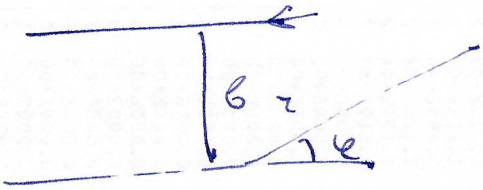
b – прицельный параметр.



В формулах (17–18) $a_0 = b$

время измеряем в $t_0 = \sqrt{\frac{b^3}{GM}}$

На бесконечности $r = \frac{b}{\sin\varphi} = \frac{b}{\varphi}$, если r измеряется в b, то

Тогда $\varphi = \frac{1}{r}$, $\dot\varphi = \omega = -\frac{\dot r}{r^2} \rightarrow$ $r = \frac{1}{\varphi}$

$r^2\omega = -\dot r = u$ ← безразмерная скорость на бесконечности,

Энергия на бесконечности есть $\frac{u^2}{2}$.

$$u = \frac{v}{\sqrt{\frac{GM}{b}}}$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\, r_2\omega}{dt} = \varepsilon_6 I_1 \\ r r^{(2)} + \frac{1}{r} - r_2\omega^2 = \varepsilon_6 I_2 \end{cases}, \quad r_2 \equiv r^2$$

Умножаем второе на $\frac{\dot r}{r}$

$$\underbrace{\dot r r^{(2)}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot r^2} + \underbrace{\frac{\dot r}{r^2}}_{-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)} - \dot r r\omega^2 = \varepsilon_6 I_2 \frac{\dot r}{r};$$ Прибавим первое, умножив на ω

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{1}{r}\right) \underbrace{- \dot r r\omega^2 + 2r\dot r\omega^2 + r^2\dot\omega\omega}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\omega^2)} = \varepsilon_6\left(I_2\frac{\dot r}{r} + I_1\omega\right)$$

Итого:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot r^2 + \frac{r^2\omega^2}{2} - \frac{1}{r}\right)}_{\text{Полная энергия.}} = \varepsilon_6\left(I_1\omega + I_2\frac{\dot r}{r}\right)$$

В первом приближении ~~На бесконечности~~

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot r^2 + \frac{r^2\omega^2}{2} - \frac{1}{r} = u^2 \\ r^2\omega = u \end{cases}$$

$$\boxed{\dot r_2 = -2\sqrt{u^2(r_2-1)+2\sqrt{r_2}}}$$

Чтобы найти изменение полной энергии, нам нужно вычислить интеграл $\int\left\{I_1\omega + I_2\frac{\dot r}{r}\right\}dt$ по траектории невозмущённого, кеплеровского решения.

Подставим $\omega = \frac{u}{r^2}$

Тогда

$$\{\} = -\frac{1}{3}\dot r_2 r_2^{(5)} + u^2\left(\frac{12\dot r_2 r_2^{(3)}}{r_2^2} - 24\frac{\dot r_2^2 r_2^{(2)}}{r_2^3} + 11\frac{\dot r_2^4}{r_2^4} + \frac{4(\ddot r_2)^2}{r_2^2} - 4\frac{r_2^{(4)}}{r_2}\right) +$$

$$+ u^4\cdot 40\frac{\dot r_2^2}{r_2^4} - 16\frac{u^6}{r_2^4}$$

Интеграл берётся от 0 до момента минимального сближения.

При этом $\dot r_2 = 0 \Rightarrow u^2\left(r_2^{min}-1\right)+2\sqrt{r_2}=0.$

$$\boxed{r^{min} = \frac{\sqrt{1+u^4}-1}{u^2}}$$

$$\int dt = -\int_{r_2^{min}}^{\infty}\frac{dr_2}{\dot r_2} \quad (\dot r_2 < 0)$$

$$\ddot r_2 = -2\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u^2+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)}{\sqrt{\ }}\cdot\left(-2\sqrt{\ }\right) = 2\left(u^2+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)$$

$$r_2^{(3)} = -\frac{1}{r_2^{3/2}}\left(-2\sqrt{\ }\right) = 2\frac{\sqrt{u^2(r_2-1)+2\sqrt{r_2}}}{r_2^{3/2}}$$

$$r_2^{(4)} = \frac{2}{r_2^{5/2}}\left(u^2(2r_2-3)+5\sqrt{r_2}\right)$$

Сначала преобразуем член в 5 }.

$$-\frac{1}{3}\int \dot r_2 r_2^{(5)}\,dt = -\underbrace{\frac{1}{3}\dot r_2 r_2^{(4)}\Big|_{r_{min}}}_{0} + \frac{1}{3}\int r_2^{(4)} r_2^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{3} r_2^{(3)} r_2^{(2)}\Big|}_{0} -$$

$$\boxed{-\frac{1}{3}\int \left(r_2^{(3)}\right)^2 dt.}$$

$$\int\left(\underbrace{\frac{12\dot r_2 r_2^{(3)}}{r_2^{2}}}_{a} - 24\underbrace{\frac{\dot r_2^{2} r_2^{(2)}}{r_2^{3}}}_{b} + 11\underbrace{\frac{\dot r_2^{4}}{r_2^{4}}}_{c} + 4\underbrace{\left(\frac{\ddot r_2}{r_2}\right)^2}_{d} - 4\underbrace{\frac{r_2^{(4)}}{r_2}}_{e}\right)dt.$$

$$a = \underbrace{\frac{12\dot r_2 r_2^{(2)}}{r_2^{2}}\Big|}_{0} - 12\int r_2^{(2)}\left(\frac{r_2^{(2)}}{r_2^{2}} - 2\frac{(\dot r_2)^2}{r_2^{3}}\right)dt$$

$$a+b = -12\int\frac{\left(r_2^{(2)}\right)^2}{r_2^{2}}, \quad a+b+d = -8\int\left(\frac{\ddot r_2}{r_2}\right)^2 dt.$$

$$e = -4\underbrace{\frac{r_2^{(3)}}{r_2}\Big|}_{0} - 4\int\frac{r_2^{(3)}\dot r_2}{r_2^{2}} = -4\underbrace{\frac{r_2^{(2)}\dot r_2}{r_2^{2}}\Big|}_{0} + 4\int r_2^{(2)}\left(\frac{r_2^{(2)}}{r_2^{2}} - \frac{2\dot r_2^{2}}{r_2^{3}}\right) =$$

$$= 4\int\frac{(\ddot r_2)^2}{r_2^{2}} - 8\int\frac{r_2^{(2)}\dot r_2^{2}}{r_2^{3}}$$

$$\int\frac{r_2^{(2)}\dot r_2^{2}}{r_2^{3}}dt = \frac{\dot r_2^{3}}{r_2^{3}}\Big|_0 - \int\dot r_2\left(\frac{2\dot r_2\ddot r_2}{r_2^{3}} - \frac{3\dot r_2^{3}}{r_2^{2}}\right)dt$$

Отсюда $\displaystyle\int\frac{r_2^{(2)}\dot r_2^{2}}{r_2^{3}} = \int\frac{\dot r_2^{4}}{r_2^{4}}$

Итого:

$$a+b+c+d+e = \int\left[3\left(\frac{\dot r_2}{r_2}\right)^4 - 4\left(\frac{\ddot r_2}{r_2}\right)^2\right]dt.$$

$$\int\left(I_1\omega + I_2\frac{\dot v}{v}\right)dt = -\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr_2}{\dot r_2}\left\{-\frac{1}{3}\left(r_2^{(3)}\right)^2 + u^2\left(3\left(\frac{\dot r_2}{r_2}\right)^4 - 4\left(\frac{\ddot r_2}{r_2}\right)^2\right) +\right.$$

$$\left. + 40u^4\frac{\dot r_2^2}{r_2^4} - 16\frac{u^6}{r_2^4}\right\} = \frac{2}{3}\int dr_2\,\frac{24r_2^2u^6 + 48u^6r_2 + 120r_2^{3/2}u^4 - 96u^6 + 96u^4\sqrt{r_2} - u^2r_2^2 + 133u^2r_2 - 2r_2^{3/2}}{r_2^4\sqrt{u^2(r_2-1) + 2\sqrt{r_2}}\ \ldots}$$

Результат: $\int()\,dt = -\frac{2}{3}\,\frac{(673u^4+1275)u^2 + 3(37u^8+366u^4+425)\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{u^2}\right)}{12u^7}$

Условие захвата: $\Delta E = 2\varepsilon_G\int\{\}\,dt = -\frac{u^2}{2}$ ← начальная энергия

до r_{min} и от r_{min} до ∞ (обратно)

$\cancel{u^9 < \frac{2}{9}}$ $\quad u^9 < \varepsilon_G\frac{2}{9}\left[(673u^4+1275)u^2 + 3(37u^8+366u^4+425)\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{u^2}\right)\right]$