

AIDE-MÉMOIRE

$$\begin{aligned} \log_a(x) &= \log_a(b) \log_b(x) & \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} & \log_b(a) &= \frac{1}{\log_a(b)} & a^x &= b^{x \log_b(a)} \\ \log_a 1 &= 0 & \log_a a &= 1 & \log_a x^y &= y \log_a x & \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y & x \leq \lceil x \rceil < x + 1 & & x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x & & x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \\ m \bmod n &= m - n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \end{aligned}$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad \lceil \log_a(n+1) \rceil = \lfloor \log_a n \rfloor + 1 \text{ pour } n \text{ entier}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a(f(x)) &= \log_a(e) \times \frac{1}{f(x)} \times \frac{d}{dx} f(x); & \frac{d}{dx} a^{f(x)} &= a^{f(x)} \times \ln a \times \frac{d}{dx} f(x); \\ \frac{d}{dx} (f(x))^c &= c \times (f(x))^{c-1} \times \frac{d}{dx} f(x); & \int x^c dx &= \frac{x^{c+1}}{c+1}. \end{aligned}$$

$$\int u dv = uv - \int v du; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C; \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C;$$

$$\begin{aligned} \int_{l-1}^u f(x) dx &\leq \sum_{i=l}^u f(i) \leq \int_l^{u+1} f(x) dx && \text{pour } f(x) \text{ nulle part décroissante} \\ \int_l^{u+1} f(x) dx &\leq \sum_{i=l}^u f(i) \leq \int_{l-1}^u f(x) dx && \text{pour } f(x) \text{ nulle part croissante} \end{aligned}$$

La règle de L'Hospital

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \infty$ (ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$). Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

pourvu que cette dernière limite existe.

La notation asymptotique

$$\begin{aligned} \Omega(g(n)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t(n) \mid \exists c_1 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq t(n)\} \\ O(g(n)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t(n) \mid \exists c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c_2 \cdot g(n)\} \\ \Theta(g(n)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq t(n) \leq c_2 \cdot g(n)\} \end{aligned}$$

Utilisation des limites pour comparaison d'ordre

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} c(\text{fini}) > 0 & \text{alors } f(n) \in \Theta(g(n)) \\ 0 & \text{alors } f(n) \in O(g(n)) \text{ et } f(n) \notin \Theta(g(n)) \\ +\infty & \text{alors } f(n) \in \Omega(g(n)) \text{ et } f(n) \notin \Theta(g(n)) \end{cases}$$

Les règles du maximum

$$\begin{aligned} t_1(n) \in \Omega(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Omega(g_2(n)) &\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \in \Omega(\max\{g_1(n), g_2(n)\}) \\ t_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in O(g_2(n)) &\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{g_1(n), g_2(n)\}) \\ t_1(n) \in \Theta(g_1(n)) \wedge t_2(n) \in \Theta(g_2(n)) &\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \in \Theta(\max\{g_1(n), g_2(n)\}) \end{aligned}$$

Sommations

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^b c &= (b-a+1) \times c; & \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2}; & \sum_{i=0}^n i^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1); \\ \sum_{i=0}^n a^i &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1}; & \sum_{i=1}^n i2^i &= (n-1)2^{n+1}+2; & \sum_{i=0}^n f(n-i) &= \sum_{i=0}^n f(i); \end{aligned}$$

Règle de l'harmonie

- Une fonction $f(n)$ est **éventuellement non décroissante** s'il existe un n_0 où $f(n)$ est non décroissante sur l'intervalle $[n_0, \infty)$;
- Une fonction éventuellement non décroissante $f(n)$ est **harmonieuse** si $f(2n) \in \Theta(f(n))$;
- Si $C(n)$ est éventuellement non décroissante, si $f(n)$ est harmonieuse et si $C(n) \in \Theta(f(n))$ pour $n = b^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors $C(n) \in \Theta(f(n)) \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème général

Si $T(n)$ est une récurrence donnée par $T(n) = rT(n/b) + f(n)$ pour les n de la forme b^k avec $f(n) \in \Theta(n^d)$, alors

$$\begin{aligned} r < b^d &\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^d) & \forall n \in \mathbb{N} \\ r = b^d &\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^d \log n) & \forall n \in \mathbb{N} \\ r > b^d &\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b r}) & \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Le théorème général s'applique aussi pour les récurrences de la forme $T(n) = \sum_{i=1}^r T(\frac{n}{b} + c_i) + f(n)$ pour les n de la forme b^k avec $f(n) \in \Theta(n^d)$.

Théorème sur les récurrences linéaires homogènes d'ordre 2

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie récursivement par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = b \\ a_n = r \cdot a_{n-1} + s \cdot a_{n-2} \end{cases} \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

où a, b, r et s sont des constantes réelles.

Soit p , le polynôme caractéristique de $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, (c.-à-d. : $p(x) = x^2 - rx - s$).

Et soit ρ_1 et ρ_2 les zéros de ce polynôme.

Alors,

$$\begin{aligned} a_n &\begin{cases} \nearrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot (\rho_2)^n & \forall n : \mathbb{N} & \text{si } \rho_1 \neq \rho_2. \\ \searrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot n \cdot (\rho_1)^n & \forall n : \mathbb{N} & \text{si } \rho_1 = \rho_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence (c.-à-d. : par $a_0 = a$ et $a_1 = b$).