

SOLUTIONS SÉRIE 3 (Chapitre 2b)

Tous les numéros dans cette série sont pertinents. Il est recommandé de tous les faire.

*Question # 1

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm Secret( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entré : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de  $n$  nombres réels  
   $minval \leftarrow A[0]$   
   $maxval \leftarrow A[0]$   
  FOR  $i \leftarrow 1$  TO  $n - 1$   
    IF  $A[i] < minval$   
       $minval \leftarrow A[i]$   
    IF  $A[i] > maxval$   
       $maxval \leftarrow A[i]$   
  RETURN  $maxval - minval$ 
```

A) Que fait cet algorithme ?

Solution :

Il calcul l'écart maximal entre deux éléments du tableau. C'est donc l'écart entre le plus grand élément et le plus petit.

B) Quelle est son opération de base ?

Solution :

La comparaison d'un élément.

C) Combien de fois l'opération de base est-elle exécutée ?

Solution :

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2 = 2(n - 1)$$

D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?

Solution :

Linéaire : $\Theta(n)$

*Question # 2

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm inefficace( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entrée : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de  $n$  nombres entiers  
  FOR  $i \leftarrow 0$  TO  $n - 1$   
    Effacer( $A, 0$ )  
  RETURN  $A$ 
```

Supposons que la fonction **Effacer** est l'équivalent de la méthode **erase** de la classe **vector** en C++. Pour répondre à cette question, il est conseillé de consulter la documentation de cette méthode.

A) Que fait cet algorithme ?

Solution :

Il efface tous les éléments du vecteur A , à partir du début. Chaque fois qu'un élément est effacé, tous les éléments qui le suivent sont recopiés.

B) Quel est le temps d'exécution d'un appel à **Effacer** ?

Solution :

Soit $C_{\text{effacer}}(m)$, le temps d'exécution de la fonction **Effacer**, où m est le nombre d'éléments dans le vecteur lors de l'appel à la fonction. Selon la documentation de la STL, cette fonction est linéaire en fonction du nombre d'éléments effacés plus le nombre d'éléments déplacés. L'algorithme supprime un seul élément à la fois et c'est toujours le premier élément du vecteur. Il y a donc une suppression et $m - 1$ éléments déplacés. On a donc $C_{\text{effacer}}(m) = 1 + m - 1 = m$.

C) Quel est le temps d'exécution de l'algorithme *inefficace* ?

Solution :

Soit $C_{\text{inefficace}}(n)$, le temps d'exécution de l'algorithme *inefficace*. On a

$$\begin{aligned} & C_{\text{inefficace}}(n) \\ = & \langle \text{À chaque itération, le vecteur contient un élément de moins} \rangle \\ & \sum_{i=0}^{n-1} C_{\text{effacer}}(n - i) \\ = & \langle C_{\text{effacer}}(m) = m \rangle \\ & \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) \\ = & \langle \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) = (n - 0) + (n - 1) + \dots + (n - n + 1) = \\ & 1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i \rangle \\ & \sum_{i=1}^n i \\ = & \langle \text{Aide-mémoire} \rangle \\ & \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \end{aligned}$$

D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?

Solution :

$C_{\text{inefficace}}(n) = \frac{n^2+n}{2} \in \Theta(n^2)$ par la règle du maximum. En effet, puisque $\frac{n^2}{2} \in \Theta(n^2)$ et $\frac{n}{2} \in \Theta(n)$, nous avons $\frac{n^2+n}{2} \in \Theta(\max(n^2, n)) = \Theta(n^2)$. L'algorithme appartient donc à la classe d'efficacité quadratique.

***Question # 3**

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm Enigma( $A[0 \dots n-1, 0 \dots n-1]$ ) :  
  //Entré : Une matrice  $A[0 \dots n-1, 0 \dots n-1]$  de nombres réels  
  FOR  $i \leftarrow 0$  TO  $n-2$   
    FOR  $j \leftarrow i+1$  TO  $n-1$   
      IF  $A[i, j] \neq A[j, i]$   
        RETURN false  
  RETURN true
```

A) Que fait cet algorithme ?

Solution :

Il retourne *true* si la matrice d'entrée est symétrique, et *false* sinon.

B) Quelle est son opération de base ?

Solution :

La comparaison de deux éléments de la matrice.

C) Combien de fois l'opération de base est-elle exécutée en pire et en meilleur cas ?

Solution :

$$C_{worst}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} ((n-1) - (i+1) + 1) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$
$$C_{best}(n) = 1$$

D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?

Solution :

Quadratique en pire cas : $C_{worst}(n) \in \Theta(n^2)$ (ou $C(n) \in O(n^2)$)

Constant en meilleur cas : $C_{best}(n) \in \Theta(1)$

*Question # 4

Analysez la complexité de l'algorithme suivant :

```
Algorithme Mystérieux( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  /* Input :  $A[0 \dots n - 1]$ , un vecteur d'entiers positifs. */  
  TriFusion( $A$ )      /* S'exécute en  $\Theta(n \log n)$  dans tous les cas. */  
   $val \leftarrow \infty$   
   $i \leftarrow 0$   
  WHILE  $i \leq n - 2$   
    IF  $A[i] = A[i + 1]$   
      RETURN 0  
    IF  $|A[i] - A[i + 1]| < val$   
       $val \leftarrow |A[i] - A[i + 1]|$   
       $i \leftarrow i + 1$   
  RETURN  $val$ 
```

Effectuez toutes les étapes pour l'analyse :

- Choix d'une opération de base.
- Calcul du nombre de fois où l'opération de base est exécutée.
- Poser la classe de complexité.

Utilisez la notation Θ . Si le temps d'exécution peut varier entre deux instances de même taille alors il faut procéder à l'analyse en meilleur cas et en pire cas. **Solution :**

L'algorithme *Mystérieux* :

- La complexité l'algorithme *TriFusion* est de $\Theta(n \log n)$ dans tous les cas.
- L'opération de base est IF $|A[i] - A[i + 1]| < val$.
- Pire cas :

En pire cas, il n'y a aucuns doublons et on doit donc parcourir le tableau au complet. La sommation à poser pour calculer le nombre $C_{worst}(n)$ de fois où celle-ci est exécutée est

$$C_{worst}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} 1 \quad (1)$$

Après simplification de la sommation nous avons une complexité de $\Theta(n \log n + n)$ (où $n \log n$ provient de l'appel à *TriFusion*). Par l'utilisation de la règle du maximum, nous obtenons que *Mystérieux* est en $\Theta(n \log n)$ en pire cas.

- Meilleur cas :

Dans le meilleur cas l'opération de base n'est exécutée qu'une seule fois lorsque les deux premiers nombres du tableau sont égaux. Nous avons donc une complexité de $\Theta(n \log n + 1)$ (où $n \log n$ provient de l'appel à *TriFusion*). Par la règle du maximum, *Mystérieux* est en $\Theta(n \log n)$ en meilleur cas.

***Question # 5**

En utilisant l'approximation par intégrale, déterminer l'ordre exacte de croissance pour les fonctions suivantes :

A) $\sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + 1)^2$

Solution :

Soit $S = \sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + 1)^2$. Nous avons :

$$\begin{aligned} S &\leq \int_0^n (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &\leq \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^n \\ &\leq \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} + n \\ &\in O(n^5) \text{ D'après la règle du maximum} \end{aligned}$$

Le retrait du terme pour $i = 0$ ci-dessous permet à la fonction qui est intégrée d'être croissante entre 0 et $n - 1$. Elle ne le serait pas entre -1 et $n - 1$.

$$\begin{aligned} S &\geq \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + 1)^2 \geq \int_0^{n-1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &\geq \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^{n-1} \\ &\geq \frac{(n-1)^5}{5} + \frac{2(n-1)^3}{3} + (n-1) \end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 2$, nous avons $\frac{2(n-1)^3}{3} \geq 0$ et $(n-1) \geq 0$. De plus, nous avons $n-1 \geq n - \frac{n}{2}$.

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{(n - \frac{n}{2})^5}{5} + 0 + 0 \\ &\geq \frac{1}{2^5 \cdot 5} n^5 \\ &\in \Omega(n^5) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + 1)^2 \in \Theta(n^5)$$

B) $\sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i^2$

Solution :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i^2 = 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \\ \Rightarrow &\quad \langle \text{Approximation par intégrale} \rangle \\ &2 \int_1^{n-1} \log_2 x dx \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq 2 \int_2^n \log_2 x dx \\ \Rightarrow & \\ &2 \left(\frac{x \ln(x)}{\ln(2)} - \frac{x}{\ln(2)} \right) \Big|_1^{n-1} \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq 2 \left(\frac{x \ln(x)}{\ln(2)} - \frac{x}{\ln(2)} \right) \Big|_2^n \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\left(\frac{\ln(n-1)n - \ln(n-1) - n + 2}{\ln(2)}\right) \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq 2\left(\frac{n \ln(n) - n + 2 - 2 \ln(2)}{\ln(2)}\right) \\
\Rightarrow & 2\left(\frac{\ln(\frac{n}{2})n - \frac{1}{4}n \ln(n) - \frac{1}{4}n \ln(n)}{\ln(2)}\right) \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq \frac{2}{\ln(2)}n \ln(n) \text{ pour } n \geq 4 \\
\Rightarrow & \langle \text{Puisque } \ln(\frac{n}{2}) = \ln(n) - \ln(2) \rangle \\
& 2\left(\frac{(\ln(n) - \ln(2))n - \frac{1}{4}n \ln(n) - \frac{1}{4}n \ln(n)}{\ln(2)}\right) \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq \frac{2}{\ln(2)}n \ln(n) \\
\Rightarrow & \frac{1}{\ln(2)}n \ln(n) - 2n \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq \frac{2}{\ln(2)}n \ln(n) \\
\Rightarrow & \langle \text{En multipliant } 2n \text{ par } \frac{n}{4 \ln(2)} \text{ pour obtenir deux termes en } n \ln n \rangle \\
& \frac{1}{\ln(2)}n \ln(n) - \frac{1}{2 \ln(2)}n \ln(n) \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq \frac{2}{\ln(2)}n \ln(n) \text{ pour } n \geq 4 \ln(2) \\
\Rightarrow & \frac{1}{2 \ln(2)}n \ln(n) \leq 2 \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i \leq \frac{2}{\ln(2)}n \ln(n) \\
\Rightarrow & \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i^2 \in \Theta(n \ln(n))
\end{aligned}$$

C) $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$

Solution :

Posons :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{n-1} \int_{-1}^{x-1} (x+y) dy dx &\leq S \leq \int_0^n \int_0^x (x+y) dy dx \\
\int_{-1}^{n-1} \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{-1}^{x-1} dx &\leq S \leq \int_0^n \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx \\
\int_{-1}^{n-1} \left(x(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + x - \frac{1}{2} \right) dx &\leq S \leq \int_0^n (x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 0 - 0) dx \\
\int_{-1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}x^2 - x \right) dx &\leq S \leq \int_0^n \frac{3}{2}x^2 dx \\
\left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{n-1} &\leq S \leq \left[\frac{1}{2}x^3 \right]_0^n \\
\frac{1}{2} [(n-1)^3 - (n-1)^2 + 1 + 1] &\leq S \leq \frac{1}{2}n^3 \\
\frac{1}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{5}{2}n &\leq S \leq \frac{1}{2}n^3 \\
\frac{1}{2}n^3 - 2n^2 \cdot \frac{1}{8}n + 0 &\leq S \leq \frac{1}{2}n^3 \\
\frac{1}{4}n^3 &\leq S \leq \frac{1}{2}n^3 \\
S &\in \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 8$

***Question # 6**

Analysez la complexité de l'algorithme suivant en fonction de n :

Algorithme Complexe(n)

pour $i = 2..n$
 $c = 0$
while $c < n$
 $c = c + i$

Effectuez toutes les étapes pour l'analyse :

- Choix d'une opération de base.
- Calcul du nombre de fois où l'opération de base est exécutée.
- Poser la classe de complexité.

Utilisez la notation Θ . Si le temps d'exécution peut varier entre deux instances de même taille alors il faut procéder à l'analyse en meilleur cas et en pire cas. **Solution :**

L'opération de base est $c = c + i$. Il faut incrémenter $\lceil \frac{n}{i} \rceil$ fois c de i avant de sortir du while. Ainsi, dans tous les cas cette opération de base est exécutée

$$C(n) = \sum_{i=2}^n \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \quad (2)$$

fois. Pour résoudre la sommation (2), il faut utiliser l'approximation de la somme par des intégrales définies (voir l'aide-mémoire). Notons tout d'abord que $C(n)$ est non croissante. Ainsi, nous avons la

borne inférieure suivante :

$$\sum_{i=2}^n \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \geq \sum_{i=2}^n \frac{n}{i} \quad (3)$$

$$\geq \int_2^{n+1} \frac{n}{x} dx \quad (4)$$

$$= \left[n \ln x \right]_2^{n+1} \quad (5)$$

$$= n \ln(n+1) - n \ln 2 \quad (6)$$

$$\geq n \ln n - n \ln 2 \quad (7)$$

$$\geq n \ln n - \frac{1}{2} n \ln n \quad (\forall n \geq 4) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} n \ln n \quad (9)$$

$$\in \Omega(n \ln n) \quad (10)$$

Posons maintenant la borne supérieure :

$$\sum_{i=2}^n \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil \leq \sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{i} + 1 \right) \quad (11)$$

$$\leq \int_1^n \left(\frac{n}{x} + 1 \right) dx \quad (12)$$

$$= \left[n \ln x + x \right]_1^n \quad (13)$$

$$= n \ln n + n - 1 \quad (14)$$

$$\leq n \ln n + n \quad (15)$$

$$\in O(n \ln n) \quad // \text{Loi du maximum} \quad (16)$$

D'où $C(n) \in \Theta(n \ln n)$.

***Question # 7**

Résolvez les relations de récurrences suivantes :

A) $x(n) = x(n-1) + 5, x(1) = 0$

Solution :

$$\begin{aligned}x(n) &= x(n-1) + 5 \\&= [x(n-2) + 5] + 5 \\&= [x(n-3) + 5] + 5 \times 2 \\&= \dots \\&= x(n-i) + 5 \times i \\&= \dots \\&= x(1) + 5 \times (n-1) \\&= 5(n-1)\end{aligned}$$

B) $x(n) = 3x(n-1), x(1) = 4$

Solution :

$$\begin{aligned}x(n) &= 3x(n-1) \\&= 3[3x(n-2)] \\&= 3^2[3x(n-3)] \\&= \dots \\&= 3^i x(n-i) \\&= \dots \\&= 3^{n-1} x(1) \\&= 4 \times 3^{n-1}\end{aligned}$$

C) $x(n) = x(n-1) + n, x(0) = 0$

Solution :

$$\begin{aligned}x(n) &= x(n-1) + n \\&= [x(n-2) + (n-1)] + n \\&= [x(n-3) + (n-2)] + (n-1) + n \\&= \dots \\&= x(n-i) + (n-i+1) + (n-i+2) + \dots + n \\&= \dots \\&= x(0) + 1 + 2 + \dots + n \\&= \sum_{i=1}^n i \\&= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

D) $x(n) = x(n/2) + n, x(1) = 1$ (on suppose $n = 2^k$)

Solution :

$$\begin{aligned}
 x(2^k) &= x(2^{k-1}) + 2^k \\
 &= [x(2^{k-2}) + 2^{k-1}] + 2^k \\
 &= [x(2^{k-3}) + 2^{k-2}] + 2^{k-1} + 2^k \\
 &= \dots \\
 &= x(2^{k-i}) + 2^{k-i+1} + 2^{k-i+2} + \dots + 2^k \\
 &= \dots \\
 &= x(2^{k-k}) + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k \\
 &= 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k \\
 &= \sum_{i=0}^k 2^i \\
 &= 2^{k+1} - 1 \\
 &= 2 \cdot 2^k - 1 \\
 &= 2n - 1
 \end{aligned}$$

E) $x(n) = x(n/3) + 1, x(1) = 1$ (on suppose $n = 3^k$)

Solution :

$$\begin{aligned}
 x(3^k) &= x(3^{k-1}) + 1 \\
 &= [x(3^{k-2}) + 1] + 1 \\
 &= [x(3^{k-3}) + 1] + 1 + 1 \\
 &= \dots \\
 &= x(3^{k-i}) + i \\
 &= \dots \\
 &= x(3^{k-k}) + k \\
 &= x(1) + k \\
 &= 1 + \log_3 n
 \end{aligned}$$

***Question # 8**

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm MinI( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entrée : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de nombres réels  
  IF  $n = 1$   
    RETURN  $A[0]$   
  ELSE  
     $temp \leftarrow \text{MinI}(A[0 \dots n - 2])$   
    IF  $temp \leq A[n - 1]$   
      RETURN  $temp$   
    ELSE  
      RETURN  $A[n - 1]$ 
```

A) Que fait cet algorithme ?

Solution :

Il trouve la valeur du plus petit élément du tableau.

B) Écrivez la relation de récurrence qui exprime le nombre de fois où l'opération de base est exécutée et résolvez-la.

Solution :

La récurrence pour le nombre de comparaison entre deux éléments est $C(n) = C(n - 1) + 1$, $C(1) = 0$. En résolvant cette récurrence, on obtient $C(n) = n - 1$.

***Question # 9**

Soit l'algorithme suivant qui résout le même problème que l'algorithme de la question 8.

```
Algorithm Min2(A[l...r]) :  
  IF l = r  
    RETURN A[l]  
  ELSE  
    temp1  $\leftarrow$  Min2(A[l...[(l + r)/2]])  
    temp2  $\leftarrow$  Min2(A[[(l + r)/2 + 1...r]])  
    IF temp1  $\leq$  temp2  
      RETURN temp1  
    ELSE  
      RETURN temp2
```

- A) Écrivez la relation de récurrence qui exprime le nombre de fois où l'opération de base est exécutée et résolvez-la.

Solution :

La récurrence pour le nombre de comparaison entre deux éléments est $C(n) = C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + 1$, $C(1) = 0$. En résolvant cette récurrence avec $n = 2^k$, on obtient $C(n) = n - 1$.

- B) Lequel des algorithmes *Min1* ou *Min2* est le plus rapide ? Pouvez-vous contruire un nouvel algorithme qui serait plus efficace que *Min1* et *Min2* tout en résolvant le même problème ?

Solution :

Les deux algorithmes *Min1* et *Min2* ont la même efficacité. De plus, il est clair que tout algorithme voulant trouver l'élément minimal d'un tableau quelconque doit faire au moins n comparaisons, donc $\Omega(n)$ comparaisons. Cependant, un algorithme séquentiel n'aurait pas le "overhead" des appels récursifs.

***Question # 10**

Soit A la matrice $n \times n$ suivante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On dénote par $\det A$ le déterminant de la matrice A . Pour $n = 1$, $\det A = a_{11}$ et pour $n > 1$, $\det A = \sum_{j=1}^n s_j a_{1j} \det A_j$ où s_j est $+1$ lorsque j est impair et -1 lorsque j est pair, a_{1j} est l'élément de la matrice en ligne 1 et colonne j , et A_j est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de la matrice A en enlevant la ligne 1 et la colonne j de cette dernière.

- A) Écrivez la relation de récurrence décrivant le nombre de multiplications faite par l'algorithme implementant cette définition récursive pour le calcul du déterminant.

Solution :

Soit $M(n)$, le nombre de multiplications effectuées par l'algorithme en se basant sur la formule $\det A = \sum_{j=1}^n s_j a_{1j} \det A_j$. Si on ne tient pas compte des multiplications par s_j (c'est juste un changement de signe), alors :

$$M(n) = \sum_{j=1}^n (M(n-1) + 1) = n(M(n-1) + 1)$$

- B) Sans résoudre la récurrence, que pouvez-vous dire au sujet de l'ordre de croissance de sa valeur par rapport à $n!$?

Solution :

Puisque $M(n) = nM(n-1) + n$, la fonction $M(n)$ grossit au moins aussi rapidement que la fonction factorielle qui est définie par $n! = n \times (n-1)!$, $1! = 1$.