Solutions des exercices du chapitre 4

Question # 1
Appliquez l'arithmétique des intervalles sur chacune des expressions suivantes.

A) $[1, 3][-2, 4] - [-2, 4]$

Solution :

$$[1, 3][-2, 4] - [-2, 4] = [-6, 12] - [-2, 4] = [-10, 14]$$

B) $\dfrac{[-1, 4][-3, -1]}{[2, 4]}$

Solution :

$$\frac{[-1, 4][-3, -1]}{[2, 4]} = \frac{[-12, 3]}{[2, 4]} = [-6, \frac{3}{2}]$$

C) $[2, 4] - \dfrac{[2, 4]}{[-1, 4]}$

Solution : *Le calcul de l'inverse de* $[-1, 4]$ *donne* $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{4}, \infty)$*, mais puisqu'il ne s'agit pas d'un intervalle, on approxime l'inverse avec l'intervalle* $(-\infty, \infty)$*.*

$$[2, 4] - \frac{[2, 4]}{[-1, 4]} = (-\infty, \infty)$$

D) $\sqrt{[2, 6] - [2, 4]}$

Solution :

$$\sqrt{[2, 6] - [2, 4]} = \sqrt{[-2, 4]} = \sqrt{[-2, 4] \cap [0, \infty)} = \sqrt{[0, 4]} = [0, 2]$$

Question # 2

Calculez la valeur des fonctions suivantes. Vous devez trouver un intervalle exact.

A) $f([1,3],[2,8])$, *où* $f(X,Y) = 2^X - \log_2(Y)$

Solution : *Puisque que chaque variable n'apparaît qu'une seule fois, on peut appliquer directement l'arithmétique des intervalles.*

$$f([1,3],[2,8]) = 2^{[1,3]} - \log_2([2,8])$$

Les fonctions exponentielle et logarithmique sont des fonctions croissantes

$$= [2^1, 2^3] - [\log_2 2, \log_2 8] = [2,8] - [1,3] = [-1,7]$$

B) $f([1,4],[2,8])$, *où* $f(X,Y) = X^2 + XY^2$

Solution : *Puisque la variable X est répétée deux fois, il faut étudier sa monotonie. Nul besoin de le faire pour la variable Y car elle n'apparaît qu'une seule fois.*

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X,Y) = 2X + Y^2$$
$$\frac{\partial}{\partial X} f([1,4],[2,8]) = 2[1,4] + [2,8]^2$$

La fonction carré est croissante sur l'intervalle [2, 8]

$$= 2[1,4] + [2^2, 8^2] = [2,8] + [4,64] = [6,72] \geq 0$$

La fonction f est donc croissante par rapport à X. Trouvons une borne supérieure.

$$f([1,4],[2,8]) \leq f(4,[2,8]) = 4^2 + 4[2,8]^2 = 16 + 4[4,64]$$
$$= 16 + [16,256] = [32,272] \leq 272$$

Trouvons une borne inférieure.

$$f([1,4],[2,8]) \geq f(1,[2,8]) = 1^2 + 1[2,8]^2 = 1 + [4,64] = [5,65] \geq 5$$

La fonction est donc bornée par 5 et 272.

$$f([1,4],[2,8]) = [5,272]$$

C) $f([1,4],[4,8])$, *où* $f(X,Y) = 3X - XY + 4Y - 12$

Première solution :

$$f(X,Y) = (X-4)(3-Y)$$

Chaque variable n'apparaît qu'une seule fois.

$$f([1,4],[4,8]) = ([1,4] - 4)(3 - [4,8]) = [-3,0][-5,-1] = [0,15]$$

Deuxième solution : *Analysons la monotonie de $f(X,Y)$.*

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X,Y) = 3 - Y$$
$$\frac{\partial}{\partial X} f([1,4],[4,8]) = 3 - [4,8] = [-5,-1] \leq 0$$

La fonction $f(X,Y)$ est donc décroissante par rapport à X

$$\frac{\partial}{\partial Y} f(X,Y) = -X + 4$$
$$\frac{\partial}{\partial Y} f([1,4],[4,8]) = -[1,4] + 4 = [-4,-1] + 4 = [0,3] \geq 0$$

La fonction $f(X,Y)$ est donc croissante par rapport à Y

$$f([1,4],[4,8]) \leq f(1,8) = 3 \times 1 - 1 \times 8 + 4 \times 8 - 12 = 15$$
$$f([1,4],[4,8]) \geq f(4,4) = 3 \times 4 - 4 \times 4 + 4 \times 4 - 12 = 0$$
$$f([1,4],[4,8]) = [0,15]$$

Question # 3
Calculez la valeur des fonctions suivantes. Vous devez trouver l'intervalle le plus serré, mais vous n'arriverez peut-être pas à trouver l'intervalle exact.

A) $f([-1,2])$, *où* $f(X) = X^2$

Solution : *La variable n'apparaît qu'une seule fois mais la fonction carré n'est pas croissante sur l'intervalle* $[-1,2]$. *On peut donc écrire.*

$$\begin{aligned} f(X) &= XX \\ f([-1,2]) &\subseteq [-1,2][-1,2] = [-2,4] \end{aligned}$$

Note facultative : *Pour obtenir une solution exacte, nous aurions pu utiliser la propriété* $f([a,b]) = f([a,c]) \cup f([c,b])$ *quand* f *est monotone sur les intervalles* $[a,c]$ *et* $[c,b]$. *Dans notre cas,* f *est monotone sur* $[-1,0]$ *et sur* $[0,2]$. *Nous avons donc le résultat suivant.*

$$f([-1,2]) = f([-1,0]) \cup f([0,2]) = [f(0), f(-1)] \cup [f(0), f(2)] = [0,1] \cup [0,4] = [0,4]$$

Trouver la valeur c *qui divise l'intervalle requiert l'analyse des extremums de la fonction* f *ce qui est en dehors du contexte de ce cours.*

B) $f([1,4],[-1,4])$, *où* $f(X,Y) = \sqrt{X}Y - XY$

Solution : *On peut s'éviter la moitié du travail en factorisant* Y.

$$f(X,Y) = (\sqrt{X} - X)Y$$

Analysons la monotonie de f *par rapport à* X.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} f(X,Y) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{X}} - 1\right) Y \\ \frac{\partial}{\partial X} f([1,4],[-1,4]) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{[1,4]}} - 1\right)[-1,4] = \left(\frac{1}{2[1,2]} - 1\right)[-1,4] \\ &= \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] - 1\right)[-1,4] = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right][-1,4] = \left[-3, \frac{3}{4}\right] \gtrless 0 \end{aligned}$$

La fonction n'étant pas monotone par rapport à X, *nous n'obtiendrons pas une solution exacte.*

$$\begin{aligned} f([1,4],[-1,4]) &\subseteq (\sqrt{[1,4]} - [1,4])[-1,4] = ([1,2] - [1,4])[-1,4] \\ &= [-3,1][-1,4] = [-12,4] \end{aligned}$$

Question # 4
Appliquez la cohérence de bornes à la contrainte arithmétique. Les variables peuvent prendre des valeurs réelles.

A) $2^X - Y = 3$ *avec* $\mathrm{dom}(X) = [1, 2]$ *et* $\mathrm{dom}(Y) = [1, 5]$

Solution : *Filtrons* X.

$$\begin{aligned} X &= \log_2(Y + 3) \\ f_X(Y) &= \log_2(Y + 3) \\ \mathrm{dom}(X) &\leftarrow \mathrm{dom}(X) \cap f_X(\mathrm{dom}(Y)) \\ &\leftarrow [1, 2] \cap \log_2([1, 5] + 3) \\ &\leftarrow [1, 2] \cap \log_2([4, 8]) \\ &\leftarrow [1, 2] \cap [2, 3] \\ &\leftarrow [2, 2] \end{aligned}$$

Filtrons ensuite Y.

$$\begin{aligned} Y &= 2^X - 3 \\ f_Y(X) &= 2^X - 3 \\ \mathrm{dom}(Y) &\leftarrow \mathrm{dom}(Y) \cap f_Y(\mathrm{dom}(X)) \\ &\leftarrow [1, 5] \cap f_Y([1, 2]) \\ &\leftarrow [1, 5] \cap 2^{[1,2]} - 3 \\ &\leftarrow [1, 5] \cap [2^1, 2^2] - 3 \\ &\leftarrow [1, 5] \cap [2, 4] - 3 \\ &\leftarrow [1, 5] \cap [-1, 1] \\ &\leftarrow [1, 1] \end{aligned}$$

B) $X + XY = 5$ *avec* $\mathrm{dom}(X) = [0, 10]$ *et* $\mathrm{dom}(Y) = [0, 10]$

Solution : *Filtrons X.*

$$\begin{aligned}
X(1+Y) &= 5 \\
X &= \frac{5}{1+Y} \\
f_X(Y) &= \frac{5}{1+Y} \\
\mathrm{dom}(X) &\leftarrow \mathrm{dom}(X) \cap f_X(\mathrm{dom}(Y)) \\
&\leftarrow [0,10] \cap f_X([0,10]) \\
&\leftarrow [0,10] \cap \frac{5}{1+[0,10]} \\
&\leftarrow [0,10] \cap \frac{5}{[1,11]} \\
&\leftarrow [0,10] \cap [\frac{5}{11},5] \\
&\leftarrow [\frac{5}{11},5]
\end{aligned}$$

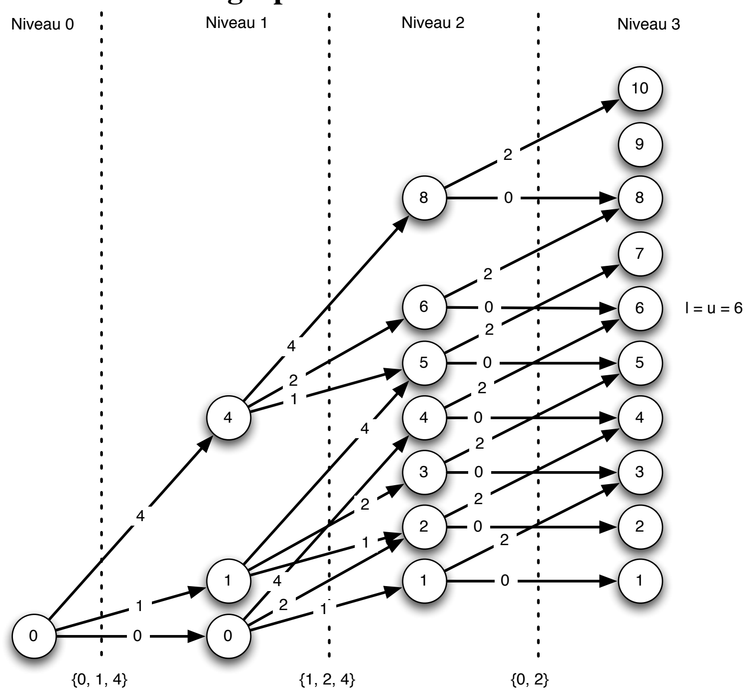
Filtrons Y.

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{5-X}{X} \\
&= \frac{5}{X} - 1 \\
f_Y(X) &= \frac{5}{X} - 1 \\
\mathrm{dom}(Y) &\leftarrow \mathrm{dom}(Y) \cap f_Y(\mathrm{dom}(X)) \\
&\leftarrow [0,10] \cap f_Y([0,10]) \\
&\leftarrow [0,10] \cap \frac{5}{[0,10]} - 1 \\
&\leftarrow [0,10] \cap \left[\frac{1}{2},\infty\right) - 1 \\
&\leftarrow [0,10] \cap \left[-\frac{1}{2},\infty\right) \\
&\leftarrow [0,10]
\end{aligned}$$

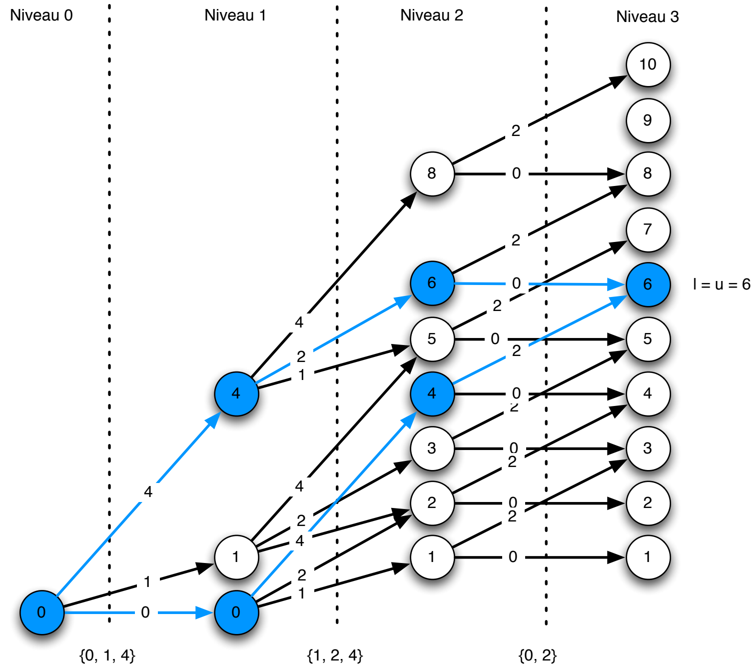
Question # 5
Utilisez l'algorithme de Trick pour appliquer la cohérence de domaine sur les variables entières suivantes. Construisez le graphe, marquez les noeuds et les arêtes, et filtrez le graphe de même que les domaines.

$$\begin{aligned} 6 \leq A + B + C \leq 6 \\ \mathrm{dom}(A) = \{0, 1, 4\} \\ \mathrm{dom}(B) = \{1, 2, 4\} \\ \mathrm{dom}(C) = \{0, 2\} \end{aligned}$$

Construction du graphe



Marquage des noeuds et des arêtes



Filtrage du graphe et des domaines