Apêndice C
Solução da Colisão Frontal entre Duas Partículas Isoladas

Imagine-se uma colisão unidimensional entre duas partículas “i” e “j”, com massas m_i e m_j, que se aproximam com velocidade relativa $v_{ij} = -v_{ij}^0$. Suponha-se que nenhuma força, além da interação entre as partículas, se manifeste durante o processo. Durante o contato, a força que “j” exerce sobre “i” é dada por

$$F_{ij} = \begin{cases} -k_{ij}\delta_{ij} + \eta_{ij}v_{ij} & \text{se} \quad \delta_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{C.1}$$

onde δ_{ij} é a magnitude da interpenetração entre as partículas, conforme definida no Capítulo 5, e v_{ij} é a velocidade relativa entre “i” e “j”, cujo valor é negativo durante a aproximação e positivo durante o afastamento. Logo,

$$\frac{d\delta_{ij}}{dt} = -v_{ij}. \tag{C.2}$$

A partir de 2ª Lei de Newton, tem-se que

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = \frac{dv_j}{dt} - \frac{dv_i}{dt} = \frac{F_{ji}}{m_j} - \frac{F_{ij}}{m_i} \tag{C.3}$$

Pela 3ª Lei de Newton, sabe-se que $F_{ji} = -F_{ij}$. A partir desta informação e da Equação (C.1), pode-se transformar a expressão acima em

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = -\left(\frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_i}\right)F_{ij} = -\frac{F_{ij}}{m_{ij}}, \tag{C.4}$$

onde $m_{ij} = \dfrac{m_i m_j}{m_i + m_j}$. (C.5)

A Equação (C.4), tanto antes e quanto após a colisão, torna-se $dv_{ij}/dt = 0$, significando que a velocidade relativa é constante quando não há contato. Durante a colisão, a equação se torna

$$m_{ij}\frac{dv_{ij}}{dt} = k_{ij}\delta_{ij} - \eta_{ij}v_{ij}. \tag{C.6}$$

Então, a partir da Equação (C.2), reescreve-se a equação acima na forma

$$m_{ij}\frac{d^2\delta_{ij}}{dt^2} + \eta_{ij}\frac{d\delta_{ij}}{dt} + k_{ij}\delta_{ij} = 0 \tag{C.7}$$

Considerando-se o início da colisão como correspondente a $t = 0$, tem-se, como condições iniciais para a equação acima,

$$\delta_{ij}(0) = 0 \text{ e} \tag{C.8}$$

$$v_{ij}(0) = -\left.\frac{d\delta_{ij}}{dt}\right|_{t=0} = -v_{ij}^{0}. \tag{C.9}$$

Sejam definidos

$$\gamma \equiv \frac{\eta_{ij}}{2m_{ij}} \text{ e} \tag{C.10}$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k_{ij}}{m_{ij}} - \gamma^2} = \frac{\sqrt{4m_{ij}k_{ij} - \eta_{ij}^2}}{2m_{ij}}. \tag{C.11}$$

Então, as Equações Diferenciais (C.2) e (C.7) admitem as seguintes soluções:

$$\delta_{ij}(t) = \exp(-\gamma t)\left[A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] \text{ e} \tag{C.12}$$

$$v_{ij}(t) = \gamma\delta_{ij}(t) - \exp(-\gamma t)\omega\left[B\cos(\omega t) - A\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]. \tag{C.13}$$

onde A e B são constantes de integração. Para se chegar às expressões acima, considerou-se que $k_{ij}/m_{ij} > \gamma^2$, o que corresponde a um amortecimento dito sub-crítico (Nussenveig, 1983, p. 116). Aplicando-se as condições iniciais, chega-se a

$$\delta_{ij}(0) = A = 0 \text{ e} \tag{C.14}$$

$$v_{ij}(0) = -\omega B = -v_{ij}^0 \tag{C.15}$$

Assim, as soluções particulares do problema em questão são

$$\delta_{ij}(t) = \frac{v_{ij}^0}{\omega}\exp(-\gamma t)\,\mathrm{sen}(\omega t) \text{ e} \tag{C.16}$$

$$v_{ij}(t) = \gamma\delta_{ij}(t) - v_{ij}^0 \exp(-\gamma t)\cos(\omega t)\,. \tag{C.17}$$

Substituindo-se as soluções acima na Equação (C.1), tem-se a evolução temporal da força de contato durante a colisão. Após manipulações algébricas, tem-se

$$F_{ij}(t) = -\frac{v_{ij}^0}{\omega}\exp(-\gamma t)\left[(k - \eta_{ij}\gamma)\,\mathrm{sen}(\omega t) + \eta_{ij}\omega\cos(\omega t)\right]. \tag{C.18}$$

No final da colisão, sabe-se que δ_{ij} volta a ser nulo. Assim sendo, pode-se calcular a duração de tal colisão, Δt_{ij}, através da equação

$$\delta_{ij}(\Delta t_{ij}) = \frac{v_{ij}^0}{\omega}\exp(-\gamma\Delta t_{ij})\,\mathrm{sen}(\omega\Delta t_{ij}) = 0\,. \tag{C.19}$$

Para que valha a equação acima, necessita-se que

$$\omega\Delta t_{ij} = n\pi\,, \tag{C.20}$$

onde n é um número inteiro qualquer. A duração da colisão corresponde ao menor valor positivo de Δt_{ij} que satisfaz a relação acima, ou seja,

$$\Delta t_{ij} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_{ij}}{\sqrt{4m_{ij}k_{ij} - \eta_{ij}^2}} \tag{C.21}$$

Pode-se definir um **coeficiente de restituição** para um par “ij” como a razão entre os valores absolutos das velocidades relativas no final e no início da colisão, respectivamente. Devido à dissipação de energia, tal coeficiente não pode ser maior que uma unidade. Sabendo-se que tais velocidades relativas têm sinais opostos, escreve-se

$$e_{ij} \equiv \frac{|v_{ij}(\Delta t_{ij})|}{|v_{ij}(0)|} = -\frac{v_{ij}(\Delta t_{ij})}{v_{ij}(0)} = \frac{v_{ij}(\Delta t_{ij})}{v_{ij}^0}\ . \tag{C.22}$$

Substituindo-se o resultado da Equação (C.21) na Equação (C.17), obtém-se

$$v_{ij}(\Delta t_{ij}) = \gamma\delta_{ij}(\pi/\omega) - v_{ij}^0 \exp(-\gamma\pi/\omega)\cos(\pi) = v_{ij}^0 \exp(-\gamma\pi/\omega) \tag{C.23}$$

Portanto, o valor do coeficiente de restituição do par “ij” é dado por

$$e_{ij} = \exp\left(-\frac{\gamma\pi}{\omega}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\eta_{ij}}{\sqrt{4m_{ij}k_{ij} - \eta_{ij}^2}}\right) \tag{C.24}$$

Conseqüentemente, assim como se afirma no Capítulo 5, é possível especificar e_{ij} no lugar de η_{ij}, e se obter este através da solução da equação acima. Sabendo-se que $e_{ij} \leq 1$ e que η_{ij} deve ser positivo, a solução válida é

$$\eta_{ij} = -\frac{2\sqrt{m_{ij}k_{ij}}\ln e_{ij}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 e_{ij}}}\ . \tag{C.25}$$