Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants.
Merci de bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

le but de ce problème est la détermination d'une **surface de stigmatisme parfait**, c'est-à-dire la surface séparant deux milieux transparents isotropes d'indices de réfraction distincts telle que tout faisceau lumineux incident parallèle dans une direction donnée soit réfracté en un faisceau convergeant en un point appelé **foyer optique**. La situation est représentée (en coupe) à la figure 1.

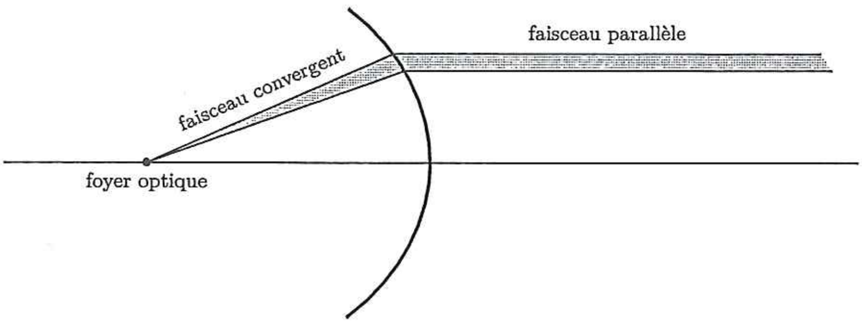

FIGURE 1 – Réfraction d'un faisceau parallèle par une surface de stigmatisme parfait

1. Angle d'incidence On se place dans un plan contenant le foyer optique O, plan que l'on munit d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ce repère est complété par un troisième vecteur $\vec{k}$ de sorte que la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ soit une base orthonormée directe de l'espace.

La section de la surface cherchée par le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dans le quadrant $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ une courbe Γ d'équations

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$$

où f est une fonction que l'on suppose de classe C^1. Soit $M(x,f(x),0)$ un point de cette courbe en lequel arrive un rayon incident dirigé par le vecteur $-\vec{\imath}$. On note θ_i l'angle d'incidence, et θ_r l'angle réfracté, comme indiqué à la figure 2.

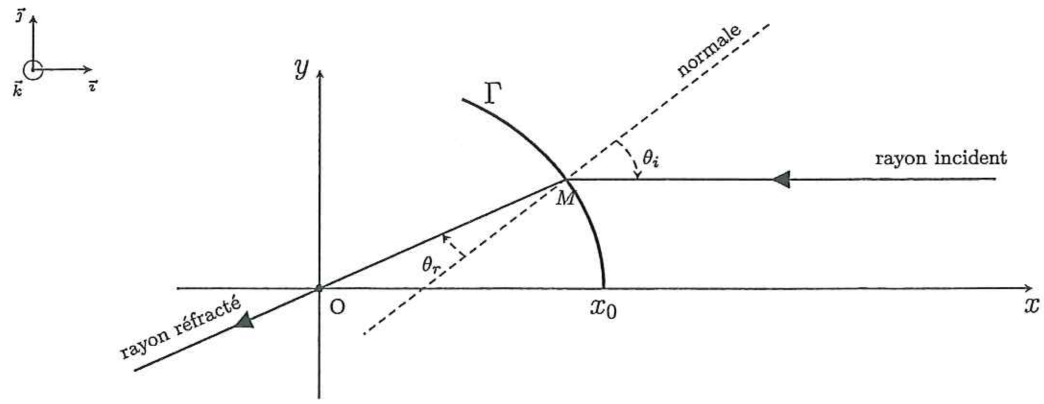

FIGURE 2 – Réfraction d'un rayon incident

Montrer que

$$\sin\theta_i = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}.$$

<u>2. Angle de réfraction</u> De même, calculer $\sin\theta_r$.

<u>3. Résolution</u> On note respectivement n_i et n_r les indices de réfraction des milieux transparents séparés par la surface cherchée (il s'agit du quotient de la vitesse de la lumière dans le milieu par la vitesse c de la lumière dans le vide), et on suppose $n_r > n_i$.

On rappelle les lois de Descartes concernant la réfraction :

— le rayon incident et le rayon réfracté sont coplanaires,

— le rayon réfracté et le rayon incident sont situés de part et d'autre de la normale au point M dans ce plan,

— les angles θ_i et θ_r sont liés par la relation

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r.$$

Montrer que la courbe Γ satisfait la condition voulue si et seulement si la fonction f est solution de l'équation

$$(E) \qquad n\frac{x + y\,y'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

où n est une constante que l'on précisera.

<u>4.</u>

<u>4.1</u> Donner l'expression de toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

<u>4.2</u> Préciser l'intervalle maximal de définition de ces solutions.

<u>4.3</u> On note x_0 l'abscisse du point intersection de Γ avec l'axe $(O,\vec{\imath})$. Déterminer l'unique solution du problème.

<u>5.</u> Démontrer que la courbe obtenue à x_0 fixé est une portion d'ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques : équation réduite, centre, axe focal, demi-axes, foyers.

<u>6.</u> Quelle est la surface de stigmatisme parfait cherchée ?

Problème 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_α par

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de α, le domaine de définition de f_α.

2.

   2.1 Démontrer que f_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   2.2 Exprimer f'_α en fonction de $f_{\alpha-1}$. Préciser $f'_\alpha(0)$.

   2.3 Déterminer le sens de variation de f_α sur $]0,1[$.

3.

   3.1 Expliciter les fonctions f_1, f_0 et f_{-1}.

   3.2 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_{-k} vérifie

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_{-k}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

où P_k est un polynôme de degré k. Préciser $P_k(0)$.

4. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que f_α est continue sur $[-1,1]$.

Problème 3

Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = 1 - \dfrac{\lambda p}{1-p} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = a\,\lambda\, p^n \end{cases}$$

où λ et p sont des constantes réelles vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < \lambda < \frac{1-p}{p}$ et a un réel positif.

1. Calculer a.

2.

   2.1 Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

   2.2 Démontrer que X admet une variance et la calculer.

La variable aléatoire X représente le nombre de véhicules se présentant à une carrefour pendant une journée. Chaque véhicule a la possibilité de choisir l'itinéraire A ou l'itinéraire B comme illustré à la figure 3.

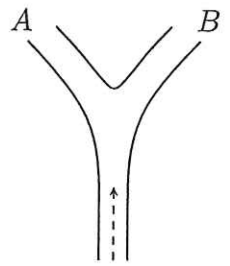

FIGURE 3 – Schéma du carrefour

On suppose que chaque véhicule choisit avec équiprobabilité l'un ou l'autre des itinéraires A et B. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules choisissant l'itinéraire A au cours de la journée.

3.

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de la variable Y sachant l'événement $\{X = n\}$.

3.2 En déduire la loi de probabilité de Y.

3.3 Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Problème 4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de E, c'est-à-dire tel que $u \neq 0$ et $u \circ u = 0$. On note r le rang de u.

1. À l'aide d'une relation simple entre $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$, démontrer que $r \leqslant \frac{n}{2}$.

2. Soit F un supplémentaire de $\ker u$ dans E, et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F. Montrer que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

3. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit par blocs sous la forme

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{matrix} r \\ s \\ r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & s & r \end{matrix} & \end{array}$$

où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et $s = n - 2r$.