

SOLUTIONS SÉRIE 5 B (Analyse amortie)

Question # 1

Considérez une structure de données de pile avec les opérations *Ajoute* et *Vide* implantées de la façon suivante.

Algorithme 1 : *Ajoute*(x)

```
1 S.push( $x$ ) ; // s'exécute en  $\Theta(1)$ 
```

Algorithme 2 : *Vide*(x)

```
1 tant que  $S \neq \emptyset$  faire  
2    $S$ .pop() ; // s'exécute en  $\Theta(1)$ 
```

Démontrez que ces deux fonctions s'exécutent en temps amorti $\Theta(1)$.

Première solution : En utilisant la méthode du comptable, on charge $C_{ajoute}(n) = 2 \in \Theta(1)$ chaque fois que la fonction *Ajoute* est appelée : une unité pour ajouté l'élément x et une unité de temps qui sera dépensée par la fonction *Vide* au moment d'appeler *pop*. On charge $C_{vide}(n) = 1 \in \Theta(1)$. La banque de temps n'est jamais en déficit car la fonction *pop* a déjà été chargée pour tous les éléments qui ont été précédemment ajoutés.

Deuxième solution : Soit la fonction de potentiel $\phi(S) = |S|$. Initialement, cette fonction est nulle puisque $|S| = 0$. De plus, cette fonction n'est jamais négative. L'efficacité amortie de la fonction *ajoute* est donc $C_{ajoute}(n) = 1 + \phi(S') - \phi(S) = 2 \in \Theta(1)$ puisque $|S'| - |S| = 1$. L'efficacité de la fonction *Vide* est $C_{vide}(n) = |S| + \phi(S') - \phi(S) = |S| + 0 - |S| = 0 \in \Theta(1)$.

Question # 2

Montrez comment vous pouvez implanter une file (premier arrivé premier servi) à l'aide de deux piles (premier arrivé, dernier servi). En supposant que les opérations *push* et *pop* d'une pile s'exécutent en temps constant, démontrez que votre implémentation des fonctions *push* et *pop* de votre file s'exécutent en temps amorti constant.

Solution :

Algorithme 3 : File : :Initialise()

```
1  $A \leftarrow \emptyset$  ; // Crée une pile vide  
2  $B \leftarrow \emptyset$  ; // Crée une pile vide
```

Algorithme 4 : File : :Push(x)

```
1  $A$ .push( $x$ ) ;
```

Algorithme 5 : File : :Pop()

```
1 si  $B = \emptyset$  alors
2   tant que  $A \neq \emptyset$  faire
3      $y \leftarrow A.pop()$ ;
4      $B.push(y)$ ;
5 retourner  $B.pop()$ ;
```

Analyse amortie par la méthode du comptable : Pour chaque appel à $File::Push$, on charge $C_{amorti}^{push}(n) = 3$. Pour chaque appel à cette fonction, une unité de temps servira à ajouter l'élément x à la pile A (ligne 1 de $File::Push$), une unité de temps servira au retrait de cet élément de la pile A (ligne 3 de $File::Pop$) et une unité de temps servira à l'ajout de l'élément à la pile B (ligne 4 de $File::Pop$). Chaque appel à $File::Push$ engrange donc 2 unités de temps. On charge ensuite $C_{amorti}^{pop}(n) = 1$ pour chaque appel à $File::Pop$. En effet, le temps passé dans la boucle « tant que » a déjà été payé. Il ne reste plus qu'à charger une unité de temps pour retirer l'élément de la file B (ligne 5 de $File::Pop$). Nous avons donc $C_{amorti}^{push}(n) = 3 \in \Theta(1)$ et $C_{amorti}^{pop}(n) = 1 \in \Theta(1)$.

Analyse amortie par la méthode de la fonction potentiel : Soit $\phi(A, B) = 3|A| + |B|$ la fonction potentiel. Notons que $\phi(\emptyset, \emptyset) = 0$ et que $\phi(A, B) \geq 0$ pour toutes piles A et B . Soit A et B les piles avant un appel à $File::Push$ et A' et B' les files après cet appel. Remarquons que $B = B'$ puisque la fonction ne modifie pas la pile B . Nous avons

$$\begin{aligned} C_{amorti}^{push}(A, B) &= 1 + \phi(A', B') - \phi(A, B) & (1) \\ &= 1 + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| & (2) \\ &= 1 + 3|A'| + |B| - 3|A| - |B| & \text{car } B' = B \quad (3) \\ &= 1 + 3(|A'| - |A|) & (4) \\ &= 1 + 3 \cdot 1 & \text{car } |A'| = |A| + 1 \quad (5) \\ &= 4 & (6) \\ &\in \Theta(1) & (7) \end{aligned}$$

Pour la fonction $File::Push$, encore une fois, supposons que A et B sont les piles avant l'appel à la fonction et A' et B' sont les piles après l'appel à la fonction. Nous avons

$$\begin{aligned} C_{réel}^{pop}(A, B) &= \begin{cases} 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 1 + 2|A| & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (8) \\ C_{amorti}^{pop}(A, B) &= C_{réel}^{pop}(A, B) + \phi(A', B') - \phi(A, B) & (9) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| & (10) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3(|A'| - |A|) + (|B'| - |B|) & (11) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + \begin{cases} 3 \cdot 0 - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 3(0 - |A|) + ((|A| - 1) - 0) & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (12) \\ &= \begin{cases} C_{réel}^{pop}(A, B) - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ C_{réel}^{pop}(A, B) - 2|A| - 1 & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (13) \\ &= 0 & (14) \\ &\in \Theta(1) & (15) \end{aligned}$$