

Solutions : Chapitre 10

Question # 1

Considérez une structure de données de pile avec les opérations *Ajoute* et *Vide* implantées de la façon suivante.

Algorithme 1 : Ajoute(x)

1 $S.push(x)$; // s' exécute en $\Theta(1)$

Algorithme 2 : Vide()

1 tant que $S \neq \emptyset$ faire
2 $S.pop()$; // s' exécute en $\Theta(1)$

Démontrez que ces deux fonctions s'exécutent en temps amorti $\Theta(1)$.

Première solution : En utilisant la méthode du comptable, on charge $C_{ajoute}(n) = 2 \in \Theta(1)$ chaque fois que la fonction *Ajoute* est appelée : une unité pour ajouter l'élément x et une unité de temps qui sera dépensée par la fonction *Vide* au moment d'appeler *pop*. On charge $C_{vide}(n) = 0 \in \Theta(1)$. La banque de temps n'est jamais en déficit car la fonction *pop* a déjà été chargée pour tous les éléments qui ont été précédemment ajoutés.

Deuxième solution : Soit la fonction de potentiel $\phi(S) = |S|$. Initialement, cette fonction est nulle puisque $|S| = 0$. De plus, cette fonction n'est jamais négative. L'efficacité amortie de la fonction *ajoute* est donc $C_{ajoute}(n) = 1 + \phi(S') - \phi(S) = 2 \in \Theta(1)$ puisque $|S'| - |S| = 1$. L'efficacité de la fonction *Vide* est $C_{vide}(n) = |S| + \phi(S') - \phi(S) = |S| + 0 - |S| = 0 \in \Theta(1)$.

Question # 2

Montrez comment vous pouvez implanter une file (premier arrivé premier servi) à l'aide de deux piles (premier arrivé, dernier servi). En supposant que les opérations *push* et *pop* d'une pile s'exécutent en temps constant, démontrez que votre implémentation des fonctions *push* et *pop* de votre file s'exécutent en temps amorti constant.

Solution :

Algorithme 3 : File ::Initialise()

1 $A \leftarrow \emptyset$; // Crée une pile vide
2 $B \leftarrow \emptyset$; // Crée une pile vide

Algorithme 4 : File ::Push(x)

1 $A.push(x)$;

Algorithme 5 : File ::Pop()

```

1 si  $B = \emptyset$  alors
2   tant que  $A \neq \emptyset$  faire
3      $y \leftarrow A.pop();$ 
4      $B.push(y);$ 
5 retourner  $B.pop();$ 

```

Analyse amortie par la méthode du comptable : Pour chaque appel à $File::Push$, on charge $C_{amorti}^{push}(n) = 3$. Pour chaque appel à cette fonction, une unité de temps servira à ajouter l'élément x à la pile A (ligne 1 de $File::Push$), une unité de temps servira au retrait de cet élément de la pile A (ligne 3 de $File::Pop$) et une unité de temps servira à l'ajout de l'élément à la pile B (ligne 4 de $File::Pop$). Chaque appel à $File::Push$ engrange donc 2 unités de temps. On charge ensuite $C_{amorti}^{pop}(n) = 1$ pour chaque appel à $File::Pop$. En effet, le temps passé dans la boucle « tant que » a déjà été payé. Il ne reste plus qu'à charger une unité de temps pour retirer l'élément de la file B (ligne 5 de $File::Pop$). Nous avons donc $C_{amorti}^{push}(n) = 3 \in \Theta(1)$ et $C_{amorti}^{pop}(n) = 1 \in \Theta(1)$.

Analyse amortie par la méthode de la fonction potentiel : Soit $\phi(A, B) = 3|A| + |B|$ la fonction potentiel. Notons que $\phi(\emptyset, \emptyset) = 0$ et que $\phi(A, B) \geq 0$ pour toutes piles A et B . Soit A et B les piles avant un appel à $File::Push$ et A' et B' les files après cet appel. Remarquons que $B = B'$ puisque la fonction ne modifie pas la pile B . Nous avons

$$\begin{aligned}
C_{amorti}^{push}(A, B) &= 1 + \phi(A', B') - \phi(A, B) & (1) \\
&= 1 + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| & (2) \\
&= 1 + 3|A'| + |B| - 3|A| - |B| & \text{car } B' = B & (3) \\
&= 1 + 3(|A'| - |A|) & (4) \\
&= 1 + 3 \cdot 1 & \text{car } |A'| = |A| + 1 & (5) \\
&= 4 & (6) \\
&\in \Theta(1) & (7)
\end{aligned}$$

Pour la fonction $File::Push$, encore une fois, supposons que A et B sont les piles avant l'appel à la fonction et A' et B' sont les piles après l'appel à la fonction. Nous avons

$$C_{réel}^{pop}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 1 + 2|A| & \text{si } B = \emptyset \end{cases} \quad (8)$$

$$C_{amorti}^{pop}(A, B) = C_{réel}^{pop}(A, B) + \phi(A', B') - \phi(A, B) \quad (9)$$

$$= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3|A'| + |B'| - 3|A| - |B| \quad (10)$$

$$= C_{réel}^{pop}(A, B) + 3(|A'| - |A|) + (|B'| - |B|) \quad (11)$$

$$= C_{réel}^{pop}(A, B) + \begin{cases} 3 \cdot 0 - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ 3(0 - |A|) + ((|A| - 1) - 0) & \text{si } B = \emptyset \end{cases} \quad (12)$$

$$= \begin{cases} C_{réel}^{pop}(A, B) - 1 & \text{si } B \neq \emptyset \\ C_{réel}^{pop}(A, B) - 2|A| - 1 & \text{si } B = \emptyset \end{cases} \quad (13)$$

$$= 0 \quad (14)$$

$$\in \Theta(1) \quad (15)$$