MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE
DES FINANCES
ET DE LA RELANCE

Liberté
Égalité
Fraternité

Secrétariat général

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2022

❖❖❖

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE N° 2 DU 1ER JUIN 2022

❖❖❖

COMPOSITION SUR UN SUJET DE MATHEMATIQUES

❖❖❖

(Durée : 4 heures - Coefficient : 1)

REMARQUES IMPORTANTES :

- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet (le sujet comporte 3 pages)
- **Les calculatrices et les montres connectées ne sont pas autorisées**

SEULS PEUVENT ETRE AUTORISES A PARTICIPER A L'EPREUVE D'ADMISSION LES CANDIDATS QUI, APRES DELIBERATION DU JURY, OBTIENNENT A L'ISSUE DES EPREUVES D'ADMISSIBILITE UNE NOTE SUPERIEURE A 10/20 DANS CHACUNE DES 4 EPREUVES

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 : Équations différentielles et séries entières

On considère le problème différentiel (E) sur $I =]0,1[$ défini par :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0 \\ \qquad\qquad y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Justifier que (E) possède une unique solution sur I.
2. Questions préliminaires.
   On rappelle que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ définie par :
   $$\forall x \in]-1,1[, \quad s(x) = \frac{1}{1-x}$$
   a. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} nx^n$ est 1.

   b. Démontrer que :
   $$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$
3. Soit g une fonction supposée développable en série entière avec un rayon $R > 0$ ou $R = +\infty$, c'est-à-dire que :
   $$\forall x \in]-R,R[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
   a. Démontrer que :
   $$g \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} a_n \end{cases}$$
   b. Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n$$
4. En déduire l'expression explicite (sans le signe sigma) de l'unique solution de (E) développable en série entière.

Exercice 2 : Probabilités

Les deux questions de cet exercice sont totalement indépendantes. On rappelle que l'on note $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B de probabilité non nulle.

1. Une urne contient une seule boule de couleur rouge. Un joueur lance un dé équilibré et il respecte la règle suivante :

   — S'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne et l'expérience s'arrête.

   — Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et relance le dé.

   On note S_i l'événement « obtenir un 6 au i-ème lancer » et A_n l'événement « le premier 6 arrive au n-ième lancer » et R l'événement « la boule tirée est rouge » .

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, décrire l'événement A_n en fonction des événements S_i.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{5^{n-1}}{6^n}$.

   c. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(R|A_n) = \dfrac{1}{n}$ puis en déduire que :

   $$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

   d. Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0 et en déduire que $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1}{5}\ln 6$.

2. On dispose de deux urnes contenant chacune N boules. Dans chaque urne, il y a une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche dans la première urne au cours de tirages successifs avec remise. De même, on note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche dans la deuxième urne au cours de tirages successifs avec remise. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et $Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

   a. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ainsi que les lois de probabilité suivies par les deux variables aléatoires X et Y.

   b. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire somme $Z = X + Y$, puis démontrer que la loi de la variable aléatoire Z est donnée par :

   $$\forall n \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$$

   c. Exprimer les espérances $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X et $\mathbb{E}(Y)$ de la variable aléatoire Y en fonction de p.

   d. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de la variable aléatoire Z.

   e. Exprimer les variances $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X et $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y en fonction de p.

   f. En déduire la variance $\mathbb{V}(Z)$ de la variable aléatoire Z.

   g. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant $Z = n$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et démontrer que celle-ci est la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$.

Exercice 3 : Algèbre linéaire, réduction et application

1. **Étude d'une matrice.**

   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

   a. Justifier sans calculs que la matrice A est diagonalisable à valeurs propres réelles.

   b. Calculer le spectre de A. *Si nécessaire on pourra admettre que* $spA = spf = \{-2, 1\}$.

   c. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres. On les notera E_{-2} et E_1.

   d. Démontrer, d'une autre manière qu'à la première question, que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   e. Construire une matrice inversible P et une matrice diagonale D semblable à A dans laquelle les valeurs propres auront été rangées dans l'ordre croissant telles que :

   $$A = PDP^{-1}$$

   f. Rappeler, sans démonstration, l'expression simplifiée de $\left(PDP^{-1}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de P, P^{-1}, D et n.

2. **Étude d'un système de suites récurrentes.**

   On définit les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

   $$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (R) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & & + & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & x_n & & & + & z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n & + & y_n & & \end{array} \right.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   a. Justifier que pour tout n entier, on a :

   $$X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

   b. On pose, pour tout entier n, $Y_n = P^{-1}X_n$. Démontrer que, pour tout entier n, on a :

   $$Y_n = D^nY_0$$

   c. On admet que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. En déduire la colonne Y_n pour tout entier n.

   d. En déduire les expressions des suites (x_n), (y_n) et (z_n) en fonction de n.

   e. En déduire la limite, si elle existe, de la suite (x_n) lorsque n tend vers l'infini.
