Método de Newton-Raphson

Objetivo: dada una función real de variable real f definida en un intervalo $[a, b]$ que satisface los requerimientos siguientes:

1. f es continua en $[a, b]$
2. f es 2-derivable en $[a, b]$
3. $f(a) \times f(b) < 0$
4. Existe un $k < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

se desea encontrar el cero (la raíz) c de la función en el intervalo, que necesariamente existe (ya que f es lipschitziana), de forma que $f(c) = 0$.

Base del método: como en todos los métodos numéricos que la literatura propone para resolver este problema, se procede a construir una sucesión de aproximaciones a la raíz $x_0, x_1, \ldots$ tal que $lim_{n\to\infty}\{x_n\} = c$. El método de Newton-Raphson construye esta sucesión partiendo de un punto inicial x_0 cualquiera (idealmente escogido dentro del intervalo) y trazando tangentes a la función, cuyos puntos de corte con el eje x proporcionan la sucesión buscada. Gráficamente:

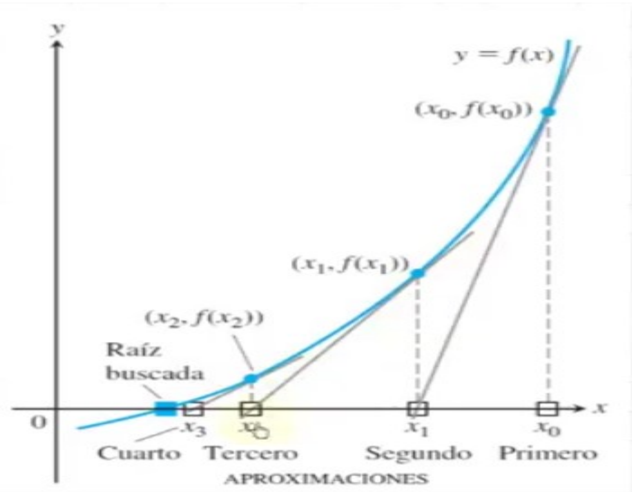

Figura: Trazado de Tangentes en el Método de Newton-Raphson

Ahora interesa determinar, dado x_0, cómo obtener x_1 a partir de él, lo cual resulta sorprendentemente sencillo. Determinamos el punto donde trazar la primera tangente a la curva, mediante la imagen de x_0; esto nos lleva al punto de la curva $(x_0, f(x_0))$. Como es sabido, la recta tangente a una función f en un punto viene definida por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Recordemos que la pendiente de esta recta es igual al valor de la derivada de la función f en el punto x_0. Si el punto de corte resultara ser la raíz, entonces $(x_1, 0)$, y basta sustituir en la ecuación anterior, para llegar a

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Donde todos los elementos son conocidos, excepto precisamente aquél que estamos buscado (el punto de corte de la tangente con el eje x), y que podemos obtener de forma directa:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De aquí podemos pasar trivialmente a la ecuación general que necesitamos, a efectos de generar la sucesión hacia el cero de la función:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta será la ecuación que utilizaremos para generar la sucesión de puntos que en el límite converge al cero buscado. Por supuesto, no necesitamos llegar a ese límite, y nos bastará con unos pocos decimales para propósitos prácticos.

OBSERVACIONES: el método es muy rápido, comparado por ejemplo con el de bisección, a la hora de converger a la raíz, pero al contrario que este, en determinadas ocasiones puede no converger, por una mala elección del punto inicial, o un conocimiento localmente insuficiente de la función en el intervalo de análisis.

EJERCICIO: se sugiere, antes de pasar a programar el método de Newton-Raphson a partir del pseudocódigo que se proporciona, efectuar una búsqueda aproximada del cero de la función $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[0,\ 2]$. Necesitára: calcular la derivada de la función, una calculadora, y unos cinco minutos.