MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE
DES FINANCES
ET DE LA RELANCE

Liberté
Égalité
Fraternité

Secrétariat général

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2021

❖❖❖

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE N° 2 DU 1ER JUIN 2021

❖❖❖

COMPOSITION SUR UN SUJET DE MATHEMATIQUES

❖❖❖

(Durée : 4 heures - Coefficient : 1)

REMARQUES IMPORTANTES :

- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet (le sujet comporte **3 pages**)
- **La calculatrice n'est pas autorisée**

SEULS PEUVENT ETRE AUTORISES A PARTICIPER A L'EPREUVE D'ADMISSION LES CANDIDATS QUI, APRES DELIBERATION DU JURY, OBTIENNENT A L'ISSUE DES EPREUVES D'ADMISSIBILITE UNE NOTE SUPERIEURE A 10/20 DANS CHACUNE DES 4 EPREUVES

Épreuve de mathématiques

Les problèmes sont indépendants ; les candidats veilleront à bien numéroter les réponses aux questions sur la copie. La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Problème 1

L'objet de ce problème est la construction d'approximations numériques de π.

1. Pour tout entier naturel n on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1.1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$\int_0^1 x^{2k}\, dx$$

existe et la calculer.

1.2 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\, dx$$

1.3 En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente, préciser sa somme et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

1.4 Soit $\varepsilon > 0$. Combien de termes de la série $4\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est-il suffisant de calculer pour obtenir une approximation de π à ε près ? Donner la valeur numérique pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. Formule de Machin

2.1 Soient a et b deux réels tels que $\cos a$, $\cos b$ et $\cos(a+b)$ soient non nuls. Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

2.2 On pose $a = \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ et $b = \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$. Calculer $\tan(4a - b)$ et en déduire la valeur de $4a - b$.

2.3 Rappeler le développement en série entière de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ et préciser son rayon de convergence. En déduire celui de Arctan ainsi que son rayon de convergence.

2.4 Déduire des questions 2.2 et 2.3 une série numérique dont π est la somme. Que penser de la vitesse de convergence de cette série par rapport à celle obtenue à la question 1.4 ?

Problème 2

Soient n un entier naturel non nul, et E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. L'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est notée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit l'application linéaire ℓ définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \ell(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad \ell(e_n) = e_1.$$

1.

1.1 Expliciter la matrice A de ℓ dans la base $\mathcal{B}$.

1.2 Justifier que ℓ est une isométrie ; en déduire que A est inversible et préciser son inverse ainsi que son déterminant.

2. Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et U_k la matrice colonne dont les coefficients sont les puissances successives de ω_k, depuis ω_k^0 jusque ω_k^{n-1}.

2.1 Montrer que U_k est vecteur propre de la matrice A associé à une valeur propre que l'on précisera.

2.2 En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Préciser son polynôme caractéristique, la relation de diagonalisation, une matrice diagonale et la matrice de passage associée.

2.3 À quelle condition A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Problème 3

Soient r un entier supérieur ou égal à 1 et $p \in]0; 1[$ fixés.

On considère une succession d'épreuves aléatoires indépendantes pour lesquelles deux issues sont possibles : succès (de probabilité p) ou échec (de probabilité $1-p$).

Ces épreuves aléatoires sont répétées (sans limite du nombre de tentatives) jusqu'à l'obtention du $r^{\text{ème}}$ succès. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves qui ont été nécessaires à la réalisation de cette condition.

1.

1.1 Déterminer la loi de probabilité de X.

1.2 Montrer que l'espérance et la variance de X existent et les calculer.

2. On suppose dans cette question que $r = 1$. Une fois l'expérience précédente réalisée (et donc la valeur de X déterminée), on recommence X fois l'épreuve et on note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de succès au cours de cette seconde série d'épreuves.

2.1 Soit n une valeur possible de X ; déterminer la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $\{X = n\}$, c'est-à-dire, pour toute valeur possible k de Y, la probabilité

$$\mathbb{P}\left(\{Y = k\} | \{X = n\}\right).$$

2.2 En déduire la loi de probabilité de Y.

2.3 Montrer que l'espérance de Y existe et la calculer.

3. On revient au cas général où $r \in \mathbb{N}^*$; Y a la même signification qu'à la question 2. Sans chercher à déterminer la loi de Y, montrer que cette variable aléatoire admet une espérance et la calculer.

Problème 4

Un modèle d'évolution de populations animales relie le nombre d'individus $y(t)$ en fonction du temps t à la variation $y'(t)$ de ce nombre et aboutit à une équation différentielle non linéaire du type

$$y'(t) = a\,y(t) - b\sqrt{y(t)} \qquad (E)$$

où a et b sont deux réels positifs. On étudie ce problème pour $t \in \mathbb{R}_+$.

L'objet de ce problème est de résoudre l'équation (E) à l'aide d'un changement d'inconnue et de comprendre l'évolution finale de la population en fonction du nombre d'individus initial $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_+$.

1. À quelle condition, portant sur y_0, le nombre d'individus reste-t-il constant au cours du temps ?

2. On suppose que y est une fonction strictement positive sur un intervalle I.

2.1 Montrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction $z = \sqrt{y}$ est solution strictement positive sur I d'une équation différentielle linéaire (E') que l'on précisera.

2.2 Résoudre (E') et préciser le signe des ses solutions.

2.3 En déduire la forme générale des solutions de (E) avec leur intervalle de définition, puis parmi ces solutions celle vérifiant $y(0) = y_0$.

3. Préciser, en fonction des réels y_0, a et b, l'évolution de la population au fil du temps. Indiquer lorsqu'il y a lieu le temps au bout duquel la population étudiée s'éteint.