Autor:
Vojtěch Krákora

Cvičení:
Čtvrtek 9:15

Věc:
MI-MPI 2. úkol

1. úloha

a)

Číslo $-\frac{1}{13}$ se nedá zapsat ve tvaru $\frac{n}{2^l}$, kde $n, l \in Z$, bude tedy periodické v binární reprezentaci. Dále budu postupovat dle nápovědy pomocí hladového algoritmu. Znaménko změním jen jedním bitem, proto číslo do binárního kodu převedu jako $\frac{1}{13}$.

Je třeba najít takové k, pro které platí $2^{k+1} > \frac{1}{13} \geq 2^k$. To platí pro $k = -4$. Hladový algoritmus:

$$a_{-4} = 1 \qquad r_{-4} = \frac{\frac{1}{13}}{2^{-4}} - a_{-4} = \frac{3}{13}$$

$$a_{-5} = \lfloor 2\frac{3}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-5} = \frac{6}{13}$$

$$a_{-6} = \lfloor 2\frac{6}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-6} = \frac{2}{13}$$

$$a_{-7} = \lfloor 2\frac{12}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-7} = \frac{11}{13}$$

$$a_{-8} = \lfloor 2\frac{11}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-8} = \frac{9}{13}$$

$$a_{-9} = \lfloor 2\frac{9}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-9} = \frac{5}{13}$$

$$a_{-10} = \lfloor 2\frac{5}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-10} = \frac{10}{13}$$

$$a_{-11} = \lfloor 2\frac{10}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-11} = \frac{7}{13}$$

$$a_{-12} = \lfloor 2\frac{7}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-12} = \frac{1}{13}$$

$$a_{-13} = \lfloor 2\frac{1}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-13} = \frac{2}{13}$$

$$a_{-14} = \lfloor 2\frac{2}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-14} = \frac{4}{13}$$

$$a_{-15} = \lfloor 2\frac{4}{13} \rfloor = 0 \qquad r_{-15} = \frac{8}{13}$$

$$a_{-16} = \lfloor 2\frac{8}{13} \rfloor = 1 \qquad r_{-16} = \frac{3}{13} == r_{-4}$$

Protože se r_{-4} rovná r_{-16} našli jsme periodu.
Číslo tedy vyjádříme jako $(-1)^1(1.\overline{001110110001}) * 2^{123-127}$.
Tedy: 1|01111011|00111011000100111011000

b)

I číslo $\frac{1}{17}$ bude periodické. Postup aplikuji stejný jako v předchozím příkladě.

$$a_{-5} = 1 \qquad r_{-5} = \frac{15}{17}$$

$$a_{-6} = \lfloor 2\frac{15}{17} \rfloor = 1 \qquad r_{-6} = \frac{15}{17}$$

$$a_{-7} = \lfloor 2\frac{15}{17} \rfloor = 1 \qquad r_{-7} = \frac{19}{17}$$

$$a_{-8} = \lfloor 2\frac{19}{17} \rfloor = 1 \qquad r_{-8} = \frac{1}{17}$$

$$a_{-9} = \lfloor 2\frac{1}{17} \rfloor = 0 \qquad r_{-9} = \frac{2}{17}$$

$$a_{-10} = \lfloor 2\frac{2}{17} \rfloor = 0 \qquad r_{-10} = \frac{4}{17}$$

$$a_{-11} = \lfloor 2\frac{4}{17} \rfloor = 0 \qquad r_{-11} = \frac{8}{17}$$

$$a_{-12} = \lfloor 2\frac{8}{17} \rfloor = 0 \qquad r_{-12} = \frac{16}{17}$$

$$a_{-13} = \lfloor 2\frac{16}{17} \rfloor = 1 \qquad r_{-13} = \frac{15}{17} == r_{-5}$$

Výsledek tedy zápíšeme jako 0|01111010|11100001111000011110000.

c)

Součet čísel v desítkové soustavě je:

$$-\frac{1}{13} + \frac{1}{17} = -\frac{4}{221}$$

Hledáme $2^{k+1} > \frac{4}{221} \geq 2^k$. To platí pro $k = -6$. Opět stejným postupem jako v předešlích případech jsem postupoval dále. Pro kontrolu uvedenu některé řádky algoritmu:

$$a_{-6} = 1 \qquad r_{-6} = \frac{35}{221}$$

$$\dots$$

$$a_{-17} = 0 \qquad r_{-17} = \frac{76}{221}$$

$$\dots$$

$$a_{-29} = 1 \qquad r_{-29} = \frac{103}{221}$$

Výsledkem součtu čísel z příkladu **a)** a **b)** je: 1|01111001|00101000100010110000001.

2. úloha

a)

Nejprve algoritmus udělám tak, že se ženy budou dvořit mužům.

Ženské priority				
1	2	3	4	5
~~2~~	~~2~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~
~~3~~	~~3~~	1	2	~~2~~
4	5	3	3	3
5	4	5	4	4
1	1	4	5	5

Z tabulky vyplynulu stabilní párování:

$$(z_1, m_4), (z_2, m_5), (z_3, m_1), (z_4, m_2), (z_5, m_3)$$

Nyní otočíme „dvořitele“ a budou se muži dvořit ženám. Jejich úspěšnost vystihuje tabulka:

Mužské priority				
1	2	3	4	5
1	4	~~4~~	~~4~~	~~4~~
2	5	5	2	3
3	1	2	3	5
4	2	1	1	1
5	3	3	5	2

Z této tabulky vyplynulo druhé stabilní párování:

$$(z_1, m_1), (z_2, m_4), (z_3, m_5), (z_4, m_2), (z_5, m_3)$$

b)

Využiji toho, že když se dvoří muži dosáhnou nejlepší možné partnerky, tak aby bylo párování ještě stabilní a ženy v tomto případě dostanou nejhorší „stabilní“ partnery. Když se dvoří ženy, tak jde o ten samí příklad, tedy nejlepší možnosti pro partnerky a nejhorší pro partnery.

Tím jsme schopni udělat tabulku možných stabilních partnerů pro všechny ženy:

z_1	m_4	m_5	m_1
z_2	m_4	m_5	
z_3	m_5	m_1	
z_4	m_2		
z_5	m_3		

Z tabulky a různých možných kombinací dostáváme následující tři párování:

$$(z_1, m_4), (z_2, m_5), (z_3, m_1), (z_4, m_2), (z_5, m_3)$$

$$(z_1, m_1), (z_2, m_4), (z_3, m_5), (z_4, m_2), (z_5, m_3)$$

$$(z_1, m_5), (z_2, m_4), (z_3, m_1), (z_4, m_2), (z_5, m_3)$$

3.úloha

Pro najití extrémů se pokusím najít body podezřelé z extrému, tedy takové, kde se derivace původní funkce rovná 0.

a)

Postup derivace:

$$ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx$$

Nejdříve zderivuji podvýraz $\sqrt{1 + x^2}dx$ jakožto $2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jde o derivaci složené funkce. Stejným stylem zderivuji celý původní výraz.

$$(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}})\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = (\frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}})\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

$$= (\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}})\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Z výsledného výrazu je vidět, že se rovnat nule nikdy nebude, není tedy žádný bod podezřelí z extrému.

b)

Postup derivace:

$$x + \sqrt{1-x}dx$$

Opět nejdříve zderivuji podvýraz $\sqrt{1-x}dx$. Výsledkem bude: $-1(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Zde už nejspíš dokážu najít výraz derivace roven nule a tím bod podezřelý z extrému. Potřebuji aby se výraz $2\sqrt{1-x}$ rovnal jedné.

$$2\sqrt{1-x} = 1$$
$$\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}$$
$$1 - x = \frac{1}{4}$$
$$1 - \frac{1}{4} = x$$
$$\frac{3}{4} = x$$

Krom výše vypočteního $x = \frac{3}{4}$ budu podezírat z extrému i 1, která není zde definována neboť by se ve zlomku dělilo nulou. Z intervalu $(-\infty, \frac{3}{4})$ vezmeme například hodnotu 0 a po dosazení do derivace získáme číslo $0,5$ z intervalu $(\frac{3}{4}, 1)$ zvolíme například hodnotu $0,84$ a vyjde -0.25 a poslední, z intervalu $(1, \infty)$. Zjišťujeme, že bod $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ je lokální maximum a bod $(1, 1)$ je lokální minum.

4.úloha

Pro tečnou rovinu známe vzorec na výpočet normálového vektoru:

$$\overrightarrow{n} = f(a,b)dx, f(a,b)dy, -1$$

v tomto případě:

$$\overrightarrow{n} = (\frac{x^2}{2}, \frac{(y-3)^2}{3}, -1)$$

Protože hledáme množinu bodů kolmých na vektor$(-2, -3, 1)$. Znamená to, že takový vektor musí rovnoběžný s normálovým vektorem tečné roviny. Rovnoběžným bude jakýkoli lineárně závislí jiný vektor. Hledáme tedy vektor $(-2k, -3k, 1k)$. Zde je vidět díky třetí složce, že $k = -1$ a parciální derivace musí být tedy rovny 2 respektive 3.

$\frac{x^2}{2} = 2$ pro $x = +-2$.

$\frac{(y-3)^2}{3} = 3$ pro $y_1 = 0, y_2 = 6$.

Z toho nám vznikne množina 4 bodů: $\{(2,0), (-2,0), (2,6), (-2,6)\}$.

5.úloha

To, že výraz neplatí se pokusím dokázat proti příkladem. Jeden který mě napadl je $a = 1, b = 3$, platí tedy, že $a^2 + b^3 = 1^2 + 3^3 = 1 + 27 = 28$, číslo je 28 je dělitelné 7 ($28/7 = 4$). Předpoklad je tedy splněn a mělo by tedy platit, že $7|3$ a to není pravda. Číslo 3 není dělitelné 7.

6.úloha

Opravené zadání, vzdálenost se hledá od bodu (1,-1,0).

Body grafu funkce jsou ve tvaru:

$$(x, y, f(x, y))$$

Vzorec pro eukleidovou vzdálenost je:

$$d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + x^2 - 2xy + y^2}$$

Využijeme toho, že odmocnina je ostře rostoucí funkce a budeme hledat minimum funkce $d(x, y)^2$. Dále uděláme parciální derivace dle x a y, abychom zjistli minimum této funkce.

$$d(x, y)dx = 4x - 2y - 2 = 0$$
$$d(x, y)dy = -2x + 4y + 2 = 0$$

Jako řešení těchto rovnic vyjde, že $x = \frac{1}{3}$ a $y = -\frac{1}{3}$. Souřadnici z dopočteme jako $f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}}$. Získáme tedy bod $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.