SÉRIE 0 (Rappels)

Les exercices dénotés par une étoile (*) sont les exercices les plus importants à faire pour s'assurer de bien maîtriser la matière du cours. Il est recommandé de bien les comprendre. Si vous avez des questions, profitez des séances de travaux dirigés ou du forum pour les poser.

Exposants

***Question # 1**
Simplifiez, si possible, les expressions suivantes :

A) $e^a \times e^b$

B) $a^0, a \neq 0$

C) $(e^a)^x$

D) $\frac{e^{-a}}{e^b}$

E) $\frac{e^a}{e^b}$

Évaluation de sommations

***Question # 2**
Simplifiez les sommations suivantes. [1]

A)* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i^2 + j^3)$

B) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (3i - 2j)$

C)* $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (i \times j)$

D) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} (6j)$

E)* $\sum_{i=0}^{n} f(i)$ *avec* $f(i) = \left\{ \begin{array}{ll} i & \textit{si } i < 3 \\ 1 & \textit{sinon} \end{array} \right\}$ *en supposant que* $n \geq 3$

F) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(i)$ *avec* $f(i) = \left\{ \begin{array}{ll} i & \textit{si } i < 3 \\ 1 & \textit{sinon} \end{array} \right\}$ *en supposant que* $n \geq 3$

G) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} g(i)$ *avec* $g(i) = \left\{ \begin{array}{ll} i^3 + 1 & \textit{si } i < 2 \\ 2i & \textit{sinon} \end{array} \right\}$ *en supposant que* $n \geq 2$

1. Voir annexe A du livre de *A. Levitin*. Vous pouvez utiliser la sommation suivante : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Calcul de limites

***Question # 3**
Calculez les limites suivantes :

A)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

B)* $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!}$

C) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$

D)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} n}{n}$

E)* $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+2n^2+6n+1)^3}{n^8}$

F) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+2n+1}}{n^2}$

G) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n}$

Techniques de preuves

***Question # 4**

Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour $n \geq 1$ nous avons :

A)* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

B) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

C) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

D) $\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

Logarithmes

***Question # 5**

Simplifiez, si possible, les expressions suivantes :

A) $\log_b b =?$

B) $a^{\log_a b} =?$

C) $\log_a(a^x) =?$

Question # 6

Prouvez ou réfutez les propriétés suivantes sur les logarithmes :

A) $log_a\ (xy) = log_a\ x + log_a\ y$

B) $log_a\ \frac{x}{y} = log_a\ x - log_a\ y$

C) $log_a\ x^y = y\ log_a\ x$

D) $log_a\ (x+y) = log_a\ x \times log_a\ y$

E) $log_a\ x = \frac{log_b\ x}{log_b\ a}$

F) $x^{log_b\ y} = y^{log_b\ x}$

"You do not truly know someone until you fight them."
Seraph : Matrix Reloaded

"You do not truly understand something until you prove it."
F. Gagnon