Chapitre 4
Algorithmes de filtrage pour les contraintes arithmétiques

Claude-Guy Quimper

Introduction

- Dans ce chapitre, nous apprendrons comment filtrer des contraintes arithmétiques.
- Nous verrons comment filtrer des variables avec des domaines continues et ensuite des variables avec des domaines entiers (donc discrets).
- Nous verrons également les limites de ce que peut accomplir le filtrage sur ces contraintes.

La contrainte d'égalité

- Soit la contrainte et les domaines suivants
  $X = Y$, $dom(X) = [a, b]$, $dom(Y) = [c, d]$
- Comment filtrer les domaines de ces variables?
- Pour qu'une valeur ait un support, elle doit se trouver dans les deux domaines. On ne garde donc que les valeurs qui sont dans l'intersection des deux domaines.
- Dans le cas particulier de la cohérence de bornes, on ne garde que la plus grande des deux bornes inférieures et la plus petite des deux bornes supérieures.
  $dom(A) = dom(B) = [max(a, c), min(b, d)]$

Exemple

- Soit $dom(A) = \{1, 3, 5\}$ et $dom(B) = \{1, 4, 6\}$ deux domaines et $A = B$ une contrainte d'égalité.
- Après l'application de la cohérence de domaine, nous obtenons $dom(A) = dom(B) = \{1\}$.
- Soit $dom(X) = [1, 5]$ et $dom(Y) = [3, 7]$ deux domaines et $X = Y$ une contrainte d'égalité.
- Après l'application de la cohérence de bornes, nous obtenons $dom(X) = dom(Y) = [3, 5]$.

Arithmétique des intervalles

- L’arithmétique d’intervalle applique les opérateurs arithmétiques sur des **intervalles continus** plutôt que sur des nombres.
- Elle permet de répondre à des questions telles que: quels nombres peut-on obtenir en additionnant un nombre dans l’intervalle [1, 5] avec un nombre dans l’intervalle [2, 3]?
- Nous allons d’abord les appliquer sur les intervalles continus pour ensuite les appliquer aux nombres entiers dont les intervalles sont discrets.

L'addition

- Si l'on prend un nombre dans [a, b] et l'additionne à un nombre dans [c, d], nous obtenons un nombre dans [a + c, b + d].
- On écrit

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

Utiliser l'arithmétique des intervalles pour le filtrage

- Supposons que nous avons la contrainte $X + Y = Z$ et les domaines suivants:
  $dom(X) = [a, b]$, $dom(Y) = [c, d]$, $dom(Z) = [e, f]$.
- L'arithmétique d'intervalle nous indique que les valeurs que peut prendre l'expression $X + Y$ sont dans l'intervalle $[a + c, b + d]$.
- La contrainte d'égalité force la contrainte Z à prendre une valeur dans l'intersection de $[e, f]$ et $[a + c, b + d]$.
- Le domaine de Z est donc filtré à $[\max(e, a + c), \min(f, b + d)]$.

Exemple

- Soit une contrainte linéaire sur les variables A, B et C.

$$A + B = C$$

$$\mathrm{dom}(A) = [1, 8]$$

$$\mathrm{dom}(B) = [2, 7]$$

$$\mathrm{dom}(C) = [1, 6]$$

- L'ensemble des valeurs pouvant être produites par A + B est

$$[1, 8] + [2, 7] = [3, 15]$$

- Les valeurs que peuvent prendre C sont donc dans l'intersection de [1, 6] et [3, 15].

$$\mathrm{dom}(C) \leftarrow [1, 6] \cap [3, 15] = [\max(1, 3), \min(6, 15)] = [3, 6]$$

Addition d'une constante

- On peut additionner une constante k à un intervalle de la façon suivante.

$$[a, b] + k = [a + k, b + k]$$

- Exemples:

$$[2, 4] + 1 = [3, 5]$$
$$[2, 7] - 3 = [2, 7] + (-3) = [-1, 4]$$

Multiplier par une constante

- Le produit d'une constante k par un intervalle [a, b] dépend du signe de k.

$$k[a, b] = \begin{cases} [ka, kb] & \text{Si } k \geq 0 \\ [kb, ka] & \text{Si } k < 0 \end{cases}$$

- Exemples:

$$2[3, 5] = [6, 10]$$
$$-3[2, 7] = [-21, -6]$$
$$-2[-1, 8] = [-16, 2]$$
$$2[-7, -2] = [-14, -4]$$

Soustraction

- De la règle de l'addition et celle de la multiplication par une constante, on déduit la règle de la soustraction.

$$\begin{aligned}[a, b] - [c, d] &= [a, b] + (-1)[c, d] \\ &= [a, b] + [-d, -c] \\ &= [a - d, b - c]\end{aligned}$$

- Exemples

$$[4, 9] - [1, 4] = [0, 8]$$

$$[-3, 8] - [-4, -2] = [-1, 12]$$

Multiplication et division

- La multiplication de deux intervalles se fait de la façon suivante.

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

- Pour diviser, nous multiplions par l'inverse que l'on définie ainsi.

$$\frac{1}{[a, b]} = \begin{cases} \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] & \text{si } 0 \notin [a, b] \\ \left[\frac{1}{b}, \infty\right) & \text{si } a = 0 < b \\ \left(-\infty, \frac{1}{a}\right] & \text{si } a < 0 = b \\ (-\infty, \infty) \setminus \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) & \text{si } a < 0 < b \end{cases}$$

Fonctions

- Les fonctions peuvent aussi être évaluées avec des intervalles.
- Soit $f(X,Y) = XY - 2X + Y - 2$ une fonction à deux variables. Calculez la valeur de $f([2, 4], [2, 4])$.
- **Première technique**: l'application de la fonction telle quelle $f([2, 4], [2, 4]) \subseteq [2, 4][2, 4] - 2[2, 4] + [2, 4] - 2 = [-4, 14]$.
- **Deuxième technique**: la factorisation
  $f(X,Y) = (X + 1)(Y - 2)$ donc
  $f([2, 4], [2, 4]) = ([2, 4] + 1)([2, 4] - 2) = [0, 10]$
- Notez qu'avec la première technique, nous utilisons l'opérateur $\subseteq$ alors qu'avec la deuxième technique, nous utilisons l'égalité.
- En effet, lorsqu'on évalue une fonction, on n'obtient pas toujours un intervalle exact, mais possiblement un surensemble.

Fonctions

- Certaines conditions doivent s'appliquer pour que l'évaluation d'une fonction retourne un intervalle exact.
- Il ne sera pas toujours possible de rencontrer l'une de ces conditions.
- En effet, il est NP-Difficile de borner exactement certaines fonctions.
- Dans l'exemple précédent, la fonction $f(X,Y)$ a été manipulée algébriquement pour obtenir $f(X,Y) = (X + 1)(Y - 2)$. Dans cette représentation, chaque variable n'apparaît qu'une seule fois.

> Lorsque les variables n'apparaissent qu'une seule fois dans la fonction, l'arithmétique des intervalles mène à des bornes exactes.

Exemples

- Exemple d'une fonction où chaque variable n'apparaît qu'une fois. Nous utilisons alors l'opérateur d'égalité (=).

$$f(X, Y) = 3X - Y$$
$$f([1,2],[1,3]) = 3[1,2] - [1,3] = [0,5]$$

- Exemple d'une fonction où une variable apparaît plus d'une fois. Nous utilisons donc l'opérateur d'inclusion (⊆).

$$g(X) = XX$$
$$g([-1,2]) \subseteq [-1,2][-1,2] = [-2,4]$$

Les fonctions monotones

- Une fonction f(x) est **croissante** sur l'intervalle [a, b] si pour tout x, y ∈ [a, b] tels que x ⩽ y nous avons f(x) ⩽ f(y). Si la fonction est différentiable sur l'intervalle [a, b], nous avons:

$$\frac{d}{dx} f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

- Une fonction f(x) est **décroissante** sur l'intervalle [a, b] si pour tout x, y ∈ [a, b] tels que x ⩽ y nous avons f(x) ⩾ f(y). Si la fonction est différentiable sur l'intervalle [a, b], nous avons:

$$\frac{d}{dx} f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

- Une fonction f(x) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Fonctions croissantes

- Si f(x) est une fonction croissante sur l'intervalle [a, b], alors nous avons la relation suivante.

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

- Exemples

$$\begin{aligned} \sqrt{[a,b]} &= [\sqrt{a}, \sqrt{b}] && \text{Pour } a,b \geq 0 \\ [a,b]^2 &= [a^2, b^2] && \text{Pour } a,b \geq 0 \\ \log([a,b]) &= [\log a, \log b] && \text{Pour } a,b > 0 \\ n^{[a,b]} &= [n^a, n^b] && \text{Pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

Fonctions croissantes

- Que faire pour calculer f([a, b]) si f(x) est une fonction croissante, mais que [a, b] n'est pas un sous-ensemble du domaine de la fonction f?
- Par exemple, comment calculer $\sqrt{[-2,4]}$?
- Réponse: on applique la fonction f sur l'intersection de l'intervalle [a, b] avec le domaine de la fonction.

$$\sqrt{[-2,4]} = \sqrt{[0,\infty) \cap [-2,4]} = \sqrt{[0,4]} = [0,2]$$

Fonctions décroissantes

- Soit f(x) une fonction décroissante. Nous avons la relation suivante.

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

- Soit f(x) une fonction décroissante. Nous avons la relation suivante.

$$e^{-[a,b]} = [e^{-b}, e^{-a}]$$

$$\frac{1}{[a,b]} = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \qquad \text{Pour } a, b > 0$$

Les fonctions monotones multivariées

- Une fonction $f(x_1, ..., x_n)$ est **croissante** par rapport à x_i sur les intervalles $[a_j, b_j]$ si pour n'importe quelles valeurs de $x_1...x_n$ avec $x_j \in [a_j, b_j]$ nous avons la relation suivante.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad \forall x_j \in [a_j, b_j]$$

- Une fonction $f(x_1, ..., x_n)$ est **décroissante** par rapport à x_i sur les intervalles $[a_j, b_j]$ si pour n'importe quelles valeurs de $x_1...x_n$ avec $x_j \in [a_j, b_j]$ nous avons la relation suivante.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \qquad \forall x_j \in [a_j, b_j]$$

Exploiter la monotonie

- Il est possible d'obtenir un intervalle exact lors de l'évaluation d'une fonction si cette fonction est monotone par rapport à toutes ses variables.
- Reprenons l'exemple où il faut évaluer f([2, 4], [2, 4]). Nous démontrons que f(X,Y) est croissante par rapport à X.

$$f(X,Y) = XY - 2X + Y - 2$$

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X,Y) = Y - 2$$

$$\frac{\partial}{\partial X} f([2,4],[2,4]) = [2,4] - 2 = [0,2] \geq 0$$

Exploiter la monotonie

- Nous démontrons ensuite que f(X,Y) est croissante par rapport à Y.

$$f(X,Y) = XY - 2X + Y - 2$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} f(X,Y) = X + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} f([2,4],[2,4]) = [2,4] + 1 = [3,5] \geq 0$$

Exploiter la monotonie

- La fonction f(X,Y) est donc croissante par rapport à X et par rapport à Y. Sa valeur croît lorsque X et Y croissent et décroît lorsque X et Y décroissent.
- Pour calculer une borne supérieure à f(X,Y), on substitue X et Y par les bornes supérieures de leurs domaines.
- Pour calculer une borne inférieure à f(X,Y), on substitue X et Y par les bornes inférieures de leurs domaines.

$$0 = f(2,2) \leq f([2,4],[2,4]) \leq f(4,4) = 10$$
$$\Rightarrow f([2,4],[2,4]) = [0,10]$$

Forme générale

- Soit $f(X_1, \ldots X_n)$ une fonction devant être évaluée en substituant X_i par $[a_i, b_i]$.
- Pour obtenir une borne supérieure
  - Si f est croissante par rapport à X_i, on substitue X_i par b_i.
  - Si f est décroissante par rapport à X_i, on substitue X_i par a_i.
- Pour obtenir une borne inférieure
  - Si f est croissante par rapport à X_i, on substitue X_i par a_i.
  - Si f est décroissante par rapport à X_i, on substitue X_i par b_i.

Exemple

- Calculez de façon exacte f([0, 4], [2, 4]).

$$f(X, Y) = X^2 - Y^2 + XY$$

- Nous calculons la croissance de f par rapport à X.

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X, Y) = 2X + Y$$

- Puisque les variables X et Y n'apparaissent qu'une seule fois dans la fonction, nous pouvons calculer avec exactitude la croissance de la fonction par rapport à X.

$$\frac{\partial}{\partial X} f([0, 4], [2, 4]) = 2[0, 4] + [2, 4] = [2, 12] \geq 0$$

- La fonction f est donc croissante par rapport à X.

Exemple

- Nous calculons la croissance de f par rapport à Y.

$$\frac{\partial}{\partial Y} f(X, Y) = X - 2Y$$

- Puisque les variables X et Y n'apparaissent qu'une seule fois dans la fonction, nous pouvons calculer avec exactitude la croissance de la fonction par rapport à Y.

$$\frac{\partial}{\partial Y} f([0,4],[2,4]) = [0,4] - 2[2,4] = [-8,0] \leq 0$$

- La fonction f est donc décroissante par rapport à Y.

Exemple

- Pour calculer une borne supérieure sur f(X,Y) avec X ∈ [0, 4] et Y ∈ [2, 4], nous substituons X par 4 et Y par 2.

$$f(X,Y) \leq f(4,2) = 4^2 - 2^2 + 2 \times 4 = 20$$

- Pour calculer une borne inférieure sur f(X,Y) avec X ∈ [0, 4] et Y ∈ [2, 4], nous substituons X par 0 et Y par 4.

$$f(X,Y) \geq f(0,4) = 0^2 - 4^2 + 0 \times 4 = -16$$

- Nous obtenons donc $f([0,4],[2,4]) = [-16,20]$. L'égalité est garantie par notre analyse de monotonie.

Fonctions non monotones

- Les fonctions non monotones peuvent être évaluées en utilisant l'arithmétique des intervalles, mais le résultat sera un surensemble des valeurs retournées par la fonction.
- Si une fonction est monotone par rapport à un sous-ensemble des variables, on peut tout de même procéder à une analyse de monotonie et substituer les variables monotones par des constantes. Le résultat sera plus précis, mais pas nécessairement exact.

Exemple

- Calculez f([1, 3], [0, 1]) le plus précisément.

$$f(X, Y) = X^3 - 2XY + 3Y$$

- Prouvons que f est croissante par rapport à X.

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X, Y) = 3X^2 - 2Y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} f([1, 3], [0, 1]) &= 3[1, 3]^2 - 2[0, 1] \\ &= 3[1, 9] - [0, 2] \\ &= [3, 27] - [0, 2] \\ &= [1, 27] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Exemple

- La fonction f n'est pas monotone par rapport à Y.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Y} f(X, Y) &= 3 - 2X \\
\frac{\partial}{\partial Y} f([1,3],[0,1]) &= 3 - 2[1,3] \\
&= 3 - [2,6] \\
&= [-3,1] \\
&\gtrless 0
\end{aligned}$$

- La fonction f est donc parfois croissante et parfois décroissante par rapport à Y.

Exemple

- Pour trouver une borne inférieure à f, nous fixons X à sa valeur minimale (1) et continuons le calcul en utilisant l'arithmétique des intervalles.

- Pour trouver une borne supérieure à f, nous fixons X à sa valeur maximale (3) et continuons le calcul en utilisant l'arithmétique des intervalles.

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= X^3 - 2XY + 3Y \\ f(1,[0,1]) &\subseteq 1^3 - 2[0,1] + 3[0,1] \\ &= 1 + [-2,0] + [0,3] \\ &= [-1,4] \\ &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= X^3 - 2XY + 3Y \\ f(3,[0,1]) &\subseteq 3^3 - 6[0,1] + 3[0,1] \\ &= 27 + [-6,0] + [0,3] \\ &= [21,30] \\ &\leq 30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f([1,3],[0,1]) \subseteq [-1,30]$$

Comment filtrer une contrainte?

- L'arithmétique des intervalles permet de filtrer des contraintes arithmétiques.
- Soit $C(X_1, ..., X_n)$ une contrainte arithmétique. Si une variable X_i peut être exprimée en fonction des autres variables, on utilise l'arithmétique des intervalles pour calculer les valeurs possibles que peut prendre X_i.

$$X_i = f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(X_i) \leftarrow \mathrm{dom}(X_i) \cap f(&\mathrm{dom}(X_1), \dots, \mathrm{dom}(X_{i-1}), \\ &\mathrm{dom}(X_{i+1}), \dots, \mathrm{dom}(X_n))\end{aligned}$$

Exercice

- Appliquez la cohérence de bornes à la contrainte suivante.

$$X^2 + 2^Y = 3Z$$

$$\mathrm{dom}(X) = \mathrm{dom}(Y) = \mathrm{dom}(Z) = [2, 10]$$

- Isolons d'abord la variable X: $X = \sqrt{3Z - 2^Y}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3[2,10] - 2^{[2,10]}} &= \sqrt{[6,30] - [4,1024]} \\ &= \sqrt{[-1018, 26]} \\ &= [0, \sqrt{26}] \quad \text{Nous supposons que X est réel} \\ &= [0, 5.1]\end{aligned}$$

$$\mathrm{dom}(X) \leftarrow [2, 10] \cap [0, 5.1] = [2, 5.1]$$

Exercice

- Isolons ensuite la variable Y: $Y = \log_2\left(3Z - X^2\right)$

$$\begin{aligned}
\log_2\left(3[2,10] - [2,10]^2\right) &= \log_2\left([6,30] - [4,100]\right) \\
&= \log_2\left([-94,26]\right) \\
&= (-\infty, 4.71] \\
\mathrm{dom}(Y) &\leftarrow [2,10] \cap (-\infty, 4.71] = [2, 4.71]
\end{aligned}$$

Exercice

- Isolons finalement la variable Z: $Z = \dfrac{X^2 + 2^Y}{3}$

$$
\begin{aligned}
\frac{[2,10]^2 + 2^{[2,10]}}{3} &= \frac{[4,100] + [4,1024]}{3} \\
&= \frac{[8,1124]}{3} \\
&= [2.6, 374.7]
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{dom}(Z) \leftarrow [2,10] \cap [2.6, 374.7] = [2.6, 10]$$

Lorsqu'une variable ne peut pas être isolée

- On peut décomposer une contrainte en contraintes plus petites en utilisant des variables additionnelles.

$$Xe^X = \frac{e^Y}{Y} \iff \begin{cases} A &= e^X \\ B &= e^Y \\ XA &= \frac{B}{Y} \end{cases}$$

- On filtre ensuite les contraintes séparément.
- Cette technique filtre **moins** que les techniques précédentes.
- C'est la technique **la plus utilisée**, car c'est la plus simple.

Variables entières

- Pour filtrer des variables entières, on procède comme pour les variables continues. On applique ensuite une fonction plancher à la borne supérieure et une fonction plafond à la borne inférieure.
- Exercice: Filtrer les domaines des **variables entières** X et Y en utilisant l'arithmétique des intervalles.

$$2X = 3Y$$
$$\mathrm{dom}(X) = \mathrm{dom}(Y) = [1, 10]$$

Solution à l'exercice

- On filtre d'abord le domaine de X.

$$X = \frac{3}{2}Y$$

$$\frac{3}{2}[1, 10] = [1.5, 15]$$

$$\mathrm{dom}(X) \leftarrow [\lceil 1.5 \rceil, \lfloor 15 \rfloor] \cap [1, 10] = [2, 10]$$

Solution à l'exercice

- On filtre ensuite le domaine d'Y.

$$Y = \frac{2}{3}X$$

$$\frac{2}{3}[1, 10] = [0.6, 6.6]$$

$$\mathrm{dom}(Y) \leftarrow [\lceil 0.6 \rceil, \lfloor 6.6 \rfloor] \cap [1, 10] = [1, 6]$$

Cohérence de bornes sur les variables entières

- L'arithmétique des intervalles n'applique pas la cohérence de bornes sur les contraintes. Dans l'exercice précédent, nous avons obtenu ces domaines.

$$
\begin{aligned}
2X &= 3Y \\
\mathrm{dom}(X) &= [2, 10] \\
\mathrm{dom}(Y) &= [1, 6]
\end{aligned}
$$

- Les valeurs 2 et 10 n'ont pas de support d'intervalle **entier** dans le domaine de X.

La cohérence de bornes est NP-Difficile

- Appliquer la cohérence de bornes sur une équation linéaire avec des variables entières est NP-Difficile. Nous faisons la réduction à partir du problème NP-Complet appelé « Sélection ».

Sélection: Soit $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble d'entiers. Existe-t-il un sous-ensemble A tel que la somme des éléments dans A est égale à la somme des éléments qui ne sont pas dans A?

$$\sum_{a_i \in A} a_i = \sum_{a_i \in S \setminus A} a_i$$

Réduction

- Pour chaque élément a_i dans S, on crée une variable entière X_i dont le domaine est [0, 1]. On considère la contrainte suivante.

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots, a_n X_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Il existe un support d'intervalle entier à cette contrainte si et seulement si le problème de sélection a une solution.
- Si un tel support existe, l'affectation $X_i = 1$ indique que l'élément a_i est dans A et l'affection $X_i = 0$ indique qu'il n'est pas dans A.

Conséquences

- La difficulté d'appliquer la cohérence de domaine explique pourquoi nous nous contentons d'utiliser l'arithmétique des intervalles et d'arrondir les bornes à l'entier le plus près dans l'intervalle.
- On peut souvent atteindre la cohérence en appliquant à répétition le filtrage basé sur l'arithmétique des intervalles. Cela fonctionne pour les équations linéaires, mais il est possible d'appliquer un très (trop) grand nombre de fois le filtrage avant d'obtenir la cohérence de borne.

Cohérence de domaine

- Puisque la cohérence de bornes est NP-Difficile à appliquer, il en va de même pour la cohérence de domaine.
- Cependant, il existe un algorithme à temps pseudo polynomial qui peut appliquer la cohérence de domaine à une équation linéaire.
- L'algorithme a une complexité qui dépend de la taille des coefficients et de la cardinalité des domaines. Notez que la taille d'un coefficient est exponentielle par rapport au nombre de bits nécessaires pour encoder ce coefficient.
- Heureusement, dans plusieurs problèmes, les domaines et les coefficients sont assez petits pour permettre l'utilisation de l'algorithme.

L’algorithme de Trick

- L’algorithme de Trick permet d’appliquer la cohérence de domaine à une équation linéaire.
- La complexité de cet algorithme peut être exponentielle.
- Il faut donc l’utiliser avec précaution dans des situations où un fort filtrage est nécessaire à la résolution du problème.

La contrainte filtrée

- L'algorithme de Trick filtre une inégalité linéaire dont tous les coefficients sont unitaires.

$$l \leq X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq u$$

- l et u sont des constantes. Il suffit de fixer l = u pour obtenir une égalité.

- Une équation linéaire dont la variable X_i a pour coefficient c_i peut être remplacée par la variable X'_i et la contrainte $X'_i = c_i X_i$.

$$l \leq c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n \leq u \iff \begin{array}{c} l \leq X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_n \leq u \\ X'_1 = c_1 X_1 \\ X'_2 = c_2 X_2 \\ \vdots \\ X'_n = c_n X_n \end{array}$$

La construction du graphe

- L'algorithme de Trick construit un graphe à $n + 1$ niveaux où n est le nombre de variables.
- Au niveau 0, nous avons un noeud étiqueté 0.
- Pour chaque noeud étiqueté avec la valeur v au niveau $i - 1$, et pour chaque valeur u dans le domaine de X_i, nous avons un noeud $v + u$ au niveau i.
- Il y a une arête reliant le noeud v au niveau $i - 1$ avec le noeud $v + u$ au niveau i. L'arête est étiquetée avec la valeur u.
- En utilisant cette construction, on se retrouve avec un noeud u au niveau i si et seulement si la somme des i premières variables peut être égale à u.

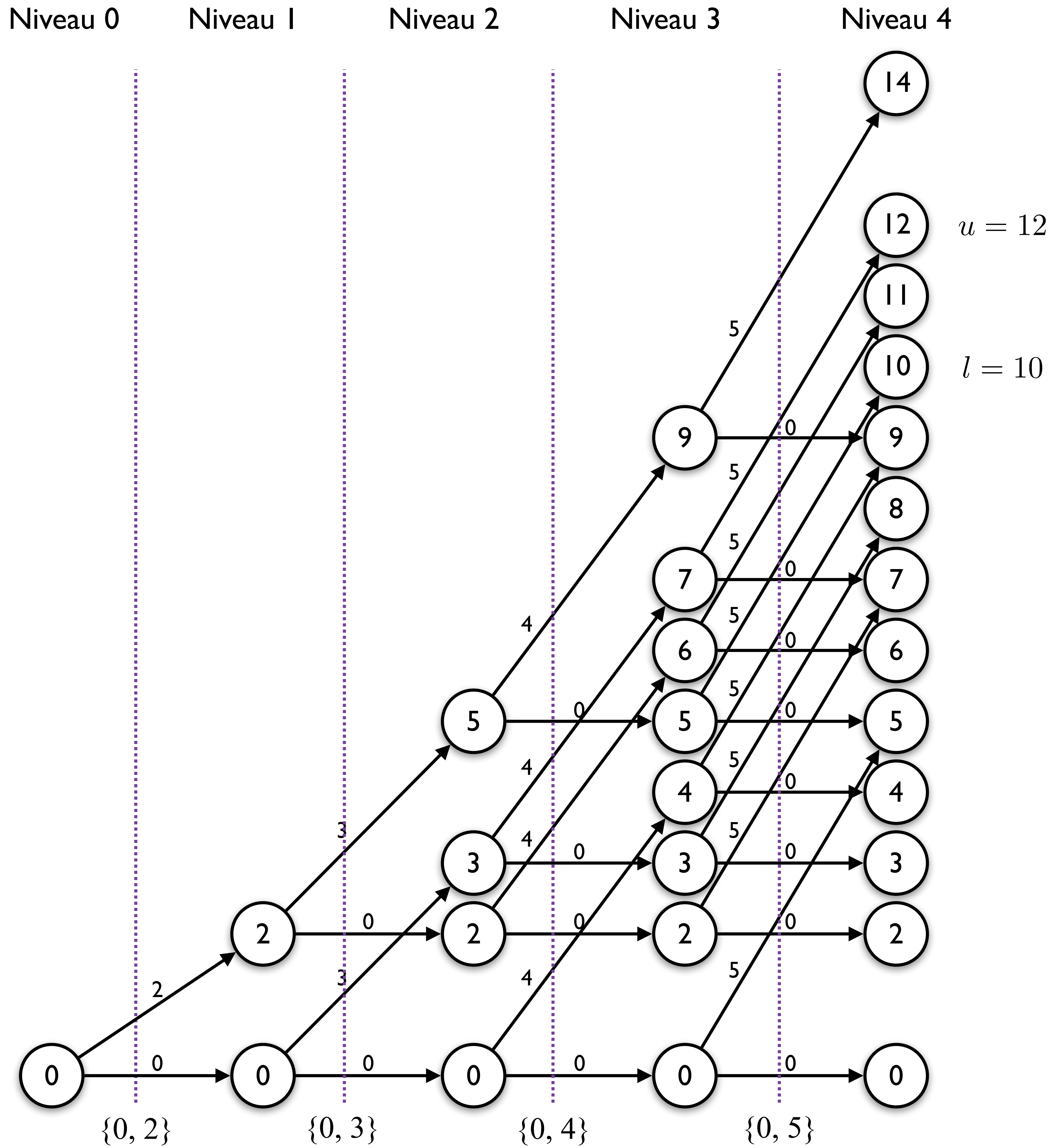
$$10 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 12$$

$\mathrm{dom}(X_1) \in \{0, 2\}$

$\mathrm{dom}(X_2) \in \{0, 3\}$

$\mathrm{dom}(X_3) \in \{0, 4\}$

$\mathrm{dom}(X_4) \in \{0, 5\}$



Algorithme de Trick: le filtrage

- L'algorithme de filtrage marque tous les noeuds du dernier niveau étiquetés avec une valeur entre l et u.
- L'algorithme traite ensuite tous les niveaux, du plus grand niveau jusqu'au niveau 0.
- On marque les noeuds au niveau i qui sont adjacents avec les noeuds au niveau $i + 1$ ainsi que les arêtes qui connectent ces noeuds.
- Après le marquage, tous les noeuds et toutes les arêtes appartenant à un chemin reliant le noeud 0 au niveau 0 et un noeud entre l et u au niveau n sont marqués.
- On supprime tous les noeuds et toutes les arêtes qui ne sont pas marqués.
- S'il n'y a plus d'arêtes étiquetées avec la valeur v reliant un noeud du niveau $i - 1$ avec un noeud du niveau i, alors on retire la valeur v du domaine de X_i.

$$10 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 12$$

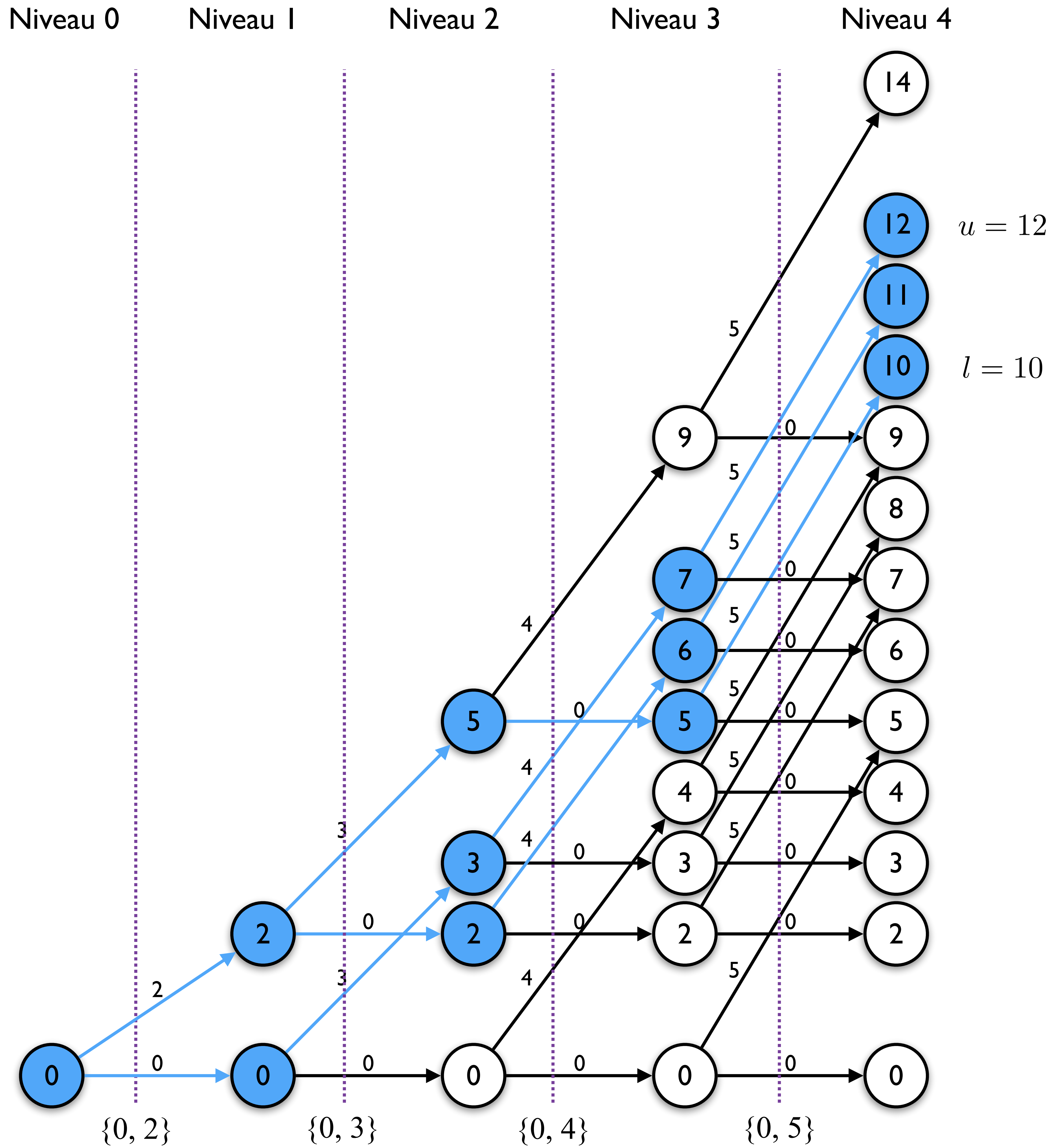
$\mathrm{dom}(X_1) \in \{0, 2\}$

$\mathrm{dom}(X_2) \in \{0, 3\}$

$\mathrm{dom}(X_3) \in \{0, 4\}$

$\mathrm{dom}(X_4) \in \{0, 5\}$

- Marquage des noeuds et des arêtes.



$$10 \le X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 12$$

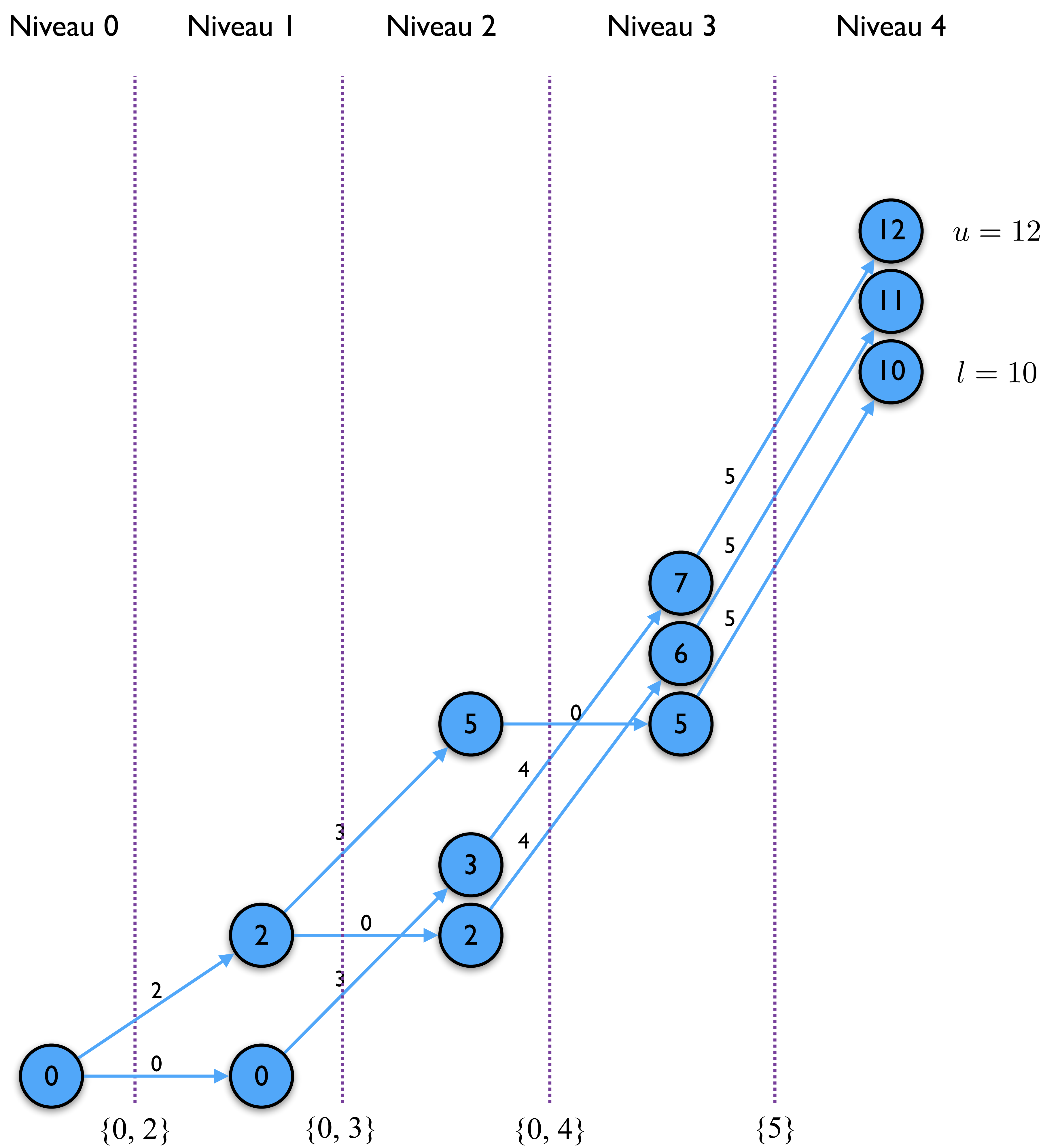
$\mathrm{dom}(X_1) \in \{0, 2\}$

$\mathrm{dom}(X_2) \in \{0, 3\}$

$\mathrm{dom}(X_3) \in \{0, 4\}$

$\mathrm{dom}(X_4) \in \{5\}$

- Suppression des noeuds et des arêtes non marqués.
- Filtrage des domaines: la valeur 0 est retirée du domaine de X_4.



Analyse de l'algorithme de Trick

- La complexité de l'algorithme est dominée par le nombre d'arêtes dans le graphe.
- Celui-ci peut atteindre l'ordre de $O\left(\prod_{i=1}^{n} |\mathrm{dom}(X_i)|\right)$
- Cet algorithme peut donc s'avérer lent, mais demeure le meilleur algorithme pour obtenir la cohérence de domaine.
- Il faut utiliser l'algorithme de Trick dans des situations où l'on nécessite un fort filtrage.

Conclusion

- Nous avons vu comment l'arithmétique des intervalles permet de filtrer les domaines de variables continues.
- Dans certains cas, l'arithmétique des intervalles applique la cohérence de bornes aux variables continues. C'est notamment le cas dans deux situations.
  - Lorsque les variables n'apparaissent qu'une seule fois dans l'expression mathématique.
  - Lorsque les fonctions sont monotones.
- L'arithmétique des intervalles permet aussi d'approximer le filtrage des variables entières.

Conclusion

- Appliquer la cohérence de bornes à une simple équation linéaire avec variables entières est NP-Difficile.
- L'algorithme de Trick permet d'appliquer la cohérence de domaines à une équation linéaire mais cet algorithme ne s'exécute pas en temps polynomial.

Références

- Arithmétique des intervalles
  - Wikipédia: http://en.wikipedia.org/wiki/Interval_arithmetic
- Étude de monotonie et arithmétique des intervalles
  - Français: Exploitation de la monotonie des fonctions dans la propagation de contraintes sur intervalles, Ignacio Araya, Gilles Trombettoni et Bertrand Neveu, JFPC, 2010.
  - Anglais: Exploiting Monotonicity in Interval Constraint Propagation, Ignacio Araya, Gilles Trombettoni et Bertrand Neveu, AAAI 2010.
- Algorithme de Trick: Michael A. Trick "A dynamic programming approach for consistency and propagation for knapsack constraints." Annals of Operations Research 118.1 (2003): 73-84.