Le théorème général

Claude-Guy Quimper

1 Introduction

Le théorème général stipule qu'une récurrence de la forme $C(n) = rC(\frac{n}{b}) + f(n)$ où $f(n) \in \Theta(n^d)$ pour n de la forme b^k a l'un des trois ordres de croissance suivants.

$$C(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ \Theta(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{1}$$

Ce théorème s'applique aussi pour cette forme plus générale de la récurrence

$$C(n) = rC(\frac{n}{b} + e) + f(n) \tag{2}$$

où e est une constante, $f(n) \in \Theta(n^d)$ et n a la forme b^k. Par exemple, dans cette récurrence

$$C(n) = 2C(\frac{n}{2} - 1) + n, \tag{3}$$

nous avons $r = 2$, $b = 2$, $e = -1$ et $d = 1$. Puisque $b^d = r$, nous pouvons conclure que

$$C(n) \in \Theta(n \log n). \tag{4}$$

Le théorème s'applique aussi dans ce cas plus général où les valeurs e_i sont des constantes et $f(n) \in \Theta(n^d)$:

$$C(n) = \sum_{i=1}^{r} C(\frac{n}{b} + e_i) + f(n). \tag{5}$$

Par exemple, dans cette récurrence

$$C(n) = C(\frac{n}{2} + 1) + C(\frac{n}{2} - 3) + n^2, \tag{6}$$

nous avons $b = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = -3$, $r = 2$, et $d = 2$. Puisque $r < b^d$, nous avons

$$C(n) \in \Theta(n^2). \tag{7}$$

2 Le théorème général généralisé

Théorème 1 *Soit une récurrence de la forme $C(n) = \sum_{i=1}^{r} C(\frac{n}{b} + e_i) + f(n)$ où les valeurs e_i sont des constantes, où n est une entier de la forme b^k et $f(n)$ est une fonction telle que $f(n) \in \Theta(n^d)$. La récurrence a l'un de ces trois ordres de croissance.*

$$C(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & si\ r < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & si\ r = b^d \\ \Theta(n^{\log_b r}) & si\ r > b^d \end{cases}$$

3 Preuve (facultative)

Considérez cette récurrence.

$$C(n) = rC(\frac{n}{b} + e) + \Theta(n^d) \tag{8}$$

Nous démontrons que le théorème général s'applique pour ce type de récurrence.

$$C(n) = rC(\frac{n}{b} + e) + \Theta(n^d) \tag{9}$$

Posons $n = b^k + \frac{eb}{b-1}$

$$C(b^k + \frac{eb}{b-1}) = rC\left(\frac{b^k + \frac{eb}{b-1}}{b} + e\right) + \Theta((b^k + \frac{eb}{b-1})^d) \tag{10}$$

$$= rC\left(b^{k-1} + \frac{eb}{b-1}\right) + \Theta((b^k + \frac{eb}{b-1})^d) \tag{11}$$

Posons $D(x) = C(x + \frac{eb}{b-1})$

$$D(b^k) = rD(b^{k-1}) + \Theta((b^k + \frac{eb}{b-1})^d) \tag{12}$$

Posons $m = n - \frac{eb}{b-1} = b^k$

$$D(m) = rD(\frac{m}{b}) + \Theta(m + \frac{eb}{b-1})^d) \tag{13}$$

Puisque $\Theta((m + \frac{eb}{b-1})^d) = \Theta(m^d)$, nous appliquons le théorème général et obtenons trois cas possibles.

$$D(m) \in \begin{cases} \Theta(m^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta(m^d \log m) & \text{si } r = b^d \\ \Theta(m^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{14}$$

Substituons $m = n - \frac{eb}{b-1}$.

$$D(n - \frac{eb}{b-1}) \in \begin{cases} \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^d \log(n - \frac{eb}{b-1})) & \text{si } r = b^d \\ \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{15}$$

$$C(n) \in \begin{cases} \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^d \log(n - \frac{eb}{b-1})) & \text{si } r = b^d \\ \Theta((n - \frac{eb}{b-1})^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{16}$$

Puisque $\frac{eb}{b-1}$ est constant.

$$C(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ \Theta(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{17}$$

3.1 Preuve de la forme générale

Nous considérons la forme générale

$$C(n) = \sum_{i=1}^{r} C(\frac{n}{b} + e_i) + \Theta(n^d). \tag{18}$$

Nous trouvons une borne asymptotique inférieure.

$$\begin{align} C(n) &\geq rC(\frac{n}{b} + \min_i e_i) + n^d \tag{19} \\ &\in \begin{cases} \Omega(n^d) & \text{si } r < b^d \\ \Omega(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ \Omega(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{20} \end{align}$$

De façon similaire, nous prouvons une borne asymptotique supérieure.

$$\begin{align} C(n) &\leq rC(\frac{n}{b} + \max_i e_i) + n^d \tag{21} \\ &\in \begin{cases} O(n^d) & \text{si } r < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ O(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{22} \end{align}$$

En combinant les deux bornes précédentes, nous obtenons l'ordre de croissance.

$$C(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{si } r < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{si } r = b^d \\ \Theta(n^{\log_b r}) & \text{si } r > b^d \end{cases} \tag{23}$$