

## Solutions : Chapitre 9

### Question # 1

Considérez une structure de données de pile avec les opérations *Ajoute* et *Vide* implantées de la façon suivante.

---

**Algorithme 1 : *Ajoute*( $x$ )**

---

```
1  $S.push(x)$  ; //  $s'$  exécute en  $\Theta(1)$ 
```

---

---

**Algorithme 2 : *Vide*()**

---

```
1 tant que  $S \neq \emptyset$  faire  
2    $S.pop()$  ; //  $s'$  exécute en  $\Theta(1)$ 
```

---

Démontrez que ces deux fonctions s'exécutent en temps amorti  $\Theta(1)$ .

**Première solution :** En utilisant la méthode du comptable, on charge  $C_{ajoute}(n) = 2 \in \Theta(1)$  chaque fois que la fonction *Ajoute* est appelée : une unité pour ajouter l'élément  $x$  et une unité de temps qui sera dépensée par la fonction *Vide* au moment d'appeler *pop*. On charge  $C_{vide}(n) = 0 \in \Theta(1)$ . La banque de temps n'est jamais en déficit car la fonction *pop* a déjà été chargée pour tous les éléments qui ont été précédemment ajoutés.

**Deuxième solution :** Soit la fonction de potentiel  $\phi(S) = |S|$ . Initialement, cette fonction est nulle puisque  $|S| = 0$ . De plus, cette fonction n'est jamais négative. L'efficacité amortie de la fonction *ajoute* est donc  $C_{ajoute}(n) = 1 + \phi(S') - \phi(S) = 2 \in \Theta(1)$  puisque  $|S'| - |S| = 1$ . L'efficacité de la fonction *Vide* est  $C_{vide}(n) = |S| + \phi(S') - \phi(S) = |S| + 0 - |S| = 0 \in \Theta(1)$ .

### Question # 2

Montrez comment vous pouvez planter une file (premier arrivé premier servi) à l'aide de deux piles (premier arrivé, dernier servi). En supposant que les opérations *push* et *pop* d'une pile s'exécutent en temps constant, démontrez que votre implémentation des fonctions *push* et *pop* de votre file s'exécutent en temps amorti constant.

**Solution :**

---

**Algorithme 3 : File : :Initialise()**

---

```
1  $A \leftarrow \emptyset$  ; // Crée une pile vide  
2  $B \leftarrow \emptyset$  ; // Crée une pile vide
```

---

---

**Algorithme 4 : File : :Push( $x$ )**

---

```
1  $A.push(x)$  ;
```

---

---

**Algorithme 5 : File : :Pop()**

---

```
1 si  $B = \emptyset$  alors
2   tant que  $A \neq \emptyset$  faire
3      $y \leftarrow A.pop()$ ;
4      $B.push(y)$ ;
5 retourner  $B.pop()$ ;
```

---

**Analyse amortie par la méthode du comptable :** Pour chaque appel à  $File::Push$ , on charge  $C_{amorti}^{push}(n) = 3$ . Pour chaque appel à cette fonction, une unité de temps servira à ajouter l'élément  $x$  à la pile  $A$  (ligne 1 de  $File::Push$ ), une unité de temps servira au retrait de cet élément de la pile  $A$  (ligne 3 de  $File::Pop$ ) et une unité de temps servira à l'ajout de l'élément à la pile  $B$  (ligne 4 de  $File::Pop$ ). Chaque appel à  $File::Push$  engrange donc 2 unités de temps. On charge ensuite  $C_{amorti}^{pop}(n) = 1$  pour chaque appel à  $File::Pop$ . En effet, le temps passé dans la boucle « tant que » a déjà été payé. Il ne reste plus qu'à charger une unité de temps pour retirer l'élément de la file  $B$  (ligne 5 de  $File::Pop$ ). Nous avons donc  $C_{amorti}^{push}(n) = 3 \in \Theta(1)$  et  $C_{amorti}^{pop}(n) = 1 \in \Theta(1)$ .

**Analyse amortie par la méthode de la fonction potentiel :** Soit  $\phi(A, B) = 3|A| + |B|$  la fonction potentiel. Notons que  $\phi(\emptyset, \emptyset) = 0$  et que  $\phi(A, B) \geq 0$  pour toutes piles  $A$  et  $B$ . Soit  $A$  et  $B$  les piles avant un appel à  $File::Push$  et  $A'$  et  $B'$  les files après cet appel. Remarquons que  $B = B'$  puisque la fonction ne modifie pas la pile  $B$ . Nous avons

$$\begin{aligned} C_{amorti}^{push}(A, B) &= 1 + \phi(A', B') - \phi(A, B) & (1) \\ &= 1 + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| & (2) \\ &= 1 + 3|A'| + |B| - 3|A| - |B| & \text{car } B' = B \quad (3) \\ &= 1 + 3(|A'| - |A|) & (4) \\ &= 1 + 3 \cdot 1 & \text{car } |A'| = |A| + 1 \quad (5) \\ &= 4 & (6) \\ &\in \Theta(1) & (7) \end{aligned}$$

Pour la fonction  $File::Push$ , encore une fois, supposons que  $A$  et  $B$  sont les piles avant l'appel à la fonction et  $A'$  et  $B'$  sont les piles après l'appel à la fonction. Nous avons

$$\begin{aligned} C_{réel}^{pop}(A, B) &= \begin{cases} 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 1 + 2|A| & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (8) \\ C_{amorti}^{pop}(A, B) &= C_{réel}^{pop}(A, B) + \phi(A', B') - \phi(A, B) & (9) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| & (10) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3(|A'| - |A|) + (|B'| - |B|) & (11) \\ &= C_{réel}^{pop}(A, B) + \begin{cases} 3 \cdot 0 - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 3(0 - |A|) + ((|A| - 1) - 0) & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (12) \\ &= \begin{cases} C_{réel}^{pop}(A, B) - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ C_{réel}^{pop}(A, B) - 2|A| - 1 & \text{si } B = \emptyset \end{cases} & (13) \\ &= 0 & (14) \\ &\in \Theta(1) & (15) \end{aligned}$$