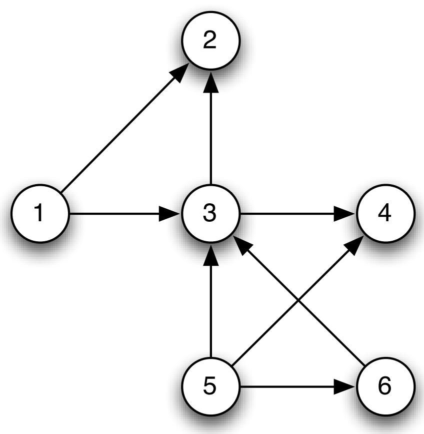
Solutions des exercices du chapitre 7

Question # 1
Effectuez une fouille en profondeur sur ce graphe. Lorsque vous avez le choix de visiter deux noeuds, choisissez celui avec la plus petite étiquette.

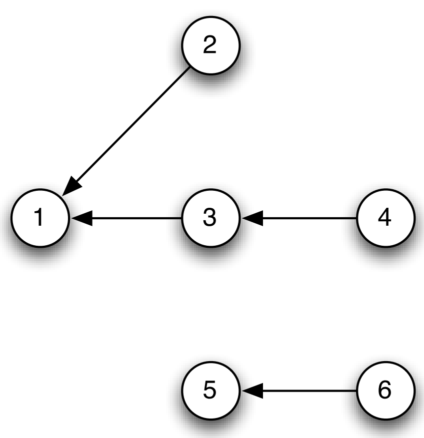


A) *Listez dans quel ordre les noeuds sont coloriés en gris.*

Solution : *1, 2, 3, 4, 5, 6*

B) *Donnez l'état du vecteur parent à la fin de la fouille.*

Solution :

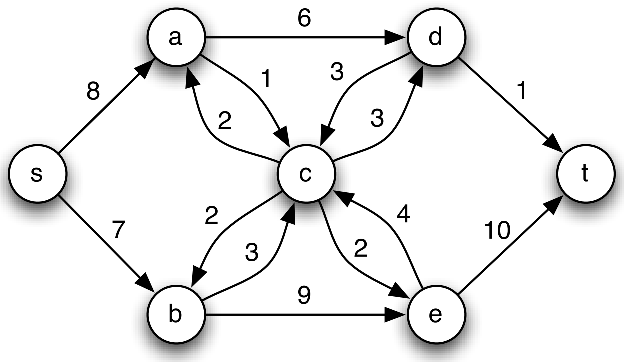


C) *Listez dans quel ordre les noeuds sont coloriés en noir.*

Solution : *2, 4, 3, 1, 6, 5*

Question # 2

Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour calculer un flot maximum entre le noeud s et le noeud t. Donnez l'état du graphe résiduel à la fin de l'exécution de l'algorithme.



Solution :

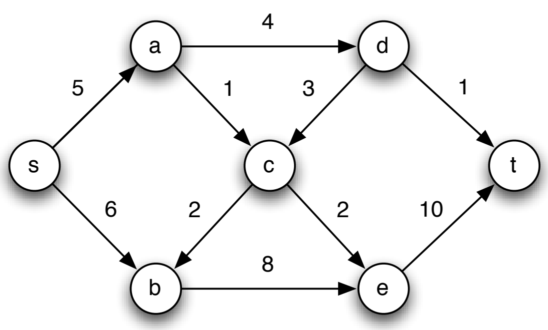


FIGURE 1 – Flot maximum. Seules les arêtes acceptant un flot positif sont représentées.

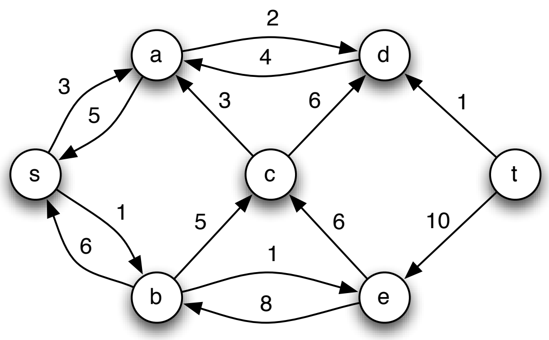


FIGURE 2 – Graphe résiduel

Le flot a été poussé sur les chemins augmentants suivants :

1. s, a, d, t (une unité de flot)
2. s, a, d, c, e, t (deux unités de flot)
3. s, a, d, c, b, e, t (une unité de flot)
4. s, a, c, b, e, t (une unité de flot)
5. s, b, e, t (six unités de flot)

D'autres flots maximums existent mais ils ont tous 11 comme valeur de flot.

Question # 3

Des fermes laitières produisent quotidiennement du lait qui est acheminé par camion à des usines de traitement où il est pasteurisé et emballé. Une fois traité, le lait est acheminé dans deux centres d'approvisionnement : un à Montréal et un à Québec. Pour des raisons de coût de transport, les fermes peuvent seulement acheminer leur lait à un sous-ensemble des usines. De même, les usines peuvent seulement acheminer le lait à un sous-ensemble des centres d'approvisionnement.

Les données du problème apparaissent dans les tableaux 1, 2 et 3.

TABLE 1 – Informations sur les fermes laitières

Ferme laitière	Production quotidienne de lait	Usines accessibles
F_1	1000L	U_1
F_2	1000L	U_1, U_2
F_3	1500L	U_2, U_3
F_4	1500L	U_1, U_2, U_3

TABLE 2 – Information sur les usines de traitement

Usine	Capacité maximale de traitement	Centres d'approvisionnement accessibles
U_1	3000L	Montréal, Québec
U_2	2500L	Montréal, Québec
U_3	1000L	Québec

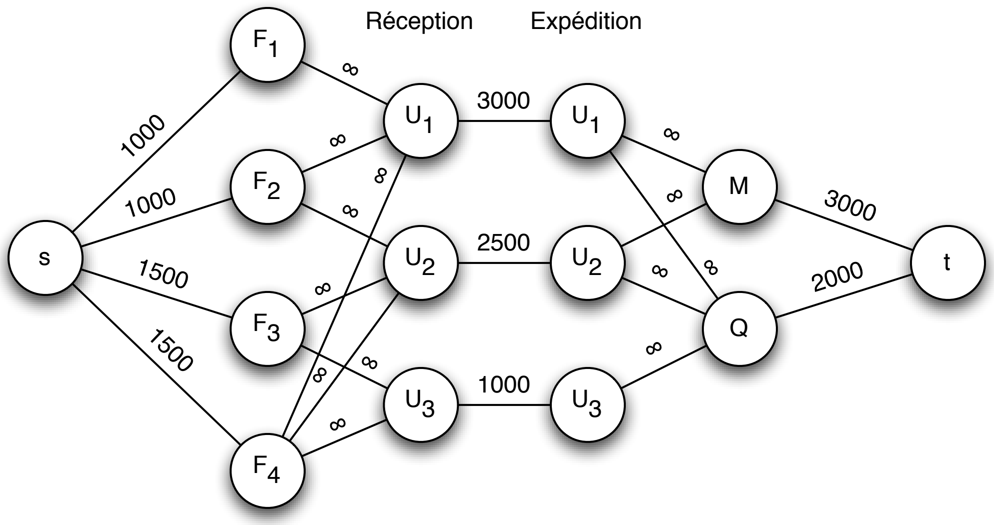
Les fermes doivent exporter la totalité de leur production. Les capacités de traitement des usines doivent être respectées. La demande des centres d'approvisionnement doit être satisfaite. Démontrez

TABLE 3 – Information sur les centres d'approvisionnement

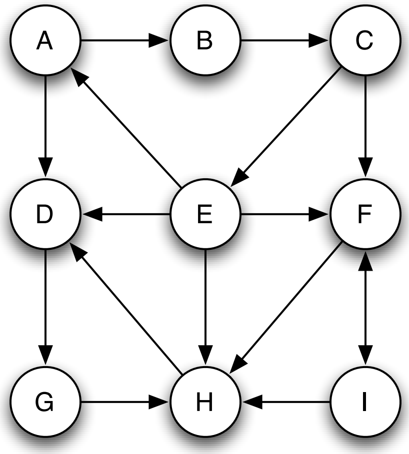
Centre d'approvisionnement	Demande
Québec	2000L
Montréal	3000L

comment l'algorithme de Ford-Fulkerson peut déterminer la quantité de lait envoyée de chaque ferme à chaque usine et de chaque usine à chaque centre d'approvisionnement.

Solution : *On calcule un flot maximum entre la source s et le puit t dans le graphe suivant.*



Question # 4
Utilisez l'algorithme de Kosaraju pour calculer les composantes fortement connexes de ce graphe.



Solution : *ATTENTION. Pour cette question, il existe plusieurs ordres de fouille possibles. Cette solution n'en présente qu'une seule. Supposons que lors de la première fouille en profondeur, on colorie les noeuds en gris dans cet ordre : A, B, C, E, D, G, H, F, I. On colorie les noeuds en noir dans cet ordre : H, G, D, I, F, E, C, B, A. Le noeud A est donc sur le dessus de la pile et le noeud H est en dessous de la pile.*

On procède ensuite à une fouille sur le graphe transposé. On colorie les noeuds en gris dans cet ordre : A, E, C, B, F, I, D, H, G. On colorie les noeuds en noir dans cet ordre : B, C, E, A, I, F, G, H, D. Voici l'état du vecteur Parent.

x	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
$Parent[x]$	nul	*C*	*E*	nul	*A*	nul	*H*	*D*	*F*

Les trois composantes sont donc $\{A, B, C, E\}$, $\{F, I\}$ *et* $\{D, G, H\}$. *Peu importe dans quel ordre vous avez fait vos fouilles, vous devriez obtenir les mêmes composantes fortement connexes.*

Question # 5
Considérez la contrainte ALL-DIFFERENT$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ *avec les domaines suivants.*

$$\mathrm{dom}(X_1) = \{2,3,6\} \qquad \mathrm{dom}(X_2) = \{3,4\} \qquad \mathrm{dom}(X_3) = \{2,4,6\}$$
$$\mathrm{dom}(X_4) = \{1,2,3,5\} \qquad \mathrm{dom}(X_5) = \{3,4\}$$

Construisez le graphe associé à la contrainte ALL-DIFFERENT *et calculez un flot maximum. En vous aidant du graphe résiduel, indiquez pour chaque valeur dans chaque domaine pourquoi il y a un support de domaine ou pourquoi il n'y en a pas.*

Solution : *La figure 3 montre le graphe résiduel. Les noeuds appartenants à une même composante fortement connexe sont coloriés de la même couleur.*

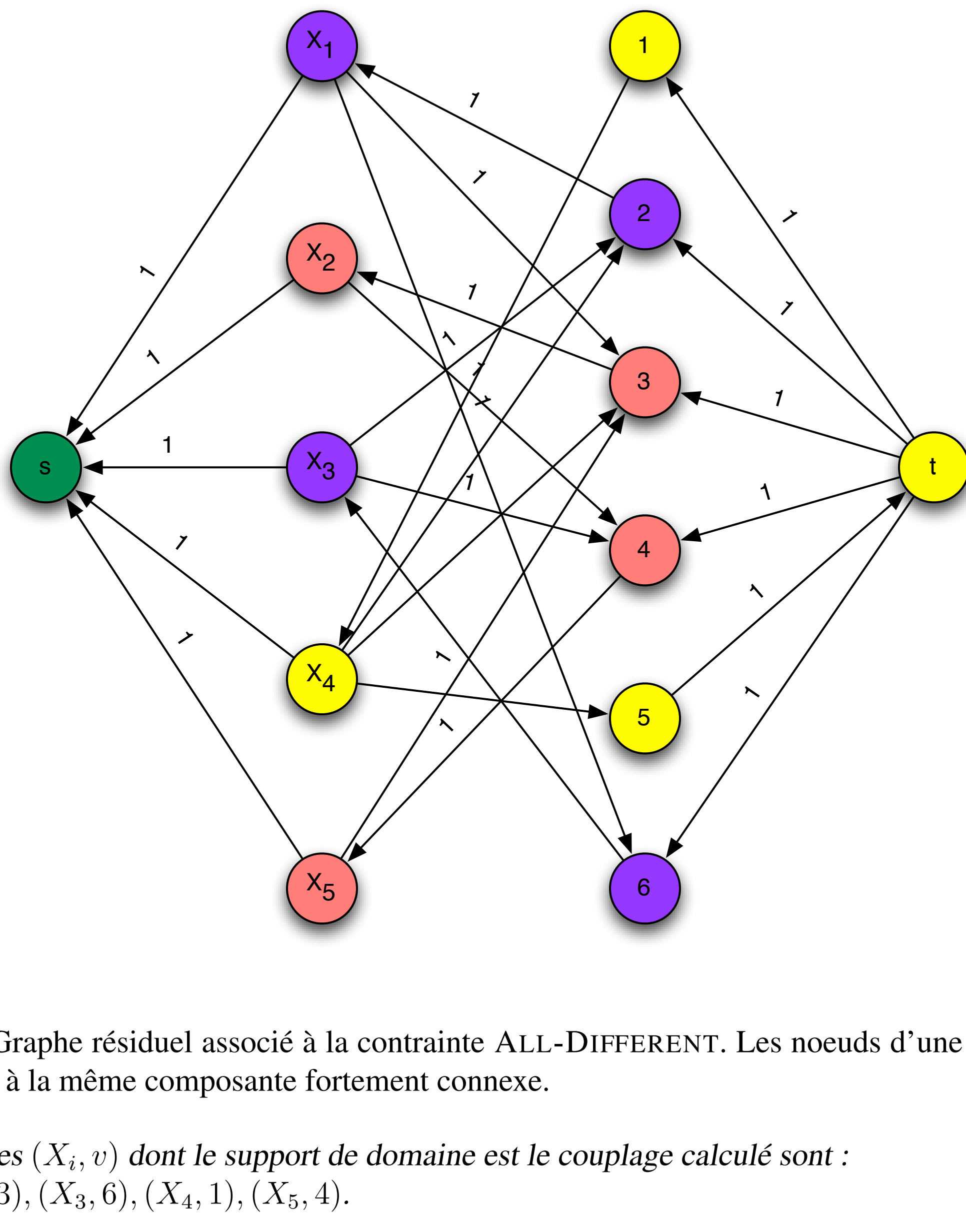


FIGURE 3 – Graphe résiduel associé à la contrainte ALL-DIFFERENT. Les noeuds d'une même couleur appartiennent à la même composante fortement connexe.

Les couples (X_i, v) *dont le support de domaine est le couplage calculé sont :*
$(X_1, 2), (X_2, 3), (X_3, 6), (X_4, 1), (X_5, 4)$.

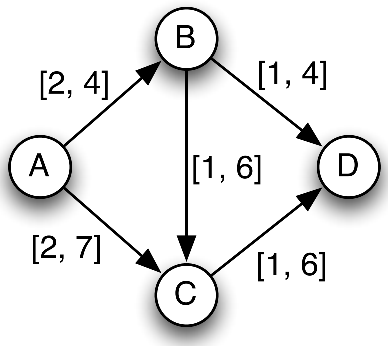
Les couples (X_i, v) *qui ont un support de domaine car les noeuds* X_i *et* v *appartiennent à la même composante fortement connexe :*
$(X_1, 6), (X_2, 4), (X_3, 2), (X_4, 5), (X_5, 3)$.

Les couples (X_i, v) qui n'ont pas de support de domaine car ils ne rencontrent aucune des deux conditions précédentes :
$(X_1, 3), (X_3, 4), (X_4, 2), (X_4, 3)$.

Après le filtrage, nous obtenons les domaines suivants.

$$\text{dom}(X_1) = \{2, 6\} \qquad \text{dom}(X_2) = \{3, 4\} \qquad \text{dom}(X_3) = \{2, 6\}$$
$$\text{dom}(X_4) = \{1, 5\} \qquad \text{dom}(X_5) = \{3, 4\}$$

Question # 6
Voici un graphe où chaque arête a une capacité minimale et maximale. L'objectif final de cette question est de calculer un flot valide entre A et D.



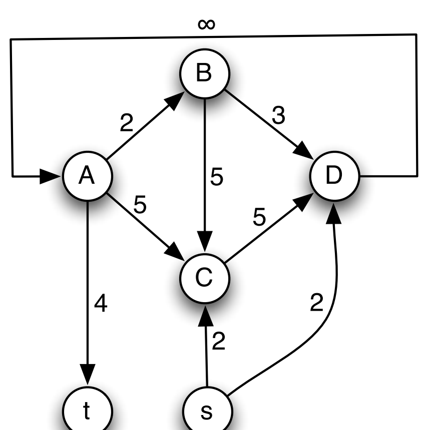
A) En suivant les étapes décrites dans les diapositives du Chapitre 7, transformez ce graphe en un graphe dont toutes les capacités minimales sont nulles ;

B) Calculez un flot maximum dans ce nouveau graphe ;

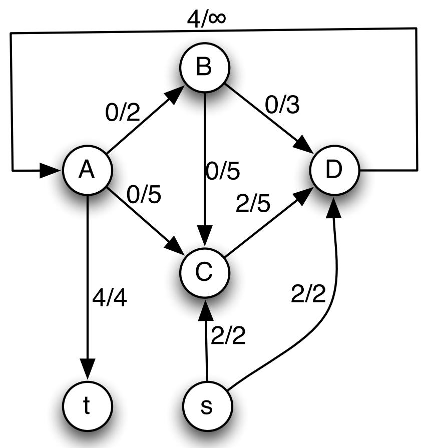
C) Convertissez votre flot maximum en un flot valide dans le graphe original.

Solution :

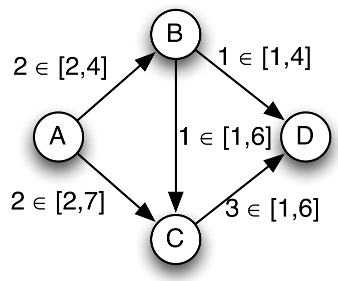
A) *Graphe dont toutes les capacitées minimales sont nulles.*



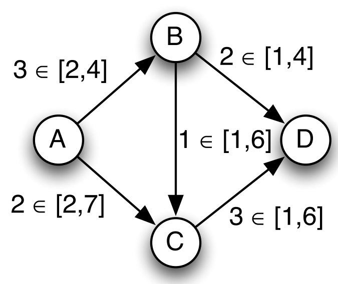
B) *Flot maximum*



C) *Flot valide (qui, dans ce cas-ci, n'est pas maximum)*



Question # 7
Donnez le graphe résiduel associé à ce flot.



Solution :