SOLUTIONS SÉRIE 6 B (Analyse amortie)

Question # 1
Considérez une structure de données de pile avec les opérations `Ajoute` *et* `Vide` *implantées de la façon suivante.*

Algorithme 1 : Ajoute(x)

```
S.push(x) ; // s'exécute en Θ(1)
```

Algorithme 2 : Vide()

```
tant que S ≠ ∅ faire
    S.pop() ; // s'exécute en Θ(1)
```

Démontrez que ces deux fonctions s'exécutent en temps amorti $\Theta(1)$.

Première solution : *En utilisant la méthode du comptable, on charge $C_{ajoute}(n) = 2 \in \Theta(1)$ chaque fois que la fonction* `Ajoute` *est appelée : une unité pour ajouter l'élément x et une unité de temps qui sera dépensée par la fonction* `Vide` *au moment d'appeler* `pop`. *On charge $C_{vide}(n) = 0 \in \Theta(1)$. La banque de temps n'est jamais en déficit car la fonction* `pop` *a déjà été chargée pour tous les éléments qui ont été précédemment ajoutés.*

Deuxième solution : *Soit la fonction de potentiel $\phi(S) = |S|$. Initialement, cette fonction est nulle puisque $|S| = 0$. De plus, cette fonction n'est jamais négative. L'efficacité amortie de la fonction* `ajoute` *est donc $C_{ajoute}(n) = 1 + \phi(S') - \phi(S) = 2 \in \Theta(1)$ puisque $|S'| - |S| = 1$. L'efficacité de la fonction* `Vide` *est $C_{vide}(n) = |S| + \phi(S') - \phi(S) = |S| + 0 - |S| = 0 \in \Theta(1)$.*

Question # 2
Montrez comment vous pouvez implanter une file (premier arrivé premier servi) à l'aide de deux piles (premier arrivé, dernier servi). En supposant que les opérations `push` *et* `pop` *d'une pile s'exécutent en temps constant, démontrez que votre implémentation des fonctions* `push` *et* `pop` *de votre file s'exécutent en temps amorti constant.*

Solution :

Algorithme 3 : File : :Initialise()

```
A ← ∅ ;                                  // Crée une pile vide
B ← ∅ ;                                  // Crée une pile vide
```

Algorithme 4 : File : :Push(x)

```
A.push(x);
```

Algorithme 5 : File : :Pop()

```
1 si B = ∅ alors
2     tant que A ≠ ∅ faire
3         y ← A.pop();
4         B.push(y);
5 retourner B.pop();
```

Analyse amortie par la méthode du comptable : *Pour chaque appel à `File::Push`, on charge $C^{push}_{amorti}(n) = 3$. Pour chaque appel à cette fonction, une unité de temps servira à ajouter l'élément x à la pile A (ligne 1 de `File::Push`), une unité de temps servira au retrait de cet élément de la pile A (ligne 3 de `File::Pop`) et une unité de temps servira à l'ajout de l'élément à la pile B (ligne 4 de `File::Pop`). Chaque appel à `File::Push` engrange donc 2 unités de temps. On charge ensuite $C^{pop}_{amorti}(n) = 1$ pour chaque appel à `File::Pop`. En effet, le temps passé dans la boucle « tant que » a déjà été payé. Il ne reste plus qu'à charger une unité de temps pour retirer l'élément de la file B (ligne 5 de `File::Pop`). Nous avons donc $C^{push}_{amorti}(n) = 3 \in \Theta(1)$ et $C^{pop}_{amorti}(n) = 1 \in \Theta(1)$.*

Analyse amortie par la méthode de la fonction potentiel : *Soit $\phi(A, B) = 3|A| + |B|$ la fonction potentiel. Notons que $\phi(\emptyset, \emptyset) = 0$ et que $\phi(A, B) \geq 0$ pour toutes piles A et B. Soit A et B les piles avant un appel à `File::Push` et A' et B' les files après cet appel. Remarquons que $B = B'$ puisque la fonction ne modifie pas la pile B. Nous avons*

$$\begin{aligned}
C^{push}_{amorti}(A, B) &= 1 + \phi(A', B') - \phi(A, B) && (1)\\
&= 1 + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| && (2)\\
&= 1 + 3|A'| + |B| - 3|A| - |B| && \text{car } B' = B \quad (3)\\
&= 1 + 3(|A'| - |A|) && (4)\\
&= 1 + 3 \cdot 1 && \text{car } |A'| = |A| + 1 \quad (5)\\
&= 4 && (6)\\
&\in \Theta(1) && (7)
\end{aligned}$$

Pour la fonction `File::Push`, encore une fois, supposons que A et B sont les piles avant l'appel à la fonction et A' et B' sont les piles après l'appel à la fonction. Nous avons

$$\begin{aligned}
C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) &= \begin{cases} 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 1 + 2|A| & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (8)\\
C^{pop}_{amorti}(A, B) &= C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) + \phi(A', B') - \phi(A, B) && (9)\\
&= C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| && (10)\\
&= C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) + 3(|A'| - |A|) + (|B'| - |B|) && (11)\\
&= C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) + \begin{cases} 3 \cdot 0 - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 3(0 - |A|) + ((|A| - 1) - 0) & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (12)\\
&= \begin{cases} C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ C^{pop}_{\text{réel}}(A, B) - 2|A| - 1 & \text{si } B = \emptyset \end{cases} && (13)\\
&= 0 && (14)\\
&\in \Theta(1) && (15)
\end{aligned}$$