MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE
DES FINANCES
ET DE LA RELANCE

Liberté
Égalité
Fraternité

Secrétariat
général

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2020

❖❖❖

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2 DU 1ER DÉCEMBRE 2020

❖❖❖

MATHEMATIQUES

❖❖❖

(Durée : 4 heures - Coefficient : 1)

REMARQUES IMPORTANTES :

- **L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé.**
- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet (le sujet comporte **4 pages**)

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 10 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE

Épreuve de mathématiques

Les problèmes sont indépendants ; les candidats veilleront à bien numéroter les réponses aux questions sur la copie. La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Problème 1

L'objet de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad x\,y''(x) - (2x^2+1)y'(x) + 4x^3 y(x) = 4x^4$$

dans laquelle l'inconnue y est une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-$ (ce domaine sera étendu à la question 4).

1.

1.1 Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?

1.2 Justifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 1$.

2. Dans cette question on suppose que $I = \mathbb{R}_+^*$, on introduit le changement de variable $t = x^2$ et on pose $z(t) = y(x)$.

2.1 Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') linéaire à coefficients constants.

2.2 Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E').

2.3 En déduire les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.4 Expliciter les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$; on pose

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

4.1 À quelle condition y se prolonge-t-elle en une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

4.2 La propriété de la question 1.2 s'applique-t-elle à ces solutions en $x_0 = 0$?

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt.$$

1. Étude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.1 Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante ; préciser les valeurs de a_0, a_1 et a_2.

1.2 À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation simple entre a_{n+1} et a_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(n+1)a_n a_{n+1}$.

1.4 Montrer à l'aide des questions précédentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)a_n^2$$

et en déduire l'équivalent :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

2. On note f la fonction (d'une variable réelle) somme de la série entière dont les coefficients sont a_n :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

2.1 Déterminer l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière.

2.2 Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$, la somme partielle d'ordre n de la série s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x,t)\,dt$$

où $g(x,t)$ est une expression que l'on explicitera.

2.3 En déduire que, pour $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}.$$

2.4 Calculer cette intégrale et en déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ n'utilisant ni symbole de sommation ni intégrale.

Problème 3

Soit Ω un ensemble fini et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités sur Ω. On considère également une fonction $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et telle que

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in]0;1]^2, & f(x\,y) = f(x) + f(y) \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

Étant donné un événement A de Ω de probabilité non nulle, on appelle **quantité d'information de** A le nombre $S(A) = f(\mathbb{P}(A))$.

1. Questions préliminaires

1.1 Calculer la quantité d'information de l'événement certain.

1.2 Que peut-on dire de la quantité d'information de l'intersection de deux événements indépendants ?

2. Fonctions f admissibles. L'objet de cette question est de déterminer les fonctions f vérifiant les conditions exigées. Soit f une telle fonction.

2.1 Montrer que pour tout $x \in]0;1]$ on a

$$\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}f(x) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u)\,du$$

et en déduire que f est nécessairement dérivable.

2.2 Démontrer qu'il existe un réel a que l'on précisera tel que

$$\forall x \in]0;1], \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

et en déduire l'expression de f.

2.3 Étudier la réciproque : vérifier que ces fonctions satisfont les conditions exigées.

Dans toute la suite on prend $f = -\log_2$, c'est-à-dire $f(x) = -\frac{\ln x}{\ln 2}$.

Définition

*Étant donnée une variable aléatoire X sur Ω, on définit l'**entropie de Shannon de** X (ou simplement : entropie de X) comme*

$$H(X) = \mathbb{E}\left[f(p(X))\right] = -\mathbb{E}\left[\log_2 p(X)\right]$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique et la fonction

$$\begin{array}{rccc} p: & X(\Omega) & \longrightarrow &]0;1] \\ & x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

caractérise la loi de probabilité de X.

L'entropie de Shannon est donc la quantité moyenne d'information des événements du type $\{X = x\}$.

En informatique, une variable mal initialisée codée sur n bits est représentée par une variable aléatoire X dont l'ensemble des valeurs possibles est $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Ainsi, si $n = 8$, les valeurs possibles d'un octet sont les entiers entre 0 et 255.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'entropie de X si sa loi est la loi (discrète) uniforme sur $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

4. Dans cette question on va montrer que l'entropie de la loi discrète uniforme est l'entropie maximale, résultat connu sous le nom d'inégalité de Gibbs.

Soit donc X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$, chacune avec une probabilité non nulle. Pour plus de commodité, on pose $N = 2^n$.

4.1 Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leqslant x - 1.$$

4.2 En déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$

$$\mathbb{P}(X = k)\ln\frac{1}{N\,\mathbb{P}(X = k)} \leqslant \frac{1}{N} - \mathbb{P}(X = k)$$

puis

$$-\ln N - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X = k)\ln(\mathbb{P}(X = k)) \leqslant 0.$$

4.3 Conclure.

Problème 4

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la notation $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices carrées à k lignes et k colonnes et à coefficients complexes.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le **commutant de** u comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \quad \text{tels que} \quad u \circ v = v \circ u\}.$$

De même, le commutant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini comme

$$\mathcal{C}(M) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{telles que} \quad M\,N = N\,M\}.$$

1.

1.1 Montrer que le commutant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1.

1.2 Prouver que le commutant de la matrice diagonale comportant les entiers de 1 à n sur sa diagonale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$$

est l'ensemble des matrices diagonales. En déduire sa dimension.

2. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

3. On suppose maintenant que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres, de multiplicités respectives $n_1, \ldots, n_p$. On note enfin, pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$\mathcal{B}_i = (e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$$

une base du sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i et $\mathcal{B}$ la base de E obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$:

$$\mathcal{B} = \left(e_1^1, e_2^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p\right).$$

3.1 Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Diag}(V_1, \ldots, V_p) = \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{V_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{V_p} \end{pmatrix}$$

dans laquelle chaque bloc diagonal V_i appartient à $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$.

3.2 Montrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est de cette forme, alors $v \in \mathcal{C}(u)$.

3.3 En déduire, en fonction de $n_1, \ldots, n_p$, la dimension de $\mathcal{C}(u)$ et montrer qu'elle est toujours supérieure ou égale à n.