Будем следовать предписанию Мизнера, Торна и Уилера и дополним обычный ньютоновский гравитационный потенциал поправкой, описывающей силу реакции грав.излучения:

$$\widetilde{\phi} = \phi + \frac{1}{5} f_{ij}^{(5)} r_i r_j, \tag{1}$$

где f_{ij} — квадрупольный момент системы. Компонента соответствующего ускорения есть $\tilde{a}_k = a_k - \frac{2}{5} f_{ki}^{(5)} r_i$. Рассматриваем двойную систему, состоящую из точечных масс A и B. Уравнения их движения:

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}} \dfrac{dV_k^{\mathrm{A}}}{dt} = \dfrac{G m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{AB}}^3} (r_k^{\mathrm{B}} - r_k^{\mathrm{A}}) - m_{\mathrm{A}} \dfrac{2}{5} f_{ki}^{(5)} r_i^{\mathrm{A}}, \\ m_{\mathrm{B}} \dfrac{dV_k^{\mathrm{B}}}{dt} = \dfrac{G m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{AB}}^3} (r_k^{\mathrm{A}} - r_k^{\mathrm{B}}) - m_{\mathrm{B}} \dfrac{2}{5} f_{ki}^{(5)} r_i^{\mathrm{B}}, \end{cases} \tag{2}$$

где $r_{\mathrm{AB}} = |\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{B}}|$. Сумма уравнений (2) даёт:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(m_{\mathrm{A}} r_k^{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} r_k^{\mathrm{B}} \right) = -\frac{2}{5} f_{ki}^{(5)} (m_{\mathrm{A}} r_i^{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} r_i^{\mathrm{B}}). \tag{3}$$

Если начало системы координат помещено в центр масс системы, то этому уравнению удовлетворяет естественное решение $\vec{r}_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{A}} + \vec{r}_{\mathrm{B}} m_{\mathrm{B}} = 0$. Тогда, введя вектор $\vec{r} = \vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{B}}$, из (2) получим:

$$\frac{d^2 r_k}{dt^2} = -\frac{G(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})}{r^3} r_k - \frac{2}{5} f_{ki}^{(5)} r_i \tag{4}$$

Тензор квадрупольного момента системы двух тел в этом случае равен:

$$f_{ij} = \frac{G}{c^5} m_{\mathrm{AB}} \left[r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right], \tag{5}$$

где $m_{\mathrm{AB}} = m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} / (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})$ — приведённая масса. Для дальнейшего введём естественные единицы длины $r_0 = \frac{GM_\odot}{c^2} \approx 1.5$ км и времени $t_0 \approx \frac{GM_\odot}{c^3} \approx 10^{-5}$ сек. Безразмерные величины в дальнейшем будем обозначать крышечкой над соответствующими символами, массы измерять в массах Солнца $M_\odot$.

Введём координаты в плоскости орбиты согласно определению $\hat{r}_x = \hat{r} \cos\phi$, $\hat{r}_y = \hat{r} \sin\phi$. тогда компоненты квадрупольного момента есть:

$$\hat{f}_{xx} = \hat{r}^2 \left[\cos^2\phi - \frac{1}{3} \right], \tag{6}$$

$$\hat{f}_{yy} = \hat{r}^2 \left[\sin^2\phi - \frac{1}{3} \right], \tag{7}$$

$$\hat{f}_{xy} = \hat{f}_{yx} = \hat{r}^2 \sin\phi \cos\phi. \tag{8}$$

Уравнение движения (4) в покомпонентной записи приводится к комбинации двух уравнений:

$$2\hat{r}^{(1)}\phi^{(1)} + \hat{r}\phi^{(2)} = -\frac{2}{5}\hat{m}_{\mathrm{AB}}\hat{r}\left[\hat{f}^{(5)}_{xy}\cos 2\phi - (\hat{f}^{(5)}_{xx} - \hat{f}^{(5)}_{yy})\sin\phi\cos\phi\right], \tag{9}$$

$$\hat{r}^{(2)} - \hat{r}(\phi^{(1)})^2 = -\frac{\hat{m}_{\mathrm{A}} + \hat{m}_{\mathrm{B}}}{\hat{r}^2} - \frac{2}{5}\hat{m}_{\mathrm{AB}}\hat{r}\left[\hat{f}^{(5)}_{xx}\cos^2\phi + \hat{f}^{(5)}_{yy}\sin^2\phi + \hat{f}^{(5)}_{xy}\sin 2\phi\right]. \tag{10}$$

Для удобства введём дополнительное обозначение: первая производная угла ϕ по времени есть не что иное, как угловая скорость вращения, $\omega = \phi^{(1)}$. Уравнение (9) может быть проинтегрировано и приведено к виду:

$$\hat{r}^2\omega = \frac{2}{5}\hat{m}_{\mathrm{AB}}\int I_1 dt. \tag{11}$$

$$I_1 = (\hat{f}^{(5)}_{xx} - \hat{f}^{(5)}_{yy})\hat{f}_{xy} - (\hat{f}_{xx} - \hat{f}_{yy})\hat{f}^{(5)}_{xy} \tag{12}$$

Если потери на грав.излучение отсутствуют, уравнение (11) описывает просто сохранение момента импульса $\hat{j} = \hat{r}^2\omega = \mathrm{const}$.

Домножив теперь уравнение (10) на $\hat{r}^{(1)}$, проинтегрировав по времени и воспользовавшись (11) и (12), получим:

$$\frac{(\hat{r}^{(1)})^2 + (\hat{r}\omega)^2}{2} - \frac{\hat{m}_{\mathrm{A}} + \hat{m}_{\mathrm{B}}}{\hat{r}} = \frac{2}{5}\hat{m}_{\mathrm{AB}}\int I_2 dt. \tag{13}$$

$$I_2 = \omega I_1 - \frac{\hat{r}^{(1)}}{\hat{r}}\left[\frac{\hat{f}^{(5)}_{xx} - \hat{f}^{(5)}_{yy}}{2}(\hat{f}_{xx} - \hat{f}_{yy}) + \frac{\hat{f}^{(5)}_{xx} + \hat{f}^{(5)}_{yy}}{2}\hat{r}^2 + 2\hat{f}^{(5)}_{xy}\hat{f}_{xy}\right]. \tag{14}$$

Уравнение (13) в отсутствие потерь представляет собой условие сохранения полной энергии. Уравнения справедливы как для круговых орбит, так и для эллиптических. Осталось записать явные выражения для I_1 и I_2. Введём ещё для простоты величину $\hat{r}_2 \equiv \hat{r}^2$. Выражение для I_1 есть:

$$\begin{aligned} I_1 = \hat{r}_2 \Big[& 120\hat{r}^{(1)}_2\omega^2\omega^{(1)} - 5\hat{r}^{(1)}_2\omega^{(3)} - 16\hat{r}_2\omega^5 - 10\hat{r}^{(2)}_2\omega^{(2)} + 60\hat{r}_2\omega(\omega^{(1)})^2 - \\ & -10\hat{r}^{(3)}_2\omega^{(1)} + 40\hat{r}^{(2)}_2\omega^3 - 5\hat{r}^{(4)}_2\omega - \hat{r}_2\omega^{(4)} + 40\hat{r}_2\omega^2\omega^{(2)}\Big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Выражение для I_2 выглядит так:

$$\begin{aligned} I_2 = {} & 60\hat{r}^2_2\omega^2(\omega^{(1)})^2 + 20(\hat{r}^{(1)}_2)^2\omega\omega^{(2)} + 10\hat{r}^{(1)}_2\hat{r}^{(3)}_2\omega^2 + 80\hat{r}_2\hat{r}^{(1)}_2\omega^3\omega^{(1)} - \\ & - 10\hat{r}_2\hat{r}^{(3)}_2\omega\omega^{(1)} - 10\hat{r}_2\hat{r}^{(2)}_2\omega\omega^{(2)} + 30\hat{r}^{(1)}_2\hat{r}^{(2)}_2\omega\omega^{(1)} + 10\hat{r}_2\hat{r}^{(1)}_2\omega^{(1)}\omega^{(2)} - \\ & - \hat{r}^2_2\omega\omega^{(4)} - 5\hat{r}_2\hat{r}^{(4)}_2\omega^2 + 40\hat{r}_2\hat{r}^{(2)}_2\omega^4 + 40\hat{r}^2_2\omega^3\omega^{(2)} - \frac{1}{3}\hat{r}^{(1)}_2\hat{r}^{(5)}_2 - \\ & - 16\hat{r}^2_2\omega^6 + 15(\hat{r}^{(1)}_2)^2(\omega^{(1)})^2 - 20(\hat{r}^{(1)}_2)^2\omega^4. \end{aligned} \tag{16}$$

Порядок производных в выражениях (15) и (16) может быть понижен на единицу путём интегрирования по частям при их подстановке в уравнения (11) и (13).

Новый подход

Вернемся к уравнению (4), и пойдём дальше, используя для обезразмеривания переменных естественные единицы длины: для расстояния — a_0 — начальное расстояние между компонентами (таким образом теперь $\hat{r}(0) = 1$) и времени: $t_0 = \sqrt{\frac{a_0^3}{GM}}$, где $M = m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}$. Тогда уравнения (9) и 10 приводятся к виду

$$\frac{d}{d\hat{t}}(\hat{r}_2\omega) = \epsilon_\mathrm{G} I_1, \tag{17}$$

$$\hat{r}\hat{r}^{(2)} + \frac{1}{\hat{r}} - \hat{r}_2\omega^2 = \epsilon_\mathrm{G} I_2, \tag{18}$$

где все величины и их производные — безразмерны, I_1 даётся прежним выражением (15), а I_2 определяется как:

$$I_2 = 2\hat{r}_2\Big[-40\hat{r}_2\omega^3\omega^{(1)} - 20\omega^4\hat{r}_2^{(1)} + 5\hat{r}_2\omega\omega^{(3)} + 10\hat{r}_2\omega^{(1)}\omega^{(2)} + 10\omega^2\hat{r}_2^{(3)} + \\ +30\omega\omega^{(1)}\hat{r}_2^{(2)} + 20\omega\omega^{(2)}\hat{r}_2^{(1)} + 15\hat{r}_2^{(1)}(\omega^{(1)})^2 - \frac{1}{3}\hat{r}_2^{(5)}\Big]. \tag{19}$$

В уравнениях (17) и (18) появился малый параметр задачи

$$\epsilon_\mathrm{G} = \frac{2}{5}\frac{m_\mathrm{A}m_\mathrm{B}}{M^2}\left(\frac{GM}{a_0c^2}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{20}$$

Сосредоточимся теперь на простейшем случае круговых орбит. Тогда, если бы не правые части, уравнения (17) и (18) выражали бы сохранение углового момента (производная равна нулю) и равновесия ($\omega^2 = 1/\hat{r}^3$). Эволюция системы возникает только из-за того, что $\epsilon_\mathrm{G} \neq 0$. То есть именно это значение и определяет временной масштаб эволюции. Поэтому естественно перейти к характерному времени $\tau = \epsilon_\mathrm{G}\hat{t}$, в котором вся эволюция займёт время $\tau_\mathrm{e} = O(1)$. Введём ещё для удобства обозначение $\xi = \hat{r}_2$, и перепишем основные уравнения в новом времени, заменив также производные в правой части:

$$(\omega\xi)^{(1)} = I_{10} + \epsilon_\mathrm{G}^2 I_{12} + \epsilon_\mathrm{G}^4 I_{14}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\epsilon_\mathrm{G}^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi}} - \xi\omega^2\right] + \frac{1}{2}\xi^{(2)} - \frac{(\xi^{(1)})^2}{4\xi} = I_{20} + \epsilon_\mathrm{G}^2 I_{22} + \epsilon_\mathrm{G}^4 I_{24}. \tag{22}$$

Здесь мы выделили члены разного порядка в правой части:

$$I_{10} = -16\xi^2\omega^5, \tag{23}$$
$$I_{12} = 20\xi\omega\left[6\xi^{(1)}\omega\omega^{(1)} + 3\xi(\omega^{(1)})^2 + 2\xi^{(2)}\omega^2 + 2\xi\omega\omega^{(2)}\right], \tag{24}$$
$$I_{14} = -\xi\left[5\xi^{(1)}\omega^{(3)} + 10\xi^{(2)}\omega^{(2)} + 10\xi^{(3)}\omega^{(1)} + 5\xi^{(4)}\omega + \xi\omega^{(4)}\right], \tag{25}$$

и аналогично для I_2:

$$I_{20} = -40\xi\omega^3\left[2\xi\omega^{(1)} + \omega\xi^{(1)}\right], \tag{26}$$
$$\begin{aligned} I_{22} =& 10\xi\left[\xi\omega\omega^{(3)} + 2\xi\omega^{(1)}\omega^{(2)} + 2\omega^2\xi^{(3)} + \right.\\ &\left. +6\omega\omega^{(1)}\xi^{(2)} + 4\omega\omega^{(2)}\xi^{(1)} + 3\xi^{(1)}(\omega^{(1)})^2\right], \end{aligned} \tag{27}$$
$$I_{24} = -\frac{2}{3}\xi\xi^{(5)}. \tag{28}$$

Теперь будем искать решение в виде ряда по малому параметру ϵ_{G}:

$$\xi = \xi_0 + \epsilon_{\mathrm{G}}^2\xi_2 + O(\epsilon_{\mathrm{G}}^4), \tag{29}$$
$$\omega = \omega_0 + \epsilon_{\mathrm{G}}^2\omega_2 + O(\epsilon_{\mathrm{G}}^4). \tag{30}$$

Из уравнения (22) видно, что должно быть $\omega_0^2 = \xi_0^{-3/2}$. Подставив это выражение в уравнение (21) получим:

$$\frac{d}{d\tau}(\xi_0\omega_0) = \frac{d}{d\tau}\left(\xi_0^{1/4}\right) = I_{00}(\xi_0, \omega_0) = -\frac{16}{\xi_0^{7/4}}, \tag{31}$$

откуда

$$\xi_0 = \sqrt{1-128\tau}, \quad \omega_0 = \frac{1}{(1-128\tau)^{3/8}}, \tag{32}$$

где мы использовали начальное условие в виде $\xi(0) = 1$. Это — хорошо известное решение (см., например, книжку Лайтман и др). Время сближения даётся выражением

$$t_{\mathrm{e}} = \frac{t_0}{128\epsilon_{\mathrm{G}}} = \frac{5}{256}\frac{M^2}{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}\left(\frac{a_0c^2}{GM}\right)^3\frac{a_0}{c}. \tag{33}$$

Уравнения следующего приближения записываются как:

$$\frac{d}{d\tau}(\omega_0\xi_2 + \xi_0\omega_2) = \frac{\partial I_{10}(\xi_0, \omega_0)}{\partial\xi_0}\xi_2 + \frac{\partial I_{10}(\xi_0, \omega_0)}{\partial\omega_0}\omega_2 + I_{12}(\xi_0, \omega_0), \tag{34}$$

$$2\omega_0\xi_0\omega_2 + \frac{\xi_2}{2\xi_0^{3/2}} + \omega_0^2\xi_2 = \frac{\xi_0^{(2)}}{2} - \frac{(\xi_0^{(1)})^2}{4\xi_0} - I_{20}(\xi_0, \omega_0). \tag{35}$$

Уравнение (35) даёт линейную связь между ξ_2 и ω_2, которую, с учётом решения (32), удобно представить в виде:

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{3}{4}\frac{\xi_2}{\xi_0} = -\frac{896}{(1-128\tau)^{\frac{5}{4}}}. \tag{36}$$

Подстановка этого выражения в (34) приводит к линейному дифференциальному уравнению относительно функции ξ_2/ξ_0, которое немедленно интегрируется. Его решение, с учётом начального условия $\xi_2(0) = 0$, есть:

$$\frac{\xi_2}{\xi_0} = \frac{12032}{3}\left[\frac{1}{(1-128\tau)^{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{(1-128\tau)}\right]. \tag{37}$$

Выражение для ω_2 тривиально следует из (36). Как видно, поправка возрастает при $\tau \to 1/128$ и становится больше основного решения, что говорит об ограниченной (по времени) её применимости. Расходимость поправок не удивительна: подстановка нулевого решения (32) в правую часть исходных уравнений (21) и (22) показывает, что каждый следующий член в разложении I_1 и I_2 имеет относительный порядок

$$\frac{I_{12}}{I_{10}} \sim \frac{I_{14}}{I_{12}} \sim \text{и т.п.} \sim O\left(\frac{\epsilon_{\rm G}^2}{(1-128\tau)^{\frac{5}{4}}}\right). \tag{38}$$

То есть к моменту слияния члены старшего порядка становятся по крайней мере так же важны, как и нулевые члены.

Сингулярно–возмущённый характер уравнений

Главной особенностью задачи, по-видимому, является то, что полученные уравнения эволюции двойной системы (21) и (22) относятся к классу сингулярно-возмущённых задач, то есть дифференциальных уравнений, в которых члены, содержащие старшие производные (в нашем случае — I_{14} и I_{24}) входят в комбинации с малым параметром. Решения таких уравнений содержат особенности типа пограничного слоя и т.п. (например, Зельдович и Мышкас). Попробуем регуляризовать задачу и найти нерегулярное решение, справедливое при больших временах. Для этого перейдём к "длинному" времени ς, связанному с τ соотношением:

$$\varsigma = \frac{\tau}{\epsilon_{\rm G}^{4/3}}. \tag{39}$$

Тогда получим уравнения в новом времени:

$$(\omega\xi)^{(1)} = I_{14} + O(\epsilon_{\mathrm{G}}^{2/3}), \tag{40}$$

$$\frac{\xi^{(2)}}{2} - \frac{(\xi^{(1)})^2}{4\xi} = I_{24} + O(\epsilon_{\mathrm{G}}^{2/3}), \tag{41}$$

где все производные по τ заменены на производные по ς. Таким образом, мы выделили члены со старшими производными. Начнём с уравнения (41), которое, с учётом вида I_{24}, не содержит ω. Запишем его в явном виде, отбросив малые члены:

$$\frac{\xi^{(2)}}{2} - \frac{(\xi^{(1)})^2}{4\xi} = -\frac{2}{3}\xi\xi^{(5)}. \tag{42}$$

Это уравнение можно эквивалентно записать как уравнение относительно r:

$$\frac{d^2 r}{d\varsigma^2} = -\frac{2}{3} r \frac{d^5(r^2)}{d\varsigma^5} \tag{43}$$

Поскольку уравнение (42) является автономным, можно понизить его порядок, введя новую функцию согласно:

$$\xi^{(1)} = f(\xi). \tag{44}$$

Тогда уравнение (42) приводится к виду

$$2\xi\frac{df}{d\xi} - f = -\frac{8}{3}\xi^2\frac{d}{d\xi}\left(f\frac{d}{d\xi}\left(f\frac{d}{d\xi}\left(f\frac{df}{d\xi}\right)\right)\right) \tag{45}$$

Анализ его масштабируемости показывает, что функцию f надо искать в виде $f(\xi) = \xi^{2/3}g(y)$, где $g(y)$ — новая неизвестная функция, а $y \equiv \ln\xi$. Для функции g получаем уравнение:

$$6\frac{dg}{dy} + g = \frac{8}{3}\left[g\frac{dG_2}{dy} - 3\frac{d}{dy}\left(g\frac{dG_2}{dy}\right)\right], \tag{46}$$

где G_2 определяется следующим образом:

$$G_2 = \frac{2}{9}g^3 + \frac{5}{3}g^2\frac{dg}{dy} + g\left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + g^2\frac{d^2 g}{dy^2}. \tag{47}$$

Уравнение (46) тоже относится к автономному виду, и можно было бы снова понизить его порядок, однако результирующее уравнение 3-ей степени оказывается слишком сложным. Вместо этого снова рассмотрим масштабные свойства уравнения (46) и учтем, что нас интересует его предельное поведение при $\xi \to 0$, т.е. при $y \to -\infty$. Это позволяет нам найти его асимптотическое решение:

$$g = -\frac{3}{2^{4/3}}(-y)^{1/3}\left[1 + \frac{\ln(-y)+a_1}{y} + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\right], \tag{48}$$

где a_1 — некая константа. Тогда уравнение для асимптотического поведения ξ есть:

$$\frac{d\xi}{d\varsigma} = -\frac{3}{2^{4/3}}\xi^{2/3}(-\ln\xi)^{1/3}, \tag{49}$$

Решение этого уравнения:

$$\Gamma\Big(\frac{2}{3}, -\frac{\ln\xi}{3}\Big) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\frac{(\varsigma_0-\varsigma)}{2}, \tag{50}$$

где ς_0 — константа, а $\Gamma(2/3, x)$ — неполная гамма-функция. Используя её асимптотику при $x \to \infty$:

$$\Gamma\Big(\frac{2}{3}, x\Big) = e^{-x}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3x^{4/3}} + O\Big(\frac{1}{x^{7/3}}\Big)\right], \tag{51}$$

получим асимптотическое поведение параметра ξ:

$$\frac{\xi}{\ln\xi} = -\frac{(\varsigma_0-\varsigma)^3}{16}. \tag{52}$$

Для ω, с учетом вида выражения I_{14}, получаем линейное дифференциальное уравнение 4-ого порядка (40).

Простые формулы для приложений

Выведем простые формулы, пригодные для моделирования процесса сближения компонент двойной системы, опустив все производные по времени от расстояния между компонентами и угловой скорости. Это приближение должно быть справедливо везде, кроме последних моментов перед слиянием, и позволит избежать численных трудностей, связанных со взятием 5-ой производной. Для вычисления производных от квадрупольного момента (5) введём систему координат с осью z, параллельной угловой скорости вращения ω. Компоненты, например, первой массы есть $r^1_x = r^1\cos\phi$, $r^1_y = r^1\sin\phi$. Нам потребуются следующие производные:

$$(r^1_x r^1_x)^{(5)} = -16(r^1)^2\omega^5\sin 2\phi, \tag{53}$$

$$(r^1_x r^1_y)^{(5)} = 16(r^1)^2\omega^5\cos 2\phi, \tag{54}$$

$$(r^1_y r^1_y)^{(5)} = 16(r^1)^2\omega^5\sin 2\phi, \tag{55}$$

Компоненты квадрупольного момента содержат вклады от обеих масс, первой и второй. Запишем компоненты ускорения, например, для 1-ой частицы, используя формулу для ускорения, обусловленного реакцией грав.излучения $a_k = -\frac{2}{5} f_{ki}^{(5)} r_i$:

$$a_x^1 = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\omega^5 a^2 \frac{m_1 m_2}{m_1{+}m_2}\left[-r_x^1 \sin 2\phi + r_y^1 \cos 2\phi\right], \tag{56}$$

$$a_y^1 = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\omega^5 a^2 \frac{m_1 m_2}{m_1{+}m_2}\left[r_x^1 \cos 2\phi + r_y^1 \sin 2\phi\right]. \tag{57}$$

Легко видеть, что квадратная скобка в (56) есть $-r^1 \sin\phi = -r_y^1$, а в (57) — $r^1 \cos\phi = r_x^1$. В векторном виде компоненты ускорения частицы $i, \ i = 1, 2$, можно записать в виде:

$$\vec{a}_i = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\omega^4 a^2 \frac{m_1 m_2}{m_1{+}m_2}[\vec{r}_i \times \vec{\omega}]. \tag{58}$$

Тогда угловой момент, уносимый излучением грав.волн есть:

$$\frac{dJ}{dt} = m_1[\vec{r}_1 \times \vec{a}_1] + m_1[\vec{r}_1 \times \vec{a}_1] = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\omega^5 a^4 \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1{+}m_2)^2}, \tag{59}$$

в полном согласии с классическими формулами.