

## SÉRIE 3 (Chapitre 2b)

Tous les numéros dans cette série sont pertinents. Il est recommandé de tous les faire.

### \*Question # 1

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm Secret( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entré : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de  $n$  nombres réels  
   $minval \leftarrow A[0]$   
   $maxval \leftarrow A[0]$   
  FOR  $i \leftarrow 1$  TO  $n - 1$   
    IF  $A[i] < minval$   
       $minval \leftarrow A[i]$   
    IF  $A[i] > maxval$   
       $maxval \leftarrow A[i]$   
  RETURN  $maxval - minval$ 
```

- A) Que fait cet algorithme ?
- B) Quelle est son opération de base ?
- C) Combien de fois l'opération de base est-elle exécutée ?
- D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?

**\*Question # 2**

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm inefficace( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entrée : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de  $n$  nombres entiers  
  FOR  $i \leftarrow 0$  TO  $n - 1$   
    Effacer( $A, 0$ )  
  RETURN  $A$ 
```

Supposons que la fonction **Effacer** est l'équivalent de la méthode **erase** de la classe **vector** en C++. Pour répondre à cette question, il est conseillé de consulter la documentation de cette méthode.

- A) Que fait cet algorithme ?
- B) Quel est le temps d'exécution d'un appel à **Effacer** ?
- C) Quel est le temps d'exécution de l'algorithme *inefficace* ?

*D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?*

**\*Question # 3**

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm Enigma( $A[0 \dots n-1, 0 \dots n-1]$ ) :  
  //Entré : Une matrice  $A[0 \dots n-1, 0 \dots n-1]$  de nombres réels  
  FOR  $i \leftarrow 0$  TO  $n-2$   
    FOR  $j \leftarrow i+1$  TO  $n-1$   
      IF  $A[i, j] \neq A[j, i]$   
        RETURN false  
  RETURN true
```

- A) Que fait cet algorithme ?
- B) Quelle est son opération de base ?
- C) Combien de fois l'opération de base est-elle exécutée en pire et en meilleur cas ?
- D) À quelle classe d'efficacité appartient cet algorithme ?

**\*Question # 4**

Analysez la complexité de l'algorithme suivant :

```

Algorithme Mystérieux( $A[0 \dots n - 1]$ ) :
  /* Input :  $A[0 \dots n - 1]$ , un vecteur d'entiers positifs. */
  TriFusion( $A$ )      /* S'exécute en  $\Theta(n \log n)$  dans tous les cas. */
   $val \leftarrow \infty$ 
   $i \leftarrow 0$ 
  WHILE  $i \leq n - 2$ 
    IF  $A[i] = A[i + 1]$ 
      RETURN 0
    IF  $|A[i] - A[i + 1]| < val$ 
       $val \leftarrow |A[i] - A[i + 1]|$ 
       $i \leftarrow i + 1$ 
  RETURN  $val$ 

```

Effectuez toutes les étapes pour l'analyse :

- Choix d'une opération de base.
- Calcul du nombre de fois où l'opération de base est exécutée.
- Poser la classe de complexité.

Utilisez la notation  $\Theta$ . Si le temps d'exécution peut varier entre deux instances de même taille alors il faut procéder à l'analyse en meilleur cas et en pire cas.

**\*Question # 5**

En utilisant l'approximation par intégrale, déterminer l'ordre exacte de croissance pour les fonctions suivante :

A)  $\sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + 1)^2$

B)  $\sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i^2$

C)  $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i + j)$

**\*Question # 6**

Analysez la complexité de l'algorithme suivant en fonction de  $n$  :

```

Algorithme Complexe( $n$ )
  pour  $i = 2..n$ 
     $c = 0$ 
    while  $c < n$ 
       $c = c + i$ 

```

Effectuez toutes les étapes pour l'analyse :

- Choix d'une opération de base.
- Calcul du nombre de fois où l'opération de base est exécutée.
- Poser la classe de complexité.

Utilisez la notation  $\Theta$ . Si le temps d'exécution peut varier entre deux instances de même taille alors il faut procéder à l'analyse en meilleur cas et en pire cas.

**\*Question # 7**

Résolvez les relations de récurrences suivantes :

A)  $x(n) = x(n - 1) + 5, x(1) = 0$

B)  $x(n) = 3x(n - 1), x(1) = 4$

C)  $x(n) = x(n - 1) + n, x(0) = 0$

D)  $x(n) = x(n/2) + n, x(1) = 1$  (on suppose  $n = 2^k$ )

E)  $x(n) = x(n/3) + 1, x(1) = 1$  (on suppose  $n = 3^k$ )

**\*Question # 8**

Soit l'algorithme suivant.

```
Algorithm MinI( $A[0 \dots n - 1]$ ) :  
  //Entrée : Un tableau  $A[0 \dots n - 1]$  de nombres réels  
  IF  $n = 1$   
    RETURN  $A[0]$   
  ELSE  
     $temp \leftarrow \text{MinI}(A[0 \dots n - 2])$   
    IF  $temp \leq A[n - 1]$   
      RETURN  $temp$   
    ELSE  
      RETURN  $A[n - 1]$ 
```

A) Que fait cet algorithme ?

B) Écrivez la relation de récurrence qui exprime le nombre de fois où l'opération de base est exécutée et résolvez-la.

**\*Question # 9**

Soit l'algorithme suivant qui résout le même problème que l'algorithme de la question 8.

```
Algorithm Min2( $A[l \dots r]$ ) :  
  IF  $l = r$   
    RETURN  $A[l]$   
  ELSE  
     $temp1 \leftarrow \text{Min2}(A[l \dots \lfloor (l + r)/2 \rfloor])$   
     $temp2 \leftarrow \text{Min2}(A[\lfloor (l + r)/2 \rfloor + 1 \dots r])$   
    IF  $temp1 \leq temp2$   
      RETURN  $temp1$   
    ELSE  
      RETURN  $temp2$ 
```

- A) Écrivez la relation de récurrence qui exprime le nombre de fois où l'opération de base est exécutée et résolvez-la.
- B) Lequel des algorithmes *Min1* ou *Min2* est le plus rapide ? Pouvez-vous contruire un nouvel algorithme qui serait plus efficace que *Min1* et *Min2* tout en résolvant le même problème ?



**\*Question # 10**

Soit  $A$  la matrice  $n \times n$  suivante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On dénote par  $\det A$  le déterminant de la matrice  $A$ . Pour  $n = 1$ ,  $\det A = a_{11}$  et pour  $n > 1$ ,  $\det A = \sum_{j=1}^n s_j a_{1j} \det A_j$  où  $s_j$  est  $+1$  lorsque  $j$  est impair et  $-1$  lorsque  $j$  est pair,  $a_{1j}$  est l'élément de la matrice en ligne 1 et colonne  $j$ , et  $A_j$  est la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue de la matrice  $A$  en enlevant la ligne 1 et la colonne  $j$  de cette dernière.

- A) Écrivez la relation de récurrence décrivant le nombre de multiplications faite par l'algorithme implementant cette définition récursive pour le calcul du déterminant.
- B) Sans résoudre la récurrence, que pouvez-vous dire au sujet de l'ordre de croissance de sa valeur par rapport à  $n$  ?