Inverser une matrice n'est pas plus facile que multiplier une matrice *

Claude-Guy Quimper

Considérez la matrice D de dimensions $3n \times 3n$ formée de la concaténation des matrices identités I_n, des matrices A et B et des matrices nulles 0, toutes de dimensions $n \times n$. La matrice D^{-1} est son inverse.

$$D = \begin{bmatrix} I_n & A & 0 \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -A & AB \\ 0 & I_n & -B \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$$

Soit les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Une façon de multiplier A et B est de construire la matrice D de cette façon.

$$D = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

En utilisant un algorithme qui calcule l'inverse d'une matrice, on obtient :

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & 19 & 22 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 43 & 50 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

*Ce document est inspiré de [1].

Notez que le produit AB se retrouve dans le coin supérieur droit de la matrice inverse. Nous avons donc démontré que s'il est possible d'inverser une matrice de dimensions $3n \times 3n$ en temps $\Theta(f(n))$, il est possible de multiplier des matrices de dimensions $n \times n$ en temps $\Theta(f(n))$. Ainsi, puisqu'il existe un minorant $\Omega(n^2 \log n)$ sur la multiplication de matrices, ce minorant s'applique aussi sur l'inverse d'une matrice. Autrement dit, on ne peut pas inverser une matrice plus rapidement que la multiplication de matrices.

Références

[1] Garth Isaak, Fast Matrix Multiplication and Inversion, Notes for Math 242, Linear Algebra, Lehigh Univerity, Fall 2008.