Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants ; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série à termes réels positifs telle qu'il existe un $x_0 \in]1,+\infty[$ pour lequel la série

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n \left(1 - \frac{1}{x_0^n}\right)$$

converge.

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge et que, pour tout $x \in [1,+\infty[$, la série

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n \left(1 - \frac{1}{x^n}\right)$$

est convergente.

Dans la suite de ce problème on considère la fonction

$$S : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(1 - \frac{1}{x^n}\right). \end{array}$$

2. Montrer que la fonction S est de classe C^∞ et croissante sur $[1,+\infty[$.

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} S^{(k)}(x) = 0$.

Problème 2

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et ℓ un endomorphisme de E.

1. Démontrer qu'au sens de l'inclusion :

   1.1 la suite des images $(\mathrm{Im}(\ell^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

   1.2 la suite des noyaux $(\ker(\ell^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2.

2.1 Montrer qu'il existe un entier p_0 tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (p < p_0) \Longrightarrow (\mathrm{Im}(\ell^p) \neq \mathrm{Im}(\ell^{p_0})) \\ (p \geqslant p_0) \Longrightarrow (\mathrm{Im}(\ell^p) = \mathrm{Im}(\ell^{p_0})) \, . \end{cases}$$

2.2 L'entier p_0 étant celui mis en évidence à la question précédente, montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (p < p_0) \Longrightarrow (\ker(\ell^p) \neq \ker(\ell^{p_0})) \\ (p \geqslant p_0) \Longrightarrow (\ker(\ell^p) = \mathrm{Im}(\ker^{p_0})) \, . \end{cases}$$

2.3 Justifier que $p_0 \leqslant n$.

3. Montrer que $\ker(\ell^{p_0}) \oplus \mathrm{Im}(\ell^{p_0}) = E$.

Problème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_x^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt. \end{array}$$

1. Montrer que les fonctions f_n sont bien définies.

2. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on déterminera.

4. Démontrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$? sur $]-\infty, a]$?

Problème 4

Soit a un réel strictement positif ; on considère l'équation différentielle d'inconnue y fonction de la variable x suivante :

$$(E) \qquad x(x+a)y'' - x\,y' + y = 0$$

1. Résoudre (E) sur $]-\infty, -a[$, sur $]-a, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

2. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$, sur $]-a, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.