Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DES FINANCES
ET DES COMPTES PUBLICS

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE,
DE L'INDUSTRIE ET DU NUMÉRIQUE

SG
Ressources humaines

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2016

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE N° 2 DU 4 AVRIL 2016

MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures - Coefficient : 1)

REMARQUES IMPORTANTES :

- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet (le sujet comporte 3 pages)

TOUTE NOTE INFERIEURE A 10 SUR 20 EST ELIMINATOIRE

Épreuve de Mathématiques

Les trois problèmes sont indépendants ; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire sur cet espace dont les valeurs possibles sont des entiers naturels : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. L'objet de cette question est d'établir une formule alternative pour l'expression de l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

1.1 On suppose que X admet une espérance. Montrer qu'alors la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ est convergente et que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

1.2 Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ est convergente. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(X)$. Conclure.

2. On suppose que X admet une espérance. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si la série

$$\sum_{k\geqslant 0}(2k+1)\mathbb{P}(X > k)$$

est convergente et qu'alors

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}(2k+1)\mathbb{P}(X > k) - \mathbb{E}(X)^2.$$

3. Dans cette question on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p (où $p \in]0,1[$), c'est-à-dire que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

À l'aide des résultats des questions précédentes, démontrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

4. Soient N et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise d'une boule de l'urne. Le numéro de la boule tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage est une variable aléatoire notée Y_i. On pose

$$X = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}.$$

4.1 En précisant les hypothèses nécessaires relatives à l'expérience aléatoire, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4.2 Montrer que X admet une espérance et la calculer. Quelle est sa limite lorsque $n \to +\infty$?

Problème 2

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer qu'on a l'équivalent

$$h_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n.$$

On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = h_n - \ln n$ et, pour $n \geqslant 2$, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

2. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ est convergente. En déduire l'existence d'un réel γ tel que, lorsque $n \to +\infty$, on ait le développement asymptotique

$$h_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

3. L'objet de cette question est de démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

3.1 Démontrer l'existence de cette somme infinie.

3.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = h_n \ln 2 + T_n - T_{2n}.$$

3.3 Montrer qu'il existe un réel α tel que, lorsque $n \to +\infty$,

$$T_n = \frac{1}{2} \ln^2 + \alpha + o(1).$$

3.4 En déduire un développement asymptotique de S_{2n} et conclure.

Problème 3

On considère l'équation différentielle suivante, dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable x.

$$(E) \qquad y' = x \cos^2 y.$$

1. On suppose dans cette question qu'une solution y de (E) est telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y(x_0) = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Démontrer que y est une fonction constante.

2. Démontrer que toute solution de (E) sur un intervalle centré en 0 est une fonction paire.

3. Soit y une solution non constante de (E) sur un intervalle I.

3.1 Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < y(x) < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

3.2 En déduire la résolution explicite de l'équation (E), en précisant l'intervalle de définition des solutions maximales.