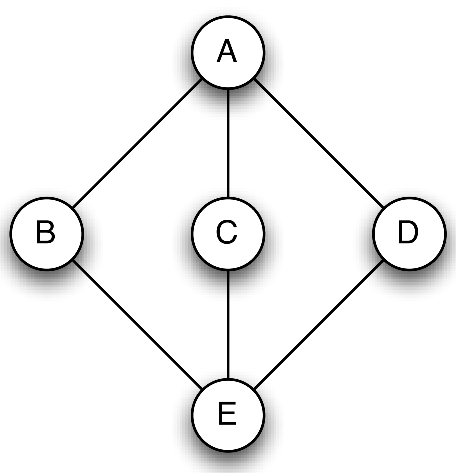
Solution :

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{dom}(Q_0) = \{A\} & \mathrm{dom}(Q_1) = \{A, C\} & \mathrm{dom}(Q_2) = \{A\} \\
\mathrm{dom}(Q_3) = \{C\} & \mathrm{dom}(Q_4) = \{A\} & \mathrm{dom}(Q_5) = \{A, B\} \\
\mathrm{dom}(Q_6) = \{C\} & & \\
\mathrm{dom}(X_1) = \{0, 2\} & \mathrm{dom}(X_2) = \{0, 1\} & \mathrm{dom}(X_3) = \{2\} \\
\mathrm{dom}(X_4) = \{1\} & \mathrm{dom}(X_5) = \{0, 1\} & \mathrm{dom}(X_6) = \{0, 2\}
\end{array}
$$

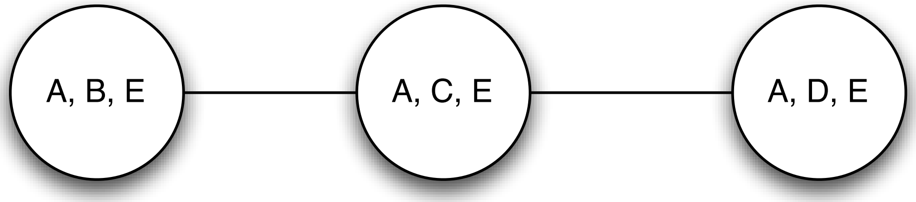
Question # 4

Trouvez une décomposition d'arbre pour les graphes suivants. Trouvez une décomposition dont la largeur est la plus petite possible. Plusieurs solutions sont possibles.

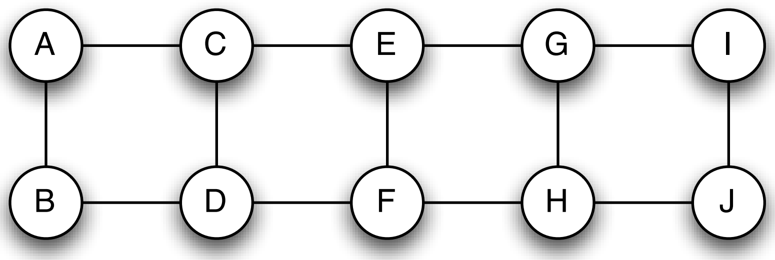
A)



Solution : *Cette solution a une largeur d'arbre de 2.*



B)



Solution : *Cette solution a une largeur d'arbre de 2.*