

# CONCOURS INTERNE D'INGENIEUR TERRITORIAL

---

OCTOBRE 2005

---

## EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET DE PHYSIQUE APPLIQUEE

---

Durée : 4 heures  
Coefficient : 3

### EPREUVE N° 20

## MATHEMATIQUES

**Les détails des calculs doivent figurer sur la copie ; donner les résultats exacts. Tout résultat non justifié sera considéré comme nul. Il n'est pas nécessaire de tracer la courbe sur du papier millimétré.**

### PROBLEME I

On considère la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $I$  la matrice unité d'ordre 3.

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ ; en déduire ses valeurs propres. On vérifiera que 1 est valeur propre double.
2. Déterminer une base de chacun de ses sous-espaces propres.
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$ , que l'on déterminera, tels que :

$$A(A + aI) = bI$$

- b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

## PROBLEME II

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine  $O$ , on note  $A$  le point de coordonnées  $(1, 1)$ .

1. a) Tracer l'arc de courbe  $(C)$  défini par :

$$y = x^2, 0 \leq x \leq 1$$

ainsi que le segment  $OA$ .

- b) Calculer l'aire  $S$  de la partie  $(D)$  du plan limitée par  $(C)$  et le segment  $OA$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$I_n = \iint_{(D)} x^n dx dy \text{ et } J_n = \iint_{(D)} y^n dx dy$$

- a) Calculer  $I_n$  et  $J_n$ .

- b) En déduire  $I_0, I_1, I_2, J_0, J_1$  et  $J_2$ .

3. On suppose que  $(D)$  est une plaque homogène de densité (ou masse surfacique)  $\rho$  et de masse  $M$ .

- a) Calculer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de  $(D)$ .

- b) Calculer en fonction de  $M$  les moments d'inertie de  $(D)$  par rapport à chacun des axes de coordonnées, puis par rapport à  $O$ .

### Barème (sur 10)

I (5 points)	II (5 points)
1. 1 + 0,5 pt	1-a. 0,5 pt
2. 1,5 pt	1-b. 0,5 pt
3. 0,5 pt	2-a. 1 + 1 pt
4-a. 1 pt	2-b. 0,5 pt
4-b 0,5 pt	3-a. 0,5 pt
	3-b. 1 pt

# PHYSIQUE :

## I - Mécanique : (4 points)

On peut lire dans une documentation relative à une rame de TGV duplex que celle-ci a une masse de 380 tonnes à vide et de 425 tonnes en charge, une longueur de 200 m, une vitesse de croisière en palier (en mouvement uniforme horizontal) de 300 km/h, est alimentée sous 25 kV - 50 Hz monophasé et a une capacité de 516 places. Dans tout l'exercice, on considère que le train roule sur un sol horizontal.

Intensité de l'accélération de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

- 1/ Sachant que le train met 7 minutes pour passer de l'arrêt à sa vitesse de croisière, quelle est son accélération, supposée constante, pendant cette phase ?
- 2/ Ce train, de masse 420 tonnes, passe sur un pont de 570 m de long alors qu'il roule à 300 km/h. Or ce pont fait un bruit caractéristique dès qu'une partie du train roule sur lui. Combien de temps dure ce bruit ?
- 3/ Toujours à la même vitesse, le train aborde une courbe dont le rayon de courbure est de 6 km. Comme les passagers ne sont pas attirés vers les parois latérales des wagons pendant ce tournant, on demande de quel angle la voie est relevée.
- 4/ La puissance électrique consommée étant de 2000 kW en palier, les pertes thermiques et mécaniques dans la motrice étant estimées à 10 % de la puissance absorbée, en déduire l'intensité des forces de frottement opposées à l'avancement du train lorsqu'il roule à 300 km/h en palier.

## II - Électricité : (3 points)

Une installation fonctionnant sous 220 V, 50 Hz monophasée comprend :

- un appareillage de puissance utile 29440 W, de rendement  $\eta = 0,8$  et de facteur de puissance  $\cos \varphi = 0,75$ .
- un ensemble de 200 lampes de 100 W chacune.
- 

La ligne qui alimente cette installation est équivalente au dipôle série de caractéristiques :

$$R_{Li} = 0,05 \, \Omega ; L_{Li} = 0,001 \text{ H} ; C_{Li} = 12500 \, \mu\text{F}.$$

On demande :

- 1/ L'intensité du courant dans la ligne.
- 2/ Le facteur de puissance de l'installation.
- 3/ Les pertes par effet Joule dans la ligne.
- 4/ La puissance apparente au départ de la ligne.
- 5/ La tension au départ de la ligne.
- 6/ Le facteur de puissance au départ de la ligne.

**III – Énergétique :** (3 points)

On considère un mur de béton de 10 cm d'épaisseur qui sépare un milieu à 18 °C d'un milieu à - 20 °C. La conductivité thermique du béton est :  $\lambda = 1,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

On adoptera  $h = 8,12 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  pour tous les coefficients globaux de convection et rayonnement entre l'air et le béton.

1/ Calculer le flux thermique  $\varphi$  par  $\text{m}^2$  de paroi.

2/ Le mur étant constitué de deux parois de béton de 5 cm d'épaisseur séparées par une couche d'air de 5 cm, calculer le nouveau flux  $\varphi'$  et les différentes températures dans le mur (on admettra que la transmission de chaleur dans la couche d'air se fait uniquement par convection et rayonnement).

**NOTA :**

- Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies
- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.