SOLUTIONS SÉRIE 0

Les exercices dénotés par une étoile (*) sont les exercices les plus importants à faire pour s'assurer de bien maîtriser la matière du cours. Il est recommandé de bien les comprendre. Si vous avez des questions, profitez des séances de travaux dirigés ou du forum pour les poser.

Exposants

***Question # 1**
Simplifiez, si possible, les expressions suivantes :

A) $e^a \times e^b$
Solution :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$

B) $a^0, a \neq 0$
Solution :
$a^0 = 1$

C) $(e^a)^x$
Solution :
$(e^a)^x = e^{ax}$

D) $\frac{e^{-a}}{e^b}$
Solution :
$\frac{e^{-a}}{e^b} = e^{-a} \times \frac{1}{e^b} = \frac{1}{e^a} \times \frac{1}{e^b} = \frac{1}{e^{b+a}}$

E) $\frac{e^a}{e^b}$
Solution :
$\frac{e^a}{e^b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{1}{e^{-a}} \times \frac{1}{e^b} = \frac{1}{e^{b-a}}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = e^a \times e^{-b} = e^{a-b}$

Évaluation de sommations

***Question # 2**
Simplifiez les sommations suivantes. [1]

A)* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i^2 + j^3)$
Solution :

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i^2 + j^3)$

= $\langle$ *En séparant les sommations, puisque l'ordre n'est pas important.* $\rangle$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} j^3$

1. Voir annexe A du livre de *A. Levitin*. Vous pouvez utiliser la sommation suivante : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

= ⟨ *En considérant que i^2 est une constante dans la sommation de gauche et en appliquant la règle pour la somme sur les j^3.* ⟩

$\sum_{i=1}^{n} i^2(\sum_{j=1}^{m} 1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m^2(m+1)^2}{4}$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les 1 sur la somme de gauche et en sortant les constantes de la somme de droite.* ⟩

$\sum_{i=1}^{n} i^2(m-1+1) + \frac{m^2(m+1)^2}{4}(\sum_{i=1}^{n} 1)$

= ⟨ *En sortant la constante de la somme de gauche et en utilisant la règle pour la somme sur les 1 sur la somme de droite.* ⟩

$m\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{m^2(m+1)^2}{4}(n-1+1)$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les i^2.* ⟩

$\frac{nm(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{nm^2(m+1)^2}{4}$

B) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(3i-2j)$

Solution :

$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(3i-2j)$

= ⟨ *En séparant les sommations.* ⟩

$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} 3i - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} 2j$

= ⟨ *En sortant les constantes des sommations.* ⟩

$3\sum_{i=0}^{n} i(\sum_{j=0}^{m} 1) - 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} j$

= ⟨ *En utilisant les règles de sommation sur les 1 et sur les j.* ⟩

$3\sum_{i=0}^{n} i(m-0+1) - 2\sum_{i=0}^{n} \frac{m(m+1)}{2}$

= ⟨ *En sortant les constantes des sommations.* ⟩

$3(m+1)\sum_{i=0}^{n} i - m(m+1)\sum_{i=0}^{n} 1$

= ⟨ *En utilisant les règles de sommation sur les i et sur les 1.* ⟩

$3(m+1)\frac{n(n+1)}{2} - m(m+1)(n-0+1)$

= ⟨ *En simplifiant l'expression.* ⟩

$\frac{3n(n+1)(m+1)}{2} - m(m+1)(n+1)$

=

$\frac{3n(n+1)(m+1)-2m(m+1)(n+1)}{2}$

=

$\frac{(n+1)(m+1)(3n-2m)}{2}$

C)* $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i \times j)$

Solution :

$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i \times j)$

= ⟨ *En sortant i de la sommation sur les j.)* ⟩

$\sum_{i=0}^{n} i(\sum_{j=0}^{m} j)$

= ⟨ *Lorsque j vaut 0, la sommation vaut clairement 0* ⟩

$\sum_{i=0}^{n} i(\sum_{j=1}^{m} j)$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les j.* ⟩

$\sum_{i=0}^{n} i\frac{m(m+1)}{2}$

= ⟨ *En sortant les constantes.* ⟩

$\frac{m(m+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} i$

= ⟨ *Lorsque i vaut 0, la sommation vaut clairement 0* ⟩

$\frac{m(m+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les i.* ⟩

$\frac{m(m+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$

D) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(6j)$

Solution :

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(6j)$

= ⟨ *Lorsque j vaut 0, la sommation vaut clairement 0* ⟩

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(6j)$

= ⟨ *En sortant la constante des sommations.* ⟩

$6\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} j$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les j* ⟩

$6\sum_{i=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$

= ⟨ *En sortant les constantes de la sommation.* ⟩

$3m(m+1)\sum_{i=1}^{n} 1$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les 1.* ⟩

$3nm(m+1)$

E)* $\sum_{i=0}^{n} f(i)$ *avec* $f(i) = \left\{\begin{array}{ll} i & \textit{si } i < 3 \\ 1 & \textit{sinon} \end{array}\right\}$ *en supposant que* $n \geq 3$

Solution :

$\sum_{i=0}^{n} f(i)$

= ⟨ *En séparant la sommation selon la fonction $f(i)$.* ⟩

$\sum_{i=0}^{2} f(i) + \sum_{i=3}^{n} f(i)$

= ⟨ *En remplaçant $f(i)$ par sa valeur selon le cas.* ⟩

$\sum_{i=0}^{2} i + \sum_{i=3}^{n} 1$

= ⟨ *Lorsque i vaut 0, la sommation de gauche vaut clairement 0* ⟩

$\sum_{i=1}^{2} i + \sum_{i=3}^{n} 1$

= ⟨ *En utilisant les règles pour la somme sur les i et pour la somme sur les 1.* ⟩

$\frac{2(2+1)}{2} + (n-3+1) = 3 + n - 2 = n + 1$

F) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(i)$ *avec* $f(i) = \left\{ \begin{array}{ll} i & \textit{si } i < 3 \\ 1 & \textit{sinon} \end{array} \right\}$ *en supposant que* $n \geq 3$

Solution :

$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(i)$

= ⟨ *En sortant* $f(i)$ *de la sommation sur les* j. ⟩

$\sum_{i=0}^{n} f(i) \left(\sum_{j=0}^{m} 1 \right)$

= ⟨ *En utilisant la sommation sur les 1.* ⟩

$\sum_{i=0}^{n} f(i) \, (m - 0 + 1)$

= ⟨ *En sortant les constantes.* ⟩

$(m+1) \sum_{i=0}^{n} f(i)$

= ⟨ *En séparant la sommation selon la fonction* $f(i)$. ⟩

$(m+1) \sum_{i=0}^{2} f(i) + (m+1) \sum_{i=3}^{n} f(i)$

= ⟨ *En remplaçant* $f(i)$ *par sa valeur selon le cas.* ⟩

$(m+1) \sum_{i=0}^{2} i + (m+1) \sum_{i=3}^{n} 1$

= ⟨ *Lorsque* i *vaut 0, la sommation de gauche vaut clairement 0* ⟩

$(m+1) \sum_{i=1}^{2} i + (m+1) \sum_{i=3}^{n} 1$

= ⟨ *En utilisant les règles pour la somme sur les* i *et pour la somme sur les 1.* ⟩

$(m+1)\frac{2(2+1)}{2} + (m+1)(n-3+1)$

= ⟨ *En simplifiant.* ⟩

$3(m+1) + (m+1)(n-2) = (m+1)(n+1)$

G) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} g(i)$ *avec* $g(i) = \left\{ \begin{array}{cc} i^3+1 & \text{si } i<2 \\ 2i & \text{sinon} \end{array} \right\}$ *en supposant que* $n \geq 2$

Solution :

$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} g(i)$

= ⟨ *En sortant* $g(i)$ *de la sommation sur les* j. ⟩

$\sum_{i=0}^{n} g(i)\left(\sum_{j=0}^{m} 1\right)$

= ⟨ *En utilisant la sommation sur les 1.* ⟩

$\sum_{i=0}^{n} g(i)(m-0+1)$

= ⟨ *En sortant les constantes de la sommation.* ⟩

$(m+1)\sum_{i=0}^{n} g(i)$

= ⟨ *En séparant la sommation selon la fonction* $g(i)$. ⟩

$(m+1)\sum_{i=0}^{1} g(i) + (m+1)\sum_{i=2}^{n} g(i)$

= ⟨ *En remplaçant* $g(i)$ *par sa valeur selon le cas.* ⟩

$(m+1)\sum_{i=0}^{1}(i^3+1) + (m+1)\sum_{i=2}^{n} 2i$

= ⟨ *En séparant la sommation de gauche et sortant les constantes.* ⟩

$(m+1)\sum_{i=0}^{1} i^3 + (m+1)\sum_{i=0}^{1} 1 + 2(m+1)\sum_{i=2}^{n} i$

= ⟨ *En développant les deux premières sommes en extension.* ⟩

$(m+1)(0^3+1^3) + (m+1)(1+1) + 2(m+1)\sum_{i=2}^{n} i$

= ⟨ *En complétant la somme sur les* i. ⟩

$(m+1) + 2(m+1) + 2(m+1)(\sum_{i=1}^{n} i - 1)$

= ⟨ *En utilisant la règle pour la somme sur les* i. ⟩

$3(m+1) + 2(m+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2(m+1)$ = $(m+1) + 2(m+1)\frac{n(n+1)}{2}$

=

$(m+1) + (m+1)n(n+1)$ = $(m+1)\left(n^2+n+1\right)$

Calcul de limites

***Question # 3**

Calculez les limites suivantes :

A)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

= ⟨ *formule de Stirling* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \times e^n}{c \times \sqrt{n} \times n^n}$

= ⟨ *simplification* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c \times \sqrt{n}}$

= ⟨ *règle de l'Hospital* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n \times \sqrt{n}}{1/2}$

=

∞

B)* $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!}$

Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!}$

= ⟨ *Formule de Stirling* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n \times e^n}{c \times \sqrt{n} \times n^n}$

= ⟨ $n^n = e^{\ln n^n} = e^{n \ln n}$ ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{c \times \sqrt{n} \times e^{n \ln n}}$

=

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c \times \sqrt{n} \times e^{n \ln n - 2n}}$

=

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c \times \sqrt{n} \times e^{n(\ln n - 2)}}$

= ⟨ $\ln n - 2$ *est positif, voir* † ⟩

$\frac{1}{\infty}$

=

0

C) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$
Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$

= ⟨ *règle de l'Hospital* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^n}$

= ⟨ *règle de l'Hospital* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n}$

0

D)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} n}{n}$
Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} n}{n}$

= ⟨ *règle de l'Hospital* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln 10}$

=

0

E)* $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+2n^2+6n+1)^3}{n^8}$
Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+2n^2+6n+1)^3}{n^8}$

= ⟨ *réécriture du polynôme.* $p(n)$ *est un polynôme de degré 8* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^9+p(n)}{n^8}$

= ⟨ *règle de l'Hospital 8 fois* ⟩

$\lim_{n\to\infty} \frac{9!n+c}{8!}$

=

∞

F) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+2n+1}}{n^2}$
Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+2n+1}}{n^2}$

=

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^4+2n+1}{n^4}}$

=

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}$

=

$\sqrt{1}$

G) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n}$
Solution :

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n}$

= $\langle\ n^n = e^{n \ln n}\ \rangle$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{n \ln n}}$

=

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n \ln n - n}}$

=

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n(\ln n - 1)}}$

= $\langle \ln a - 1$ *est positif, voir* † $\rangle$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\infty}$

=

0

† *Lorsque* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, *on sait alors que* $f(n) - g(n) > 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Techniques de preuves

***Question # 4**
Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour $n \geq 1$ *nous avons :*

A)* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
Solution :

- *Cas de base* $(n = 1)$ *:*
  $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\times 2}{2}$

- *Hypothèse d'induction :*
  Supposons vrai pour $n = k$ $(\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2})$

- *Étape d'induction :*
  Prouvons pour $n = k+1$ $(\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2})$

  $\sum_{i=1}^{k+1} i$

  = ⟨ *séparation de la sommation* ⟩

  $k+1+\sum_{i=1}^{k} i$

  = ⟨ *par l'hypothèse d'induction* ⟩

  $k+1+\frac{k(k+1)}{2}$

  =

  $\frac{k^2+3k+2}{2}$

B) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$
Solution :

- *Cas de base* $(n = 1)$ *:*
  $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1\times3\times2}{6}$

- *Hypothèse d'induction :*
  Supposons vrai pour $n = k$ $(\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6})$

- *Étape d'induction :*
  Prouvons pour $n = k+1$ $(\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6})$

  $\sum_{i=1}^{k+1} i^2$

  = ⟨ *séparation de la sommation* ⟩

  $(k+1)^2+\sum_{i=1}^{k} i^2$

  = ⟨ *par l'hypothèse d'induction* ⟩

  $k^2+2k+1+\frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$

  =

  $\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$

C) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Solution :

- *Cas de base* $(n = 1)$ *:*
  $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \frac{1^2\times2^2}{4}$

- *Hypothèse d'induction :*
  Supposons vrai pour $n = k$ $(\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4})$

- *Étape d'induction :*
  Prouvons pour $n = k+1$ $(\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4})$

  $\sum_{i=1}^{k+1} i^3$

  = ⟨ *séparation de la sommation* ⟩

$(k+1)^3 + \sum_{i=1}^{k} i^3$

= ⟨ *par l'hypothèse d'induction* ⟩

$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

=

$\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$

D) $\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

Solution :

- *Cas de base* ($n = 1$) *:*
  $\sum_{i=1}^{1} = 1! = 2! - 1$

- *Hypothèse d'induction :*
  Supposons vrai pour $n = k$ ($\sum_{i=1}^{k} i(i!) = (k+1)! - 1$)

- *Étape d'induction :*
  Prouvons pour $n = k + 1$ ($\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = (k+2)! - 1$)

$\sum_{i=1}^{k+1} i(i!)$

= ⟨ *séparation de la sommation* ⟩

$(k+1)(k+1)! + \sum_{i=1}^{k} i(i!)$

= ⟨ *par l'hypothèse d'induction* ⟩

$(k+1)(k+1)! + (k+1)! - 1$

=

$(k+1)!(k+1+1) - 1$

=

$(k+2)! - 1$

Logarithmes

***Question # 5**
Simplifiez, si possible, les expressions suivantes :

A) $\log_b b = ?$
Solution :
$\log_b b = 1$

B) $a^{\log_a b} = ?$
Solution :
$a^{\log_a b} = b$

C) $\log_a(a^x) = ?$
Solution :
$\log_a a^x = x$

Question # 6

Prouvez ou réfutez les propriétés suivantes sur les logarithmes :

A) $log_a\ (xy) = log_a\ x + log_a\ y$

Solution :

$\log_a(xy)$

= $\langle$ posons $\log_a x = X$ et $\log_a y = Y$ $\rangle$

$\log_a(a^X a^Y)$

=

$\log_a(a^{X+Y})$

= $\langle$ $log_a a^k = k$ $\rangle$

$X + Y$

= $\langle$ selon les valeurs données à X et Y $\rangle$

$\log_a x + \log_a y$

B) $log_a\ \frac{x}{y} = log_a\ x - log_a\ y$

Solution :

$\log_a(x/y)$

= $\langle$ posons $\log_a x = X$ et $\log_a y = Y$ $\rangle$

$\log_a(a^X / a^Y)$

=

$\log_a(a^{X-Y})$

= $\langle$ $log_a a^k = k$ $\rangle$

$X - Y$

= $\langle$ selon les valeurs données à X et Y $\rangle$

$\log_a x - \log_a y$

C) $log_a\ x^y = y\ log_a\ x$
Solution :

$\log_a(x^y)$
= $\langle$ *posons* $\log_a x = X$ $\rangle$
$\log_a(a^{Xy})$
= $\langle$ $log_a a^k = k$ $\rangle$
Xy
= $\langle$ *selon la valeur donnée à* X $\rangle$
$y \log_a x$

D) $log_a\ (x+y) = log_a\ x \times log_a\ y$
Solution :

— $\log_{10}(90+10) = 2$
— $\log_{10} 90 + \log_{10} 10 = 2.95$

E) $log_a\ x = \frac{log_b\ x}{log_b\ a}$
Solution :

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
$\Leftrightarrow$
$\log_b a \times \log_a x = \log_b x$
$\Leftrightarrow$ $\langle$ $x = y \Leftrightarrow b^x = b^y$ $\rangle$
$b^{\log_b a \times \log_a x} = b^{\log_b x}$
$\Leftrightarrow$
$(b^{\log_b a})^{\log_a x} = b^{\log_b x}$
$\Leftrightarrow$ $\langle$ $log_a a^k = k$ $\rangle$
$a^{\log_a x} = b^{\log_b x}$
$\Leftrightarrow$ $\langle$ $log_a a^k = k$ $\rangle$
$x = x$
$\Leftrightarrow$
vrai

F) $x^{log_b\ y} = y^{log_b\ x}$
Solution :

$x^{\log_b y}$
= $\langle$ *posons* $\log_b y = Y$ $\rangle$
x^Y

= ⟨ posons $\log_b x = X$ ⟩

b^{XY}

=

b^{YX}

= ⟨ selon la définition de Y ⟩

$(b^{\log_b y})^X$

= ⟨ $log_a a^k = k$ ⟩

y^X

= ⟨ selon la définition de X ⟩

$y^{\log_b x}$

"You do not truly know someone until you fight them."
Seraph : Matrix Reloaded

"You do not truly understand something until you prove it."
F. Gagnon