Apêndice A

Perímetro da Interseção entre uma Circunferência e um Esferocilindro

A.1 – Introdução

Neste apêndice, deduzem-se as expressões matemáticas e as condições lógicas necessárias para se calcular o comprimento total da interseção entre uma circunferência e um esferocilindro. Para este fim, todos os possíveis pontos de interseção entre tal circunferência e a superfície externa do sólido devem ser computados. No caso, as duas figuras são descritas no espaço cartesiano. Assim como foi exposto no Capítulo 3, Seção 3.2, considera-se que o esferocilindro possui diâmetro σ_i e comprimento ℓ_i. Seu centro situa-se no ponto $\mathbf{r}_i$ e sua orientação (direção do seu eixo central) é determinada por um vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}_i$. Retornando-se à Figura 3.2.1, pode-se observar um corte longitudinal em tal sólido.

A circunferência em questão possui raio igual a r e está situada sobre um plano horizontal, ou seja, paralelo ao eixo xy, localizado em uma altitude z. Além disto, o centro da circunferência encontra-se sobre o eixo z, no ponto $[0 \quad 0 \quad z]^T$. Desta forma, pode-se representá-la através da seguinte parametrização:

$$\mathbf{p}_c(z, r, \theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad \theta \in (-\pi, \pi]. \qquad \text{(A.1)}$$

onde $\mathbf{p}_c$ é o conjunto de todos os pontos da circunferência, sendo o ângulo θ expresso em radianos.

Definidos todos os parâmetros do esferocilindro, além do raio da circunferência e da altitude na qual ela está situada, pode-se representar os pontos de interseção entre as figuras através de um conjunto de valores reais de θ situados no intervalo entre $-\pi$ e π, aberto no extremo inferior e fechado no extremo superior. Para cálculo destas interseções, o procedimento adotado neste trabalho se divide em duas etapas. A primeira consiste no cálculo das interseções entre a circunferência e a superfície da parte cilíndrica do esferocilindro. A outra etapa consiste no cálculo das interseções entre a circunferência e as duas superfícies hemisféricas. Para facilitar a distinção entre os hemisférios das diferentes extremidades do esferocilindro, chamar-se-á de **extremidade positiva** aquela definida pelo sentido direto do vetor $\hat{\mathbf{u}}_i$ e de **extremidade negativa** a oposta. No esferocilindro da Figura 3.2.1, por exemplo, a extremidade positiva é aquela situada no canto superior direito.

A.2 – Pontos de Interseção entre uma Circunferência e a Seção Cilíndrica de um Esferocilindro

Nesta seção, apresenta-se um algoritmo para o cálculo dos pontos de interseção entre a circunferência e a superfície da parte cilíndrica do esferocilindro (superfície lateral de um cilindro).

Sendo $(\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)$ o vetor que liga o baricentro do esferocilindro a um dos pontos da circunferência, denomina-se como λ_i a componente deste vetor na direção do eixo central do cilindro, cujo valor pode ser positivo ou negativo, dependendo do ângulo formado entre tais vetor e eixo. O valor absoluto de λ_i é igual ao comprimento da projeção do vetor sobre o eixo definido por $\hat{\mathbf{u}}_i$, como pode ser visto na Figura A.1. Por ser $\hat{\mathbf{u}}_i$ um vetor unitário, o valor de λ_i é dado pelo produto escalar entre $\hat{\mathbf{u}}_i$ e o vetor $(\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)$, ou seja,

$$\lambda_i = \hat{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i). \tag{A.2}$$

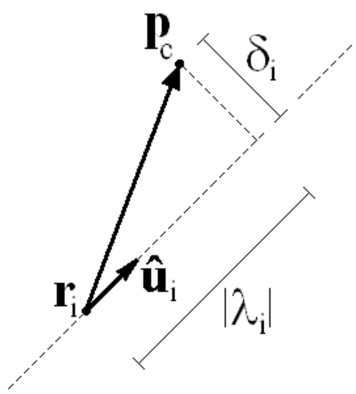

Figura A.1 – Visualização dos parâmetros geométricos.

Outra variável mostrada na Figura A.1 é δ_i, que corresponde à mínima distância entre o ponto $\mathbf{p}_c$ e o eixo longitudinal do esferocilindro. Observando o esquema da Figura A.1 conclui-se, pelo teorema de Pitágoras, que

$$\lambda_i^2 + \delta_i^2 = \| \mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i \|^2 . \tag{A.3}$$

Assim, pode-se calcular o quadrado do valor de δ_i da seguinte forma:

$$\delta_i^2 = \| \mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i \|^2 - [\hat{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)]^2 . \tag{A.4}$$

Observe-se que, se o valor de δ_i for igual ao raio do esferocilindro ($\sigma_i/2$), o ponto $\mathbf{p}_c$ pertencerá à superfície de um cilindro de mesmo raio, mas de comprimento infinito. O valor de δ_i, assim como o de λ_i, tem apenas um grau de liberdade, relativo ao ângulo θ utilizado na parametrização da circunferência. Sendo mais fácil a manipulação do quadrado do valor de δ_i, define-se a seguinte função:

$$f_i(\theta) = \frac{\sigma_i^2}{4} - \delta_i^2 . \tag{A.5}$$

Como conseqüência das afirmações do parágrafo anterior, a função acima é nula para os valores de θ que correspondem aos pontos de interseção entre a circunferência e o cilindro infinito. Além disto, tal função carrega outra informação. Se, para um determinado ponto $\mathbf{p}_c$ da circunferência, o valor de $f_i(\theta)$ for positivo, tal ponto encontra-se no interior do cilindro. Caso contrário, ou seja, se $f_i(\theta)$ tiver valor negativo, o ponto $\mathbf{p}_c$ situa-se fora do sólido. A partir das Equações (A.2) e (A.3), pode-se representar a função $f_i(\theta)$ da seguinte maneira:

$$f_i(\theta) = \frac{\sigma_i^2}{4} - \|\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i\|^2 + [\hat{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)]^2 . \tag{A.6}$$

Expandindo-se a expressão acima, chega-se a

$$f_i(\theta) = \frac{\sigma_i^2}{4} - \|\mathbf{p}_c\|^2 - \|\mathbf{r}_i\|^2 + 2(\mathbf{p}_c \cdot \mathbf{r}_i) + (\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{p}_c - \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i)^2 . \tag{A.7}$$

Note-se que $\mathbf{p}_c$ é o único vetor que depende do parâmetro θ. Sua norma, porém, é constante, pois

$$\|\mathbf{p}_c\|^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta + z^2 = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) + z^2 = r^2 + z^2 . \tag{A.8}$$

Sabendo-se que $\mathbf{r}_i = [r_{ix} \quad r_{iy} \quad r_{iz}]^T$ e $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{u}_{ix} \quad \hat{u}_{iy} \quad \hat{u}_{iz}]^T$, e dada a definição de $\mathbf{p}_c$ [Equação (A.1)], pode-se reescrever a Equação (A.7) como

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &= 2r(r_{ix}\cos\theta + r_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2r_{iz}z + \\ &+ \left[r(\hat{u}_{ix}\cos\theta + \hat{u}_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \hat{u}_{iz}z - \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i\right]^2 + \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2\right). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Para simplificar a expressão acima, definam-se as seguintes variáveis:

$$A_i \equiv 2r_{iz}z + \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2\right) \qquad \text{e} \tag{A.10}$$

$$B_i \equiv \hat{u}_{iz}z - \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i . \tag{A.11}$$

Utilizando as definições acima, tem-se que

$$f_i(\theta) = 2r\,(r_{ix}\cos\theta + r_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \left[r\,(\hat{u}_{ix}\cos\theta + \hat{u}_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta) + B_i\right]^2 + A_i \;. \tag{A.12}$$

É meta, então, calcular as raízes reais da função $f_i(\theta)$ no intervalo $(-\pi, \pi]$. Como mencionado anteriormente, estas raízes representam os pontos de interseção entre a circunferência e a superfície de um cilindro infinito que corresponde a um prolongamento da seção cilíndrica do esferocilindro. Dentre todas as raízes, contudo, devem-se discriminar aquelas que denotam pontos situados sobre a superfície real do sólido. Como se pode notar na Figura A.2, o valor absoluto do parâmetro λ_i associado a tais pontos deve ser menor ou igual à metade do comprimento do esferocilindro. Assim, são válidos como interseção verdadeira apenas os pontos que satisfazem à condição

$$|\lambda_i| \leq \frac{\ell_i}{2} \,. \tag{A.13}$$

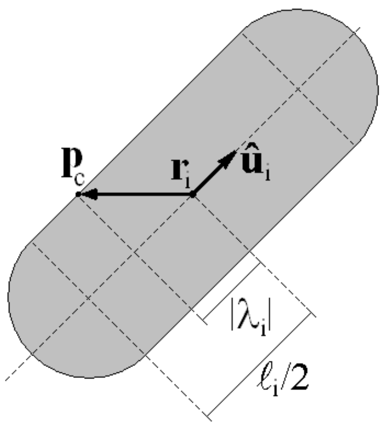

Figura A.2 – Critério para discriminação dos pontos de interseção entre a circunferência e a seção cilíndrica do esferocilindro.

Necessita-se, agora, de um algoritmo robusto para o cálculo das raízes reais da Equação (A.12). Geometricamente, sabe-se que há, no máximo, quatro pontos de interseção entre uma circunferência e a superfície de um cilindro de comprimento infinito, salvo o caso em que a circunferência coincide com uma de suas seções e, portanto, há infinitos pontos de interseção. Isto ocorre quando o eixo central do cilindro coincide com o eixo z e o seu raio é igual ao raio da circunferência, ou seja, quando

$$r_{ix} = r_{iy} = 0 \quad , \quad \hat{u}_{ix} = \hat{u}_{iy} = 0 \quad \text{e} \quad r = \frac{\sigma_i}{2} . \tag{A.14}$$

Neste caso, o comprimento da interseção entre o esferocilindro e a circunferência será igual ao comprimento desta, ou seja, igual a $2\pi r$, se o módulo da diferença entre Z e r_{iz} for menor ou igual à metade do comprimento do esferocilindro. Caso contrário, não há interseção entre as figuras. Se as condições da Equação (A.14) não se verificam, uma forma simples de se resolver o problema é tentar transformar a Equação (A.12) em um polinômio do quarto grau. Para tanto, convém (como poderá ser constatado adiante) a utilização da seguinte identidade trigonométrica (Abreu, 2000, p. 133):

$$\alpha \cos\theta + \beta \operatorname{sen}\theta = \frac{\alpha\left[1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + 2\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} . \tag{A.15}$$

A notação pode ser simplificada ao se efetuar a seguinte definição:

$$\phi \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) . \tag{A.16}$$

Tendo-se em vista a identidade trigonométrica apresentada e a definição da variável ϕ, iguala-se a zero a função $f_i(\theta)$ da Equação (A.12) para se obter a expressão

$$2r\frac{r_{ix}\left(1-\phi^2\right)+2r_{iy}\phi}{1+\phi^2}+\left[r\frac{\hat{u}_{ix}\left(1-\phi^2\right)+2\hat{u}_{iy}\phi}{1+\phi^2}+B_i\right]^2+A_i=0\,. \qquad \text{(A.17)}$$

Multiplicando-se os termos da equação acima por $\left(1+\phi^2\right)^2$ e expandindo o resultado na forma polinomial, obtém-se

$$a_i\phi^4+b_i\phi^3+c_i\phi^2+d_i\phi+e_i=0\,, \qquad \text{(A.18)}$$

onde

$$a_i=A_i+(B_i-\hat{u}_{ix}r)^2-2r_{ix}r\,,$$
$$b_i=4r[r_{iy}+\hat{u}_{iy}(B_i-\hat{u}_{ix}r)]\,,$$
$$c_i=2[A_i+B_i^2-(\hat{u}_{ix}r)^2+2(\hat{u}_{iy}r)^2]\,, \qquad \text{(A.19)}$$
$$d_i=4r[r_{iy}+\hat{u}_{iy}(B_i+\hat{u}_{ix}r)] \quad \text{e}$$
$$e_i=A_i+(B_i+\hat{u}_{ix}r)^2+2r_{ix}r\,.$$

Então, para se encontrar os valores reais de θ que satisfazem a Equação (A.12), basta encontrar as raízes reais (em ϕ) do polinômio da Equação (A.18) e, então, aplicar a transformação inversa

$$\theta=2\,\mathrm{arctg}\left(\phi\right). \qquad \text{(A.20)}$$

Há formas analíticas para a solução de um polinômio do quarto grau, bem como um número de algoritmos numéricos rápidos e confiáveis. Além da forma polinomial, a Equação (A.18) tem outra grande vantagem em relação à Equação (A.12). A inversa da função tangente pode ser definida de modo a ter seu domínio igual ao conjunto $\Re$ e sua imagem igual ao conjunto aberto $(-\pi/2,\pi/2)$. Além disto, tal função é monotônica em todo o domínio. Assim, a cada valor real e finito da variável ϕ encontrado como solução da Equação (A.18) está associado um único ângulo θ dentro do intervalo aberto $(-\pi, \pi)$. Esta sentença pode ser melhor verificada observando-se o gráfico da Figura A.3, no qual é mostrada a forma da transformação inversa dada pela Equação (A.20).

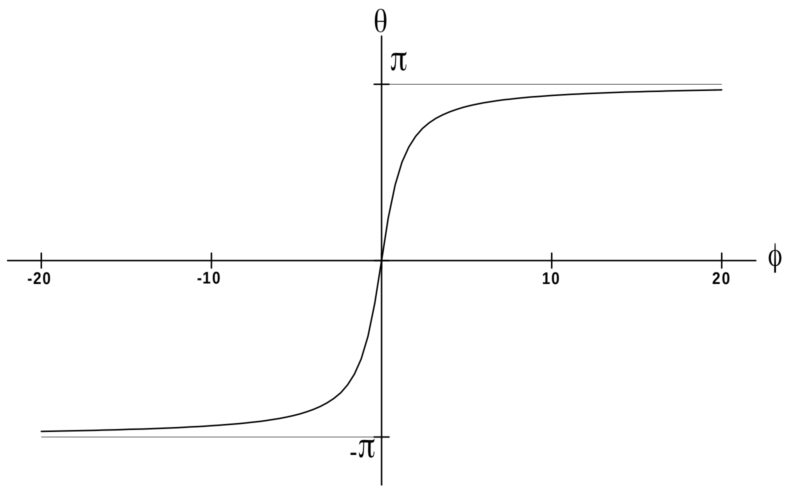

Figura A.3 – Valores do parâmetro θ em função da variável ϕ.

Note-se que é possível que o ponto extremo superior do intervalo definido na Equação (A.1), $\theta = \pi$, seja raiz da Equação (A.12). No entanto, não há como se obter esta conclusão a partir da resolução do polinômio, pois trata-se de um ponto singular na definição da variável ϕ. Esta condição deve ser verificada *a priori*, averiguando-se se $f_i(\pi) = 0$. Substituindo $\theta = \pi$ na expressão final da função $f_i(\theta)$, ou seja, na Equação (A.12), vê-se que

$$f_i(\pi) = -2r_{i_X}r + (B_i - \hat{u}_{i_X}r)^2 + A_i = a_i . \tag{A.21}$$

Em outras palavras, se o coeficiente do termo de quarto grau da equação polinomial for nulo, toma-se $\theta = \pi$ como raiz da Equação (A.12) e calculam-se as três demais raízes (sendo uma delas, necessariamente, real) a partir do polinômio de terceiro grau obtido pela Equação (A.18). Há, ainda, a possibilidade de que o cilindro apenas tangencie a circunferência no ponto correspondente a $\theta = \pi$. Neste caso, além da nulidade da função $f_i(\theta)$ em tal ponto, deve-se verificar a nulidade de sua primeira derivada em relação a θ, que é dada por

$$f_i'(\theta) = 2r(-r_{ix}\,\mathrm{sen}\,\theta + r_{iy}\cos\theta) + \\ + 2\left[r(\hat{u}_{ix}\cos\theta + \hat{u}_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta) + B_i\right]\left(-\hat{u}_{ix} r\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{u}_{iy} r\cos\theta\right). \tag{A.22}$$

Aplicada ao ponto singular, a derivada acima fica

$$f_i'(\pi) = -2r_{iy}r + 2(B_i - \hat{u}_{ix}r)(-\hat{u}_{iy}r) = \frac{b_i}{2}. \tag{A.23}$$

Uma função tem duas raízes idênticas quando seu valor e o de sua primeira derivada são mutuamente nulas em um ponto. No caso em questão, se os coeficientes dos termos de terceira e quarta ordens do polinômio forem simultaneamente nulos, toma-se $\theta = \pi$ como uma raiz dupla da Equação (A.12) e calculam-se as duas raízes restantes (reais ou complexas) a partir do polinômio de segundo grau obtido pela Equação (A.18).

Há casos particulares em que são nulas em $\theta = \pi$ a função $f_i(\theta)$ e suas primeira e segunda derivadas, o que se verifica pela nulidade dos três primeiros coeficientes do polinômio ($a_i = 0$, $b_i = 0$ e $c_i = 0$). Quando isto ocorre, significa que o cilindro infinito tangencia a circunferência no ponto correspondente a $\theta = \pi$. Como são convexas as duas formas geométricas envolvidas, tal ponto denota, neste caso, um valor extremo de $f_i(\theta)$ (máximo ou mínimo) e não um ponto de sela. Isto acarreta que também seja nula a terceira derivada da função e, conseqüentemente, o coeficiente de primeiro grau do polinômio. Em outras palavras, se os três coeficientes de mais alto grau do polinômio forem simultaneamente iguais a zero, o ponto correspondente a $\theta = \pi$ é o único ponto de interseção entre o cilindro e a circunferência, ou seja, é uma raiz quádrupla de $f_i(\theta)$.

Depois de calculadas as raízes reais do polinômio e, por conseguinte, os ângulos correspondentes às interseções da circunferência com o cilindro infinito, o passo seguinte é verificar quais destas raízes satisfazem à condição da Equação (A.13) e, conseqüentemente, pertencem à superfície real do esferocilindro. Para cálculo da componente λ_i de cada ponto, rescreve-se a Equação (A.2) da seguinte forma:

$$\lambda_i = \hat{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i) = r\,(\hat{u}_{ix} \cos\theta + \hat{u}_{iy} \operatorname{sen}\theta) + B_i\,. \tag{A.24}$$

Cabe informar que são computacionalmente dispendiosos os cálculos da transformação inversa da Equação (A.20) e das funções trigonométricas da Equação (A.24). Assim, convém calcular as componentes λ_i diretamente a partir das raízes do polinômio (valores de Φ) e descartar, *a priori*, as raízes inválidas. Neste caso, substitui-se a Equação (A.24) pela seguinte:

$$\lambda_i = r\,\frac{\hat{u}_{ix}\left(1 - \phi^2\right) + 2\hat{u}_{iy}\phi}{1 + \phi^2} + B_i\,. \tag{A.25}$$

No caso particular em que $\theta = \pi$ é raiz da função $f_i(\Theta)$, calcula-se o valor do λ_i correspondente por

$$\lambda_i(\pi) = B_i - \hat{u}_{ix}\,r\,. \tag{A.26}$$

Para sumariar os resultados do procedimento apresentado, define-se um conjunto Θ_C que contém todos os ângulos θ relativos aos pontos de interseção entre a circunferência e a superfície da parte cilíndrica do esferocilindro. Tal conjunto é representado por

$$\Theta_C = \left\{\ \theta \in \Re \quad / \quad -\pi < \theta \le \pi \ \ , \ \ f_i(\theta) = 0 \ \ \text{e} \ \ |\lambda_i(\theta)| \le \ell_i / 2\ \right\}. \tag{A.27}$$

Convenciona-se que o conjunto acima pode conter elementos iguais. Isto significa que uma raiz múltipla deve aparecer nele múltiplas vezes. Assim sendo, o conjunto pode ser vazio ou ter um número par de raízes (duas ou quatro). Se tal número for igual a quatro, conclui-se que todas as interseções entre a circunferência e o esferocilindro foram encontradas. Senão, parte-se para o cálculo das interseções com uma das seções hemisféricas do esferocilindro.

A.3 – Pontos de Interseção entre uma Circunferência e o Hemisfério da Extremidade Positiva de um Esferocilindro

Para se calcular as interseções entre a circunferência e as seções hemisféricas do esferocilindro, primeiramente consideram-se as interseções com esferas inteiras. A princípio, considere-se o caso do hemisfério situado na extremidade positiva. Neste caso, a posição do centro da esfera correspondente ($\mathbf{r}_i^+$) é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_i^+ = \mathbf{r}_i + \frac{\ell_i}{2}\hat{\mathbf{u}}_i \,. \tag{A.28}$$

As componentes do vetor acima, nos eixos cartesianos, são

$$r_{ix}^+ = r_{ix} + \frac{\ell_i}{2}\hat{u}_{ix} \quad , \quad r_{iy}^+ = r_{iy} + \frac{\ell_i}{2}\hat{u}_{iy} \quad \text{e} \quad r_{iz}^+ = r_{iz} + \frac{\ell_i}{2}\hat{u}_{iz} \,. \tag{A.29}$$

Mais simples que no caso anterior, uma interseção entre as figuras ocorrerá quando a distância entre o centro da esfera ($\mathbf{r}_i^+$) e um determinado ponto da circunferência ($\mathbf{p}_c$) for igual a raio da esfera. Ou, equivalentemente, quando o quadrado desta distância for igual ao quadrado do raio. Seguindo a metodologia da seção anterior, define-se uma função $f_i^+(\theta)$ que se anula nos pontos de interseção, ou seja,

$$f_i^+(\theta) = \frac{\sigma_i^2}{4} - \|\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i^+\|^2 \,. \tag{A.30}$$

As raízes da função f_i^+ revelam os pontos de interseção desejados. Além disto, o valor de $f_i^+(\theta)$ para um ponto arbitrário da circunferência será positivo se tal ponto estiver situado dentro da esfera e negativo no caso contrário. Substituindo-se as Equações (A.1), (A.8) e (A.29) na expressão acima, obtém-se

$$f_i^+(\theta) = 2r\left(r_{ix}^+ \cos\theta + r_{iy}^+ \operatorname{sen}\theta\right) + 2zr_{iz}^+ + \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i^+\|^2\right), \quad \text{(A.31)}$$

onde $\|\mathbf{r}_i^+\|^2 = \|\mathbf{r}_i\|^2 + \ell_i(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{\ell_i^2}{4} = \|\mathbf{r}_i\|^2 + \ell_i\left(\frac{\ell_i}{4} + \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i\right)$. (A.32)

Com o intuito de simplificar a notação, faz-se a seguinte definição:

$$A_i^+ \equiv 2zr_{iz}^+ + \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i^+\|^2\right). \quad \text{(A.33)}$$

Substituindo-se os valores de r_{iz}^+ e $\|\mathbf{r}_i^+\|$ previamente definidos, tem-se que

$$A_i^+ = 2z\left(r_{iz} + \frac{\ell_i}{2}\hat{u}_{iz}\right) + \frac{\sigma_i^2}{4} - \left[r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2 + \ell_i\left(\frac{\ell_i}{4} + \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i\right)\right]. \quad \text{(A.34)}$$

Agrupando-se convenientemente os termos da equação acima, mostra-se que o valor de A_i^+ pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_i^+ = A_i + \ell_i\left(B_i - \frac{\ell_i}{4}\right), \quad \text{(A.35)}$$

onde A_i e B_i são as mesmas variáveis definidas através das Equações (A.10) e (A.11), respectivamente.

Finalmente, substitui-se A_i^+ na Equação (A.31) para se obter a expressão

$$f_i^+(\theta) = 2r\left(r_{ix}^+ \cos\theta + r_{iy}^+ \operatorname{sen}\theta\right) + A_i^+ \cdot \quad \text{(A.36)}$$

Depois de calculadas as raízes da função acima (utilizando-se o algoritmo que será apresentado a seguir), utiliza-se um critério semelhante ao da seção anterior para a detecção dos pontos de interseção que pertencem à superfície hemisférica da extremidade positiva do esferocilindro. Dado um ponto de interseção $\mathbf{p}_c$, calcula-se a sua componente λ_i, definida pela Equação (A.2). Neste caso, o ponto $\mathbf{p}_c$ pertencerá à superfície do hemisfério se o valor de λ_i for maior que a metade do comprimento do esferocilindro, isto é, se

$$\lambda_i > \frac{\ell_i}{2}. \qquad \text{(A.37)}$$

Esta condição pode ser visualizada com o auxílio da Figura A.4. Neste caso, não é necessário utilizar-se o valor absoluto de λ_i, como fizera-se na seção anterior. Para pontos $\mathbf{p}_c$ situados na superfície hemisférica da extremidade positiva de um esferocilindro, o valor de λ_i é necessariamente positivo, já que o ângulo entre os vetores $\hat{\mathbf{u}}_i$ e $(\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)$ não ultrapassa o valor de 90°.

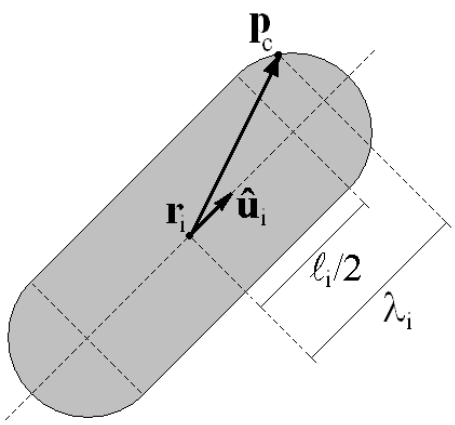

Figura A.4 – Critério para discriminação dos pontos de interseção entre a circunferência e superfície hemisférica da extremidade positiva do esferocilindro.

O próximo passo é a apresentação de um algoritmo para cálculo das raízes reais da Equação (A.36) no intervalo $(-\pi, \pi]$. Por análise geométrica, sabe-se que há, no máximo, dois pontos de interseções entre uma circunferência e uma superfície esférica.

A exceção é o caso em que a circunferência coincide com uma das seções da superfície, quando o número de pontos da interseção é infinito e o seu perímetro é igual ao comprimento total da circunferência ($2\pi r$). Para que este caso se verifique, necessita-se que

$$r_{ix}^{+} = r_{iy}^{+} = 0 \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(z - r_{iz}^{+}\right)^2 . \tag{A.38}$$

Se as condições acima não forem satisfeitas, deve-se partir para a resolução da Equação (A.36). É conveniente transformá-la em um polinômio do segundo grau. Como no caso da seção anterior, utiliza-se para isto a identidade trigonométrica da Equação (A.15) e a transformação de variável da Equação (A.16). Com isto, iguala-se a zero a função $f_i^{+}(\theta)$, obtendo-se a seguinte equação:

$$2r\frac{r_{ix}^{+}\left(1-\phi^2\right)+2r_{iy}^{+}\phi}{1+\phi^2}+A_i^{+}=0 . \tag{A.39}$$

Multiplicando-se por $\left(1+\phi^2\right)$ os termos da expressão acima, obtém-se uma equação quadrática em Φ :

$$a_i^{+}\phi^2 + b_i^{+}\phi + c_i^{+} = 0 , \tag{A.40}$$

onde

$$a_i^{+} = A_i^{+} - 2r_{ix}^{+}r ,$$

$$b_i^{+} = 4r_{iy}^{+}r \qquad \text{e} \tag{A.41}$$

$$c_i^{+} = A_i^{+} + 2r_{ix}^{+}r .$$

O ponto correspondente a $\theta = \pi$ é também uma singularidade na equação quadrática. A possibilidade de que este ângulo seja uma solução da Equação (A.36) deve ser verificada *a priori*, de modo a não se comprometer a robustez do algoritmo. Isto ocorre se o valor de $f_i^+(\pi)$ for nulo. A avaliação da função em $\theta = \pi$ mostra que

$$f_i^+(\pi) = A_i^+ - 2r_{ix}^+ r = a_i^+ . \tag{A.42}$$

Então, se o coeficiente do termo de segundo grau da Equação (A.40) for nulo, toma-se $\theta = \pi$ como uma das raízes da Equação (A.36) e calcula-se, através da equação linear obtida, o valor de ϕ que corresponde ao ângulo que determina o outro ponto de interseção ($\phi = -c_i^+ / b_i^+$). Em analogia ao caso da seção anterior, pode-se demonstrar que a esfera tangencia a circunferência no ponto correspondente a $\theta = \pi$ se os termos de primeiro e segundo graus da Equação (A.36) forem simultaneamente nulos. Neste caso, toma-se o ponto singular como única solução possível do problema.

Se nenhum dos casos acima ocorre, calculam-se os pontos de interseção a partir das raízes da equação quadrática, que são obtidas por

$$\phi = \frac{-2r_{iy}^+ r \pm \sqrt{\Delta^+}}{A_i^+ - 2r_{ix}^+ r} , \tag{A.43}$$

onde $\Delta^+ = 4r^2[(r_{ix}^+)^2 + (r_{iy}^+)^2] - (A_i^+)^2$. (A.44)

Se o valor de Δ^+ for maior que zero, tem-se duas raízes reais distintas, ou seja, a circunferência atravessa a superfície esférica em dois pontos. Se Δ^+ for nulo, tem-se uma raiz dupla, o que significa que a circunferência apenas tangencia a superfície esférica. Por último, se Δ^+ for negativo, não existem raízes reais do polinômio em questão, levando-se à conclusão de que não há nenhuma interseção entre as figuras.

Sumariamente, representam-se os resultados desta seção através de um conjunto (Θ_E^+) formado pelos pontos de interseção entre a circunferência e a superfície do hemisfério situado na extremidade positiva do esferocilindro, onde

$$\Theta_E^+ = \left\{ \theta \in \Re \quad / \quad -\pi < \theta \le \pi \ , \ f_i^+(\theta) = 0 \ \text{ e } \ \lambda_i(\theta) > \ell_i/2 \right\} . \tag{A.45}$$

Por convenção, se há uma raiz dupla, esta deve ser contabilizada duplamente no conjunto acima. Se o número de elementos do conjunto $\Theta_C \cup \Theta_E^+$ for igual a quatro, sabe-se que todos os pontos de interseção entre a circunferência e o esferocilindro foram detectados. De outra forma, parte-se para o cálculo dos pontos de interseção com a superfície hemisférica da extremidade negativa do sólido.

A.4 – Pontos de Interseção entre uma Circunferência e o Hemisfério da Extremidade Negativa de um Esferocilindro

Se for inferior a quatro o número de pontos de interseção calculados pelos procedimentos das seções anteriores, parte-se para a detecção das interseções entre a circunferência e o hemisfério da extremidade negativa do esferocilindro. Como no caso da extremidade positiva, primeiro deve-se lidar com uma esfera completa e, após isto, discriminar os pontos de interseção verdadeiros. O ponto correspondente ao centro da esfera considerada ($\mathbf{r}_i^-$) é dado por

$$\mathbf{r}_i^- = \mathbf{r}_i - \frac{\ell_i}{2} \hat{\mathbf{u}}_i . \tag{A.46}$$

As coordenadas do ponto $\mathbf{r}_i^-$ são, então, calculadas da seguinte maneira:

$$r_{ix}^- = r_{ix} - \frac{\ell_i}{2} \hat{u}_{ix} \quad , \quad r_{iy}^- = r_{iy} - \frac{\ell_i}{2} \hat{u}_{iy} \quad \text{e} \quad r_{iz}^- = r_{iz} - \frac{\ell_i}{2} \hat{u}_{iz} . \tag{A.47}$$

As interseções, mais uma vez, ocorrerão quando a distância entre um determinado ponto da circunferência ($\mathbf{p}_c$) e o centro da esfera ($\mathbf{r}_i^-$) for igual ao raio da própria esfera. Assim, define-se uma função semelhante àquelas definidas nas seções anteriores:

$$f_i^-(\theta) = \frac{\sigma_i^2}{4} - \|\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i^-\|^2 . \qquad \text{(A.48)}$$

A função f_i^- é nula nos pontos de interseção. Seu valor é positivo para os pontos situados no interior da esfera e é negativo para os pontos situados no seu exterior. Expandindo-se os termos da função, tem-se

$$f_i^-(\theta) = 2r\left[r_{ix}^- \cos\theta + r_{iy}^- \operatorname{sen}\theta\right] + A_i^- , \qquad \text{(A.49)}$$

onde $A_i^- = A_i - \ell_i\left(B_i + \frac{\ell_i}{4}\right)$. (A.50)

Na definição acima, A_i e B_i são calculados, respectivamente, através das Equações (A.10) e (A.11). Detectados os ângulos que definem os pontos de interseção entre a esfera e a circunferência, deve-se discriminar entre eles aqueles que pertencem à superfície hemisférica da extremidade negativa do esferocilindro. Dado um ponto de interseção $\mathbf{p}_c$, calcula-se, através da Equação (A.2), a componente λ_i do vetor que liga a tal ponto o baricentro do esferocilindro. O ponto $\mathbf{p}_c$ pertencerá à superfície em questão se o valor de $-\lambda_i$ for maior que a metade do comprimento do esferocilindro (ℓ_i) ou, equivalentemente, quando

$$\lambda_i < -\frac{\ell_i}{2} . \qquad \text{(A.51)}$$

O motivo de se trabalhar com o recíproco de λ_i é que seu valor, para os pontos de interseção desejados, serão sempre negativos. Isto ocorre porque o menor ângulo entre os vetores $\hat{\mathbf{u}}_i$ e $(\mathbf{p}_c - \mathbf{r}_i)$, para pontos $\mathbf{p}_c$ situados na superfície da extremidade negativa do esferocilindro, é sempre maior que 90°. Vê-se isto no exemplo da Figura A.5, onde também se analisa a validade do critério exposto acima.

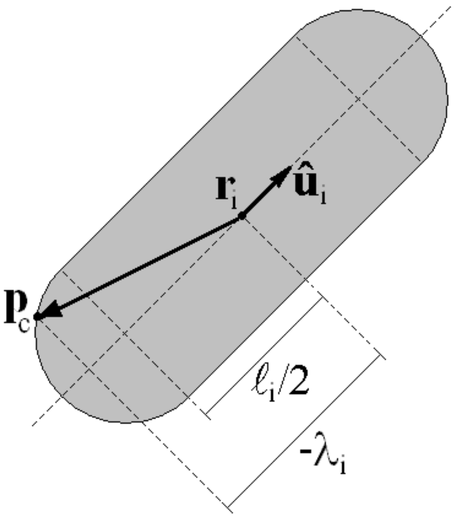

Figura A.5 – Critério para discriminação dos pontos de interseção entre a circunferência e superfície hemisférica da extremidade negativa do esferocilindro.

Como no caso da seção anterior, o número máximo possível de raízes da função $f_i^-(\theta)$ no intervalo $(-\pi, \pi]$ é igual a dois, salvo o caso em que a circunferência coincide com uma das seções da superfície esférica. Neste caso, há infinitas soluções para a Equação (A.49) e o comprimento da interseção entre a circunferência e o esferocilindro é igual ao próprio perímetro daquela, ou seja, igual a $2\pi r$. Isto será verdadeiro se também o forem as seguintes igualdades:

$$r_{ix}^- = r_{iy}^- = 0 \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{\sigma_i^2}{4} - \left(z - r_{iz}^-\right)^2 . \tag{A.52}$$

Se as condições acima não forem satisfeitas, aplicam-se a identidade trigonométrica da Equação (A.15) e a transformação de variável da Equação (A.16). Com isto, zera-se a função $f_i^-(\theta)$ da Equação (A.49) para transcrevê-la na equação polinomial

$$a_i^- \phi^2 + b_i^- \phi + c_i^- = 0 , \tag{A.53}$$

onde

$$a_i^- = A_i^- - 2r_{ix}^- r\,,$$

$$b_i^- = 4r_{iy}^- r \qquad \text{e} \tag{A.54}$$

$$c_i^- = A_i^- + 2r_{ix}^- r\,.$$

Como nos casos anteriores, o ponto $\theta = \pi$ também pode ser uma solução da Equação (A.49). Se o primeiro coeficiente do polinômio acima (a_i^-) for nulo, toma-se $\theta = \pi$ como uma raiz e calcula-se a outra através da equação linear obtida ($\phi = -c_i^- / b_i^-$). Se os dois primeiros coeficientes (a_i^- e b_i^-) forem simultaneamente nulos, sabe-se que a esfera tangencia a circunferência no ponto singular. Em outras palavras, o ângulo $\theta = \pi$ é a única solução possível do problema. Se nenhum destes casos ocorrerem, calculam-se as duas raízes do polinômio por

$$\phi = \frac{-2r_{iy}^- r \pm \sqrt{\Delta^-}}{A_i^- - 2r_{ix}^- r}\,, \tag{A.55}$$

onde $\Delta^- = 4r^2[(r_{ix}^-)^2 + (r_{iy}^-)^2] - (A_i^-)^2$. (A.56)

A equação terá duas raízes reais distintas se Δ^- for maior que zero. Se Δ^- for nulo, significa que a esfera tangencia a circunferência em um único ponto. No entanto, se Δ^- for negativo, a equação terá raízes complexas conjugadas, significando que não há interseção entre as figuras.

Define-se um conjunto Θ_E^- cujos elementos são os pontos de interseção entre a circunferência e a superfície hemisférica da extremidade negativa do esferocilindro. Novamente, convenciona-se que uma raiz dupla consta duas vezes em tal conjunto. Em notação matemática, tem-se

$$\Theta_E^- = \left\{ \theta \in \Re \quad / \quad -\pi < \theta \le \pi \ \ , \ \ f_i^-(\theta) = 0 \ \ e \ \ \lambda_i(\theta) < -\ell_i/2 \right\} . \tag{A.57}$$

Calculados todos os pontos de interseção entre a circunferência e a superfície do esferocilindro, resta saber qual o comprimento total da porção da circunferência que se encontra no interior do sólido.

A.5 – Comprimento da Interseção entre uma Circunferência e um Esferocilindro

Todos os pontos de interseção entre a circunferência e a superfície do esferocilindro podem ser agrupados em um único conjunto, Θ, dado por

$$\Theta = \Theta_C \cup \Theta_E^+ \cup \Theta_E^- . \tag{A.58}$$

Convenciona-se que o conjunto acima pode conter mais de um elemento com o mesmo valor. De acordo com as definições de seus constituintes, o conjunto Θ pode ser vazio ou ter um número par de elementos (dois ou quatro). O número de elementos de Θ será denominado por N_θ. Pode-se dispor tais elementos em ordem crescente, da seguinte forma:

$$\Theta = \left\{ \theta_k \right\}_{1,\cdots,N_\theta} \qquad \text{onde } \theta_{k+1} \ge \theta_k \quad \forall\, k \in \left\{ 1,\cdots,N_\theta - 1 \right\} . \tag{A.59}$$

Com isto, é possível representar arcos da circunferência através da subtração entre elementos consecutivos do conjunto Θ. Por exemplo, se o conjunto contiver dois elementos, a diferença $\theta_2 - \theta_1$ fornece o ângulo ($\bar{\theta}$) correspondente ao arco que liga o ponto definido por θ_1 àquele definido por θ_2. Arcos deste tipo estão representados pelas linhas mais espessas nos exemplos da Figura A.6. Na Figura A.6(a), o arco representado pelo ângulo $\bar{\theta}$ corresponde exatamente à região de interseção entre a circunferência e o esferocilindro. Diferentemente, na Figura A.6(b), a região de interseção corresponde ao ângulo replementar ($2\pi - \bar{\theta}$).

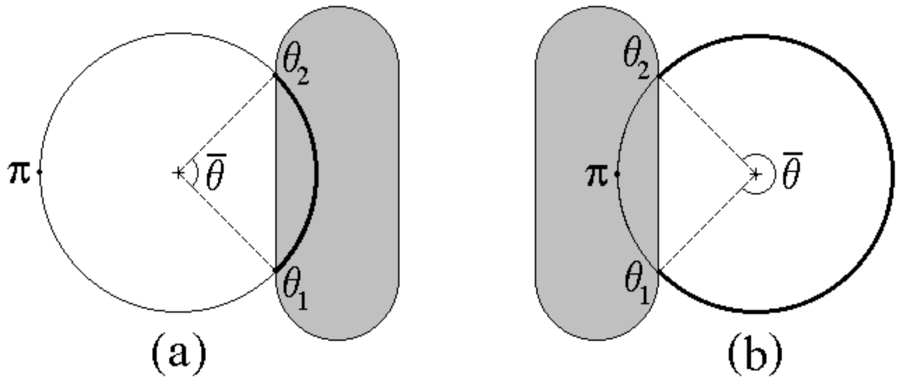

Figura A.6 – Relação entre arcos e regiões de interseção para $N_\theta = 2$.

Sabendo-se que todos os elementos do conjunto Θ são valores situados no intervalo $(-\pi, \pi]$, pode-se definir um critério para discernimento entre os casos da Figura A.6. Primeiramente, considerem-se os casos em que o ponto correspondente a $\theta = \pi$ não pertence ao conjunto Θ. A situação deste ponto em relação ao esferocilindro é um indicativo da região de interseção entre as figuras. Quando o ponto $\theta = \pi$ estiver situado fora do esferocilindro, como é o caso da Figura A.6(a), a interseção corresponderá ao arco definido pelo ângulo $\bar{\theta}$. Senão, como na Figura A.6(b), a interseção será definida pelo seu arco replementar.

Para o caso geral, o número de elementos de Θ (N_θ) pode chegar a quatro e a interseção entre o esferocilindro e a circunferência pode ocorrer em duas cordas, como nos exemplos da Figura A.7. Para se calcular o comprimento total da interseção, necessita-se da soma dos ângulos correspondentes a estas cordas. No caso geral, a variável $\bar{\theta}$ corresponde a esta soma, ou ao seu ângulo replementar. Assim, tem-se que

$$\bar{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad N_\theta = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 & \text{se} \quad N_\theta = 2 \\ (\theta_4 - \theta_3) + (\theta_2 - \theta_1) & \text{se} \quad N_\theta = 4 \end{cases}. \tag{A.60}$$

O critério da situação do ponto correspondente a $\theta = \pi$ também se aplica neste caso geral. Quando $N_\theta = 0$, não há interseção alguma se tal ponto situa-se fora do esferocilindro ou, no caso replementar, toda a circunferência está envolvida pelo sólido se tal ponto se encontra em seu interior. Dois exemplos para o caso em que $N_\theta = 4$ são mostrados na Figura A.7, onde os arcos correspondentes ao ângulo $\overline{\Theta}$ são as linhas mais espessas. No corte da Figura A.7(a), o ponto $\theta = \pi$ situa-se fora do esferocilindro e, devido a isto, a região de interseção é definida pelo próprio ângulo $\overline{\Theta}$. Para o caso da Figura A.7(b), o ponto se encontra no interior do esferocilindro e, portanto, a interseção ocorre na região replementar àquela definida por $\overline{\Theta}$.

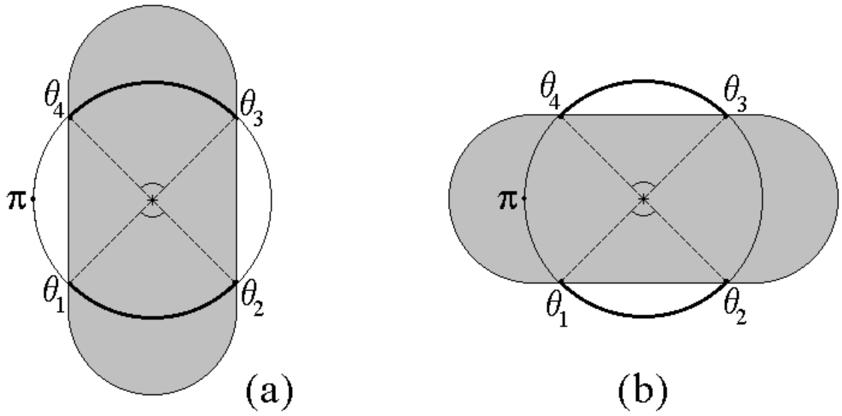

Figura A.7 – Relação entre arcos e regiões de interseção para $N_\theta = 4$.

Para se verificar a situação do ponto correspondente a $\theta = \pi$ em relação ao esferocilindro, primeiramente se determina em qual das três regiões do sólido (cilindro ou um dos hemisférios) tal ponto pode, potencialmente, situar-se. Se a componente $\lambda_i(\pi)$ a ele associada, definida pela Equação (A.26), satisfizer o critério da Equação (A.13), o ponto extremo pode estar situado na região cilíndrica central. Se, por outro lado, o critério da Equação (A.37) for verificado, a região potencial é o hemisfério da extremidade positiva do esferocilindro. Por último, o ponto $\theta = \pi$ pode se encontrar no hemisfério da extremidade negativa do sólido se for satisfeito o critério da Equação (A.51). Nos três casos, o fato do ponto correspondente $\theta = \pi$ estar situado dentro ou fora do sólido é verificado pelo valor das funções $f_i(\theta)$, $f_i^+(\theta)$ e $f_i^-(\theta)$, definidas anteriormente, aplicadas ao ponto em questão. Agrupando-se os três casos em uma única variável, define-se

$$f_\pi \equiv \begin{cases} f_i^-(\pi) = a_i^- & \text{se} \quad \lambda_i(\pi) < -\ell_i/2 \\ f_i(\pi) = a_i & \text{se} \quad -\ell_i/2 \le \lambda_i(\pi) \le \ell_i/2 \\ f_i^+(\pi) = a_i^+ & \text{se} \quad \lambda_i(\pi) > \ell_i/2 \end{cases}. \tag{A.61}$$

Como se pode ver, dependendo do valor de $\lambda_i(\pi)$, a variável f_π será igual a um dos coeficientes de mais alto grau das Equações Polinomiais (A.18), (A.40) ou (A.53). De acordo com as definições das funções $f_i(\theta)$, $f_i^+(\theta)$ e $f_i^-(\theta)$, o valor de f_π será positivo se o ponto $\theta = \pi$ situar-se no interior do esferocilindro e negativo no caso contrário. Portanto, tomando-se o critério exposto e sabendo-se que o comprimento de um arco é igual ao produto entre o seu ângulo e o raio da circunferência, calcula-se o perímetro da interseção entre esta e o esferocilindro [$p_i(z,r)$] através da expressão

$$p_i(z,r) = \begin{cases} \bar{\theta}\, r & \text{se} \quad f_\pi < 0 \\ (2\pi - \bar{\theta})r & \text{se} \quad f_\pi > 0 \end{cases}. \tag{A.62}$$

Os casos em que o esferocilindro tangencia a circunferência são particulares aos cobertos até aqui e, portanto, nenhuma informação adicional é necessária. Cabe enfatizar que o critério da situação do ponto $\theta = \pi$ só se aplica quando tal ponto não pertence ao conjunto Θ pois, caso contrário, o valor de f_π seria nulo e a expressão acima ficaria indefinida. Portanto, quando $\theta = \pi$ pertence ao conjunto Θ, deve-se adotar um outro critério.

Em um caso no qual $\pi \in \Theta$, pode-se ter $N_\theta = 2$ ou $N_\theta = 4$. Como os elementos estão dispostos em ordem crescente, aquele de maior índice tem valor igual a π. Embora o parâmetro θ varie apenas dentro do intervalo $(-\pi, \pi]$, para efeito de cálculo, pode-se tomar $\theta = -\pi$, o que conduz ao mesmo ponto correspondente a $\theta = \pi$. Para se calcular o perímetro de interseção, pode-se analisar a situação, em relação ao esferocilindro, de algum ponto da circunferência cujo valor de θ é menor que θ_1. Por exemplo, utiliza-se o ângulo médio (θ_m) entre $-\pi$ e θ_1, ou seja,

$$\theta_m = \frac{\theta_1 - \pi}{2}. \tag{A.63}$$

A definição do ângulo θ_m pode ser visualizada nos exemplos da Figura A.8, onde há quatro pontos extremos de interseção. No caso da Figura A.8(a), o ponto correspondente a $\theta = \theta_m$ situa-se fora do esferocilindro e a região de interseção corresponde ao ângulo $\overline{\Theta}$ definido na Equação (A.60). No exemplo da Figura A.8(b), o ponto que corresponde a $\theta = \theta_m$ está no interior do esferocilindro, fazendo com que a região de interseção seja aquela correspondente ao ângulo replementar a $\overline{\Theta}$. Esta regra pode ser aplicada em qualquer caso, mesmo quando $N_\theta = 2$ ou quando o esferocilindro tangencia a circunferência somente no ponto extremo $\theta = \pi$, caso em que θ_m tem valor igual a zero.

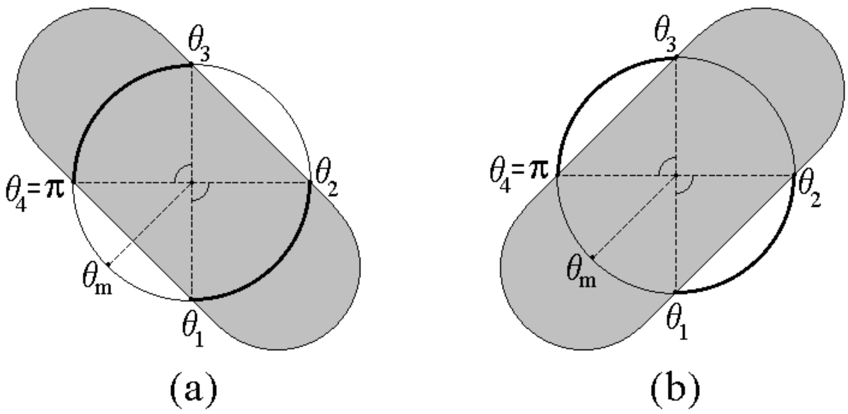

Figura A.8 – Relação entre arcos e regiões de interseção para $N_\theta = 4$ quando $\pi \in \Theta$.

Para se saber a situação, em relação ao esferocilindro, do ponto correspondente ao ângulo médio θ_m, calcula-se a sua componente λ_i da seguinte maneira:

$$\lambda_i(\theta_m) = r(\hat{u}_{ix}\cos\theta_m + \hat{u}_{iy}\,\mathrm{sen}\,\theta_m) + B_i . \qquad \text{(A.64)}$$

A partir do valor de $\lambda_i(\theta_m)$, determina-se em que região do esferocilindro pode estar situado o ponto em questão. Então, introduz-se uma nova variável que representa uma das funções definidas nas seções anteriores aplicada a θ_m. Tal variável é chamada de f_m e definida por

$$f_m \equiv \begin{cases} f_i^-(\theta_m) & \text{se} \quad \lambda_i(\theta_m) < -\ell_i/2 \\ f_i(\theta_m) & \text{se} \quad -\ell_i/2 \le \lambda_i(\theta_m) \le \ell_i/2 \\ f_i^+(\theta_m) & \text{se} \quad \lambda_i(\theta_m) > \ell_i/2 \end{cases}. \tag{A.65}$$

O valor do perímetro de interseção é então calculado como o comprimento do arco referente ao ângulo $\bar{\theta}$ se o valor de f_m for negativo, ou seja, se o ponto correspondente a θ_m estiver fora do esferocilindro. Caso contrário, toma-se o comprimento do arco replementar. Assim, o perímetro da interseção fica

$$p_i(z, r) = \begin{cases} \bar{\theta}\, r & \text{se} \quad f_m < 0 \\ (2\pi - \bar{\theta})r & \text{se} \quad f_m > 0 \end{cases}. \tag{A.66}$$

Por último, vale considerar que o critério da situação do ângulo médio entre $-\pi$ e θ_1 poderia ser utilizado no caso geral, mesmo quando $\theta = \pi$ não pertence ao conjunto Θ. Porém, tal critério é computacionalmente mais oneroso por necessitar do cálculo de funções trigonométricas (seno e co-seno).

A.6 – Considerações Finais

Os procedimentos sugeridos neste apêndice supõem que o problema seja fisicamente coerente. Para isto, faz-se a restrição de que os valores do diâmetro e comprimento do esferocilindro (σ_i e ℓ_i) e do raio da circunferência (r) sejam positivos e diferentes de zero. Portanto, se o polinômio de 4º grau, correspondente à Equação (A.18), for resolvido analiticamente (através da fórmula de Ferrari, por exemplo), tem-se que o algoritmo exposto é totalmente robusto. É possível, entretanto, que ocorra instabilidade numérica quando, em certos casos, algum ponto de interseção entre a circunferência e a superfície do esferocilindro tiver um ângulo θ muito próximo de π. Para preveni-la, adota-se uma tolerância para a nulidade dos coeficientes dos polinômios, ou seja, tomam-se como nulos os coeficientes que tiverem valor absoluto menor que uma determinada tolerância predeterminada. Valores de ângulos muito próximos de $-\pi$ podem ser tomados como iguais a π, já que estes dois são equivalentes na parametrização da circunferência. Isto evita uma possível instabilidade numérica na aplicação do critério que necessita do ângulo Θ_m, definido na seção anterior. Para finalizar, apresenta-se o algoritmo proposto neste apêndice de forma sumária, através do fluxograma representado na Figura A.9.

Entrar com $\mathbf{r}_i$, $\hat{\mathbf{u}}_i$, σ_i, ℓ_i, z e r

$A_i = 2r_{iz}z + \dfrac{\sigma_i^2}{4} - \left[r^2 + z^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2\right]$ e $B_i = u_{iz}z - \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{r}_i$

$a_i = A_i + \left(B_i - \hat{u}_{ix}r\right)^2 - 2r_{ix}r$

$b_i = 4r\left[r_{iy} + u_{iy}\left(B_i - \hat{u}_{ix}r\right)\right]$

$c_i = 2\left[A_i + B_i^2 - \left(\hat{u}_{ix}r\right)^2 + 2\left(\hat{u}_{iy}r\right)^2\right]$

$d_i = 4r\left[r_{iy} + \hat{u}_{iy}\left(B_i + \hat{u}_{ix}r\right)\right]$

$e_i = A_i + \left(B_i + \hat{u}_{ix}r\right)^2 + 2r_{ix}r$

Se $a_i = 0$ então

- Se $b_i = 0$ então
  - Se $c_i = 0$ então
    - $\Theta_C = \{\pi, \pi, \pi, \pi\}$ e $\Phi_C = \{\ \}$
  - senão
    - $\Theta_C = \{\pi, \pi\}$ e $\Phi_C = \{\phi \in \Re \mid c_i\phi^2 + d_i\phi + e_i = 0\}$
- senão
  - $\Theta_C = \{\pi\}$ e $\Phi_C = \{\phi \in \Re \mid b_i\phi^3 + c_i\phi^2 + d_i\phi + e_i = 0\}$

senão

- $\Theta_C = \{\ \}$ e $\Phi_C = \{\phi \in \Re \mid a_i\phi^4 + b_i\phi^3 + c_i\phi^2 + d_i\phi + e_i = 0\}$

$N_\phi = \text{Número de elementos de } \Phi_C$

Para $k = 1$ até N_ϕ

- Se $\left| r\dfrac{\hat{u}_{ix}\left(1 - \phi_k^2\right) + 2\hat{u}_{iy}\phi_k}{1 + \phi_k^2} + B_i \right| \leq \ell_i/2$ então

Acrescentar $2\mathrm{tg}^{-1}(\phi_k)$ ao conjunto Θ_C

$N_C = \text{Número de elementos de } \Theta_C$

Se $N_C < 4$ então

$\mathbf{r}_i^+ = \mathbf{r}_i + \frac{\ell_i}{2}\hat{\mathbf{u}}_i$

Se $r_{ix}^+ = r_{iy}^+ = 0$ então

$\Theta_E^+ = \{\ \}$

senão

$A_i^+ = A_i + \ell_i\left(B_i - \frac{\ell_i}{4}\right)$

$a_i^+ = A_i^+ - 2r_{ix}^+ r \;\; ; \;\; b_i^+ = 4r_{iy}^+ r \;\; ; \;\; c_i^+ = A_i^+ + 2r_{ix}^+ r$

Se $a_i^+ = 0$ então

Se $b_i^+ = 0$ então

$\Theta_E^+ = \{\pi, \pi\}$ e $\Phi_E^+ = \{\ \}$

senão

$\Theta_E^+ = \{\pi\}$ e $\Phi_E^+ = \{-c_i^+ / b_i^+\}$

senão

$\Theta_E^+ = \{\ \}$ e $\Phi_E^+ = \{\phi \in \Re \mid a_i^+\phi^2 + b_i^+\phi + c_i^+ = 0\}$

$N_\phi = \text{Número de elementos de } \Phi_E^+$

Para $k = 1$ até N_ϕ

Se $r\dfrac{\hat{u}_{ix}(1-\phi_k^2) + 2\hat{u}_{iy}\phi_k}{1+\phi_k^2} + B_i > \ell_i/2$ então

Acrescentar $2\mathrm{tg}^{-1}(\phi_k)$ ao conjunto Θ_E^+

$N_E^+ = \text{Número de elementos de } \Theta_E^+$

senão

$\Theta_E^+ = \{\ \}$ e $N_E^+ = 0$

Se $N_C + N_E^+ < 4$ então

$\mathbf{r}_i^- = \mathbf{r}_i - \frac{\ell_i}{2}\hat{\mathbf{u}}_i$

Se $r_{ix}^- = r_{iy}^- = 0$ então

$\Theta_E^- = \{\ \}$

senão

$A_i^- = A_i - \ell_i\left(B_i + \frac{\ell_i}{4}\right)$

$a_i^- = A_i^- - 2r_{ix}^- r$; $b_i^- = 4r_{iy}^- r$; $c_i^- = A_i^- + 2r_{ix}^- r$

Se $a_i^- = 0$ então

Se $b_i^- = 0$ então

$\Theta_E^- = \{\pi, \pi\}$ e $\Phi_E^- = \{\ \}$

senão

$\Theta_E^- = \{\pi\}$ e $\Phi_E^- = \{-c_i^- / b_i^-\}$

senão

$\Theta_E^- = \{\ \}$ e $\Phi_E^- = \{\phi \in \Re \mid a_i^- \phi^2 + b_i^- \phi + c_i^- = 0\}$

$N_\phi = \text{Número de elementos de } \Phi_E^-$

Para $k = 1$ até N_ϕ

Se $r\frac{\hat{u}_{ix}(1-\phi_k^2) + 2\hat{u}_{iy}\phi_k}{1+\phi_k^2} + B_i < -\ell_i/2$ então

Acrescentar $2\,\mathrm{tg}^{-1}(\phi_k)$ ao conjunto Θ_E^-

$N_E^- = \text{Número de elementos de } \Theta_E^-$

senão

$\Theta_E^- = \{\ \}$ e $N_E^- = 0$

$\Theta = \Theta_C \cup \Theta_E^+ \cup \Theta_E^-$

$N_\theta = N_C + N_E^+ + N_E^-$

Se $N_\theta > 0$ então

Dispor os elementos do conjunto Θ em ordem crescente

Se $N_\theta = 2$ então

$\overline{\theta} = \theta_2 - \theta_1$

senão

$\overline{\theta} = (\theta_4 - \theta_3) + (\theta_2 - \theta_1)$

senão

$\overline{\theta} = 0$

Se $\pi \in \Theta$ então

$\theta_m = (\theta_1 - \pi)/2$ e $\lambda_m = r(\hat{u}_{ix} \cos\theta_m + \hat{u}_{iy} \operatorname{sen}\theta_m) + B_i$

Se $|\lambda_m| \le \ell_i/2$ então

$f_m = 2r(r_{ix} \cos\theta_m + r_{iy} \operatorname{sen}\theta_m) + \lambda_m^2 + A_i$

senão

Se $\lambda_m > \ell_i/2$ então

$f_m = 2r(r_{ix}^+ \cos\theta_m + r_{iy}^+ \operatorname{sen}\theta_m) + A_i^+$

senão

$f_m = 2r(r_{ix}^- \cos\theta_m + r_{iy}^- \operatorname{sen}\theta_m) + A_i^-$

Se $f_m < 0$ então

$p_i(z, r) = \overline{\theta} r$

senão

$p_i(z, r) = (2\pi - \overline{\theta}) r$

senão

$\lambda_\pi = B_i - \hat{u}_{ix} r$

Se $|\lambda_\pi| \le \ell_i/2$ então

$f_\pi = a_i$

senão

Se $\lambda_\pi > \ell_i/2$ então

$f_\pi = a_i^+$

senão

$f_\pi = a_i^-$

Se $f_\pi < 0$ então

$p_i(z, r) = \overline{\theta} r$

senão

$p_i(z, r) = (2\pi - \overline{\theta}) r$

Figura A.9 – Fluxograma do algoritmo para o cálculo do comprimento da interseção entre um esferocilindro e uma circunferência horizontal.